

ISSN: 1991-346X (Print)
ISSN: 2518-1726 (Online)

**ACADEMIC JOURNAL
OF PHYSICAL AND CHEMICAL SCIENCES**

**Nº4
2025**

ISSN 2518-1483 (Online),
ISSN 2224-5227 (Print)

2025 • 4



ACADEMIC JOURNAL OF PHYSICAL AND CHEMICAL SCIENCES

PUBLISHED SINCE JANUARY 1944

ALMATY, NAS RK

Editor-in-Chief:

ZHURINOV Murat Zhurinovich, Doctor of Chemical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Acting President of RPA NAS RK, General Director of JSC "Institute of Fuel, Catalysis and Electrochemistry named after D.V. Sokolsky" (Almaty, Kazakhstan) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602177960>

Editorial Board:

KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>

ADEKENOV Sergazy Mynzhasarovich, Doctor of Chemical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Director of the International Science and Production Holding "Phytochemistry" (Karaganda, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006153118>

RAMAZANOV Tlekkabul Sabitovich, (Deputy Editor-in-Chief), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6701328029>

ABIEV Rufat, Doctor of Technical Sciences (Biochemistry), Professor, Head of the Department of Optimization of Chemical and Biotechnological Equipment, St. Petersburg State Technological Institute (St. Petersburg, Russia) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602431781>

OLIVIERO Rossi Cesare, PhD (Chemistry), Professor at the University of Calabria (Calabria, Italy), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57221375979>

TIGINYANU Ion Mihailovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician, President of the Academy of Sciences of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>

SANG SU Kwak, PhD (Biochemistry, Agricultural Chemistry), Professor, Chief Scientist, Research Center for Plant Systems Engineering, Korea Research Institute of Bioscience and Biotechnology (KRIBB), (Daejeon, Korea), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=59286321700>

BERSIMBAEV Rakhatkazhi Iskenderovich, Doctor of Biological Sciences, Professor, Academician of NAS RK, L.N. Gumilyov Eurasian National University (Astana, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004012398>

CALANDRA Pietro, PhD (Physics), Professor, Institute for the Study of Nanostructured Materials (Rome, Italy), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004303066>

BOSHKAEV Kuantai Avgazyevich, PhD, Associate Professor, Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=54883880400>

BURKITBAEV Mukhambetkali, Doctor of Chemical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, (Almaty, Kazakhstan) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8513885600>

QUEVEDO Hernando, Professor, National Autonomous University of Mexico (UNAM), Institute of Nuclear Sciences (Mexico City, Mexico), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55989741100>

ZHUSUPOV Marat Abzhanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602166928>

KOVALEV Alexander Mikhailovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of NAS of Ukraine, Institute of Applied Mathematics and Mechanics (Donetsk, Ukraine), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>

TAKIBAEV Nurgali Zhabagayevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=24077239000>

KHARIN Stanislav Nikolaevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Kazakh-British Technical University (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6701353063>

DAVLETOV Askar Erbulanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Branch of NRNU MEPhI Kazakh National University named after Al-Farabi (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602642543>

ABISHEV Medeu Erzhanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=26530759900>

ABILMAGZHANOV Arlan Zainutallaevich, PhD in Chemistry, First Deputy Director General of JSC "Institute of Fuel, Catalysis and Electrochemistry named after D.V. Sokolsky" (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57197468109>

ACADEMIC JOURNAL OF PHYSICAL AND CHEMICAL SCIENCES.

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

Owner: «Central Asian Academic Research Center» LLP (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of Information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan № KZ93VPY00121157 issued 05.06.2025

Thematic scope: *physics and chemistry*.

Periodicity: 4 times a year.

<http://reports-science.kz/index.php/en/archive>

Бас редактор:

ЖУРЫНОВ Мурат Жүрінұлы, химияғылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, КР ҰҒА РКБ президенті м.а., АҚ «Д.В. Сокольский атындағы Отын, катализ және электрохимия институтының» бас директоры (Алматы, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602177960>

Редакция ұжымы:

КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нұрәліұлы, физика-математикағылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі (Алматы, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>

ӘДЕКЕНОВ Серғазы Мынжасарұлы, химияғылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, «Фитохимия» халықаралық ғылыми-өндірістік холдингтің директоры (Қарағанды, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006153118>

РАМАЗАНОВ Тілекқабыл Сәбітұлы, физика-математикағылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеттің ғылыми-инновациялық қызмет жөніндегі проректоры, (Алматы, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6701328029>

ӘБИЕВ Рұфат, техникағылымдарының докторы (биохимия), профессор, Санкт-Петербург мемлекеттік технологиялық институты «Химиялық және биотехнологиялық аппаратураны оңтайландыру» кафедрасының мөнгерушісі, (Санкт-Петербург, Ресей) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602431781>

ОЛИМЬЕРО Rossi Cesare, PhD (химия), Калабрия университеттің профессоры (Калабрия, Италия) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=5722137597>

ТИГИНИНУ Ион Михайлович, физика-математикағылымдарының докторы, академик, Молдова Ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университетті (Кишинев, Молдова) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>

САНГ-СУ Квак, PhD (биохимия, арохимия), профессор, Корея Биогылым және биотехнологияғылыми-зерттеу институты (KRIBB), осімдіктердің инженерлік жүйелері ғылыми-зерттеу орталығының бас ғылыми қызметкері, (Дэчон, Корея) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=59286321700>

БЕРСІМБАЕВ Рахметқұлы Ескендеріұлы, биологияғылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетті (Астана, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004012398>

КАЛАНДРА Пьетро, PhD (физика), нанокүрьымды материалдарды зерттеу институтының профессоры (Рим, Италия) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004303066>

БОШКАЕВ Қуантай Авғазғыұлы, Ph.D. Теориялық және ядролық физика кафедрасының доценті, әл-Фарабийнадағы Қазақ ұлттық университетті (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=54883880400>

Бұркітбаев Мұхамбетқали, химияғылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, (Алматы, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8513885600>

QUEVEDO Hernando, профессор, Мексика ұлттық автономиялық университетті (UNAM), Ядролық ғылымдар институты (Мехико, Мексика), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55989741100>

ЖҮСІПОВ Марат Абжанұлы, физика-математикағылымдарының докторы, теориялық және ядролық физика кафедрасының профессоры, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетті (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602166928>

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, физика-математикағылымдарының докторы, Украина ҰҒА академигі, Колданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>

ТАКІБАЕВ Нұргали Жабагаұлы, физика-математикағылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетті (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=24077239000>

ХАРИН Станислав Николаевич, физика-математикағылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6701353063>

ДАВЛЕТОВ Аскар Ербұланович, физика-математикағылымдарының кандидаты, доцент, ҰЯЗУ МИФИ әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетті (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602642543>

ӘБІШЕВ Медеу Ержанұлы, физика-математикағылымдарының докторы, профессор, КР ҰҒА академигі, (Алматы, Қазақстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=26530759900>

ӘБІЛМАҒЖАНОВ Арлан Зайнутталайұлы, химияғылымдарының кандидаты, Д.В. Сокольский атындағы «Отын, катализ және электрохимия институты» АҚ бас директорының бірінші орынбасары, (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57197468109>

ACADEMIC JOURNAL OF PHYSICAL AND CHEMICAL SCIENCES

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

Меншіктеуші: «Орталық Азия академиялық ғылыми орталығы» ЖШС (Алматы қ.).

Ақпарат агенттігінің мерзімді баспасоз басылымын, ақпарат агенттігін және желелік басылымды қайта есепке қою туралы КР Мәдениет және Ақпарат министрлігі «Ақпарат комитеті» Республикалық мемлекеттік мекемесі **05.06.2025 ж.** берген № KZ93VPY00121157 Қуалық.

Такырыптық бағыты: *физика, химия*.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

<http://reports-science.kz/index.php/en/archive>

Главный редактор:

ЖУРИНОВ Мурат Журинович, доктор химических наук, профессор, академик НАН РК, и.о. президента РОО НАН РК, Генеральный директор АО «Институт топлива, катализа и электрохимии им. Д.В. Сокольского» (Алматы, Казахстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602177960>

Редакционная коллегия:

КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>

АДЕКЕНОВ Сергазы Мынжасарович, доктор химических наук, профессор, академик НАН РК, директор Международного научно-производственного холдинга «Фитохимия» (Караганда, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006153118>

РАМАЗАНОВ Тлеекабул Сабитович, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6701328029>

АБИЕВ Руфат, доктор технических наук (биохимия), профессор, заведующий кафедрой «Оптимизация химической и биотехнологической аппаратуры», Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Санкт-Петербург, Россия), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602431781>

ОЛИВЬЕРО Rossi Чезаре, доктор философии (PhD, химия), профессор Университета Калабрия (Калабрия, Италия), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57221375979>

ТИГИНИЯНУ Ион Михайлович, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>

САНГ-СУ Квак, доктор философии (PhD, биохимия, агрохимия), профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский центр инженерных систем растений, Корейский научно-исследовательский институт бионики и биотехнологии (KRIBB), (Дэчон, Корея), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=59286321700>

БЕРСИМБАЕВ Раҳметқажи Исқендирович, доктор биологических наук, профессор, академик НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004012398>

КАЛАНДРА Пьетро, доктор философии (PhD, физика), профессор Института по изучению наноструктурированных материалов (Рим, Италия), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004303066>

БОШКАЕВ Куантай Авғазыевич, PhD, преподаватель, доцент кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=54883880400>

БҮРКИТТАЕВ Мұхамбетқали, доктор химических наук, профессор, академик НАН РК, (Алматы, Казахстан) <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8513885600>

QUEVEDO Hernando, профессор, Национальный автономный университет Мексики (UNAM), Институт ядерных наук (Мехико, Мексика), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55989741100>

ЖУСПОВ Марат Абжанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602166928>

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>

ТАКИБАЕВ Нургали Жабагаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=24077239000>

ХАРИН Станислав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6701353063>

ДАВЛЕТОВ Аскар Ербұланович, кандидат физико-математических наук, доцент, Филиал НИЯУ МИФИ Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6602642543>

АБИШЕВ Медеу Ержанович, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=26530759900>

АБИЛЫМАГЖАНОВ Арлан Зайнутталаевич, кандидат химических наук, первый заместитель генерального директора АО «Институт топлива, катализа и электрохимии им. Д.В. Сокольского», (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57197468109>

ACADEMIC JOURNAL OF PHYSICAL AND CHEMICAL SCIENCES

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

Собственник: ТОО «Центрально-азиатский академический научный центр» (г. Алматы).

Свидетельство № KZ93VPY00121157 о повторной регистрации периодического печатного издания информационного агентства, информационного агентства и сетевого издания, выданное Республиканским государственным учреждением «Комитет информации» Министерства культуры и информации Республики Казахстан 05.06.2025

Тематическая направленность: *физика, химия*.

Периодичность: 4 раза в год.

<http://reports-science.kz/index.php/en/archive>

CONTENTS**PHYSICS**

U.A. Ualikhanova, Y.Y. Kurban, A.M. Syzdykova, A.B. Altaibayeva, G.S. Altayeva	
Dynamical systems analysis of the Starobinsky cosmological model.....	11
M.B. Zhassybayeva, Z. Myrzakulova, M. Abeuova	
Darboux transformation for the two-layer M-LXXII equation.....	24
G.K. Beketova, N.N. Zhanturina, Z.K. Aimaganbetova	
Cs ₂ AgBiBr ₆ double halide perovskites as advanced materials for high-efficiency solar cells.....	38
L.I. Shestakova, R.R. Spassuk	
Spectral studies of the k-f corona interface at 5000–6000 Å.....	52
A.Khazhidinova, A. Khazhidinov	
On the issue of fuel consumption of a thermal power plant.....	66
T.B. Koshtybayev, K.K. Zhantleuov, M.E. Aliyeva	
Greens function in the theory of quantum fluids.....	77
A.V. Serebryanskiy, Ch.B. Akniyazov, Ch.T. Omarov, S. Sittykova, D. Kadyrova	
Analysis of lunar impact flashes statistics.....	91
G.T. Omarova, Zh.T. Omarova	
The Lagrange - Jacobi equation and its application to the N - body problem.....	105
Zh. Muratkhan, M. Khassanov	
Methods for estimation of stellar wind parameters in high-mass X-ray binary systems with neutron stars.....	113
V. Mukamedenkyzy, A. Izbasar, A. Aqikat	
Investigation of structured flows induced by concentration-driven convection in ternary gases systems.....	127
K. Saurova, S. Nysanbaeva, G. Turlybekova	
Modeling of the optical system of a star tracker for accurate spacecraft attitude determination.....	140

CHEMISTRY

B.S. Serikbayeva, M.S. Satayev, N.K. Sarypbekova Study of the electroplating process on polypropylene using a conductive layer.....	157
A.P. Auyeshov, Ch.Z. Yeskibayeva, A.K. Dikanbayeva Resource-efficient utilization of serpentinite waste for magnesium sulfate production.....	172
A.K. Kozybaev, Zh.D. Alimkulova, S.O. Abilkasova Kinetic and thermodynamic studies of heavy metal adsorption onto water-washed Ca-montmorillonite clay.....	184
A.Abdrakhmanova, V. Krivchenko, A. Sabitova1, B. Kuderina DOL-enhanced electrolytes as a route to stable anodes in Li–V ₂ O ₅ systems.....	196
B.K. Massalimova, A.S. Shayakhmetova, A.S.Darmenbayeva Water resources of Northern Kazakhstan: environmental monitoring and sustainable anagement.....	208
A. Rakhimov, N. Zhanikulov, B. Taimasov, E. Potapova, A.K. Sviderskiy Investigation of lead slag processing waste as raw material for cement industry.....	227
L.M. Kalimoldina, K.Zh. Zhalgasbayev, A.S. Dauletbayev Comparative study of industrial wastewater treatment methods.....	241
A. Nurlan, S.R. Konuspayev, T.S. Abildin, K. Toshtay Transformations of hydrocarbons during the hydrogenation of gasoline containing benzene.....	256
G.J. Baisalova, B.K. Yertay, A.A. Taltenov, P. Kuzhatova, G. Saspuagayeva A quantitative determination of the phenol compounds sum in the thallus of <i>Parmelia sulcata</i>	274
B.E. Myrzabekov, A.B. Makhanbetov, T.E. Gaipov, B.S. Abzhalov, N.N. Nurgaliyev Electrochemical reduction of manganese (II) ions on titanium and lead electrodes.....	286
A.S. Darmenbayeva, G.M. Zhussipnazarova, R. Reshmy, Zh.B. Mukazhanova, V.A. Rube Biocoatings based on flax stem cellulose and their properties.....	298



МАЗМҰНЫ

ФИЗИКА

У.А. Уалиханова, Е.Е. Құрбан, А.М. Сыздыкова, А.Б. Алтайбаева, Г.С. Алтаева Старобинскийдің космологиялық моделін динамикалық жүйелер арқылы талдау.....	11
М.Б. Жасыбаева, Ж. Мырзакулова, М. Абейова Көс қабатты M-LXXII теңдеуі үшін дарбу түрлендіруі.....	24
Г.К. Бекетова, Н.Н. Жантурина, З.К. Аймаганбетова $Cs_2AgBiBr_6$ қос галоидты первовскиттер: күн батареяларына арналған тиімділігі жогары жаңа озық материалдары.....	38
Л.И. Шестакова, Р.Р. Спасюк 5000–6000 Å диапазонында k- және f-короналар арасындағы өтпелі аймақты спектрлік зерттеу.....	52
А. Хажидинова, А. Хажидинов Жылу электр станциясының отын тұтыну мәселесі.....	66
Т.Б. Қоштыбаев, К.Қ. Жантлеуов, М.Е. Алиева Кванттық сұйықтар теориясындағы Грин функциялары.....	77
А.В. Серебрянский, Ч.Б. Акниязов, Ч.Т. Омаров, С. Ситтыкова, Д. Кадырова Айдын беткі қабатына метеоридтардың соқтығысын статистикалық түрғыда зерттеу.....	91
Г.Т. Омарова, Ж.Т. Омарова Лагранж – Якоби түндеуі және оны N -денелі есепке қолдану.....	105
Ж. Мұратхан, М. Хасанов Нейтрон жүлдіздары бар массивті рентгендік екілік жүйелердегі жүлдіздық жел параметрлерін бағалау әдістері.....	113
В. Мукамеденқызы, А. Избасар, А. Ақиқат Үшкомпонентті газ жүйелеріндегі концентрациялық конвекцияның әсерінен құрылымдық ағындардың пайда болуын зерттеу.....	127
К. Саурова, С. Нысанбаева, Г. Турлыбекова Фарыш аппараттарының ориентациясын нақты анықтау үшін жүлдіз сенсорының оптикалық жүйесін модельдеу.....	140

ХИМИЯ

Б.С. Серикбаева, М.С. Сатаев, Н.К. Сарыбекова Электроткізгіш қабатты қолданып, полипропиленге гальваникалық қаптама алу процесін зерттеу.....	157
А.П. Аушев, Ч.З. Ескибаева, А.К. Диканбаева Серпентинит қалдығынан магний сульфатын алудың техникалық-экономикалық зерттеуі.....	172
А.Қ. Қозыбаев, Ж.Д. Әлімқұлова, С.О. Әбілқасова Сүмен жуылған са-монтажориллонит сазында ауыр металдардың сорбциясының кинетикасы мен термодинамикасы.....	184
А. Абдрахманова, В. Кривченко, А. Сабитова, Б. Кудерина Li–V ₂ O ₅ жүйесіндегі тұрақты анодтарға қол жеткізуге арналған DOL-мен модификацияланған электролиттер.....	196
Б.К. Масалимова, А.С. Шаяхметова, А.С. Дарменбаева Солтүстік Қазақстанның су ресурстары: экологиялық мониторинг және ұтымды басқару.....	208
А. Рахимов, Н. Жаникулов, Б. Таймасов, Е. Потапова, А.К. Свидерский Цемент өнеркәсібі үшін шикізат ретінде қорғасын қожын өңдеу қалдықтарын зерттеу.....	227
Л.М. Калимолова, Қ.Ж. Жалгасбаев, А.С. Даuletbaev Өнеркәсіптік сарқынды суларды тазартудың әдістерін салыстырмалы түрде зерттеу.....	241
Ә. Нұрлан, С.Р. Конуспаев, Т.С. Абильдин, Қ. Тоштай Құрамында бензол бар бензинді гидрлеу кезінде көмірсутектердің өзгеруі.....	256
Г.Ж. Байсалова, Б.К. Ертай, А.А.Талтенов, П. Кужатова, Г.Е. Саспугаева <i>PARMELIA SULCATA</i> талломындағы фенолды қосылыстардың жиынтық мөлшерін сандық анықтау.....	274
Б.Ә. Мырзабеков, А.Б. Маханбетов, Т.Ә. Гаипов, Б.С. Абжолов, Н.Н. Нұргалиев Марганец (II) ионының титан және қорғасын электродында электрохимиялық тотықсыздануы.....	286
А.С. Дарменбаева, Г.М. Жусипназарова, Р. Решми, Ж.Б. Мукажанова, В.А. Рубе Зығыр сабағынан алынған целлюлоза негізіндегі биожабындар және олардың қасиеттері.....	298



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

У.А. Уалиханова, Е.Е. Курбан, А.М. Сыздыкова, А.Б. Алтайбаева, Г.С. Алтаева Анализ космологической модели старобинского с помощью динамических систем.....	11
М.Б. Жасыбаева, Ж. Мырзакулова, М. Абеуова Преобразование Дарбу для двухслойного уравнения M-LXXII.....	24
Г.К. Бекетова, Н.Н. Жантурин, З.К. Аймаганбетова $Cs_2AgBiBr_6$: двойные галоидные перовскиты как передовые материалы для высокоэффективных солнечных элементов	38
Л.И. Шестакова, Р.Р. Спасюк Спектральные исследования области перехода между K и F короной в диапазоне 5000–6000Å.....	52
А. Хажидинова, А. Хажидинов К вопросу о расходе топлива на тепловой электростанции.....	66
Т.Б. Коштыбаев, К.К. Жантлеуов, М.Е. Алиева Функции Грина в теории квантовых жидкостей	77
А.В. Серебрянский, Ч.Б. Акниязов, Ч.Т. Омаров, С. Ситтыкова, Д. Кадырова Исследование статистики ударов метеороидов о поверхность луны	91
Г.Т. Омарова, Ж.Т. Омарова Уравнение Лагранжа – Якоби и его применение к задаче N -тел.....	105
Ж. Муратхан, М. Хасанов Методы оценки параметров звездного ветра в массивных двойных рентгеновских системах с нейтронными звездами.....	113
В. Мукамеденкызы, А. Избасар, А. Акикат Исследование возникновения структурированных течений, обусловленных концентрационной конвекцией в трёхкомпонентных газовых системах.....	127
К. Саурова, С. Нысанбаева, Г. Турлыбекова Моделирование оптической системы звёздного датчика для точного определения ориентации космических аппаратов.....	140

ХИМИЯ

Б.С. Серикбаева, М.С. Сатаев, Н.К. Сарыпбекова	
Исследование процесса гальванопокрытия на полипропилене с использованием электропроводного слоя.....	157
А.П. Ауешов, Ч.З. Ескибаева, А.К. Диканбаева	
Технико-экономическое исследование получения сульфата магния из серпентинитового отхода.....	172
А.К. Козыбаев, Ж.Д. Алимкулова, С.О. Абилкасова	
Кинетика и термодинамика сорбции тяжелых металлов на промытой водой кальциево-монтмориллонитовой глине.....	184
А. Абдрахманова, В. Кривченко, А. Сабитова, Б. Кудерина	
DOL – модифицированные электролиты как путь к стабильным анодам в системах $\text{Li}-\text{V}_2\text{O}_5$	196
Б.К. Масалимова, А.С. Шаяхметова, А.С. Дарменбаева	
Водные ресурсы Северного Казахстана: экологический мониторинг и устойчивое управление.....	208
А. Рахимов, Н. Жаникулов, Б. Таймасов, Е. Потапова, А.К. Свидерский	
Исследование отходов переработки свинцового шлака в качестве сырья для цементной промышленности.....	227
Л.М. Калимoldина, К.Ж. Жалгасбаев, А.С. Дэулетбаев	
Сравнительное исследование методов очистки промышленных сточных вод	241
А. Нурлан, С.Р. Конуспаев, Т.С. Абильдин, К. Тоштай	
Превращения углеводородов при гидрировании бензина, содержащего бензол.....	256
Г.Ж. Байсалова, Б.К. Ертай, А.А. Талтенов, П. Кужатова, Г.Е. Саспугаева	
Количественное определение суммы фенольных соединений в талломе <i>PARMELIA SULCATA</i>	274
Б.Э. Мырзабеков, А.Б. Маханбетов, Т.Э. Гайпов, Б.С. Абжалов, Н.Н. Нургалиев	
Электрохимическое восстановление ионов марганца (II) на титановом и свинцовом электродах.....	286
А.С. Дарменбаева, Г.М. Жусипназарова, Р. Решми, Ж.Б. Мукажанова, В.А. Рубе	
Биопокрытия на основе целлюлозы из стебля льна и их свойства.....	298



ACADEMIC JOURNAL
OF PHYSICAL AND CHEMICAL SCIENCES
ISSN 2224-5227
Volume 4.
Number 356 (2025), 24–37

<https://doi.org/10.32014/2025.2518-1483.381>

УДК 53.01, 53.02
МРНТИ 29.01.11

©M.B. Zhassybayeva*, Z. Myrzakulova, M. Abeuova, 2025.
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
E-mail: mbzhassybayeva@gmail.com

DARBOUX TRANSFORMATION FOR THE TWO-LAYER M-LXXII EQUATION

Zhassybayeva Meruyert — senior lecturer of the department of general and theoretical physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan,
E-mail: mbzhassybayeva@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8491-0893>;
Zhaidary Myrzakulova — PhD, senior lecturer of the department of algebra and geometry, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan,
E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4047-4484>;
Abeuova Marzhangul — master's student of the department of general and theoretical physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan,
E-mail: abeuovamarzhan7@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5678-6747>.

Abstract. In this paper, we study an integrable model for describing nonlinear wave processes in multilayer media typical of various physical systems. These systems include optical media, magnetic materials, plasma formations, as well as quantum and spin structures with internal degrees of freedom. The main focus is on constructing a new two-layer equation, the M-LXXII, which is gauge equivalent to the two-component Fokas-Lenells equation. This equation represents an important generalization of classical models used to describe complex nonlinear interactions in dispersive, anisotropic, and spatially inhomogeneous media, including effects of multimode behavior, multicomponent coupling, and spatiotemporal dependence. The integrability of this model is confirmed by constructing a Lax pair, which enables the application of methods from integral geometry and the theory of the theory inverse scattering. The Fokas-Lenells equation is known for its ability to describe the evolution of light and dark solitons in optical fibers taking into account higher orders of nonlinearity and dispersion effects. In this paper, we additionally construct a Darboux transformation that allows finding exact analytical solutions, including multisiton configurations. In particular, a single-soliton solution for the M-LXXII equation is presented, which emphasizes its applicability to modeling specific wave structures in multilayer and multicomponent physical systems. The presented results can be used for further analysis of complex nonlinear interactions and



dynamics in multilayer media, and also find important application in applied problems of modern theoretical and mathematical physics, contributing to the development of new methods for modeling and controlling wave processes in various materials and structures.

Keywords: Two-component Fokas-Lenells equation, spin system, Lax representation, two-layer M-LXXII equation, Darboux transformation, gauge equivalence

Financing. This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP25794905).

©М.Б. Жасыбаева*, Ж. Мырзакурова, М. Абеуова, 2025.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

E-mail: mbzhassybayeva@gmail.com

ҚОС ҚАБАТТЫ М-LXXII ТЕНДЕУІ ҮШІН ДАРБУ ТҮРЛЕНДІРУІ

Жасыбаева Меруерт — Жалпы және теориялық физика кафедрасының аға оқытушысы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан, E-mail: mbzhassybayeva@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8491-0893>;

Мырзакурова Жайдары — PhD, Алгебра және геометрия кафедрасының кафедрасының аға оқытушысы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан, E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4047-4484>;

Абеуова Маржанғұль — Жалпы және теориялық физика кафедрасының магистранты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан, E-mail: abeuovamarzhan7@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5678-6747>.

Аннотация. Бұл жұмыста әр түрлі физикалық жүйелерге тән қос қабатты ортадағы сзыбықтық емес толқындық процестерді сипаттаудың интегралды моделін зерттейміз. Мұндай жүйелерге оптикалық орталар, магниттік материалдар, плазмалық түзілімдер және ішкі еркіндік дәрежесі бар кванттық және спиндік құрылымдар жатады. Негізгі назар екі компонентті Фокас-Ленэллс тендеуіне калибрөті әквивалентті жаңа қос қабатты M-LXXII тендеуін құруға аударылады. Бұл тендеу дисперсиялық, анизотропты және кеңістікті біртекті емес орталардағы күрделі сзыбықты емес әрекеттесулерді сипаттау үшін қолданылатын классикалық модельдердің маңызды жалпылауы болып табылады, соның ішінде мультимодалық, көпкомпонентті және кеңістік-уақыттық тәуелділік әсерлері. Бұл модельдің интегралдылығы интегралдық геометрия әдістерін және шашыраудың кері есебінің теориясын қолдануға мүмкіндік беретін Лакс жұбын құру арқылы расталады. Фокас-Ленэллс тендеуі сзыбықты емес және дисперсиялық әсерлердің жоғары реттілігін ескере отырып, оптикалық талшықтардағы ашық және күнгірт солитондардың эволюциясын сипаттау қабілетімен танымал. Бұл мақалада дәл аналитикалық шешімдерді, соның ішінде мультисолитонды конфигурацияларды табуға мүмкіндік беретін Дарбу түрлендіруін қосымша құрастырамыз. Атап айтқанда, M-LXXII тендеуі үшін бір солитонды шешім ұсынылған, ол оның көп қабатты және көп компонентті физикалық жүйелердегі нақты толқындық

құрылымдарды модельдеу үшін қолданылуын атап көрсетеді. Ұсынылған нәтижелер көп қабатты орталардағы күрделі сзықтық емес өзара әрекеттесулер мен динамикаларды одан әрі талдау үшін пайдаланылуы мүмкін, сонымен қатар әр түрлі материалдар мен құрылымдардағы толқындық процестерді модельдеу және басқарудың жаңа әдістерін дамытуға ықпал ететін қазіргі теориялық және математикалық физиканың қолданбалы мәселелерінде маңызды қолдануды табады.

Түйін сөздер: Екі компонентті Фокас-Ленэллс теңдеуі, спиндік жүйе, Лакс көрінісі, қос қабатты M-LXXII теңдеуі, Дарбу түрлендіруі, калиброті әквиваленттілік

Алғыс: бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Фылым және жыгары білім министрлігінің Фылым комитеті қаржыландаудырады (Грант № AP25794905).

©М.Б. Жасыбаева*, Ж. Мырзакулова, М. Абеуова, 2025.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,

Астана, Казахстан.

E-mail: mbzhassybayeva@gmail.com

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО УРАВНЕНИЯ M-LXXII

Жасыбаева Меруерт — старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, E-mail: mbzhassybayeva@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8491-0893>;

Мырзакулова Жайдары — PhD, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4047-4484>;

Абеуова Маржангұль — магистрант кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, E-mail: abeuovamarzhan7@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5678-6747>.

Аннотация. В данной работе исследуется интегрируемая модель, предназначенная для описания нелинейных волновых процессов в многослойных средах, характерных для различных физических систем. К таким системам относятся оптические среды, магнитные материалы, плазменные образования, а также квантовые и спиновые структуры с внутренними степенями свободы. Основное внимание уделяется построению нового двухслойного уравнения M-LXXII, которое является калибровочно-эквивалентным двухкомпонентному уравнению Фокаса-Ленэлса. Данное уравнение представляет собой важное обобщение классических моделей, применяемых для описания сложных нелинейных взаимодействий в дисперсионных, анизотропных и пространственно неоднородных средах, включая эффекты многомодовости, многокомпонентности и пространственно-временной зависимости. Интегрируемость данной модели



подтверждается путем построения пары Лакса, что позволяет применять методы интегральной геометрии и теории обратной задачи рассеяния. Уравнение Фокаса-Ленэллса известно своей способностью описывать эволюцию светлых и тёмных солитонов в оптических волокнах с учетом высших порядков нелинейных и дисперсионных эффектов. В рамках данной работы дополнительно построено преобразование Дарбу, позволяющее находить точные аналитические решения, включая многосолитонные конфигурации. В частности, приведено односолитонное решение для уравнения M-LXXII, что подчеркивает его применимость к моделированию конкретных волновых структур в многослойных и многокомпонентных физических системах. Представленные результаты могут быть использованы для дальнейшего анализа сложных нелинейных взаимодействий и динамики в многослойных средах, а также находят важное применение в прикладных задачах современной теоретической и математической физики, способствуя развитию новых методов моделирования и управления волновыми процессами в различных материалах и структурах.

Ключевые слова: двухкомпонентное уравнение Фокаса-Ленэллса, спиновая система, представление Лакса, двухслойное уравнение M-LXXII, преобразование Дарбу, калибровочная эквивалентность

«Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP25794905).»

Введение. Некоторые физические явления в природе, включая распространение волн в оптических средах, динамику магнитных материалов и поведение плазмы, могут быть описаны с помощью спиновых и других многокомпонентных нелинейных систем, отражающих ключевые физические свойства моделируемых объектов. Спиновые системы представляют собой ансамбли взаимодействующих спинов, демонстрирующие коллективные эффекты, включая когерентные волновые процессы и солитоны. Такие системы встречаются в магнитных материалах, квантовых структурах и плазме.

Среди нелинейных уравнений особый интерес представляют уравнения типа Шрёдингера, описывающие эволюцию медленно модулированных волн в слабонелинейных дисперсионных средах. Они широко применяются в нелинейной оптике, квантовой физике, физике конденсированных состояний, а также в волновой гидродинамике (Chabchoub, 2016; Belyaeva, 2007; Carrerego Gonzalez, 2008; Myrzakulov, 2019). В последние десятилетия большое внимание уделяется изучению различных обобщений нелинейного уравнения Шрёдингера, включая учёт эффектов высших порядков, сильной дисперсии, взаимодействий между модами и нелинейных поправок.

Одним из таких обобщений является уравнение Фокаса-Ленэллса (ФЛ), которое описывает нелинейное распространение импульсов в оптических волокнах с учётом линейных и нелинейных оптических эффектов высшего порядка. Важной особенностью уравнения ФЛ по сравнению с классическим нелинейным

уравнением Шрёдингера является то, что оно допускает как светлые, так и тёмные солитонные решения (Matsuno, 2012a; Matsuno, 2012b). Интегрируемое уравнение ФЛ имеет вид (Hu, 2012; Fokas, 1995; Bekova, 2023).

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - |q|^2 q_x + iq = 0, \quad (1)$$

где $q(x, t)$ – комплексная оболочка поля, x – расстояние распространения и t запаздывающее время, которые обозначают частичное дифференцирование по аргументам x, t и i – мнимая единица.

Кроме того, в последние годы наблюдается растущий интерес к многомодовым и многомерным моделям, превосходящим по сложности традиционные одномерные системы (Mutzakul, 2019). Рассматриваются многокомпонентные и многослойные системы, моделирующие взаимодействие волн с различными частотами, модами или поляризациями. Это особенно актуально в задачах волнового взаимодействия в сложных оптических структурах, многоуровневых квантовых системах, анизотропных средах, а также в спиновых системах и магнитных материалах с несколькими подсистемами (Geng, 2021; Song, 2017).

В данной работе находится двухслойное уравнения двухкомпонентного уравнения ФЛ, называемое двухслойным уравнением M-LXXII. Также, основной целью является построения преобразования Дарбу (ПД) для этого уравнения, что позволяет получать точные солитонные решения, а также исследовать динамику многослойных спиновых систем. Подобные подходы дают возможность глубже понять структуру и поведение сложных физических систем и находят все большее применение как в теоретических, так и в прикладных задачах.

Материалы и основные методы. В данной работе получено двухслойное уравнение M-LXXII, которое выводится из двухкомпонентного уравнения ФЛ с помощью калибровочного преобразования. Это уравнение описывает нелинейное взаимодействие волн в многослойных средах. Также, построена соответствующая пара Лакса. Далее применяется метод ПД, который позволяет находить точные аналитические решения, включая солитонные решения.

Таким образом, использованные методы включают:

- калибровочное преобразование;
- преобразование Дарбу.

Эти методы позволяют эффективно анализировать динамику многослойных и многокомпонентных нелинейных систем.

Результаты и обсуждение. В данной работе строим двухслойное уравнение M-LXXII, которое калибровочно эквивалентно двухкомпонентному уравнению ФЛ. Интерес к двухкомпонентным уравнениям обусловлен их способностью описывать взаимодействие волн с различными частотами. Поскольку они могут описывать волны разной частоты. Рассмотрим двухкомпонентное уравнение ФЛ (Feng, 2018):



$$iq_{1xt} - iq_{1xx} + iq_1 - q_1 r_1 q_{1x} + 2q_{1x} - \frac{1}{2} q_2 r_2 q_{1x} - \frac{1}{2} q_1 r_2 q_{2x} = 0, \quad (2a)$$

$$iq_{2xt} - iq_{2xx} + iq_2 - q_2 r_2 q_{2x} + 2q_{2x} - \frac{1}{2} q_1 r_1 q_{2x} - \frac{1}{2} q_2 r_1 q_{1x} = 0, \quad (2b)$$

$$ir_{1xt} - ir_{1xx} + ir_1 + q_1 r_1 r_{1x} - 2r_{1x} + \frac{1}{2} q_2 r_2 r_{1x} + \frac{1}{2} q_2 r_1 r_{2x} = 0, \quad (2b)$$

$$ir_{2xt} - ir_{2xx} + ir_2 + q_2 r_2 r_{2x} - 2r_{2x} + \frac{1}{2} q_1 r_1 r_{2x} + \frac{1}{2} q_1 r_2 r_{1x} = 0, \quad (2c)$$

где q_i, r_i – комплексные функции (* означает комплексное сопряжение), индексы x, t – частные производные, а и i – мнимое число.

Представление Лакса (ПЛ) для системы (2) имеет следующий вид:

$$\Psi_x = U_2 \Psi, \quad (3)$$

$$\Psi_t = V_2 \Psi, \quad (4)$$

в котором матричные операторы U_2 и V_2 определены как

$$U_2 = -i\lambda^2 \Sigma + \lambda Q,$$

$$V_2 = -i\lambda^2 \Sigma + \lambda Q + i \frac{V_o}{2} + i\Sigma + \frac{i}{2\lambda} V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2} \Sigma,$$

и далее приведены явные формы матриц Σ, Q, V_o, V_{-1}

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{1x} & q_{2x} \\ r_{1x} & 0 & 0 \\ r_{2x} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} -(q_1 r_1 + q_2 r_2) & 0 & 0 \\ 0 & q_1 r_1 & r_1 q_2 \\ 0 & q_1 r_2 & q_2 r_2 \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к построению двухслойного уравнения М-LXXII. Необходимо сначала найти для нее пару Лакса. Начнем с рассмотрения следующего калибровочного преобразования:

$$\Phi = g^{-1} \Psi, \quad g = \Psi|_{\lambda=\lambda_0},$$

где $g(x, t)$ унитарная 3×3 матрица калибровочного преобразования. Найдем производные векторной функции Φ по аргументам x и t :

$$\Phi_x = (g^{-1} \Psi_x - g^{-1} g_x g^{-1}) \Psi = U' \Phi, \quad (5)$$

$$\Phi_t = (g^{-1} \Psi_t - g^{-1} g_t g^{-1}) \Psi = V' \Phi. \quad (6)$$

Выбираем $g(x, t)$ унитарную матрицу, удовлетворяющую совместной системе уравнений

$$\begin{aligned} g_x &= U_0 g, \\ g_t &= W g, \end{aligned}$$

здесь $U_0(x, t)$ и $W(x, t)$ являются антиэрмитовыми матрицами, удовлетворяющими условию нулевой кривизны в системе уравнений (3)-(4)

$$\begin{aligned} U_0(x, t) &= -i\lambda_0^2 \sum + \lambda_0 Q, \\ W(x, t) &= -i\lambda_0^2 \sum + \lambda_0 Q + \frac{i}{2} V_0 + i \sum + \frac{i}{2\lambda_0} V_{-1} - \frac{i}{4\lambda_0^2} \sum. \end{aligned}$$

Где λ_0 - постоянная. Следовательно, учитывая (3)-(4), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2) g^{-1} \sum g + (\lambda - \lambda_0) g^{-1} Q g \right) \Phi, \\ \Phi_t &= \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2) g^{-1} \sum g + (\lambda - \lambda_0) g^{-1} Q g + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) g^{-1} V_{-1} g - \frac{i}{4} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right) g^{-1} \sum g \right) \Phi. \end{aligned}$$

Известно, что

$$g^{-1} \sum g = \Gamma, \quad \Gamma^2 = I.$$

После сложных вычислений и преобразований мы получили связь между решениями искомой спиновой системы и системой уравнений (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} g^{-1} Q g &= \frac{1}{2\lambda_0} \Gamma \Gamma_x, \\ g^{-1} V_{-1} g &= \frac{\lambda_0}{2} (\Gamma_t - \Gamma_x). \end{aligned}$$

Теперь систему уравнений (5) и (6) можно переписать как

$$\Phi_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2) \Gamma + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0} \Gamma_x \right) \Phi,$$



$$\Phi_t = \left(-i\left(\lambda^2 - \lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda_0^2}\right)\Gamma + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)\Gamma_x + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)\Gamma_t \right) \Phi.$$

Для удобства:

$$\Phi_x = U' \Phi, \quad (7)$$

$$\Phi_t = V' \Phi, \quad (8)$$

где

$$U' = -i(\lambda^2 - \lambda_0^2)\Gamma + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}\Gamma_x,$$

$$V' = -i\left(\lambda^2 - \lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda_0^2}\right)\Gamma + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)\Gamma_x + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)\Gamma_t.$$

Таким образом, получается новое ПЛ.

Перекрестно дифференцируя уравнения (7) и (8) получаем

$$U'_t - V'_x + [U', V'] = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U'_t &= -i(\lambda^2 - \lambda_0^2)\Gamma_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\right)(\Gamma_t\Gamma_x + \Gamma\Gamma_{xt}), \\ V'_x &= (-i(\lambda^2 - \lambda_0^2 - \frac{1}{4\lambda_0^2} + \frac{1}{4\lambda^2}))\Gamma_x + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)(\Gamma_x^2 + \Gamma\Gamma_{xx}) + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)(\Gamma_x\Gamma_t + \Gamma\Gamma_{tx}), \\ [U', V'] &= -2i(\lambda^2 - \lambda_0^2)\left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)\Gamma_x - 2i(\lambda^2 - \lambda_0^2)\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)\Gamma_t - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\right)(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2 - \frac{1}{4\lambda_0^2} + \frac{1}{4\lambda^2}))\Gamma_x + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\right)\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)(\Gamma_t\Gamma_x - \Gamma_x\Gamma_t). \end{aligned}$$

Подставим все это в уравнение (9) и рассмотрим его по степеням λ

$$\lambda^1 : -i\lambda_0\Gamma_t + i\lambda_0\Gamma_x - \frac{i\Gamma_x}{4\lambda_0^3} + \frac{1}{2\lambda_0}\Gamma_t\Gamma_x + \frac{1}{2\lambda_0}\Gamma\Gamma_{xt} - \frac{1}{2\lambda_0}\Gamma_x^2 - \frac{1}{2\lambda_0}\Gamma\Gamma_{xx} - \frac{1}{4\lambda_0}[\Gamma_t, \Gamma_x] = 0, \quad (10)$$

$$\lambda^0 : -\frac{1}{2}\Gamma_t\Gamma_x - \frac{1}{2}\Gamma\Gamma_{xt} + \frac{1}{2}\Gamma_x\Gamma_t + \frac{\Gamma\Gamma_{tx}}{2} + \frac{1}{2}[\Gamma_t, \Gamma_x] = 0, \quad (11)$$

$$\lambda^{-1} : i\lambda_0^3\Gamma_t - i\lambda_0^3\Gamma_x + \frac{i\Gamma_x}{4\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2}\Gamma_x\Gamma_t - \frac{\lambda_0}{2}\Gamma\Gamma_{tx} + \frac{\lambda_0}{2}\Gamma_x^2 + \frac{\lambda_0}{2}\Gamma\Gamma_{xx} - \frac{\lambda_0}{4}[\Gamma_t, \Gamma_x] = 0. \quad (12)$$

Умножая уравнение (10) на $-1/\lambda_0$, имеем

$$i\Gamma_t - i\Gamma_x + \frac{i\Gamma_x}{4\lambda_0^4} - \frac{1}{2\lambda_0^2} \left(\Gamma_t\Gamma_x + \Gamma\Gamma_{xt} - \Gamma_x^2 - \Gamma\Gamma_{xx} - \frac{[\Gamma_t, \Gamma_x]}{2} \right) = 0,$$

или

$$i\Gamma_t + \frac{1}{4\lambda_0^2} [\Gamma, \Gamma_{xx} - \Gamma_{xt}] + \frac{i(1-4\lambda_0^4)}{4\lambda_0^4} \Gamma_x = 0, \quad (13)$$

здесь квадратные скобки обозначают коммутаторы. Таким образом, уравнение (19) представляет собой искомое двухслойное уравнение M-LXXII.

Теперь, построим ПД для уравнения (13). ПД представляет собой один из ключевых методов интегрируемой теории, позволяющий на основе известных решений систематически строить новые, зачастую более сложные структуры (Matveev, 1991; Myrzakulov, 2016; Huang, 1989). Его применение к двухслойному уравнению M-LXXII не только сохраняет интегрируемость системы, но и порождает богатую иерархию решений, от солитонных до рациональных и других типовых форм.

В этом разделе построим ПД для уравнения (13). Пусть

$$\Phi' = L\Phi,$$

где матрица L

$$L = \lambda N - I.$$

Φ' должен удовлетворять тем же ПЛ, что и уравнения (7) и (8), так что

$$\Phi'_x = U'\Phi',$$

$$\Phi'_t = V\Phi',$$

в котором матричные операторы U' и V' зависят от Γ' , как матричные операторы U и V от Γ . Кроме того, они имеют следующий вид:

$$U' = -i(\lambda^2 - \lambda_0^2)\Gamma' + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}\Gamma'\Gamma'_x,$$



$$V' = -i \left(\lambda^2 - \lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda_0^2} \right) \Gamma' + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda} \right) \Gamma' \Gamma_x' + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2} \right) \Gamma' \Gamma_t'.$$

Матрица L подчиняется следующим уравнениям:

$$L_x + LU = U'L, \quad (14)$$

$$L_t + LV = V'L. \quad (15)$$

Таким образом, из уравнения (14) получаем

$$\Gamma' = N\Gamma N^{-1},$$

$$N_x = 0,$$

и из уравнения (15) имеем

$$\Gamma' = \Gamma,$$

$$N_t = 0$$

Теперь предположим, что матрицу N можно записать как

$$N = H\Lambda^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

и

$$N^{-1} = H\Lambda H^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\text{и } n = n_{11}n_{22}n_{33} + n_{12}n_{23}n_{31} + n_{13}n_{32}n_{21} - n_{31}n_{22}n_{13} - n_{12}n_{21}n_{33} - n_{11}n_{23}n_{32}.$$

После некоторых вычислений следует

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^*, \quad H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x) & -\psi_2^*(\lambda_1; t, x) & -\psi_3^*(\lambda_1; t, x) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x) & \psi_1^*(\lambda_1; t, x) & 0 \\ \psi_3(\lambda_1; t, x) & 0 & \psi_1^*(\lambda_1; t, x) \end{pmatrix},$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta \psi_1^*} \begin{pmatrix} \psi_1^2 & \psi_1^* \psi_2^* & \psi_1^* \psi_3^* \\ -\psi_1^* \psi_2 & |\psi_1|^2 + |\psi_3|^2 & -\psi_2 \psi_3^* \\ -\psi_1^* \psi_3 & -\psi_2 \psi_3^* & |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \end{pmatrix},$$

в котором

$$\Delta \neq |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2.$$

И так, для матрицы N получаем следующее выражение

$$N = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{|\psi_1|^2}{\lambda_1} + \frac{|\psi_2|^2}{\lambda_2} + \frac{|\psi_3|^2}{\lambda_3} & \psi_1 \psi_2^* \epsilon_{12} + \frac{\psi_2^* |\psi_3|^2}{\psi_1^*} \epsilon_{32} & \psi_1 \psi_3^* \epsilon_{13} + \frac{\psi_3^* |\psi_2|^2}{\psi_1^*} \epsilon_{23} \\ \psi_1^* \psi_2 \epsilon_{12} & \frac{|\psi_2|^2}{\lambda_1} + \frac{|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2}{\lambda_2} & \psi_2 \psi_3^* \epsilon_{12} \\ \psi_1^* \psi_3 \epsilon_{13} & \psi_2^* \psi_3 \epsilon_{13} & \frac{|\psi_3|^2}{\lambda_1} + \frac{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}{\lambda_3} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1 |\psi_1|^2 + \lambda_2 |\psi_2|^2 + \lambda_3 |\psi_3|^2 & \psi_1 \psi_2^* (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\psi_2^* |\psi_3|^2}{\psi_1^*} (\lambda_3 - \lambda_2) & \psi_1 \psi_3^* (\lambda_1 - \lambda_3) + \frac{\psi_3^* |\psi_2|^2}{\psi_1^*} (\lambda_2 - \lambda_3) \\ \psi_1^* \psi_2 (\lambda_1 - \lambda_2) & \lambda_1 |\psi_2|^2 + \lambda_2 (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) & \psi_2 \psi_3^* (\lambda_1 - \lambda_2) \\ \psi_1^* \psi_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \psi_2^* \psi_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_1 |\psi_3|^2 + \lambda_3 (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

Следовательно, можно записать ПД в терминах собственных функций ПЛ (7) и (8) как

$$\Gamma^{[1]} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} n_{11}m_{11} - n_{12}m_{21} - n_{13}m_{31} & n_{11}m_{12} - n_{12}m_{22} - n_{13}m_{32} & n_{11}m_{13} - n_{12}m_{23} - n_{13}m_{33} \\ n_{21}m_{11} - n_{22}m_{21} - n_{23}m_{31} & n_{21}m_{12} - n_{22}m_{22} - n_{23}m_{32} & n_{21}m_{13} - n_{22}m_{23} - n_{23}m_{33} \\ n_{31}m_{11} - n_{32}m_{21} - n_{33}m_{31} & n_{31}m_{12} - n_{32}m_{22} - n_{33}m_{32} & n_{31}m_{13} - n_{32}m_{23} - n_{33}m_{33} \end{pmatrix}.$$



Для построения 1-солитонного решения Γ -спиновой системы (13), рассмотрим нулевое решение

$$\Gamma^{[0]} = \Sigma. \quad (21)$$

В этом случае собственные функции задаются как

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-i\lambda^2 x - i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_1} = e^{-\theta + i\delta_1}, \\ \psi_2 &= e^{i\lambda^2 x + i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_2} = e^{\theta + i\delta_2}, \\ \psi_3 &= e^{i\lambda^2 x + i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t + i\delta_3} = e^{\theta + i\delta_3}, \end{aligned}$$

где δ_i комплексные постоянные и

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = -i\lambda^2 x - i\left(\lambda^2 - 1 + \frac{1}{4\lambda^2}\right)t.$$

Тогда мы получаем

$$\Gamma^{[1]} = \begin{pmatrix} \Gamma_1^{[1]} & \Gamma_2^{[1]} & \Gamma_3^{[1]} \\ \Gamma_2^{[1]} & \Gamma_2^{[1]} & \Gamma_3^{[1]} \\ \Gamma_3^{[1]} & \Gamma_3^{[1]} & \Gamma_3^{[1]} \end{pmatrix},$$

где n_{ij} и m_{ij} задаются уравнениями (19), (20) и (21).

Таким образом, в ходе исследования получено двухслойное уравнение M-LXXII, которое является калибровочно эквивалентным двухкомпонентному уравнению ФЛ. Для этой модели построена пара Лакса, что подтверждает её интегрируемость. С помощью метода Дарбу разработано преобразование, позволяющее находить различные точные решения. В частности, представлена схема получения односолитонного решения. Полученные результаты демонстрируют эффективность применённого подхода для анализа и моделирования нелинейных процессов в сложных физических системах.

Заключение. В данной работе с помощью калибровочного преобразования было построено двухслойное уравнение, эквивалентное двухкомпонентному

уравнению ФЛ. Построение пары Лакса для полученного уравнения подтвердило его интегрируемость, что позволило далее сконструировать преобразование Дарбу, обеспечивающее механизм получения точных аналитических решений. В частности, представлена конструкция односолитонного решения, демонстрирующая возможность описания волновых структур в многослойных средах.

Таким образом, построенное двухслойное уравнение M-LXXII и соответствующие методы интегрирования открывают перспективы для дальнейших исследований в области нелинейной динамики и математической физики, особенно в контексте моделирования многослойных и многокомпонентных взаимодействий.

References

- Bekova G., Myrzakulov R., Yesmakhanova K., & Zhassybayeva M. (2023) Integrable motions of curves of the induced Fokas-Lenells equation. *Optik*, 286. — P. 170979. <https://doi.org/10.1016/j.jleo.2023.170979> (in Eng.).
- Belyaeva T.L., Hasegawa A., & Serkin V.N. (2007) Nonautonomous solitons in external potentials. *Physical Review Letters*, 98. — P. 074102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.074102> (in Eng.).
- Carretero-González R., Frantzeskakis D.J., & Kevrekidis P.G. (2008) Nonlinear waves in Bose-Einstein condensates: Physical relevance and mathematical techniques. *Nonlinearity*, 21. — P. R139-R202. <https://doi.org/10.1088/0951-7717/21/4/R01> (in Eng.).
- Chabchoub A., & Grimshaw R.H.J. (2016) The hydrodynamic nonlinear Schrödinger equation: Space and time. *Fluids*, 1(3). — P. 23. <https://doi.org/10.3390/fluids1030023> (in Eng.).
- Feng B.F., Ling L., & Zhu Z. (2018) General soliton solutions to a coupled Fokas-Lenells equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 40, — P. 185—214. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.09.012> (in Eng.).
- Fokas A.S. (1995) On a class of physically important integrable equations. *Physica D*, 87. — P. 145—150. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(95\)00126-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00126-X) (in Eng.).
- Geng X., Li Y., Wei J., & Zhai Y. (2021) Darboux transformation of a two-component generalized Sasa-Satsuma equation and explicit solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44. — P. 12727—12745. <https://doi.org/10.1002/mma.7219> (in Eng.).
- Hu J., Kuppuswamy P., & Xu S. (2012) Rogue waves of the Fokas-Lenells equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 81(12), — P. 124007. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.81.124007> (in Eng.).
- Huang N.N., & Xu B. (1989) Darboux transformation method for finding soliton solutions of the Landau-Lifshitz equation of a classical Heisenberg spin chain. *Communications in Theoretical Physics*, 12. — P. 121—126. (in Eng.).
- Matsuno Y. (2012) A direct method of solution for the Fokas-Lenells derivative nonlinear Schrödinger equation II: Dark soliton solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(47). — P. 475204. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/47/475204> (in Eng.).
- Matsuno Y. (2012) A direct method of solution for the Fokas-Lenells derivative nonlinear Schrödinger equation I: Bright soliton solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(23). — P. 235201. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/23/235201> (in Eng.).
- Matveev V.B., & Salle M.A. (1991) Darboux transformations and solitons. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61630-2> (in Eng.).
- Myrzakul Zh.R., & Zhadyranova A.A. (2019) Soliton surface associated with the WDVV equation for the n = 3 case. *Journal of Physics: Conference Series*, 1391(1). — P. 012105. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012105> (in Eng.).
- Myrzakulov K.R., Myrzakul Z.R., & Zhadyranova A.A. (2019) Soliton surface associated with the oriented associativity equation for the n = 3 case. *International Journal of Mathematical Physics*, 10(2). — P. 63—67. <https://doi.org/10.18454/IJMP.2019.10207> (in Eng.).



Myrzakulov R., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Yersultanova Z.S., & Zhassybayeva M. (2016) Integrable motion of curves in self-consistent potentials: Relation to spin systems and soliton equations. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 13(1). — P. 1650004. <https://doi.org/10.1142/S0219887816500049> (in Eng.).

Song C.Q., Xiao D.M., & Zhu Z.N. (2017) Soliton and rogue wave solutions of a two-component nonlinear Schrödinger equation coupled to the Boussinesq equation. Chinese Physics B, 26. — P. 100204. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/26/10/100204> (in Eng.).

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the Central Asian Academic Research Center LLP**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the journals of the Central Asian Academic Research Center LLP implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The Central Asian Academic Research Center LLP follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the Central Asian Academic Research Center LLP.

The Editorial Board of the Central Asian Academic Research Center LLP will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

ISSN 2518-1483 (Online), ISSN 2224-5227 (Print)

<http://reports-science.kz/index.php/en/archive>

Ответственный редактор *А. Ботанқызы*

Редакторы: *Д.С. Аленов, Т. Апендиев*

Верстка на компьютере *Г.Д. Жадырановой*

Подписано в печать 29.12.2025.

Формат 60x88^{1/8}.

18,0 п.л. Заказ 4.