

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының Ғылым  
Академиясының әл-Фараби атындағы  
Қазақ ұлттық университетінің

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
Al-Farabi  
Kazakh National University

### SERIES PHYSICO-MATHEMATICAL

**6 (334)**

NOVEMBER – DECEMBER 2020

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі  
**Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Қазақстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Қазақстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Қазақстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф., академик (Қазақстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)

**«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық технологиялар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219, 220 бөл.; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2020

Типографияның мекенжайы: «NurNaz GRACE», Алматы қ., Рысқұлов көш., 103.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК  
**Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Казахстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Казахстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Казахстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Казахстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф., академик (Казахстан)

«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и коммуникаций Республики Казахстан № 16906-Ж, выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация приоритетных научных исследований в области физико-математических наук и информационных технологий.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219, 220; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2020

Адрес типографии: «NurNaz GRACE», г. Алматы, ул. Рыскулова, 103.

Editor in chief

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK

**G.M. Mutanov**

Editorial board:

**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Baigunchekov Zh.Zh.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Kalimoldaev M.N.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Moldabekov M. M.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Myrzakulov R.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Ramazanov T.S.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)  
**Tuleshov A.K.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Ualiev Z.G.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof., academician (Kazakhstan)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Communications of the Republic of Kazakhstan **No. 16906-Ж**, issued on 14.02.2018.

Thematic scope: *publication of priority research in the field of physical and mathematical sciences and information technology.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2020

Address of printing house: «NurNaz GRACE», 103, Ryskulov str, Almaty.

**NEWS**

OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.91>

Volume 6, Number 334 (2020), 5 – 12

UDK 512.64

IRSTI 27.17.27

**A.T. Ibrayev**

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: pok\_rk@mail.ru

**METHOD FOR CONSTRUCTING THE COMMUTATIVE ALGEBRA OF QUATERNION AND OCTONION**

**Abstract.** In this paper, we solve the problem of constructing a commutative algebra of quaternions and octonions. A proof of the theorem is given that the commutativity of quaternions can be ensured by specifying a set of sign coefficients of the directions of reference of the angles between the radius vectors in the coordinate planes of the vector part of the coordinate system of the quaternion space. The method proposed in the development of quaternions possessing the commutative properties of multiplication is used further to construct a commutative octonion algebra. The results obtained on improving the algebra of quaternions and octonions can be used in the development of new hypercomplex numbers with division over the field of real numbers, and can also find application for solving a number of scientific and technical problems in the areas of field theory, physical electronics, robotics, and digital processing of multidimensional signals.

**Keywords:** hypercomplex number, quaternion, octonion, algebra, multiplication, division, commutativity, vector.

Quaternions, as you know, were proposed by Hamilton in 1843 and gave rise to the rapid development of vector algebra and other important branches of modern mathematics, which are the main basis for constructing the fundamentals of theories in many areas of science [1-8]. Currently, many scientific works are devoted to the algebra of quaternions, octonions and other hypercomplex numbers, as well as to their application for solving various fundamental and applied scientific problems. For example, the algebras of quaternions and octonions are often used to solve a number of complex specific problems in the fields of robotics, physical electronics, and digital processing of multidimensional signals [9-20].

At the same time, it is still believed that hypercomplex numbers do not have the commutativity property. The famous theorems of Frobenius and Hurwitz are known, from which it follows that it is impossible to construct a commutative algebra of quaternions and other hypercomplex numbers. In addition, the Frobenius theorem states that the construction of hypercomplex numbers with division over the field of real numbers is restricted to the algebras of quaternions and octonions [21].

In connection with the noticeable expansion of the practice of using hypercomplex numbers in the study of a wide range of modern scientific and technical problems, let us consider in more detail the properties of the quaternion and octonion.

Quaternion can be represented as

$$q = s + ix + jy + kz, \quad (1)$$

where  $s$  – scalar;  $x, y, z$  – coordinates of the vector part of the quaternion;  $i, j, k$  – imaginary units satisfying the condition

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1. \quad (2)$$

When multiplying quaternions, the following equalities are also used

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (3)$$

Conditions (3) practically exclude the possibility of constructing a commutative quaternion algebra. Indeed, consider the product of two quaternions

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 &= (s_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1)(s_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2) = s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + \\
 &+ i(x_1 s_2 + x_2 s_1) + j(y_1 s_2 + y_2 s_1) + k(z_1 s_2 + z_2 s_1) + \\
 &+ ij(x_1 y_2 - x_2 y_1) + jk(y_1 z_2 - y_2 z_1) + ki(z_1 x_2 - z_2 x_1).
 \end{aligned} \tag{4}$$

From (4) it is clear that when the places of the multiplied quaternions are changed, the product will not be the same, that is, indeed, condition (3) makes the algebra of quaternions non-commutative.

However, in spite of the above, in this paper we propose a theorem on the construction of a commutative quaternion algebra.

**Theorem.** The associative algebra of quaternions can be modified into the commutative algebra of quaternions by specifying a set of sign coefficients of the directions of reference of the angles between radius vectors in the coordinate planes of the vector part of the coordinate system of the quaternion space.

**Evidence.** Let us consider the essence of the products in (4), which are the reason for the lack of commutativity of quaternions. Let's start with the expression that characterizes the cross product in the plane  $xy$ .

By adopting

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \tag{5}$$

we carry out the following transformations

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \rho_1 \rho_2 \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\rho_1 \rho_2} = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) = \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{6}$$

Because the sine in (6) is odd, the expression considered here cannot be commutative.

However, the angle

$$\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \left( \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2 \right) \tag{7}$$

In the existing theory of quaternions, the direction of this angle is not strictly specified. For the complete coordinate system, the concepts of right and left screws are noted, which only indirectly indicate that the positive direction of this angle corresponds to the positive direction of the axis  $z$ , however, no formula is given that strictly specifies this noted condition.

As you know, when turning (rotating) the radius vector in  $xy$  plane by one full circle, the angle  $\varphi_{xy}$  changes within  $0 \leq \varphi_{xy} \leq 2\pi$ , but the positive value of  $\sin \varphi_{xy}$  remains only within  $0 \leq \varphi_{xy} \leq \pi$ . Within  $\pi \leq \varphi_{xy} \leq 2\pi$  the function  $\sin \varphi_{xy}$  already has a negative value, which does not correspond to the sign of the angle  $\varphi_{xy}$ . Indeed,

$$\sin(\pi + \varphi_{xy}) = -\sin \varphi_{xy} = \sin(-\varphi_{xy}).$$

In connection with this inconsistency, it is necessary to introduce a condition for the correspondence of the sign of the angle of rotation to the linear direction of its reference in the basis of the quaternion space, which for the angle  $\varphi_{xy}$  in the theory of quaternions is associated with the direction  $z$ . This condition can be written as

$$\text{sign}(z) = \text{sign}(\varphi_{xy}). \tag{8}$$

For a more detailed consideration of the need to take into account Equation (8), we represent  $z$  in the form

$$z = \text{sign}(z) \cdot |z|. \tag{9}$$

Now, taking into account (6), (8) and (9), we associate the angular displacement with the coordinate  $z$  as follows

$$z = \text{sign}(\varphi_{12}) \cdot |\rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)|. \tag{10}$$

In the last equation, the modulus can be replaced by the expression

$$|\rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)| = \text{sign}(\rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)) \cdot \rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (11)$$

then, we have

$$z = \text{sign}(\varphi_{12}) \cdot \text{sign}(\rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)) \cdot \rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (12)$$

Let us introduce the notation

$$\sigma_{12} = \text{sign}(\varphi_{12}) \cdot \text{sign}(\rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad (13)$$

where

$$\text{sign}(\varphi_{12}) = \begin{cases} +1, \text{sign}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \text{sign}(\hat{i}_x, \hat{i}_y) = \text{sign}(\varphi_{xy}); \\ -1, \text{sign}(\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_1) = -\text{sign}(\hat{i}_x, \hat{i}_y) = -\text{sign}(\varphi_{xy}). \end{cases} \quad (14)$$

The sequence of signs in the indices hereinafter indicates the direction of the angle of rotation. The index «xy» means that the positive direction of reference of the angle  $\varphi_{xy}$  corresponds to the direction of the angle of rotation of the radius vector  $\vec{\rho}_{xy}$  relative to the origin from axis  $x$  to axis  $y$ . From (13) and (14) it follows

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21}. \quad (15)$$

Now, let us rewrite equation (12) for  $z$  in the form

$$z = \sigma_{12} \cdot \rho_1 \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sigma_{12} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (16)$$

In this equation, the signs of the directions  $z$  и  $\varphi_{xy}$  are matched using the sign coefficient  $\sigma_{12}$ . In general, equation (15) can be rewritten as

$$\sigma_{mn} = -\sigma_{nm}, \quad (17)$$

where  $m$  and  $n$  denote the serial numbers of factors.

By analogy, the same conditions for matching the signs of the directions of linear and angular displacements (coordinates) must be met for other pairs of coordinates. These conditions can be fulfilled by replacing equalities (3) by the following equalities

$$ij = -ji = \sigma_{mn}^{xy} k, \quad jk = -kj = \sigma_{mn}^{yz} i, \quad ki = -ik = \sigma_{mn}^{zx} j, \quad (18)$$

where  $\sigma_{mn}$  for the positive direction of reference of the angle of rotation in the plane  $xy$ , i.e. at

$$\text{sign}(\varphi_{mn}) = \text{sign}(\varphi_{xy}),$$

is defined by formula

$$\sigma_{mn}^{xy} = \text{sign}(\varphi_{xy}) \cdot \text{sign}(x_m y_n - x_n y_m) = -\sigma_{nm}^{xy}, \quad (19)$$

And for planes  $yz$  и  $zx$ , when counting the angles of rotation also in the positive direction, according to the formulas

$$\sigma_{mn}^{yz} = \text{sign}(\varphi_{yz}) \cdot \text{sign}(y_m z_n - y_n z_m) = -\sigma_{nm}^{yz},$$

$$\sigma_{mn}^{zx} = \text{sign}(\varphi_{zx}) \cdot \text{sign}(z_m x_n - z_n x_m) = -\sigma_{nm}^{zx}. \quad (20)$$

The sign coefficients given in (19) - (20) remove the questions about specifying the right or left screws when determining the accepted directions of the used coordinate system.

When using equations (18) - (20), the product of two quaternions instead of (4) takes the following form

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 = & (s_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1)(s_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2) = s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + \\
 & + i \left[ x_1 s_2 + x_2 s_1 + \sigma_{mn}^{yz} (y_1 z_2 - y_2 z_1) \right] + j \left[ y_1 s_2 + y_2 s_1 + \sigma_{mn}^{zx} (z_1 x_2 - z_2 x_1) \right] + \\
 & + k \left[ z_1 s_2 + z_2 s_1 + \sigma_{mn}^{xy} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \right].
 \end{aligned} \tag{21}$$

From equation (21), taking into account (19) - (20), it can be seen that the product of quaternions possesses the commutativity property.

The theorem is proved.

It is easy to see that all the basic properties of the quaternion algebra stated earlier are preserved, including the possibility of the division operation. In addition, along with commutativity, the associativity property of the product of quaternions is also preserved. When checking this condition together with (18) - (20), it should be noted that

$$\sigma_{mn}^2 = +1. \tag{22}$$

Let's confirm the possibility of the division operation. The conjugate four-dimensional quaternion number (1) is the quaternion

$$\bar{q} = s - ix - jy - kz. \tag{23}$$

The product  $q\bar{q}$ , when using conditions (18) - (20), remains unchanged

$$q\bar{q} = s^2 + x^2 + y^2 + z^2, \tag{24}$$

which confirms the possibility of the division operation.

The proof of the above theorem on the commutativity of the quaternion algebra, modified by specifying a set of sign coefficients for the directions of angles, opens up new possibilities both in studying the properties of other hypercomplex numbers and for using hypercomplex numbers in solving various scientific and engineering problems.

Next, we will consider the possibility of solving the problem related to the construction of a commutative octonion algebra. To achieve the commutativity of the octonion product, as a basis, we use the method that was proposed above to ensure the commutativity property of the multiplication of quaternions.

We present some general conclusions that can be drawn from the results of solving the problem of constructing a commutative quaternion algebra.

First, in hypercomplex numbers, the results of mixed products of imaginary units with the properties of unit vectors of a vector space are pseudovectors associated with the projection of rotational displacements on the plane.

Secondly, the absence of an unambiguously established modular direction of rotational displacements leads to the duality of their reference system and is the reason for the absence of commutativity of the multiplication of hypercomplex numbers.

Conclusion: to ensure commutativity of the multiplication of hypercomplex numbers, it is necessary for each plane of the vector space of the hypercomplex number to unambiguously set the reference signs of the directions of rotational displacements.

In the general case, the octonion  $q_8(x)$ , which in a number of works is also called the octave or the Cayley number, is written in the form

$$q_8(x) = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7, \tag{25}$$

where  $x_0$  is a scalar component, variables  $x_1 - x_7$  constitute the vector part of the quaternion,  $i_1 - i_7$  - imaginary units having properties of unit vectors in the corresponding vector space, the number 8 in the subscript on the left side of the equation indicates the octonion dimension.

In the existing theory of octonions, the multiplication rules for unit imaginary vectors  $i_1 - i_7$  satisfy the conditions given in the table 1.



Table 1

1	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
$i_1$	-1	$i_3$	$-i_2$	$i_5$	$-i_4$	$-i_7$	$i_6$
$i_2$	$-i_3$	-1	$i_1$	$i_6$	$i_7$	$-i_4$	$-i_5$
$i_3$	$i_2$	$-i_1$	-1	$i_7$	$-i_6$	$i_5$	$-i_4$
$i_4$	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_5$	$i_4$	$-i_7$	$i_6$	$-i_1$	-1	$-i_3$	$i_2$
$i_6$	$i_7$	$i_4$	$-i_5$	$-i_2$	$i_3$	-1	$-i_1$
$i_7$	$-i_6$	$i_5$	$i_4$	$-i_3$	$-i_2$	$i_1$	-1

The octonion, given by equation (25) and the rules of multiplication indicated in table 1, has all the basic properties necessary to construct a normalized algebra. However, in this form, the octonion has only the property of alternative multiplication and, in contrast to complex numbers and quaternions, does not have the properties of commutativity and associativity of multiplication.

It is possible to ensure commutativity and associativity of octonion multiplication, as follows from the above conclusion, by replacing the multiplication rules in accordance with table 1 with new rules that are specified by the table 2 below.

Table 2

1	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
$i_1$	-1	$\sigma_{12}i_3$	$-\sigma_{31}i_2$	$\sigma_{14}i_5$	$-\sigma_{51}i_4$	$-\sigma_{61}i_7$	$\sigma_{71}i_6$
$i_2$	$-\sigma_{12}i_3$	-1	$\sigma_{23}i_1$	$\sigma_{24}i_6$	$\sigma_{52}i_7$	$-\sigma_{62}i_4$	$-\sigma_{72}i_5$
$i_3$	$\sigma_{31}i_2$	$-\sigma_{23}i_1$	-1	$\sigma_{34}i_7$	$-\sigma_{53}i_6$	$\sigma_{63}i_5$	$-\sigma_{37}i_4$
$i_4$	$-\sigma_{14}i_5$	$-\sigma_{24}i_6$	$-\sigma_{34}i_7$	-1	$\sigma_{45}i_1$	$\sigma_{46}i_2$	$\sigma_{47}i_3$
$i_5$	$\sigma_{51}i_4$	$-\sigma_{52}i_7$	$\sigma_{53}i_6$	$-\sigma_{45}i_1$	-1	$-\sigma_{65}i_3$	$\sigma_{57}i_2$
$i_6$	$\sigma_{61}i_7$	$\sigma_{62}i_4$	$-\sigma_{63}i_5$	$-\sigma_{46}i_2$	$\sigma_{65}i_3$	-1	$-\sigma_{76}i_1$
$i_7$	$-\sigma_{71}i_6$	$\sigma_{72}i_5$	$\sigma_{37}i_4$	$-\sigma_{47}i_3$	$-\sigma_{57}i_2$	$\sigma_{76}i_1$	-1

Included in table 2, unit sign coefficients  $\sigma_{mn}$  ( $m=1\div 7, n=1\div 7$ ) indicate the directions of rotation that are typical for mixed products  $i_1 \div i_7$ , that is, when performing a multiplication operation for cases where.  $m \neq n$ .

When using table 2, the product of two octonions  $q_8(x) \cdot q_8(y)$  has the form

$$\begin{aligned}
 q_8(x) \cdot q_8(y) &= (x_0 + x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3 + x_4i_4 + x_5i_5 + x_6i_6 + x_7i_7) \square \\
 &\quad \square (y_0 + y_1i_1 + y_2i_2 + y_3i_3 + y_4i_4 + y_5i_5 + y_6i_6 + y_7i_7) = \\
 &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7 + \\
 &+ \left[ x_0y_1 + x_1y_0 + (x_2y_3 - x_3y_2)\sigma_{23}^{xy} + (x_4y_5 - x_5y_4)\sigma_{45}^{xy} + (x_7y_6 - x_6y_7)\sigma_{76}^{xy} \right] i_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ x_0 y_2 + x_2 y_0 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \sigma_{31}^{xy} + (x_4 y_6 - x_6 y_4) \sigma_{46}^{xy} + (x_5 y_7 - x_7 y_5) \sigma_{57}^{xy} \right] i_2 + \\
 & + \left[ x_0 y_3 + x_3 y_0 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \sigma_{12}^{xy} + (x_6 y_5 - x_5 y_6) \sigma_{65}^{xy} + (x_4 y_7 - x_7 y_4) \sigma_{47}^{xy} \right] i_3 + \\
 & + \left[ x_0 y_4 + x_4 y_0 + (x_5 y_1 - x_1 y_5) \sigma_{51}^{xy} + (x_6 y_2 - x_2 y_6) \sigma_{62}^{xy} + (x_3 y_7 - x_7 y_3) \sigma_{37}^{xy} \right] i_4 + \\
 & + \left[ x_0 y_5 + x_5 y_0 + (x_1 y_4 - x_4 y_1) \sigma_{14}^{xy} + (x_6 y_3 - x_3 y_6) \sigma_{63}^{xy} + (x_7 y_2 - x_2 y_7) \sigma_{72}^{xy} \right] i_5 + \\
 & + \left[ x_0 y_6 + x_6 y_0 + (x_7 y_1 - x_1 y_7) \sigma_{71}^{xy} + (x_2 y_4 - x_4 y_2) \sigma_{24}^{xy} + (x_5 y_3 - x_3 y_5) \sigma_{53}^{xy} \right] i_6 + \\
 & + \left[ x_0 y_6 + x_6 y_0 + (x_6 y_1 - x_1 y_6) \sigma_{61}^{xy} + (x_5 y_2 - x_2 y_5) \sigma_{52}^{xy} + (x_3 y_4 - x_4 y_3) \sigma_{34}^{xy} \right] i_7. \quad (26)
 \end{aligned}$$

It is easy to see from equation (26) that when using the new rules of multiplication, the octonion possesses the commutative property of multiplication.

The conjugate number to octonion (25) has the form

$$\bar{q}_8(x) = x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3 - x_4 i_4 - x_5 i_5 - x_6 i_6 - x_7 i_7. \quad (27)$$

Multiplying the octonion (25) by its conjugate number (27), we have

$$\begin{aligned}
 q_8(x) \cdot \bar{q}_8(y) &= (x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7) \square \\
 & \square (x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3 - x_4 i_4 - x_5 i_5 - x_6 i_6 - x_7 i_7) = \\
 & = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = |q_8(x)|^2. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Equation (28) confirms that when using Table 2 (when performing the multiplication operation), the octonion retains the property of being able to construct on its basis a normalized division algebra over the field of real numbers.

In conclusion, we note that the construction of the commutative algebra of quaternions, octonions, and other hypercomplex numbers opens up new possibilities for their application for solving many problems in a number of fields of science and technology, including in the areas of field theory, robotics, digital processing of multidimensional signals, and physical electronics.

**А.Т. Ибраев**

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

### **КВАТЕРНИОНДАР МЕН ОКТОНИОНДАРДЫҢ КОММУТАТИВТІ АЛГЕБРАСЫН ЖАСАУДЫҢ ТӘСІЛІ**

**Аннотация.** Кватерниондарды Гамильтон 1843 жылы ұсынғаны белгілі және кватерниондар ғылымның көптеген салаларындағы теориялардың іргелерін құрудың бастапқы негізі болып табылатын векторлық алгебраның қалыптасуына және қазіргі заманауи математиканың басқа да маңызды салаларының тез дамуына себеп болды. Қазіргі кезде кватерниондар, октониондар және басқа гиперкомплекссті сандарының алгебрасына, сонымен қатар, оларды әртүрлі іргелі және қолданбалы ғылыми есептерді шешуге қолдануға арналған көптеген ғылыми еңбектер бар. Мәселен, кватерниондар мен октониондардың алгебралары робототехника, физикалық электроника және көп өлшемді сигналдарды цифрлық өңдеу саласындағы бірқатар күрделі нақты мәселелерді шешу үшін жиі қолданылады.

Сонымен бірге, әлі де гиперкомплекссті сандардың көбейту амалында коммутациялық қасиеті жоқ деп есептеледі. Фробениус пен Гурвицтің атақты теоремалары белгілі, олардан кватерниондар мен басқа гиперкомплекссті сандардың коммутативті алгебрасын құру мүмкіндігі жоқ екендігін байқауға болды. Сонымен қатар, Фробениус теоремасы гиперкомплекссті сандардың нақты сандар өрісі бойынша бөлу амалы бар алгебралардың құрылуы кватерниондар мен октониондардың алгебраларымен шектелетінін айтады.

Бұл жұмыста коммутативті төрт өлшемді алгебраны құру шарасын іске асыру тәсілі туралы төменде келтірілген теорема ұсынылған.

**Теорема.** Кватерниондар кеңістігінің координаталар жүйесінің векторлық бөлігінің координаталық жазықтықтарындағы радиус-векторлары арасындағы бұрыштардың бағыттарының белгілейтін коэффициенттерінің жиынтығын көрсету арқылы кватерниондардың ассоциативті алгебрасының орнына кватерниондардың коммутативті алгебрасын құруға болады.

Әрі қарай алынған нәтижелерден кватерниондар алгебрасының барлық негізгі қасиеттері, оның ішінде бөлу амалын орындау мүмкіндігі сақталғанын көруге болады. Сонымен қатар, коммутативтілікпен бірге кватерниондар алгебрасында көбейтудің ассоциативтілік қасиеті де сақталады.

Бұрыштар бағыттарының белгілер коэффициенттерінің жиынтығын көрсете отырып қайта құрған кватерниондар алгебраның коммутативтілігі туралы теореманың жоғарыда келтірілген дәлелі басқа да гиперкомплекс сандарының қасиеттерін зерттеуде, әртүрлі ғылыми және инженерлік есептерді шешуде гиперкомплекс сандарды қолдану үшін де жаңа мүмкіндіктер ашады.

Әрі қарай бұл жұмыста октониондардың коммутативтік алгебрасын құру мүмкіндігіне байланысты мәселелер қарастырылған. Октонион көбейтіндісінің коммутативтігіне қол жеткізу үшін негіздеме ретінде осы жұмыста ұсынылған кватерниондар көбейтіндісінің коммутативтік қасиетін қамтамасыз ететін әдіс қолданылды.

Кватерниондардың коммутативті алгебрасын құру мәселесін шешудің нәтижелерінен кейбір қорытындылар жасауға болады.

Біріншіден, гиперкомплекссті сандардың векторлық кеңістігінде болжамды бірліктердің қасиеттері бар бірлік векторларының аралас көбейтінділерінің нәтижелері жазықтықта айналмалы ығысулардың проекциясымен байланысты псевдовекторлар болып табылады.

Екіншіден, айналмалы ығысулардың анық белгіленген модульдік бағытының болмауы олардың бағыттық жүйесінің қосарлануына әкеледі және гиперкомплекссті сандарының көбейтуінің коммутативтілігінің болмауына себеп болады.

Жоғарыда айтылғандардан негізгі қорытынды: гиперкомплекссті сандардың көбейтуінің өзара байланысын қамтамасыз ету үшін, гиперкомплекссті санның векторлық кеңістігінің әр жазықтығына айналмалы қозғалыстар бағыттарының анықтамалық белгілерін біркелкі қою қажет.

Кватерниондар мен октониондардың алгебрасын жетілдіру бойынша алынған нәтижелер нақты сандар көлемінде бөлу қасиеттеріне ие гиперкомплекссті жаңа сандарды жасау үшін пайдалануға болады, сонымен қатар, өрістер теориясы, физикалық электроника, робототехника және көп өлшемді сигналдарды цифрлық өңдеу салаларындағы бірқатар ғылыми және техникалық мәселелерді шешуге қолдануға болады.

**Түйін сөздер:** гиперкомплексстік сан, кватернион, октонион, алгебра, көбейту, бөлу, коммутативтік, вектор.

**А.Т. Ибраев**

Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

### **МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ И ОКТОНИОНОВ**

**Аннотация.** Кватернионы, как известно, были предложены Гамильтоном в 1843 году и дали начало бурному развитию векторной алгебры и других важных разделов современной математики, которые являются основной базой построения фундаментальных основ теорий во многих направлениях науки. В настоящее время алгебре кватернионов, октонионов и других гиперкомплексных чисел, а также их применению для решения различных фундаментальных и прикладных научных задач посвящены много научных работ. Например, алгебры кватернионов и октонионов нередко используется для решения ряда сложных специфических задач в областях робототехники, физической электроники и цифровой обработки многомерных сигналов.

Вместе с тем, до сих пор считается, что гиперкомплексные числа не обладают свойством коммутативности. Известны знаменитые теоремы Фробениуса, Гурвица, из которых следует вывод о невозможности построения коммутативной алгебры кватернионов и других гиперкомплексных чисел. Кроме того, в теореме Фробениуса утверждается, что построение гиперкомплексных чисел с делением над полем действительных чисел ограничивается алгебрами кватернионов и октонионов.

В настоящей работе предлагается теорема о построении коммутативной алгебры кватернионов, которая сформулирована следующим образом.

Теорема. Ассоциативная алгебра кватернионов может быть модифицирована в коммутативную алгебру кватернионов путем задания набора знаковых коэффициентов направлений отсчета углов между радиус-векторами в координатных плоскостях векторной части системы координат пространства кватернионов.

Из полученных дальше результатов можно видеть, что все изложенные раньше основные свойства алгебры кватернионов сохраняются, в том числе, возможность операции деления. Кроме того, наряду с коммутативностью сохраняется также и свойство ассоциативности произведения кватернионов.

Доказательство приведенной выше теоремы о коммутативности алгебры кватернионов, модифицированной путем задания набора знаковых коэффициентов направлений отсчета углов, открывает новые

возможности как при исследовании свойств других гиперкомплексных чисел, так и для применения гиперкомплексных чисел при решении различных научных и инженерных задач.

Дальше в работе рассмотрена возможность решения задачи, связанной с построением коммутативной алгебры октонионов. Для достижения коммутативности произведения октонионов в качестве основы используется метод, который был предложен в данной работе для обеспечения свойства коммутативности умножения кватернионов.

Приведены некоторые общие выводы, которые можно сделать по результатам решения задачи по построению коммутативной алгебры кватернионов.

В-первых, в гиперкомплексных числах результатами смешанных произведений мнимых единиц со свойствами единичных векторов векторного пространства являются псевдовекторы, связанные с проекцией вращательных перемещений на плоскости.

Во-вторых, отсутствие однозначно установленного модульного направления вращательных перемещений приводит к двойственности системы их отсчета и является причиной отсутствия коммутативности умножения гиперкомплексных чисел.

Из изложенного выше следует основной вывод: для обеспечения коммутативности умножения гиперкомплексных чисел необходимо для каждой плоскости векторного пространства гиперкомплексного числа однозначно задавать знаки отсчета направлений вращательных перемещений.

Полученные результаты по совершенствованию алгебры кватернионов и октонионов могут быть использованы при разработке новых гиперкомплексных чисел с делением над полем действительных чисел, а также могут найти применение для решения ряда научно-технических задач в областях теории поля, физической электроники, робототехники и цифровой обработки многомерных сигналов.

**Ключевые слова:** гиперкомплексное число, кватернион, октонион, алгебра, умножение, деление, коммутативность, вектор.

#### Information about author:

Ibrayev Alpamys, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, pok\_rk@mail.ru; ORCID iD 0000-0002-5263-0384

#### REFERENCES

- [1] Hamilton, William Rowan. (1844) On quaternions or on a new system of imaginaries in algebra // *Philosophical Magazine*. N 25 (3), P. 489–495.
- [2] Finkelstein, David; Jauch, Josef M., Schiminovich, Samuel; Speiser, David. (1962) Foundations of quaternion quantum mechanics // *J. Math. Phys.* N 3, P. 207–220. doi:10.1063/1.1703794.
- [3] Kochin N. E. (1965) Vector calculus and beginnings of tensor calculus. M. Nauka. 426 p.
- [4] Landau L. D., Lifshits E. M. (1968) Theoretical Physics: Textbook in 10 volumes. V. 1. Mechanics. M., Nauka. 216 p.
- [5] Landau L. D., Lifshits E. M. (1968) Theoretical Physics: Textbook in 10 volumes. V. 2. Field theory. M., Nauka. 512 p.
- [6] Laptev G.F. (1975) Elements of vector calculus. M.: Nauka., 336 p.
- [7] Sedov L.I. (1983) Continuum mechanics, v. 1. M.: Nauka., 528 p.
- [8] Ibrayev A.T. (2015) Theory of Cathode Lens with Multipole Components of Electrostatic Field and the Space Charge // *Microscopy and Microanalysis*. V. 21, N6, P. 270-275. doi:10.1017/S1431927615013495.
- [9] Zhang, Fuzhen. (1997) Quaternions and Matrices of Quaternions // *Linear Algebra and its Applications*, 251, P. 21–57. doi:10.1016/0024-3795(95)00543-9.
- [10] Ron Goldman. (2010) Rethinking Quaternions: Theory and Computation // Morgan & Claypool. ISBN 978-1-60845-420-4.
- [11] Vince, John A. (2008) Geometric Algebra for Computer Graphics. Springer. ISBN 978-1-84628-996-5.
- [12] Hanson, Andrew J. (2006) Visualizing Quaternions. Elsevier. ISBN 0-12-088400-3.
- [13] Kuipers, Jack. (2002) Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality. Princeton University Press. ISBN 0-691-10298-8.
- [14] Trifonov, V. A (1995) Linear Solution of the Four-Dimensionality Problem // *Europhysics Letters*. 32 (8), P. 621–626. doi:10.1209/0295-5075/32/8/001.
- [15] Trifonov V. (2007) Natural Geometry of Nonzero Quaternions // *International Journal of Theoretical Physics*. 46 (2), P. 251–257. doi:10.1007/s10773-006-9234-9.
- [16] Branets V.N., Shmyglevsky I.P. (1973) Applying Quaternions to Rigid Body Orientation Problems. M. 320 p.
- [17] Dajion D., Mercero R. (1988) Digital processing of multidimensional signals: Transl. from Engl. M. Mir. 488 p.
- [18] Berezin A.V., Kurochkin Yu.A., Tolkachev E.A. (2003) Quaternions in relativistic physics. M. 200 p.
- [19] Ibrayev A.T. (2009) Multidimensional hypercomplex and modified complex numbers // *Vestnik of Kazakh National Technical University named after K.I.Satpayev*. № 6 (76), P. 153-159.
- [20] Di Gennaro S. (2003) Passive Attitude Control of Flexible Spacecraft from Quaternion Measurements // *Journal of Optimization Theory and Applications* N1. P 41-60.
- [21] Kantor I.L., Solodovnikov A.S. (1973) Hypercomplex numbers. M. 144 p.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
 PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.92>

Volume 6, Number 334 (2020), 13 – 18

УДК 517.956  
 МРНТИ 27.31.15

С. А. Алдашев, З. Н. Канапьянова

<sup>1</sup>Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан.  
 E-mail: kanapyanova81@bk.ru

## СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

**Аннотация.** Известно, что в пространстве при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводятся к вырождающимся многомерным гиперболическим уравнениям. Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями. Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах хорошо исследована. Эта задача также изучена в работах С.А.Алдашева, где показано, что ее корректность существенно зависит от высоты рассматриваемой цилиндрической области. На важность исследований многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка обратил внимания А.В. Бицадзе. Смешанные задачи для этих уравнений ранее не были изучены. В данной работе показана разрешимость смешанной задачи и получен явный вид классического решения для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.

**Ключевые слова:** Евклидово пространство, тригонометрические функции, полярные координаты, ортогональность, функция Бесселя.

**п.1. Введение.** Смешанная задача для вырождающихся линейных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах изучена в [1]. В [2,3] установлены корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.

В данной работе показана разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка

**п.2. Постановка задачи и результат.** Пусть  $D_\beta$  – цилиндрическая область евклидова пространства  $E_3$  точек  $(x_1, x_2, t)$ , ограниченная цилиндром  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \beta > 0$  и  $t = 0$ , где  $|x|$  – длина вектора  $x = (x_1, x_2)$ . Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial D_\beta$  области  $D_\beta$ , обозначим через  $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$  соответственно.

В области  $D_\beta$ , рассмотрим трехмерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^2 k_i(t) u_{x_i x_i} - k_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0, \quad (1)$$

где  $k_i(t) > 0$  при  $t > 0$  и могут обращаться в нуль при  $t = 0$ ,  $k_i(t) \in C([0, \beta]) \cap C^2((0, \beta))$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Уравнение (1) гиперболично при  $t > 0$ , а вдоль плоскости  $t = 0$  имеет место вырождение его типа и порядка.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат  $x_1, x_2, t$  с полярными  $r, \theta, t$ :  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу:

**Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области  $D_\beta$ , из класса  $C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = \tau(r, \theta), \quad u_t|_{S_0} = \nu(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \quad (2)$$

при этом  $\tau(1, \theta) = \psi(0, \theta), \nu(1, \theta) = \psi_t(0, \theta)$ .

Пусть  $\frac{a_i(r, \theta, t)}{k_3(t)}, \frac{b_i(r, \theta, t)}{k_3(t)}, \frac{c_i(r, \theta, t)}{k_3(t)}, \in C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta), i = 1, 2$ .

Тогда справедлива

**Теорема.** Если  $\varphi(r, \theta) \in C^1(\bar{S}_\beta) \cap C^3(S_\beta)$ ,  $\psi(t, \theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta)$ ,  $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in C^1(\bar{S}_0) \cap C^3(S_0)$  и выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

то задача 1 имеет решение, где  $\mu_{s,n}$  – положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_n(z)$ ,

$$\beta' = \int_0^\beta \sqrt{\frac{[k_1(\xi) + k_2(\xi)]}{2k_3(\xi)}} d\xi, \quad n = 0, 1, \dots$$

**п.3. Доказательство теоремы.** Решение задачи 1 в полярных координатах будем искать в виде ряда

$$u(\tau, \theta, t) = u_{10}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r, t) \cos n\theta + u_{2n}(r, t) \sin n\theta), \quad (4)$$

где  $u_{10}(r, t), u_{1n}(r, t), u_{2n}(r, t)$  - функции, которые будут определены ниже.

Подставив (4) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned} Lu \equiv & k_1(t) \left( \cos^2 \theta u_{10rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_{10r} \right) + k_2(t) \left( \sin^2 \theta u_{10rr} + \frac{\cos^2 \theta}{r} u_{10r} \right) - u_{10tt} + \\ & + a_1(r, \theta, t) \cos \theta u_{10r} + a_2(r, \theta, t) \sin \theta u_{10r} + b(r, \theta, t) u_{10t} + c(r, \theta, t) u_{10} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ k_1(t) \left[ \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{r^2} (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right] + k_2(t) \left[ \sin^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2} \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right] - \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& -u_{1nt} \cos n\theta - u_{2nt} \sin n\theta + a_1 \left[ \cos \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin \theta}{r} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) \right] + \\
& + a_2 \left[ \sin \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \cos \theta}{r} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) \right] + \\
& + b(\cos n\theta u_{1nt} + \sin n\theta u_{2nt}) + c(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \} = 0.
\end{aligned}$$

Теперь полученное выражение (5) сначала умножим на  $\rho(\theta) \neq 0$ , а затем проинтегрируем от 0 до  $2\pi$ . После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{aligned}
& \frac{(k_1 + k_2)}{2} \rho_{10} \left( u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} + \frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{10} \left( u_{10rr} - \frac{1}{r} u_{10r} \right) \\
& + a_{10}(r, t) u_{10r} + b_{10}(r, t) u_{10t} + c_{10}(r, t) u_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{(k_1 + k_2)}{2} \rho_{jn} (u_{jnrr} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn}) - \rho_{jn} u_{jnt} + \frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{jn} \left( u_{jnrr} - \frac{1}{r} u_{jnr} + \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(k_2 - k_1)}{2} e_{jn} \left( u_{jnr} - \frac{u_{jn}}{r} \right) + a_{jn}(r, t) u_{jnr} + b_{jn}(r, t) u_{jnt} + c_{jn}(r, t) + u_{jn} \right] \right\} = 0, \\
& \rho_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad \rho_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin n\theta d\theta, \quad d_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \cos n\theta d\theta, \\
& d_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{1n} = -\int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \cos n\theta d\theta, \\
& a_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \quad a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) \sin n\theta d\theta, \\
& b_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho b \cos \theta d\theta, \quad b_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho b \sin \theta d\theta, \quad c_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[ (a_1 \sin \theta - a_2 \cos \theta) \frac{n \sin n\theta}{r} + c \cos n\theta \right] d\theta, \\
& c_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[ (a_2 \cos \theta - a_1 \sin \theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + c \sin n\theta \right] d\theta, \quad n = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t) \rho_{10} \left( u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} = 0, \quad k(t) = \frac{k_1(t) + k_2(t)}{2}. \tag{7}$$

$$k(t) \rho_{j1} \left( u_{j1rr} + \frac{1}{r} u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{j1} u_{j1t} = \frac{(k_2 - k_1) d_{10}}{2} \left( u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r} \right) - a_{10} u_{10r} - b_{10} u_{10t} - c_{10} u_{10}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& k(t) \rho_{j1} \left( u_{jnrr} + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) - \rho_{jn} u_{jnt} = -\frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{jn-1} \left( u_{jn-1rr} - \frac{1}{r} u_{jn-1r} + \frac{(n-1)^2}{r^2} u_{jn-1} \right) - \\
& - \frac{(k_2 - k_1)}{r} e_{jn-1} \left( u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{r} \right) - a_{jn-1} u_{jn-1r} - b_{jn-1} u_{jn-1t} - c_{jn-1} u_{jn-1}, \quad j = 1, 2, n = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно показать, что если  $\{u_{10}, u_{jn}\}, j=1,2, n=1,2,\dots$  решение системы (7)-(9), то оно является и решением уравнения (6).

Далее, учитывая ортогональность ([4]) систем тригонометрических функций  $\{1, \cos n\theta, \sin n\theta, n=1,2,\dots\}$  на отрезке  $[0; 2\pi]$ , из краевого условия (2) в силу (4) будем иметь

$$u_{10}(r,0) = \tau_{10}(r), u_{10t}(r,0) = v_{10}(r), u_{10}(1,t) = \psi_{10}(t), \quad (10)$$

$$u_{jn}(r,0) = \tau_{jn}(r), u_{jnt}(r,0) = v_{jn}(r), u_{jn}(1,t) = \psi_{jn}(t), j=1,2, n=1,2,\dots, \quad (11)$$

$$\tau_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r,\theta) d\theta, v_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) d\theta, \psi_{10}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t,\theta) d\theta,$$

$$\tau_{1n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r,\theta) \cos n\theta d\theta, v_{1n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \cos n\theta d\theta, \psi_{1n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t,\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\tau_{2n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r,\theta) \sin n\theta d\theta, v_{2n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \sin n\theta d\theta, \psi_{2n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t,\theta) \sin n\theta d\theta,$$

$n=1,2,\dots$

Таким образом, задача 1 сведена к системе смешанных задач для уравнений (7) -(9). Теперь найдем решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)-(9) можно представить в виде

$$k(t) \left( u_{jnrr} + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) - u_{nnt} = f_{jn}(r,t), n=0,1,\dots \quad (12)$$

где  $\bar{k}(t) = \frac{k(t)}{k_3(t)}$ ,  $f_n(r,t)$  определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом  $f_0(r,t) \equiv 0$ .

В [3] показано, что задачи (12),(10) и (12),(11) однозначно разрешимы, если выполняется условие (3).

Далее, сначала решив задачи (7), (10) ( $j=1,2, n=0$ ), а затем (8), (11)

( $j=1,2, n=1$ ) и т.д. найдем последовательно все  $u_{10}(r,t), u_{jn}(r,t), j=1,2, n=1,2,\dots$

Следовательно, задачи (6), (10) и (6), (11) также однозначны разрешимы. Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) Lu d\theta = 0. \quad (13)$$

Пусть  $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ , причем  $R(r) \in V_0, V_0$  – плотна в  $L_2((0,1))$ ,  $\rho(\theta) \in C^\infty((0,2\pi))$  – плотна в  $L_2((0,2\pi))$ , а  $R(t) \in V_1, V_1$  – плотна в  $L_2((0,\beta))$ . Тогда  $f(r,\theta,t) \in V, V = V_0 \otimes (0,2\pi) \otimes V_1$  – плотна в  $L_2(D_\beta)$  ([4]).

Отсюда и из (13), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lu dD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0, \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$



Таким образом, решением задач 1 является функция (4), где  $u_{10}(r, t)$ ,  $u_{jn}(r, t)$ ,  $j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$  определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции  $\varphi(r, \theta)$ ,  $\psi(r, \theta)$ ,  $\tau(r, \theta)$ ,  $\nu(r, \theta)$ , аналогично как в [2, 3], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу  $C(\overline{D_\beta}) \cap C^2(D_\beta)$ .

Следовательно, теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки КазНПУ (договор №8 от 05.01.2020г.)

**С.А. Алдашев, З.Н. Канапьянова**

Математика, физика және информатика институты,  
Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

### ТҮРІ МЕН ДӘРЕЖЕСІ ӨЗГЕРТІЛГЕН ҮШӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРАНАЛҒАН АРАЛАС ЕСЕП

**Аннотация.** Кеңістіктегі электромагниттік өрісті математикалық модельдеу кезінде электромагниттік процес сипаты ортаның қасиеттері негізінде анықталатыны белгілі. Егер орта өткізгіш болмаса, онда көпөлшемді гиперболалық теңдеулерді аламыз. Сондықтан күрделі ортадағы электромагниттік өрістерді талдағанда (мысалы, егер қоршаған ортаның өткізгіштігі өзгерсе) көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге келеміз. Сондай-ақ, Гамильтон принципі бойынша кеңістіктегі серпімді мембраналардың тербелістерін зерттегенде көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулермен модельдеуге болатындығы белгілі. Сондықтан тербелмелі серпімді мембраналарда жылудың таралу үдерісін математикалық модельдеуді зерттей отырып, көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге келеміз. Осы мәселелерді зерттеу кезінде нақты шешімдерді келтіру қажет. Жалпыланған кеңістікте көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге аралас есептер жақсы зерттелген. Бұл есеп С.А. Алдашевтің еңбектерінде де зерттелген, онда есептің дұрыстығы қарастырылып отырған цилиндрлік аймақ биіктігіне байланысты екендігі көрсетілген. А.В. Бицадзе түрі мен дәрежесі өзгертілген көпөлшемді гиперболалық теңдеулерді зерттеудің маңыздылығына назар аударды. Бұл теңдеулер бойынша аралас есептер бұрын қарастырылмаған. Жұмыста түрі мен дәрежесі өзгертілген үшөлшемді гиперболалық теңдеулерге араланған аралас есеп шешімінің барлығы дәлелденген және оның нақты түрі келтірілген.

**Түйін сөздер:** Евклидті кеңістік, тригонометриялық функциялар, полярлық координаттар, ортогоналдылық, Бессель функциясы.

**S. A. Aldashev, Z. N. Kanapyanova**

Institute of Mathematics, Physics and Informatics,  
KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan

### IXED PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION OF TYPE AND ORDER

**Abstract.** It is known that in space during mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conductive, then we get degenerating multidimensional hyperbolic equations. Therefore, the analysis of electromagnetic fields in complex environments (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to degenerating multidimensional hyperbolic equations. It is also known that oscillations of elastic membranes in space according to the Hamilton principle can be modeled by degenerating multidimensional hyperbolic equations. Therefore, by studying mathematical modeling of the process of heat propagation in oscillating elastic membranes, we also come to degenerating multidimensional hyperbolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain a clear representation of the solutions to the investigated problems. The mixed problem for degenerating multidimensional hyperbolic equations in generalized spaces is well researched. This task is also studied in the works of S. A. Aldashev, where it is shown that its correctness significantly depends on the height of the cylindrical region

under consideration. A.V. Bitsadze drew attention to the importance of studies of multidimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order. Mixed problems for these equations have not previously been studied. In this work, the solvability of a mixed problem is shown and a clear form of a classical solution for three-dimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order is obtained.

**Keyword:** Euclidean spaces, trigonometric functions, polar coordinates, orthogonality, Bessel function.

**Information about authors:**

Aldashev C.A., Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; aldash51@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>;

Kanapyanova Z.N., 6D060100-Mathematics 3-year, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; kanapyanova81@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4214-4569>

**REFERENCES**

[1] Krasnov M. L. Mixed boundary value problems for degenerate linear hyperbolic second-order differential equations // *Mod. sat.*, 1959, vol. 49(91). 29–84 p.

[2] Aldashev S. A. Correctness of the mixed problem for a class of degenerate multidimensional hyperbolic equations // *Journal of "Computational and applied mathematics"*, Kiev: KNU them.T.G. Shevchenko, 2019, No. 2 (131). 5-14 p. DOI: 10.17721/1728-2721

[3] Aldashev S. A. the Well Posedness of The Mixed Problem for Degenerate Multidimensional Hyperbolic Equations// *proceedings of conference "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and information"*, Kiev, KNU. Shevchenko, 2018, 14-15 p. DOI: 10.17721/1728-2721

[4] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *elements of the theory of functions and functional analysis*, Moscow: Nauka, 1976, 543 p.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.93>

Volume 6, Number 334 (2020), 19 – 26

UDC 539.3

A. Seitmuratov<sup>1</sup>, M.Zh. Aitimov<sup>1</sup>, A. Seitkhanova<sup>3</sup>,  
A. Ostayeva<sup>1</sup>, E. Tulegenova<sup>1</sup>, D. Janyssova<sup>1</sup>, T. Shamilov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan;<sup>2</sup>Azerbaijan University of Architecture and Construction, Azerbaijan, Baku;<sup>3</sup>Pavlodar Pedagogical University, Pavlodar, Kazakhstan.

E-mail: angisin\_@mail.ru

## SOLUTION OF PRIVATE TASKS OF CYLINDRICAL SHEAR WAVES (in the case of the distribution of constant values $\gamma - \alpha + 2 > 0$ and $\alpha = \beta$ )

**Abstract.** Many studies usually use two methods to determine wave characteristics.

First-The instantaneous state of the medium corresponding to a certain fixed moment of time is investigated.

Second-The change in time of the state of the body in question at some fixed point is investigated.

If studies are carried out taking into account the rheological properties of the material of the system in question or, if there is an environment surrounding the system, which also generally exhibits rheological properties, the use of these methods is significantly difficult. In such cases, the influence of rheological parameters on the components of the complex phase velocity at certain values of the vibration frequencies is studied.

**Key words:** deformable bodies, shear wave, vibrations, cylindrical shell, rod, viscoelastic medium.

This problem will be two-dimensional depending on two coordinates  $(R, \theta)$  and only the shear displacement  $u_z(r, \theta, t)$  and components of the stress tensor  $\sigma_{zr}$  and  $\sigma_{z\theta}$  other than zero

The problem statement will be as in [1]

Let a shear cylindrical wave propagate in an elastic inhomogeneous transversally isotropic cylindrical layer. At the moment  $t = 0$ , the tangential stress pulse  $\sigma_{zr}$  or the displacement  $u_z$ , but changing in coordinate  $\theta$ .

We solve the problem in dimensionless variables

$$\tau = \frac{bt}{r_0}; \quad r = \frac{R}{r_0}; \quad u = \frac{u_z}{r_0} \quad (1)$$

Where  $r_0$  - is the inner radius of the layer.

$b$  - is the shear wave velocity.

Hooke's law in an elastic inhomogeneous medium has the form

$$\sigma_{zr} = \mu_1(r) \frac{\partial u}{\partial r};$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu_2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (2)$$

The equation of motion reduces to the following

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr} = \rho(r) b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (3)$$

Substituting (2) into equation (3) we obtain the basic equation, which has the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu_1'(r)}{\mu_1(r)} \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\mu_2(r) \partial^2 u}{\mu_1(r) \partial \theta^2} = \frac{b^2 \rho(r)}{\mu_1(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (4)$$

Let the boundary conditions for this problem have the form

$$\sigma_{zr} = f_m(\tau) \cos(m\theta) \text{ for } r = 1 \quad (5)$$

$$\sigma_{zr} = 0 \text{ for } r = r_1 \text{ (and } r_1 > 1) \quad (6)$$

In addition to the boundary conditions, it is necessary to specify initial conditions that are zero in our problem, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= 0 \\ u \Big|_{\tau=0} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Since a linear problem is considered, it is advisable to use the one-sided Laplace transform over dimensionless time to solve it.

We apply the Laplace transform with respect to  $\tau$  to equation (4) and obtain

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu_1'(r)}{\mu_1(r)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\mu_2(r) \partial^2 u_0}{r^2 \mu_1(r) \partial \theta^2} = \frac{\rho(r) b^2}{\mu_1(r)} p^2 u_0 \quad (8)$$

The solution to equation (8) is sought in the form

$$u_0 = T(r) \cos(m\theta) \quad (9)$$

Flat

$$u_0 = \int_0^\infty u(r, \theta, t) e^{-p\tau} d\tau \quad (10)$$

Then equation (8) takes the form

$$\frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu_1'(r)}{\mu_1(r)} \right] \frac{\partial T(r)}{\partial r} - \left[ \frac{m^2 \mu_2(r)}{r^2 \mu_1(r)} + \frac{\rho(r) b^2}{\mu_1(r)} p^2 \right] T(r) = 0 \quad (11)$$

In the future, we will assume that the inhomogeneity of the medium has the form

$$\mu_1(r) = \mu_{10} r^\alpha; \mu_2(r) = \mu_{10} r^\beta; \rho(r) = \rho_0 r^\gamma \quad (12)$$

Moreover,  $b^2 = \frac{\mu_{10}}{\rho_1}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  – constants.

Then equation (11) takes the form

$$r^2 T''(r) + r(1 + \alpha) T'(r) - (m^2 r^{\beta-\alpha} \gamma_1^2 + p^2 r^{\gamma-\alpha+2}) T(r) = 0 \quad (13)$$

Here  $\gamma_1^2 = \frac{\mu_{20}}{\mu_{10}}$

Suppose that  $\gamma - \alpha + 2 > 0$  and  $\alpha = \beta$

The general solution of equation (13) in the case under consideration is equal to

$$T_r = C_1 r^{-\frac{\alpha}{2}} K_y \left( \frac{2}{y-\alpha+2} \right) p r^{\left( \frac{\gamma-\alpha+2}{2} \right)} + C_2 r^{-\frac{\alpha}{2}} I_y \left( \frac{2}{y-\alpha+2} \right) p r^{\left( \frac{\gamma-\alpha+2}{2} \right)} \quad (14)$$

Here  $K_y(z)$  and  $I_y(z)$  - are the Bessel function of the imaginary argument, and

$$y = \frac{1}{\gamma-\alpha+2} \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma_1^2 m^2} \quad (15)$$

The constants  $C_1$  and  $C_2$  are determined from the boundary conditions (13) and (14)

$$C_1 = \frac{f_{m0}(p)[pr_1^s I_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] K_y(p \frac{r_1^s}{s})]}{\rho_0 b^2 [pK_{y-1}(\frac{p}{s}) + K_y(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]] [pr_1^s I_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s})] - [pI_{y-1}(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]]} \cdot \frac{1}{[p \frac{r_1^s}{s} K_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s})]} \tag{16}$$

Where 
$$S = \frac{\gamma - \alpha + 2}{2} \tag{17}$$

Consequently

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2 r^{\frac{\alpha}{2}}} \{K_y(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s I_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] + I_y(p \frac{r^s}{s}) [pr_1^s K_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] K_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] \} \{ [pK_{y-1}(\frac{p}{s}) - K_y(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} I_y(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] - [pI_y(\frac{p}{s}) - I_y(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} K_y(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] K_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] \}^{-1} \tag{18}$$

In the general case, it is very difficult to invert expression (18) with respect to p. Expression (18) can be inverted for discrete values of the index, i.e. when

$$\nu = n + \frac{1}{2} \tag{19}$$

where n is an integer, then the Bessel functions are elementary.

For example, for  $n = 0$

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2 r^{\frac{\alpha}{2}}} \{K_{\frac{1}{2}}(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s I_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) - [\frac{s + \alpha}{2}] I_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] + I_{\frac{1}{2}}(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s K_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) - [\frac{s + \alpha}{2}] K_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] \} \{ [pK_{-\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) - K_{\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) [\frac{s + \alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} I_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) - [\frac{s + \alpha}{2}] I_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] - [pI_{-\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) - I_{\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) [\frac{s + \alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} K_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) + [\frac{s + \alpha}{2}] K_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] \}^{-1} \tag{20}$$

Given that

$$K_{n+(\frac{1}{2})}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}$$

$$I_{\pm(n+(\frac{1}{2}))}(z) = \frac{1}{\sqrt{2z\pi}} [e^z \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} + (-1)^{n+1} e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}]$$

or 
$$K_{\pm(\frac{1}{2})}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} I_{\pm(\frac{1}{2})}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}} \tag{21}$$

We rewrite expression (21) as

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2} r^{-\frac{\gamma+\alpha+2}{4}} \left\{ \frac{e^{\frac{p}{s}(r_1^s - r^s)}}{\left[ \frac{p}{e^s(r_1-1)} - e^{-\frac{p}{s}(r_1-1)} \right] \left( p + \frac{s}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} + \frac{e^{-\frac{p}{s}(r_1^s - r^s)}}{\left[ \frac{p}{e^s(r_1-1)} - e^{-\frac{p}{s}(r_1-1)} \right] \left( p - \frac{s}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \right\} \quad (22)$$

Or

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2} r^{-\frac{\gamma+\alpha+2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p + \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} - \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p - \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} \right\} \quad (23)$$

Where

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= [(r^s - 1) + 2k(r_1^s - 1)] \frac{1}{s} \\ \varphi_2(r) &= [-(r^s - 1) + 2k(r_1^s - 1)] \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (24)$$

Consider the expression

$$T(r) = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p + \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^k \frac{1}{p^m} \quad (25)$$

We denote

$$E_{10} = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p} \quad (26)$$

$$E_{1m} = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p^{m+1}}$$

and get

$$E_{11} = \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} E_{10} d\xi; E_{12} = \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{1!} E_{10} d\xi$$

$$E_{13} = \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{2!} E_{10} d\xi; \dots, E_{1m} = \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{(m-1)!} E_{10} d\xi$$

Then the expression (25) takes the form

$$\begin{aligned} T_1(r) &= E_{10} - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} E_{10} d\xi + \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{1!} E_{10} d\xi - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{2!} E_{10} d\xi + \\ &\dots + \left( -\frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^m \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{(m-1)!} E_{10} d\xi = E_{10} - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{1!} + \right. \\ &\left. \left( \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^2 \frac{(\xi - \varphi_1(r))^2}{2!} - \dots + \left( \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^{m-1} \frac{(\xi - \varphi_1(r))^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right\} E_{10} d\xi \end{aligned} \quad (27)$$

or

$$T_1(r) = E_{10} - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} e^{-\frac{\gamma+\alpha+2}{4}(\xi - \varphi_1(r))} E_{10} d\xi \quad (28)$$

$$T_1(r) = \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p - \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} = -\frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^m \frac{1}{p^m} \quad (29)$$

We denote

$$E_{20} = \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p} \quad (30)$$

$$E_{2m} = \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p^{m+1}}$$

As previously put

$$E_{21} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} E_{20} d\xi; E_{22} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))}{1!} E_{20} d\xi$$

$$E_{23} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^2}{2!} E_{20} d\xi; \dots, E_{2m} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^{m-1}}{(m-1)!} E_{20} d\xi \tag{31}$$

Consequently

$$-T_2(r) = E_{20} + \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} E_{20} d\xi + \dots + \left(\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}\right)^m \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^{m-1}}{(m-1)!} E_{20} d\xi = E_{20} +$$

$$\frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \{1 + \dots + \left(\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}\right)^{m-1} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^{m-1}}{(m-1)!} + \dots\} E_{20} d\xi \text{ or}$$

$$-T_2(r) = E_{20} + \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} e^{\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_2(r))} E_{20} d\xi \tag{32}$$

Thus, the expression for T takes the form:

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2} r^{-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{E_{10} - \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \exp[-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_1(r))] E_{20} d\xi + E_{20} +$$

$$\frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \exp[-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_2(r))] E_{20} d\xi \tag{33}$$

Inverting the expression in P, we obtain

$$T = \frac{1}{\rho_0 b^2} r^{-\gamma + \alpha + 2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\tau} [E_{10} - \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \exp[-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_1(r))] E_{10} d\xi] f_m(\tau - z) dz +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\tau} [E_{20} + \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \exp[\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_2(r))] E_{20} d\xi] f_m(\tau - z) dz \tag{34}$$

where

$$E_{10} = J_0(\tau - \varphi_1(r)); E_{20} = J_0(\tau - \varphi_2(r))$$

$$K_1 = \left[ \frac{s\tau - (r^s - 1)}{2(r_1^s - 1)} \right]; K_2 = \left[ \frac{s\tau + (r^s - 1)}{2(r_1^s - 1)} \right] \tag{35}$$

Knowing T, we can determine  $(r, \theta, \tau)$

$$u(r, \theta, \tau) = T(\tau, r) \cos(m\theta) \tag{36}$$

Similarly, we can obtain expressions for the stress  $\sigma_{zr}$  and  $\sigma_{z\theta}$

$$\frac{\sigma_{zr}}{\cos(m\theta)} = r^{-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}} \{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [ \int_0^{\tau} f(\tau - \xi) \frac{dE_{10}}{dr} d\xi - \frac{1}{r} f(\tau - \varphi_1(r)) ] - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [ \int_0^{\tau} f(\tau - \xi) \frac{dE_{20}}{dr} d\xi - \frac{1}{r} f(\tau - \varphi_2(r)) ] \} \tag{37}$$

$$\frac{\sigma_{z\theta}}{\sin(m\theta)} = m\mu_{20} r^{\frac{(-\gamma + 5\alpha + 6)}{4}} u(r, \theta, \tau) \tag{38}$$

Formulas (34), (36), (37), (38) give an exact solution to the problem, taking into account the entire complex wave picture.

In the calculation, it was assumed that the points of the inner surface of the cylindrical layer are rigidly fixed.

**А.Ж. Сейтмуратов<sup>1</sup>, М.Ж. Айтимов<sup>1</sup>, А.К. Сейтханова<sup>3</sup>,  
А.Б. Остаева<sup>1</sup>, Э. Төлегенова<sup>1</sup>, Д.Д. Джанысова<sup>1</sup>, Т. Шамилов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қызылорда, Қазақстан;

<sup>2</sup>Әзірбайжан архитектура және құрылыс университеті, Баку, Әзірбайжан;

<sup>3</sup>Павлодар педагогикалық университеті, Павлодар, Қазақстан

### **ЦИЛИНДРЛІК ЫҒЫСУ ТОЛҚЫНДАРЫНЫҢ ДЕРБЕС ЕСЕБІ ( тұрақты мәні $\gamma - \alpha + 2 > 0$ және $\alpha = \beta$ шамасы жағдайында)**

**Аннотация.** Деформацияланатын денелердегі дөңгелек элементтердің ығысу толқыны үдерістерін зерттеуде фазалық жылдамдық ұғымы фазалық ортаның өзгеру жылдамдығы ретінде енгізіледі. Цилиндрлік қабықтың гармоникалық тербелісі жағдайында фазалық жылдамдық қабық шетінде еркін тірелген тербеліс жиілімен сипатталады. Сондықтан цилиндрлік қабаттағы толқынды зерттеу арқылы ұзындықтағы қабықтың табиғи формалары мен тербеліс жиілігіне тікелей байланысты. Жұмыс нәтижесі бірөлшемді цилиндрлік толқындардың серпімді және жабысқақ орта, шыбық және материалдағы толқын өрісінің сипаттамасын зерттеуге мүмкіндік береді. Қарастырылған зерттеулер жүйе материалының реологиялық қасиеттерін ескеру негізінде жүргізілсе немесе қоршаған ортаның айналасында болса, онда бұл реологиялық қасиеттерді көрсетеді, аталған әдістерді қолдану айтарлықтай қиынға соғады. Мұндай жағдайда комплексті фазалық жылдамдықтың реологиялық параметрлері – тербеліс жиілігінің нақты мәні есептеледі. Жұмыс – жазықтық пен дөңгелек элементтердің толқын үдерістерінің тұрақтылық динамикасын зерттеуге арналған, сонымен қатар қабатты, серпімді жазықтық бетіне қозғалатын жүктеме әсері туралы жазықтық есебі, сызықты емес деформациялардан болатын кернеу заңы қарастырылған. Есептің қолданбалылығы – динамикалық есепті шешудің түрлі сандық алгоритмдерін жасау үшін қолданылады. Деформацияланатын ортадағы түрлі периодты және периодты емес қозғалысының басты мәні қарапайым гармоникалық типтегі жазықтық толқыны болып саналады, олардың әсері осы бетке жақын орналасқан. Сондықтан Реле таралу толқынының есебін қарастыра аламыз. Жартылай жазықтықтағы материалдың қозғалыс теңдеуі потенциалда  $\phi, \psi$  толқын теңдеулері негізінде сипатталады. Құрылымдарды немесе құрылымдарды жобалау барысында маңызды шарттардың бірі – құрылымдардың тұрақтылық жағдайы мен элементтері ескеріледі.

Ұзындықтың дөңгелек серпімді өзегін қарастырғанда белгілі бір уақытта штамның ұшына интенсивтіліктің осьтік сығылатын  $P(t)$  күші қолданылады деп болжам жасаймыз. Дөңгелек шыбықтың тұрақтылықты жоғалтуы математикалық теория негізінде және дөңгелек өзектің көлденең тербелісі негізінде зерттеледі [3]. Осы мәселелерге сүйене отырып, оған қалыпты немесе айналмалы ығысу кернеуі қолданылғанда қатаң немесе деформацияланатын шекаралармен шектелген серпімді қабат тербелісінің кейбір аксиметриялық мәселелерін қарастырамыз. Мәселелердің шешімі интегралдық түрлендіру арқылы координата және уақыт бойынша алынған.

**Түйін сөз:** деформацияланатын қатты дене, толқын, тербеліс, цилиндрлік тербеліс, сырық.

**А.Ж. Сейтмуратов<sup>1</sup>, М.Ж. Айтимов<sup>1</sup>, А.К. Сейтханова<sup>3</sup>,  
А.Б. Остаева<sup>1</sup>, Э. Тулегенова<sup>1</sup>, Д.Д. Джанысова<sup>1</sup>, Т. Шамилов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан

<sup>2</sup>Азербайджанский университет Архитектуры и Строительства, Баку, Азербайджан

<sup>3</sup>Павлодарский педагогический университет, Павлодар, Казахстан

### **РЕШЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН (при раскладе постоянных величин $\gamma - \alpha + 2 > 0$ и $\alpha = \beta$ )**

**Аннотация.** При исследованиях сдвиговых волновых процессов круговых элементов в деформируемых телах вводится понятие фазовой скорости как скорости изменения фазовой среды. В случае гармонических колебаний цилиндрической оболочки фазовая скорость выражается через частоту собственных колебаний, свободно опертой по краям оболочки, и поэтому исследование волн в цилиндрическом слое имеет самое прямое отношение к проблеме определения собственных форм и частот колебаний оболочек конечной длины. Проводимые в данной работе результаты по одномерным цилиндрическим волнам в упругих и вязкоупругих средах и стержнях позволяют исследовать влияние характеристик материала сред на волновые поле в материале. Если исследования проводятся с учетом реологических свойств материала рассматриваемой системы или имеется окружающая систему среда, также в общем случае, проявляющая



реологические свойства, использование этих способов значительно затруднено. В таких случаях изучается влияние реологических параметров на составляющие комплексной фазовой скорости при определенных значениях частот колебаний. Поэтому работа посвящена изучению динамики устойчивости волновых процессов плоских и круговых элементов, а также рассматривается класс плоских задач о воздействии подвижных нагрузок на поверхность слоистой упругой полуплоскости при нелинейном законе зависимости напряжений от деформаций. Задачи данного класса представляют большой прикладной интерес и, кроме того, могут служить эталоном для разработки тех или иных численных алгоритмов для решения динамических задач. Среди различных периодических и непериодических движений деформируемых сред важное значение имеют плоские волны простого гармонического типа, распространяющиеся по поверхности тела или полуплоскости, влияние которых ограничивается окрестностью этой поверхности. Поэтому можно рассмотреть задачу о распространении волны Релея.

Если рассмотреть круглый упругий стержень длины, то будем предполагать, что к торцам стержня в какой-либо момент времени прикладывается осевая сжимающая сила интенсивности  $P(t)$ . Потеря устойчивости круглого стержня будет исследоваться на основе математической теории и поперечного колебания круглого стержня, изложенной в работе [3]. На основе этих задач можно рассмотреть некоторые осесимметричные задачи колебания упругого слоя, ограниченные жесткими или деформируемыми границами при воздействии на него нормального или вращательного касательного напряжения. Решения рассматриваемых задач получены с использованием интегральных преобразований по координате или по времени.

**Ключевые слова:** деформируемая твердая тела, волна, колебания, цилиндрическая оболочка, стержень, вязкоупругая среда.

#### Information about authors:

Seitmuratov Angisin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda, Kazakhstan. angisin\_@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-9622-9584>;

Aitimov Myrat-PhD, The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda, Kazakhstan. aitimovmurat07@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-8397-8914>;

Ainur Seitkhanova, Pavlodar Pedagogical University, Department "Physics", PhD – Mechanics. Pavlodar ainur1179@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-6667-4548>;

Ostayeva Aiymkhan Batyrkhanovna - Acting associate professor of the Department of Computer Science, candidate of pedagogical sciences. The Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan, aimak73@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3361-2022>;

Tulegenova Elmira, Candidate of Economic Sciences, senior lecturer. The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda, Kazakhstan. Etulegenova@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4501-7343>;

Janyssova Dariga – Senior Lecturer, The Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan. dsin65@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-9904-5350>;

Shamilov Tefriz, Candidate of Technical Sciences, Professor, Department of «Physics», Azerbaijan University of Architecture and Construction, Azerbaijan, Baku. invar59@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-9139-1075>

#### REFERENCES

[1] Filippov I.G., Filippov S.I. 1995. Dynamic stability theory of rods. Proceedings of the Russian-Polish seminar. Theoretical Foundations of construction. Warsaw, pp. 63–69.

[2] Medeubaev N.K., Seytmuratov A.Z., Ramazanov M.I. Solving Problems of Vibrational Processes of Isotropically Homogeneous Elastic Plates// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, 41(9), 1846–1853  
DOI: 10.1134/S1995080220090188

[3] Seitmuratov A., Taimuratova, L.U., Zhussipbek, B., Seitkhanova, A., Kainbaeva, L. Conditions of extreme stress state //News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2019, ISSN 2224-5278 Vol. 5, Number 437 (2019), 202–206. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.143>

[4] Seitmuratov A., Yergalauova Z., Makhambayeva I., Bexeitova A. Axisymmetric problems of elastic layer oscillation limited by rigid or deformed boundaries//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2018, ISSN 2224-5278. Vol. 1, Number 427 (2018), 127–135.

[5] Seitmuratov A.Z., Makhambayeva I.U., Medeubaev N.K. Analysis of tensely of the deformed state of pedigree array near-by making//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2016, ISSN 2224-5278. Vol. 6, Number 420 (2016), 187–194.

[6] Seitmuratov A., Seylova Z.T., Kanibaikyzy K., Smakhanova A.K., Serikbol S.M. Approximate equation plate oscillation for transverse displacement of points of the median plane//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2018, ISSN 2224-5278. Vol. 3, Number 429 (2018), 258–265.

[7] Medeubaev N., Menlikozhaeva S., Seitmuratov A., Ramazanov M., Zharmenova B., Shamilov T. Area of applicability of approximate equations of vibrations of rod systems of variable thickness (in English)//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series 2018, ISSN 1991-346X. Vol. 4, Num. 320(2018), 5–15.

[8] Seitmuratov A., Zhussipbek B., Sydykova G., Seithanova A., Aitimova U. Dynamic stability of wave processes of a round rod // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2019 2(324): 90–98 (in Eng). ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print). <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.16>

[9] Seitmuratov A., Tileubay S., Toxanova S., Ibragimova N., Doszhanov B., Aitimov M. Zh. The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid boundaries // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2018 5(321): 42–48 (in Eng). ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print). <https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.6>

[10] Seitmuratov A., Zharmenova B., Dautbayeva A., Bekmuratova A. K., Tulegenova E., Ussenova G. Numerical analysis of the solution of some oscillation problems by the decomposition method // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2019 1(323): 28–37 (in Eng). ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print). <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.4>

[11] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Abzhapbarov A., and Shomanbayeva M. The features of a non-stationary state of stress in the elastic multisupport construction // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1759, 020039, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959653>.

[12] Seitmuratov, A. Z., Nurlanova, B. M., Medeubaev N. Equations of vibration of a two-dimensionally layered plate strictly based on the decision of various boundary-value problems // Bulletin of the Karaganda university-mathematics. 2007 3(87): 109–116 (in Eng).

[13] A. Seitmuratov, N. Medeubaev, Z. Seylova, L. Taimuratova, A. Dautbayeva, S. Tileubay, E. Tulegenova. Oscillation equations of rectangular plates in linear approximation // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2020. Vol. 98. No 06. © 2005 – ongoing JATIT & LLS ISSN: 1992-8645 [www.jatit.org](http://www.jatit.org)

[14] Seitmuratov, A., Dautbayeva, A. O., Berkimbayev, K., Turlugulova, N. A., Tulegenova, E. N. Constructed two-parameter structurally stable maps // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences ISSN 2224-5278 Volume 6, Number 438 (2019), 302–307. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.182>

[15] Seitmuratov, A.; Medeubaev, N.; Yeshmurat, G. Approximate solution of the an elastic layer vibration task being exposed of moving load // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2018. Vol. 2, Number 318 (2018), 54–60 (in Eng). ISSN 1991-346X

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.94>

Volume 6, Number 334 (2020), 27 – 35

УДК 517.956  
 МРПТИ 27.31.15

**C.A. Aldashev, E. Kazez**

Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan.  
 E-mail: aldash51@mail.ru, ertai\_kazez@mail.ru

**CORRECTNESS OF THE MIXED PROBLEM  
 FOR ONE CLASS OF DEGENERATE MULTIDIMENSIONAL  
 HYPERBOLO-PARABOLIC EQUATIONS**

**Abstract.** It is known that in mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conductive, we get degenerate multi-dimensional hyperbolic equations. If the medium has a high conductivity, then we go to degenerate multidimensional parabolic equations.

Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) reduces to degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

Also, it is known that the oscillations of elastic membranes in space according to the Hamilton principle can be modeled by degenerating multidimensional hyperbolic equations.

Studying the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to degenerate multidimensional parabolic equations.

Consequently, by studying the mathematical modeling of the process of heat propagation in oscillating elastic membranes, we also come to degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations. When studying these applications, it is necessary to obtain an explicit representation of the solutions of the studied problems.

The mixed problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations was previously considered.

As far as is known, these questions for degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations have not been studied.

In this paper, unique solvability is shown and an explicit form of the classical solution of the mixed problem for one class of degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations is obtained.

**Keywords:** mixed problem, classical solution, unique solvability, Bessel functions, spherical functions.

**item 1. Introduction.** The mixed problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations in generalized spaces has been studied [1,2]. The correctness of this problem was proved in [3,4] and an explicit form of the classical solution was obtained.

As far as we know, these questions have not been studied for degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

This article shows the unique solvability and obtains an explicit representation of the classical solution of the mixed problem for one class of degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

**item 2. Statement of the problem and results.** Let  $\Omega_{\alpha\beta}$  – the cylindrical region of the Euclidean space  $E_{m+1}$  of points  $(x_1, \dots, x_m, t)$  bounded by the cylinder  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , the planes  $t = \alpha > 0$  and  $t = \beta < 0$ , where  $|x|$  – the length of the vector  $x = (x_1, \dots, x_m)$ .

We denote by  $\Omega_\alpha$  and  $\Omega_\beta$  the parts of the region  $\Omega_{\alpha\beta}$ , and by  $\Gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_\beta$  the parts of the surface  $\Gamma$  lying in the half-spaces  $t > 0$  and  $t < 0$ ;  $\sigma_\alpha$  – the upper and  $\sigma_\beta$  – lower base of the area  $\Omega_{\alpha\beta}$ .

Let further  $S$  be the common part of the boundaries of the regions  $\Omega_\alpha$  and  $\Omega_\beta$ , representing the set  $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$  in  $E_m$ .

In the domain  $\Omega_{\alpha\beta}$ , we consider degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, & t > 0, \\ |t|^p \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) + c(x,t) u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $p, q = const$ ,  $p > 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $\Delta_x$  - is the Laplace operator with respect to variables  $x_1, \dots, x_m$ ,  $m \geq 2$ .

In the future, it is convenient for us to switch from Cartesian coordinates  $x_1, \dots, x_m$ ,  $t$  to spherical  $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}$ ,  $t \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ .

**Problem 1.** Find the solution to equation (1) in the region  $\Omega_{\alpha\beta}$  when  $t \neq 0$  the class  $C(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$ , that satisfy the boundary conditions

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad (3)$$

wherein  $\varphi(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$ ,  $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$ .

Let be  $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$  - a system of linearly independent spherical functions of order  $n$ ,  $1 \leq k \leq k_n$ ,  $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$ ,  $W_2^l(S)$ ,  $l = 0, 1, \dots$  - Sobolev space.

It takes place ([5]).

**Lemma 1.** Let  $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$ . If  $l \geq m-1$ , then the series

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

and also the series obtained from it by differentiating order  $p \leq l - m + 1$ , converge absolutely and evenly.

**Lemma 2.** In order that  $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$ , it is necessary and sufficient that the coefficients of the series (4) satisfy the inequalities

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

By  $\tilde{d}_{in}^k(r, t)$ ,  $d_{in}^k(r, t)$ ,  $\tilde{e}_n^k(r, t)$ ,  $\tilde{d}_n^k(r, t)$ ,  $\rho_n^k$ ,  $\bar{\varphi}_n^k(r)$ ,  $\psi_{1n}^k(t)$ ,  $\psi_{2n}^k(t)$ , we denote the expansion coefficients of the series (4) respectively, of the functions,  $d_i(r, \theta, t)\rho$ ,  $d_i \frac{x_i}{r} \rho$ ,  $e(r, \theta, t)\rho$ ,  $d(r, \theta, t)\rho$ ,  $\rho(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\varphi(r, \theta)$ ,  $\psi_1(t, \theta)$ ,  $\psi_2(t, \theta)$ , and  $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ ,  $H$  - the unit sphere in  $E_m$ .

Let be  $a_i(r, \theta, t)$ ,  $b(r, \theta, t)$ ,  $c(r, \theta, t) \in W_2^l(\Omega_\beta) \subset C(\overline{\Omega_\beta})$ ,  $d_i(r, \theta, t)$ ,  $e(r, \theta, t) \in W_2^l(\Omega_\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $l \geq m+1$ ,  $e(r, \theta, t) \leq 0, \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\alpha$ .

Then fair

**Theorem.** If  $\varphi(r, \theta) \in W_2^p(S)$ ,  $\psi_1(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$ ,  $\psi_2(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$ ,  $p > \frac{3m}{2}$  and

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

then Problem 1 is uniquely solvable,  $\mu_{s,n}$  – where the positive zeros of the Bessel functions of the first kind  $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$ ,  $\beta' = \frac{2}{2+p} |\beta|^{\frac{2+p}{2}}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

**item 3. Solvability of Problem 1.** In the spherical coordinates of equation (1) in a region  $\Omega_\alpha$  it has the form

$$L_1 u = t^q \left( u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u \right) - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(r, \theta, t) u_{x_i} + e(r, \theta, t) u = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

It is known ([5]) that the spectrum of an operator  $\delta$  consists of eigenvalues  $\lambda_n = n(n+m-2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , each of which corresponds  $k_n$  to orthonormal eigenfunctions  $Y_{n,m}^k(\theta)$ .

The desired solution to problem 1 in the domain  $\Omega_\alpha$  will be sought in the form

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

where  $\bar{u}_n^k(r, t)$  are the functions to be determined.

Substituting (7) into (6), multiplying the resulting expression by  $\rho(\theta) \neq 0$ , and integrating over the unit sphere  $H$ , for  $\bar{u}_n^k$  we obtain ([3,4])

$$t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left( \frac{m-1}{r} t^q \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_{0r}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ t^q \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left( \frac{m-1}{r} t^q \rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \left[ \tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} t^q \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in}^k - n d_{in}^k) \tilde{u}_n^k \right] \right\} = 0. \tag{8}$$

Now consider an infinite system of differential equations

$$t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r} t^q \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{9}$$

$$t^q \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r} t^q \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} t^q \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left( \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1) \right), \quad n=1, \quad k = \overline{1, k_1},$$

$$t^q \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} t^q \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} t^q \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \right.$$

$$\left. + \left[ \tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k) \bar{u}_{n-1}^k \right] \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \tag{10}$$

It is easy to verify that if  $\{\bar{u}_n^k\}$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  is a solution to system (9), (10), then it is a solution to equation (8).

It is easy to see that each equation of system (9), (10) can be represented as

$$t^q \left( \bar{u}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

where  $\bar{f}_n^k(r, t)$  are determined from the previous equations of this system, at that  $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$ .

Further, from the boundary condition (2), by virtue of (7), we have

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \bar{\psi}_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

In (11), (12), changing the variables  $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \bar{\psi}_{1n}^k(t)$  we obtain

$$t^q \left( \bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k \right) - \bar{v}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \varphi_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0 \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$f_n^k(r, t) = \bar{f}_n^k(r, t) + \psi_{1nt}^k + \frac{\lambda_n t^q}{r^2} \psi_{1n}^k, \quad \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

Having replaced  $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)$  the problem (13), (14), we reduce to the following problem

$$L v_n^k \equiv t^q \left( v_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k \right) - v_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (15)$$

$$v_n^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0. \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} f_n^k(r, t), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_n^k(r).$$

The solution to problem (15), (16) is sought in the form

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (17)$$

where  $v_{1n}^k(r, t)$  – is the solution to the problem

$$L v_{1n}^k(r, t) = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (18)$$

$$v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (19)$$

and  $v_{2n}^k(r, t)$  – the solution to the problem

$$L v_{2n}^k = 0, \quad (20)$$

$$v_{2n}^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad (21)$$

The solution to the above tasks, consider in the form

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (22)$$

while let

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \quad (23)$$

Substituting (22) into (18), (19), taking into account (23), we obtain

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1. \quad (24)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (25)$$

$$T_s + \mu t^q T_s(t) = -a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (26)$$

$$T_s(\alpha) = 0. \quad (27)$$

A limited solution to problem (24), (25) is ([6])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (28)$$

where  $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$ ,  $\mu = \mu_{s,n}^2$ .

The solution to problem (26), (27) is the function

$$T_{s,n}(t) = \left( \exp\left(-\frac{\mu_{s,n}^2 t^{q+1}}{q+1}\right) \right) \int_t^\alpha a_{s,n}(\xi) \left( \exp\frac{\mu_{s,n}^2 \xi^{q+1}}{q+1} \right) d\xi. \quad (29)$$

Substituting (28) in (23) we obtain

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \quad (30)$$

Series (30) are expansions in Fourier-Bessel series ([7]), if

$$a_{s,n}(t) = 2 [J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (31)$$

$$b_{s,n} = 2 [J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (32)$$

where  $\mu_{s,n}$ ,  $s=1, 2, \dots$  – the positive zeros of the Bessel functions  $J_\nu(z)$ , are arranged in increasing order of magnitude.

From (22), (28), (29) we obtain the solution to problem (18), (19)

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (33)$$

where  $a_{s,n}(t)$  is determined from (31).

Further, substituting (22) into (20), (21), taking into account (23), we will have the problem

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

which decision is

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} (\alpha^{q+1} - t^{q+1}). \quad (34)$$

From (28), (34) we obtain

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} (\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (35)$$

where  $b_{s,n}$  are from (32).

Therefore, first solving problem (9), (12) ( $n=0$ ), and then (10), (12) ( $n=1$ ), etc. we find successively all  $v_n^k(r, t)$  of (17), where  $v_{1n}^k(r, t)$ ,  $v_{2n}^k(r, t)$  they are determined from (33), (35).

So, in the field  $\Omega_\beta$  takes place

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \tag{36}$$

Let  $f(r, \theta, t) = R(r)p(\theta)T(t)$ , at that  $R(r) \in V_0, V_0 -$  be dense in  $L_2((0,1)), \rho(\theta) \in C^\infty(H)$ , dense in  $L_2(H)$ , and  $T(t) \in V_1, V_1 -$  dense in  $L_2((0,\alpha))$ . Then it is  $f(r, \theta, t) \in V, V = V_0 \otimes H \otimes V_1 -$  dense in  $L_2(\Omega_\alpha)$  ([8]).

From this and (36) it follows that

$$\int_{\Omega_\alpha} f(r, \theta, t) L_1 u d\Omega_\alpha = 0$$

and

$$L_1 u = 0, \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\alpha.$$

Thus, the solution to problem (1), (2) in the domain  $\Omega_\alpha$  is the function

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

where  $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$  are determined from (33), (35).

Given the formula ([7]),  $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$  estimates ([9, 5])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, j = \overline{1, m-1}, q = 0, 1, \dots, \tag{38}$$

as well as lemmas, restrictions on the coefficients of equation (1) and on given functions as  $\psi_1(t, \theta), \varphi(r, \theta)$ , in [10], we can prove that the resulting solution (37) belongs to the class  $C(\overline{\Omega_\alpha}) \cap C^1(\Omega_\alpha \cup S) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ .

Further, from (33), (35), (37) for  $t \rightarrow +0$  we have

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[ \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \left( \exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1} \right) d\xi + b_{s,n} \left( \exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \alpha^{q+1} \right) \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r), \tag{39}$$

$$u_t(r, \theta, 0) = v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} v_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{40}$$

$$v_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) - \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} a_{s,n}(0) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

From (31) - (33), (38), as well as the lemmas, it follows that  $\tau(r, \theta), v(r, \theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$ .

Thus, taking into account the boundary conditions (3), (39), (40) in the domain  $\Omega_\beta$  we arrive at the mixed problem for degenerate hyperbolic equations

$$L_2 u = |t|^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0 \tag{41}$$



with data

$$u|_S = \tau(r, \theta), u_t|_S = \nu(r, \theta), u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta). \tag{42}$$

The following theorem was proved in [4]

**Theorem 2.** If  $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in W_2^l(S), \psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$ , then problem (41), (42) has a unique solution if condition (5) is satisfied.

Further, using Theorem 2, we arrive at the solvability of Problem 1.

**item 4. Uniqueness of the solution to Problem 1.** First we consider the problem (1), (2) in the domain  $\Omega_\alpha$  and prove its uniqueness to the solution. For this, we construct a solution to the first boundary value problem for the equation

$$L_1^* v = t^q \Delta_x v - v_t - \sum_{i=1}^m d_i v_{x_i} + dv = 0, \tag{6^*}$$

with data  $\xi$

$$v|_S = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), v|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{43}$$

where  $d(x, t) = e - \sum_{i=1}^m d_{ix_i}, \bar{\tau}_n^k(r) \in G, G$  – many functions  $\tau(r)$  from the class  $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$ .

Scores  $G$  are dense everywhere in  $L_2((0,1))$  ([8]). Solution of the problem (6 \*), (43) we will search in the form (7), where the functions  $\bar{v}_n^k(r, t)$  will be defined below. Then, similarly to item 2, the functions  $\bar{v}_n^k(r, t)$  satisfy a system of equations of the form (9) - (10), where, respectively,  $\tilde{d}_{in}^k, d_{in}^k$  are replaced to  $-\tilde{d}_{in}^k, -d_{in}^k$ , and  $\tilde{e}_n^k$  to  $\tilde{d}_n^k, i = 1, \dots, m, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$ .

Further, from the boundary condition (43), by virtue of (7), we arrive at the following problem

$$L_1 v_n^k = t^q \left( v_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k \right) + v_{nt}^k = \tilde{f}_n^k(r, t) \tag{44}$$

$$v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r), v_n^k(1, t) = 0, \tag{45}$$

$$v_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{v}_n^k(r, t), \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t), \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r).$$

The solution to problem (44), (45) will be sought in the form of (17), where  $v_{1n}^k(r, t)$  is the solution to the problem for equation (18) with data

$$v_{1n}^k(r, 0) = 0, v_{1n}^k(1, t) = 0, \tag{46}$$

a  $v_{2n}^k(r, t)$  – solution of the problem for equation (20) with condition

$$v_{2n}^k(r, 0) = \tau_n^k(r), v_{2n}^k(1, t) = 0, \tag{47}$$

The solutions to problem (18), (46) and (20), (47) respectively have the form

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} \left[ \left( \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} t^{q+1}\right) \right) \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \left( \exp\left(-\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1}\right) \right) d\xi \right] J_\nu(\mu_{s,n} r),$$

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_{s,n}^k \sqrt{r} \left( \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} t^{q+1}\right) \right) J_\nu(\mu_{s,n} r),$$

where

$$\tau_{s,n}^k = 2[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tau_n^k(\xi) J_v(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad v = n + \frac{(m-2)}{2}$$

Thus, the solution of problem (6\*), (43) in the form of a series

$$v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(m-1)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] J_{n,m}^k(\theta),$$

constructed, which, by virtue of estimates (38), belongs to the class  $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\overline{\Omega}_\alpha \cap S) \cap C^2(\overline{\Omega}_\alpha)$ .

$$vL_1u - uL_1^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

where

$$P(u) = t^q \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i), \quad Q = \cos(N^\perp, t) - \sum_{i=1}^m d_i \cos(N^\perp, x_i),$$

And  $N^\perp$  is the internal normal to the boundary  $\partial\overline{\Omega}_\alpha$ , according to Green's formula, we obtain

$$\int_S \tau(r, \theta) u(r, \theta, 0) ds = 0. \quad (48)$$

Since the linear span of a system of functions  $\{\overline{\tau}_n^k(r) J_{n,m}^k(\theta)\}$  is dense in  $L_2(S)$  ([8]), we conclude from (48) that  $u(r, \theta, 0) = 0, \forall (r, \theta) \in S$ . Therefore, by the extremum principle for parabolic equation (6) [12]  $u \equiv 0$  in  $\overline{\Omega}_\alpha$ .

It follows that  $u_i(r, \theta, 0) = v(r, \theta) = 0, \forall (r, \theta) \in S$ .

Thus, we have arrived at the homogeneous mixed problem (41), (42), which, by virtue of Theorem 2, has a trivial solution.

Consequently, the uniqueness of the solution to Problem 1 is proved.

The theorem is completely proved.

Since an explicit form of the solution to problem (41), (42) was obtained in [4], it is possible to write an explicit representation for problem 1 as well.

The work was supported by the KazNPU science foundation (agreement No. 8 dated 05.01.2020)

**С.А. Алдашев, Е. Қазез**

Математика, физика және информатика институты,  
Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

### **БІР КЛАСТАҒЫ АЗҒЫНДАЛҒАН КӨП ӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛА-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН АРАЛАС ЕСЕПТЕРДІҢ КОРРЕКТИЛІГІ**

**Аңдатпа.** Кеңістіктегі электромагниттік жазықтың математикалық моделдерін зерттегенде, электромагниттік процесстің негізі оның қасиеттерімен анықталады. Егер орта өткізбейтін болса, онда азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге келеміз. Егер де орта көп өткізгішті болса, онда азғындалған көп өлшемді параболалық теңдеулерге келтірілді.

Сондықтан, күрделі орталарда (мысалы, өткізетін ортада өзгермелі делік) электромагниттік жазықтықтарды зерттегенде біз азғындалған көп өлшемді гиперболалық-параболалық теңдеулерге келеміз.

Сонымен қатар, Гамильтон қағидасына сәйкес кеңістіктегі серпімді мембрана тербелістерінің азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулермен модельдеу мүмкін екендігі белгілі.

Массамен толтырылған ортада жылу тарату процесін зерттеу азғындалған көп өлшемді параболалық теңдеулерге алып келеді.

Сонымен серпімді мембранадағы жылу тарату процесінің математикалық модельдеуін зерттей отырып, азғындалған көп өлшемді гипербола-параболалық теңдеулерге келеміз. Осы қосымшаларды оқып үйрену кезінде зерттелген мәселелердің шешімдерін нақты түрде көрсету керектігі туындайды.

Азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулер үшін аралас есептер бұған дейін қарастырылды.

Азғындалған көп өлшемді гипербола-параболалық теңдеулер үшін мұндай есептердің нақты шешімі табылмағандығы белгілі.

Мақалада бірімді шешімділік көрсетілген және бір кластағы азғындалған көп өлшемді гипербола-параболалық теңдеулер үшін аралас есептің нақты классикалық шешімі келтірілген.

**Түйін сөздер:** аралас есеп, классикалық шешім, бірімді шешімділік, Бессель функциясы, сфералық функциялар.

**С.А. Алдашев, Е. Казез**

Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая, Алматы, Қазақстан

### **КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Аннотация.** Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве, характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающихся многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводятся к вырождающимся многомерным гиперболо- параболическим уравнениям.

Известно, также что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями.

Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводят к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболо- параболическим уравнениям. При изучении этих приложений, возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач.

Смешанные задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений ранее рассмотрены.

Насколько известно, эти задачи для вырождающихся многомерных гиперболо- параболических уравнений не изучены.

В данной работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо- параболических уравнений.

**Ключевые слова:** смешанная задача, классическое решение, однозначная разрешимость, функций Бесселя, сферические функций.

#### **Information about authors:**

Aldashev S.A., Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; aldash51@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>;

Kazez E., 6D060100-Mathematics 2-year, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; ertai\_kazez@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0976-1976>

#### **REFERENCES**

[1] Baranovsky F.T. The mixed problem for a linear second-order hyperbolic equation degenerating on the initial plane // Uchenye Zapiski Leningr. ped Institute, 1958, v. 183. 23-58 p.

[2] Krasnov M.L. Mixed boundary value problems for degenerate linear hyperbolic differential equations of the second order // Mat. Sb., 1959, v. 49 (91). 29-84 p.

[3] Aldashev S.A. The correctness of the mixed problem for one class of degenerate multidimensional hyperbolic equations // Journal "Computational and Applied Mathematics", Kiev: KNU im. T. Shevchenko, 2019, No. 2 (131). 5-14 p.

[4] Aldashev S.A. Well-posedness of the mixed problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic equations // Materials Int. conferences "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational Methods and Information Technologies" Kiev, Kiev National University T. Shevchenko. 2018, 14-15 p.

[5] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations, Moscow: Fizmatgiz, 1962. 254 p.

[6] Kamke E. Handbook of ordinary differential equations M.: Nauka, 1965, 703 p.

[7] Beitman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions, vol. 2, Moscow: Nauka, 1974, 297 p.

[8] Kolmogorov A.N. Fomin S.V. Elements of function theory and functional analysis. M.: Nauka, 1976-543p.

[9] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of Mathematical Physics M.: Nauka, 1966, 724 p.

[10] Aldashev S.A. The Dirichlet problem for a class of degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations // Izv. Sarat. University. New Ser. Mat. Phys. Inf., 2017, No. 3, P. 244-254.

[11] Smirnov V.I. The course of higher mathematics, Vol. 4, part 2, M.: Nauka, 1981. 550 p.

[12] Friedman A. Parabolic type partial differential equations. M.: Mir, 1968-527 p.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.95>

Volume 6, Number 334 (2020), 36 – 44

UDC 004.9: 519.2

IRSTI 27-43-51

**M.Yu. Babich<sup>1</sup>, M.M. Butaev<sup>1</sup>, A.A. Tarasov<sup>1</sup>, A.I. Ivanov<sup>2</sup>,  
A.Yu. Malygin<sup>2</sup>, K.T. Sauanova<sup>3</sup>, Sh.N. Sagyndykova<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>JSC "Scientific-Production Enterprise "Rubyn"", Penza, Russia;

<sup>2</sup>Education Center "Information Security Systems and Technologies",  
Penza State University", Penza, Russia;

<sup>3</sup>Almaty University of Power Energy and Telecommunication, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: mail @npp-rubin.ru, mal@yandex.ru, sauanovaklara@gmail.com, tomka2001@mail.ru

## **FUNCTIONS OF DISTRIBUTIONS OF AMOUNTS OF UNIFORALLY DISTRIBUTED RANDOM VALUES OF TIMES OF PROCESSING THE REQUEST OF THE INFOCOMMUNICATION SYSTEM**

**Abstract.** The normal distribution of a random variable is usually used in studies of the probabilistic properties of information systems. Using the normal distribution to approximate the distributions determined over a bounded distorts the physical meaning of the model and the numerical results obtained can only be used as an initial approximation. The purpose of the work is to improve methods for calculating the probability properties of infocommunication systems. The object of study is an analytical method for calculating the request processing time in the system, the subject is the formula for calculating the duration of sequential processing of a request by elements of the system with uniformly distributed independent random processing times. For positive random variables, it is proposed to use finite-interval distribution laws, for example, beta distribution. Density formulas and probability functions for the sums of two, three, and four independent randomly distributed variables are given.

**Key words:** cumulative distribution function, CDF, probability density function, PDF, probabilistic properties, infocommunication system.

**Introduction.** In a multicriteria performance evaluation, an additive convolution of its criteria is often used; the weighting coefficients of the criteria are introduced [1]. The meaning of these weights and their values are determined heuristically, based on an expert survey. In contrast to additive convolution, a multiplicative formula is known for converting criteria efficiency functions into a general indicator with the goal of its further optimization [2]. In this case, the output of the complex criteria be more grounded and it is easier to understand. One of the approaches to deriving a multiplicative complex efficiency criterion is based on a probabilistic approach: the probabilities of reaching given criteria values are estimated. The overall probability of achieving the target values of several criteria is calculated as the product of the probabilities of the individual criteria, if criteria do not depend on each other. An increase in the probability of an individual criterion increases the likelihood of a complex criterion, therefore, increases the efficiency. At the same time, for an analytical study using a simple probabilistic multiplicative complex efficiency criterion, an analytical description of the probability distribution functions of the criteria used, which are often difficult to obtain, is necessary.

One of the important indicators of the effectiveness of infocommunication systems is the responsiveness, reactivity, throughput and other properties associated with the evaluation of the system's performance over time [3]. A probabilistic criterion, for example, the duration of data processing, is defined as the probability of completion of data processing in a given time.

Another problem to be solved at the initial stages of the design of infocommunication systems is to assess the impact of the durations of individual stages of data processing on the total processing time in the system [4, 5]. This problem is solved by the most informative calculation of probability properties durations her data processing steps.

Mathematically, the tasks of calculating the data processing time are usually solved using an acyclic directed stochastic graph. The same apparatus is used to calculate network diagrams using the PERT method [6 - 8]. Computational methods PERT designed for networks of large dimension, so the use of the central limit theorem of probability theory, justifying the use of normal probability distribution of time the law of individual stages and network as a whole [9]. Such an approach, with a small number of data processing stages in the network, causes difficulties in substantiating the use of the normal distribution law defined on the interval  $(-\infty, +\infty)$ . In practice a priori known minimum duration of data processing in step, it is caused by physical features of the data processing in the step, and the maximum length is determined by the requirements of the technical tasks. The mean or mode of the duration of the stage is unlikely to occur, therefore, calculation based on them has little reliability. The calculation of only the largest and smallest data processing times (interval method) is not sufficiently informative [10]. Under such conditions, it is advisable to use a probabilistic approach with a uniform density of data processing durations at the stages [11, 12].

With the sequential execution of the stages, the duration of processing requests is reduced to summing the durations of processing at each stage, i.e. to the summation of independent random variables [13 - 15]. The probability distribution function of the sum of independent random variables is calculated through the convolution formula of the distribution functions of the terms.

The topology of the connections of information processing elements in the system can be different, but to evaluate the critical duration of information processing, a sequential chain of elements is allocated that is likely to determine the temporal properties of the system. Estimating the duration of information processing in such a chain of elements, obviously, comes down to summing the processing durations in each of them. For a deeper estimation of temporal properties, it is necessary to know the probability density function (PDF)  $f(t)$  and/or the cumulative distribution function (CDF)  $F(t)$  of a continuous random variable [14], and the best analytical solution to this problem is an accurate analytical description of the PDF and CDF.

**Mathematical model.** Let random continuous independent quantities  $T \in t_i, i \in 1, \dots, n$  be uniformly distributed on the intervals  $t_i \in [0; \beta_i], \beta_i > 0$ . To simplify further analytical transformations, random variables are ordered by increasing  $\beta_i$ . The upper bounds of the ordered random variables are indicated by the variables  $b_i$ . Ordering condition:  $b_i \leq b_{i+1}, i \in 1, \dots, n - 1$ . For example, the largest values of the random component of the duration of the first stage  $\beta_1 = 3$ , the second stage  $\beta_2 = 5$  and the third stage  $\beta_3 = 4$  will receive new notation  $b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 5$ . It is known that, due to the additive properties of the arithmetic operation of summation, changing the sequence of summing random variables does not affect the final result [13].

In contrast to [15], the simplified Heaviside function  $H(t)$  [17] was used to simplify analytical dependences:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \text{undefined}, & t = 0; \\ 1, & 0 < t. \end{cases} \quad (1)$$

The PDF and CDF of a random variable using (1) are described:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & b_1 < t < 0; \\ \frac{1}{b_1} H(b_1 - t), & 0 < t < b_1; \end{cases} \quad (2)$$

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ \frac{t}{b_1}, & 0 < t < b_1; \\ 1, & b_1 \leq t. \end{cases} \quad (3)$$

Based on these proposals, the formula expressions  $F(t)$  and  $f(t)$  are obtained for the sums of several independent random variables for a more general case than [13].

The PDF of the sum of two random variables is determined by convolution [15]:

$$f_{12}(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du, \quad (4)$$

where  $f_1(t), f_2(t)$  are the PDF of the first and second terms;  $f_{12}(t)$  is the PDF of the sum of the first and second random variables.

The CDF  $F_{12}(t)$  is defined similarly. Using the direct method,  $f_{12}(t)$  and  $F_{12}(t)$  can be determined by substituting (2), (3) in (4):

$$f_{12}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ \frac{1}{b_1 b_2} [t - H(t - b_1)(t - b_1) - H(t - b_2)(t - b_2)], & 0 < t < b_1 + b_2; \\ 0, & b_1 + b_2 \leq t; \end{cases} \quad (5)$$

$$F_{12}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ \frac{1}{2b_1 b_2} [t^2 - H(t - b_1)(t - b_1)^2 - H(t - b_2)(t - b_2)^2], & 0 < t < b_1 + b_2; \\ 1, & b_1 + b_2 \leq t. \end{cases} \quad (6)$$

The characteristic function of the sum of two uniformly distributed random variables [17]:

$$\chi_t(p) = \frac{(1 - e^{-b_1 p})(1 - e^{-b_2 p})}{b_1 b_2 p^2}.$$

The uniformly distributed random variables and their sums are symmetric, therefore, the mean, median and mode are equal, and the asymmetry coefficient is zero. For the sum of two uniformly distributed random variables, the mode is absent [15]:

$$M(T) = Me(T) = \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Dissipation properties:

- variance:

$$D(T) = \frac{(b_1^2 + b_2^2)}{12};$$

- quantile of the order of 0.2:

$$\sqrt{\frac{2}{5} b_1 b_2};$$

- quantile of the order of 0.8:

$$2\sqrt{\frac{2}{5} b_1 b_2};$$

- 2nd order starting moment :

$$m_2(T) = \frac{b_1^2 + b_2^2}{3} + \frac{b_1 b_2}{2};$$

- 3rd order starting moment :

$$m_3(T) = \frac{b_1^3 + b_2^3}{4} + \frac{b_1 b_2 (b_1 + b_2)}{2};$$

- 4th order starting moment :

$$m_4(T) = \frac{b_1^4 + b_2^4}{5} + \frac{b_1 b_2 (b_1^2 + b_2^2)}{2} + \frac{2}{3} b_1^2 b_2^2 ;$$

- kurtosis coefficient :

$$Ex(T) = \frac{9(b_1^4 + b_2^4) + 30b_1^2 b_2^2}{5(b_1^2 + b_2^2)^2} .$$

Below, without further explanation, formulas for calculating the properties for the sums of three and four uniformly distributed random variables are given. The quantiles for such distributions are usually determined by numerical methods.

The PDF, CDF, characteristic function, mean and variance of the sum of three uniformly distributed random variables

$$f_{123}(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0; \\ \frac{1}{2b_1 b_2 b_3} \left[ t^2 - H(t - b_1)(t - b_1)^2 - H(t - b_2)(t - b_2)^2 - H(t - b_3)(t - b_3)^2 + \right. \\ \quad + H(t - b_1 - b_2)(t - b_1 - b_2)^2 + H(t - b_1 - b_3)(t - b_1 - b_3)^2 + \\ \quad \left. + H(t - b_2 - b_3)(t - b_2 - b_3)^2 \right], 0 < t < b_1 + b_2 + b_3 ; \\ 0, b_1 + b_2 + b_3 \leq t; \end{cases}$$

$$F_{123}(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0; \\ \frac{1}{6b_1 b_2 b_3} \left[ t^3 - H(t - b_1)(t - b_1)^3 - H(t - b_2)(t - b_2)^3 - H(t - b_3)(t - b_3)^3 + \right. \\ \quad + H(t - b_1 - b_2)(t - b_1 - b_2)^3 + H(t - b_1 - b_3)(t - b_1 - b_3)^3 + \\ \quad \left. + H(t - b_2 - b_3)(t - b_2 - b_3)^3 \right], 0 < t < b_1 + b_2 + b_3 ; \\ 1, b_1 + b_2 + b_3 \leq t; \end{cases}$$

$$\chi_t(p) = \frac{(1 - e^{-b_1 p})(1 - e^{-b_2 p})(1 - e^{-b_3 p})}{b_1 b_2 b_3 p^3};$$

$$M(T) = Me(T) = Mo(T) = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{2};$$

$$D(T) = \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{12} .$$

A  $\gamma$ -quantile is calculated by numerically solving the equation  $F_{123}(t_\gamma) = \gamma$ . For example, a 0.2-quantile  $t_{0.2} = 1.55675$ ; 0.8-quantile  $t_{0.8} = 2.94325 = 4.5 - 1.55675$  with  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1.5$ ,  $b_3 = 2$ . Since  $F_{123}(t)$  is a polynomial interval-defined function, before solving the equation, it is necessary to determine the interval of values  $t_\gamma$  in which there will be a solution to the equation. Various methods can be used to determine the interval, for example, using a graph, or by tabulating  $F_{123}(t)$  at the boundaries of the intervals, etc.

$$m_2(T) = \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{3} + \frac{b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3}{2};$$

$$m_3(T) = \frac{b_1^3 + b_2^3 + b_3^3}{4} + \frac{b_1 b_2 (b_1 + b_2) + b_1 b_3 (b_1 + b_3) + b_2 b_3 (b_2 + b_3)}{2} + \frac{3}{4} b_1 b_2 b_3 ;$$

$$m_4(T) = \frac{b_1^4 + b_2^4 + b_3^4}{5} + \frac{b_1 b_2 (b_1^2 + b_2^2) + b_1 b_3 (b_1^2 + b_3^2) + b_2 b_3 (b_2^2 + b_3^2)}{2} +$$

$$+ \frac{2(b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2)}{3} + b_1 b_2 b_3 (b_1 + b_2 + b_3) ;$$

$$Ex(T) = \frac{9(b_1^4 + b_2^4 + b_3^4) + 30(b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2)}{5(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^2}.$$

The PDF, CDF, characteristic function, mean and variance of the sum of four uniformly distributed independent random variables:

$$f_{1234}(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0; \\ \frac{1}{6b_1 b_2 b_3 b_4} \left[ t^3 - H(t - b_1)(t - b_1)^3 - H(t - b_2)(t - b_2)^3 - H(t - b_3)(t - b_3)^3 - \right. \\ \quad - H(t - b_4)(t - b_4)^3 + H(t - b_1 - b_2)(t - b_1 - b_2)^3 + H(t - b_1 - b_3)(t - b_1 - b_3)^3 + \\ \quad + H(t - b_1 - b_4)(t - b_1 - b_4)^3 + H(t - b_2 - b_3)(t - b_2 - b_3)^3 + \\ \quad + H(t - b_2 - b_4)(t - b_2 - b_4)^3 + H(t - b_3 - b_4)(t - b_3 - b_4)^3 - \\ \quad - H(t - b_1 - b_2 - b_3)(t - b_1 - b_2 - b_3)^3 - H(t - b_1 - b_2 - b_4)(t - b_1 - b_2 - b_4)^3 - \\ \quad \left. - H(t - b_1 - b_3 - b_4)(t - b_1 - b_3 - b_4)^3 - H(t - b_2 - b_3 - b_4)(t - b_2 - b_3 - b_4)^3 \right], \\ 0 < t < b_1 + b_2 + b_3 + b_4 ; \\ 0, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq t ; \end{cases}$$

$$F_{1234}(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0; \\ \frac{1}{24b_1 b_2 b_3 b_4} \left[ t^4 - H(t - b_1)(t - b_1)^4 - H(t - b_2)(t - b_2)^4 - H(t - b_3)(t - b_3)^4 - \right. \\ \quad - H(t - b_4)(t - b_4)^4 + H(t - b_1 - b_2)(t - b_1 - b_2)^4 + \\ \quad + H(t - b_1 - b_3)(t - b_1 - b_3)^4 + H(t - b_1 - b_4)(t - b_1 - b_4)^4 + \\ \quad + H(t - b_2 - b_3)(t - b_2 - b_3)^4 + H(t - b_2 - b_4)(t - b_2 - b_4)^4 + \\ \quad + H(t - b_3 - b_4)(t - b_3 - b_4)^4 - H(t - b_1 - b_2 - b_3)(t - b_1 - b_2 - b_3)^4 - \\ \quad - H(t - b_1 - b_2 - b_4)(t - b_1 - b_2 - b_4)^4 - H(t - b_1 - b_3 - b_4)(t - b_1 - b_3 - b_4)^4 - \\ \quad \left. - H(t - b_2 - b_3 - b_4)(t - b_2 - b_3 - b_4)^4 \right], 0 < t < b_1 + b_2 + b_3 + b_4 ; \\ 1, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq t ; \end{cases}$$

$$\chi_t(p) = \frac{(1 - e^{-b_1 p})(1 - e^{-b_2 p})(1 - e^{-b_3 p})(1 - e^{-b_4 p})}{b_1 b_2 b_3 b_4 p^4},$$

$$M(T) = Me(T) = Mo(T) = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{2},$$

$$D(T) = \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}{12}.$$



For example, a 0.2-quantile  $t_{0.2} = 2.56716$  and a 0.8-quantile  $t_{0.8} = 4.4328 = 7 - 2.56716$  with  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1.5$ ,  $b_3 = 2$ ,  $b_4 = 2.5$ .

$$m_2(T) = \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}{3} + \frac{b_1b_2 + b_1b_3 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_2b_4 + b_3b_4}{2};$$

$$m_3(T) = \frac{b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + b_4^3}{4} + \frac{b_1b_2(b_1 + b_2) + b_1b_3(b_1 + b_3) + b_1b_4(b_1 + b_4) + b_2b_3(b_2 + b_3)}{2} +$$

$$+ \frac{b_2b_4(b_2 + b_4) + b_3b_4(b_3 + b_4)}{2} + \frac{3}{4}(b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 + b_2b_3b_4);$$

$$m_4(T) = \frac{b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + b_4^4}{5} + \frac{b_1b_2(b_1^2 + b_2^2) + b_1b_3(b_1^2 + b_3^2) + b_1b_4(b_1^2 + b_4^2) + b_2b_3(b_2^2 + b_3^2)}{2} +$$

$$+ \frac{b_2b_4(b_2^2 + b_4^2) + b_3b_4(b_3^2 + b_4^2)}{2} + \frac{2(b_1^2b_2^2 + b_1^2b_3^2 + b_1^2b_4^2 + b_2^2b_3^2 + b_2^2b_4^2 + b_3^2b_4^2)}{3} +$$

$$+ b_1b_2b_3(b_1 + b_2 + b_3) + b_1b_2b_4(b_1 + b_2 + b_4) + b_1b_3b_4(b_1 + b_3 + b_4) +$$

$$+ b_2b_3b_4(b_2 + b_3 + b_4) + \frac{3}{2}b_1b_2b_3b_4;$$

$$Ex(T) = \frac{9(b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + b_4^4) + 30(b_1^2b_2^2 + b_1^2b_3^2 + b_1^2b_4^2 + b_2^2b_3^2 + b_2^2b_4^2 + b_3^2b_4^2)}{5(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^2}.$$

The proposed approach can be used to derive analytical expressions for the sum of a larger number of random variables, however, the bulkiness of the formulas increases significantly. The implementation of the proposed calculation formulas in computer programs does not cause difficulties. The temporal computational complexity is determined by the number of operations of multiplication and division when calculating the values of the functions in the last sub-interval of determining the functions of the sum of random variables. For example, for  $F(t)$  with  $n = 2$ , the number of operations of multiplication and division is 6, for  $n = 3 - 18$ , and for  $n = 4 - 50$ , this means that the number of such operations obeys a quadratic dependence on  $n$ . Thus, the computational complexity of the formulas obtained is  $O(n^2)$ .

To illustrate the application of the obtained formulas, various deciles are calculated. When the probability of completion of information processing is 0.1, the duration of the information process in a chain of four elements having evenly distributed random durations in seconds at intervals  $[0; 15]$ ,  $[0; 15]$ ,  $[0; 15]$  and  $[0; 40]$  is equal to  $t_{0.1} = 24.25$  s.

Risk assessments of untimely data processing are determined through decile calculations [18]. For example, to calculate the duration of processing information in the same chain at a risk level of 10%, the equation  $F_{1234}(t_{0.9}) = 1 - 0.1$  is numerically solved, which implies  $t_{0.9} = 60.75$  s. To calculate deciles, we used the traditional method of numerical solution of nonlinear equations.

The graphs  $f_{12}(t)$ ,  $f_{123}(t)$ ,  $f_{1234}(t)$  are shown in the figure.

**Summary.** The obtained analytical dependences are applicable for independent random variables of the genus. The implementation of the formulas obtained in the form of computer programs allows the use of more complex distribution functions of random variables for more adequate modeling of data processing in infocommunication systems.

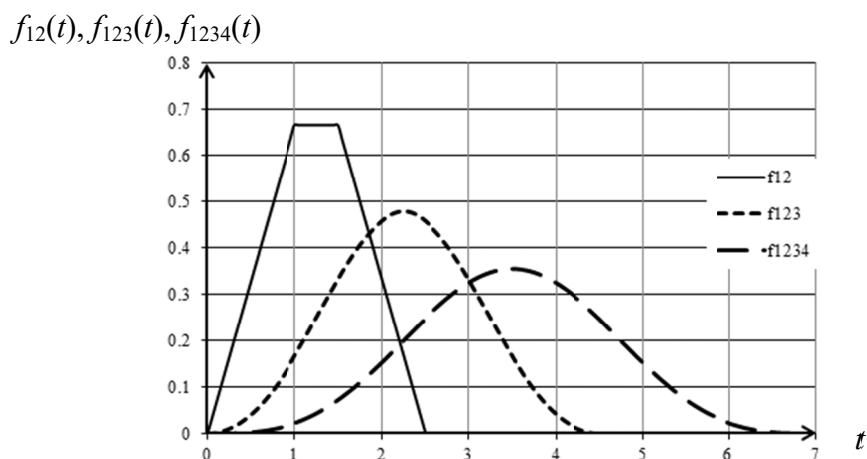


Figure 1- Graphs of the PDF  $f_{12}(t), f_{123}(t)$  and  $f_{1234}(t)$  for  $b_1 = 1, b_2 = 1.5, b_3 = 2, b_4 = 2.5$ .

**М.Ю. Бабич<sup>1</sup>, М.М. Бутаев<sup>1</sup>, А.А. Тарасов<sup>1</sup>, А.И. Иванов<sup>2</sup>,  
А.Ю. Малыгин<sup>2</sup>, К.Т. Сауанова<sup>3</sup>, Ш.Н. Сагындыкова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>«Рубин» ғылыми-өндірістік кәсіпорны» АҚ, Пенза, Ресей;

<sup>2</sup> Пенза мемлекеттік университеті, Пенза, Ресей;

<sup>3</sup> Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

### **ИНФОКОММУНИКАЦИЯЛЫҚ ЖҮЙЕНІҢ СҰРАНЫСТЫ ӨНДЕУДЕГІ БІРКЕЛКІ ҮЛЕСТІРІМДІ КЕЗДЕЙСОҚ УАҚЫТ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ ТАРАЛУ ФУНКЦИЯЛАРЫ**

**Аннотация.** Инфокоммуникациялық жүйелерді жобалаудың бастапқы кезеңдерінде шешілген маңызды міндеттердің бірі – деректерді өңдеудің жеке кезең ұзақтығының жүйеде жалпы өңдеу уақытына әсерін бағалау. Бұл мәселе деректерді өңдеу кезеңі ұзақтығының ықтималды сипаттамаларын есептеу арқылы шешіледі.

Математикалық тұрғыдан өңдеу уақытын есептеу мәселесі әдетте ациклдік бағытталған стохастикалық график арқылы шешімін табады. Аталған әдістер PERT әдісі арқылы желілік сұлбаларды есептеу үшін қолданылады. PERT есептеу әдістері ауқымды желілерге арналған, сондықтан бөлек кезеңдер мен тұтас барлық желінің орындалу уақыты үшін ықтималдық үлестірім заңдылығын қолдануды негіздейтін ықтималдық теориясының орталық шекті теоремасы қолданылады. Желідегі мәліметтерді өңдеу кезеңдері аз болған жағдайда бұл тәсіл  $(-\infty, +\infty)$  аралығында анықталған қалыпты тарату заңын қолдануда қиындықтар туғызады. Тәжірибеде кезеңдегі мәліметтерді өңдеудің минималды ұзақтығы априорлы белгілі, ол мәліметтерді өңдеудің физикалық сипаттамаларына байланысты, ал максималды ұзақтығы техникалық тапсырма талаптары негізінде анықталады. Кезең ұзақтығының орташа мәні немесе мода ықтималдығы өте аз, сондықтан оған негізделген есептеуге деген сенім де шамалы. Ең ұзақ және қысқа өңдеу уақытын есептеу (интервал әдісі) апараты жеткіліксіз. Мұндай жағдайда кезеңдер бойынша деректерді өңдеу уақытының біркелкі тығыздық ықтималдық әдісін қолданған жөн. Кезең бойынша дәйекті түрде орындалғанда сұранысты өңдеу ұзақтығы әр кезеңде өңдеу уақытының қосындысы – тәуелсіз кездейсоқ шама қосындысы есептеледі. Тәуелсіз кездейсоқ шама қосындысының ықтималдылықты үлестіру функциясы мүшелердің таралу функциялары бойынша конволюция формуласы арқылы есептеледі.

Жүйедегі ақпаратты өңдеу элементтерінің байланыс топологиясы әртүрлі болуы мүмкін, бірақ ақпаратты өңдеудің шектік ұзақтығын бағалау үшін жүйенің уақытша сипаттамасын анықтайтын тізбекті түрдегі элементтер тізбегін ерекшелейді. Осындай элементтер тізбегінде ақпаратты өңдеу ұзақтығын бағалау, әрине, олардың әрқайсысындағы өңдеу уақытының қосындысына алынады. Уақытша сипаттамаларды тереңірек бағалау үшін үздіксіз кездейсоқ шаманың ықтималдық тығыздығы функциясын  $f(t)$  және / немесе  $F(t)$  үлестірім функциясын білу қажет және бұл мәселенің ең жақсы шешімі – таралу мен тығыздық функцияларының дәл аналитикалық сипаттамасы.

Жұмыстың мақсаты – инфокоммуникациялық жүйелердің ықтималдық сипаттамаларын есептеу әдістерін жетілдіру. Зерттеу нысаны – жүйеде сұранысты өңдеу уақытын есептеудің аналитикалық әдісі, тақырыбы – біркелкі бөлінген тәуелсіз кездейсоқ өңдеу уақыты бар жүйе элементтері арқылы сұранысты ретімен

өндеу ұзактығын есептеу формуласы. Екі, үш және төрт тәуелсіз біркелкі үлестірілген кездейсоқ шама қосындысы үшін тығыздық формулалары мен ықтималдықтың функциялары келтірілді.

**Түйін сөздер:** ықтималдық тығыздығы, үлестіру функциясы, инфокоммуникациялық жүйелердің ықтимал сипаттамасы.

М.Ю. Бабич<sup>1</sup>, М.М. Бутаев<sup>1</sup>, А.А. Тарасов<sup>1</sup>, А.И. Иванов<sup>2</sup>,  
А.Ю. Малыгин<sup>2</sup>, К.Т. Сауанова<sup>3</sup>, Ш.Н. Сағындықова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>АО «Научно-производственное предприятие «Рубин», Пенза, Россия;

<sup>2</sup>Пензенский Государственный Университет, Пенза, Россия;

<sup>3</sup>Алматинский Университет Энергетики и Связи, Алматы, Казахстан

## ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕН ОБРАБОТКИ ЗАПРОСА ИНФОКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ

**Аннотация.** Одной из важных задач, решаемых на начальных этапах проектирования инфокоммуникационных систем является оценка влияния продолжительностей отдельных этапов обработки данных на общую продолжительность обработки в системе. Эта задача наиболее информативно решается через расчёт вероятностных характеристик длительностей этапов обработки данных. Математически задачи расчёта времени обработки данных обычно решаются с помощью ациклического направленного стохастического графа. Этот же аппарат используется для расчёта сетевых графиков методом PERT. Расчётные методы PERT созданы для сетей большой размерности, поэтому использована центральная предельная теорема теории вероятности, обосновывающая применение нормального закона распределения вероятности времени выполнения отдельных этапов и всей сети в целом. Такой подход при небольшом числе этапов обработки данных в сети вызывает сложности в обосновании использования нормального закона распределения, который определён на интервале  $(-\infty, +\infty)$ . На практике априорно известны минимальная продолжительность обработки данных на этапе, она обусловлена физическими особенностями обработки данных на этапе, а максимальная продолжительность определяется требованиями технического задания. Среднее значение или мода продолжительности этапа имеют место с малой вероятностью, поэтому расчёт на их основе имеет небольшую достоверность. Расчёт только наибольшего и наименьшего времени обработки данных (интервальный метод) недостаточно информативен. В таких условиях целесообразно использовать вероятностный подход с равномерной плотностью длительностей обработки данных на этапах. При последовательном выполнении этапов продолжительность обработки запросов сводится к суммированию продолжительностей обработки на каждом из этапов, т.е. к суммированию независимых случайных величин. Функция распределения вероятности суммы независимых случайных величин рассчитывается через формулу свёртки функций распределения слагаемых.

Топология соединений элементов обработки информации в системе может быть различной, но для оценки критической продолжительности обработки информации выделяют последовательную цепочку элементов, которая, вероятно, будет определять временные характеристики системы. Оценка продолжительности обработки информации в такой цепочке элементов, очевидно, сводится к суммированию продолжительностей обработки в каждом из них. Для более глубокой оценки временных характеристик необходимо знать функцию плотности вероятности  $f(t)$  и/или функцию распределения  $F(t)$  непрерывной случайной величины, и лучшим решением этой задачи является точное аналитическое описание функций распределения и плотности.

Цель работы – совершенствование методов расчёта вероятностных характеристик инфокоммуникационных систем. Объектом исследования является аналитический метод расчёта времени обработки запроса в системе, предметом – формулы расчёта продолжительности последовательной обработки запроса элементами системы с равномерно распределёнными независимыми случайными временами обработки. Приведены формулы плотности и функции вероятности для сумм двух, трёх и четырёх независимых равномерно распределённых случайных величин.

**Ключевые слова:** плотность вероятности, функция распределения, вероятностные характеристики инфокоммуникационных систем.

### Information about the authors:

Babich M. Doctor of Technical Sciences, associate professor, JSC "Scientific-Production Enterprise "Rubyn", Penza, Russia, mail@npp-rubin.ru. <https://orcid.org/0000-0003-2969-1055>;

Butaev M.M. Doctor of Technical Sciences, professor, JSC "Scientific-Production Enterprise "Rubyn", Penza, Russia, mail@npp-rubin.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6421-0048>;

Tarasov A.A. Candidate of Technical Sciences, JSC "Scientific-Production Enterprise "Rubyn", Penza, Russia, mail@npp-rubin.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7028-836X>;

Ivanov A.I. Doctor of Technical Science, associate professor, Penza State University, Penza, Russia, bio.ivan.penza@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3475-2182>;

Malygin A.Yu., Doctor of Technical Sciences, professor, Penza State University, Penza, Russia, mal@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0002-1410-7269>;

Sauanova K.T. Candidate of Technical Sciences, AUPET, Almaty, Kazakhstan. e-mail:sauanovaklara@gmail.com. <http://orcid.org/0000-0001-8484-5446>;

Sagyndykova Sh.N Candidate of Technical Sciences, AUPET, Almaty, Kazakhstan, tomka2001@mail.ru. <http://orcid.org/0000-0001-5909-584X>

## REFERENCES

[1] Ralph L. Keeney, Howard Raiffa (1993) Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value. Cambridge University press. ISBN: 0-521-43883-7 (in Eng.).

[2] Green J.M, Johnson B.W. (2002) Towards a Theory of Measures of Effectiveness. Dubbley Knox Library. Monterey California. <https://www.nps.edu/library>.

[3] Kleinrock L. (1964) Queuing systems: vol. 1 - Theory. Wiley Interscience, New York. ISBN: 978-0471491101.

[4] Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A. (2013) Modeling systems [Modelirovanie sistem]. Moskva: YUrajt. ISBN: 978-5-9916-26989 (in Russ.).

[5] Roy N., Dubey A., A. Gokhale, Dowdy L. A (2011) Capacity Planning Process for Performance Assurance of Component Based Distributed Systems. ICPE'11 - Second Joint WOSP/SIPEW International Conference on Performance Engineering, Karlsruhe, Germany, 39(3):259-270. DOI: 10.1145/1958746.1958784.

[6] Golenko-Ginzburg D.I. (2010) Stochastic Network Models for Development Planning and Management: Monograph. Voronezh : "Scientific Book ". ISBN 978-5-98222-646-4

[7] Weng-Ming Chu, Koan-Yuh Chang, Chien -Yu Lu, Chang-Hung Hsu, Chien -Hung Liu, Yung-Chia Hsiao. (2014) The New Approach to A the Determine the Critical Stochastic has the Path in the Activity the Network. Mathematical Problems in Engineering 2014(3):1123-1128. International Symposium on Computer, Consumer and Control (IS3C). DOI: 10.1109 / IS3C.2014.292 2014.292.

[8] Leemis LM, Duggan M.J, Drew J.H, Mallozzi J.A, Connell K.W. (2006) Algorithms to Calculate the Distribution of the Longest Path Length of a Stochastic Activity Network with Continuous Activity Durations. Networks. 48 (3): 143-165. DOI: 10.1002/net.20125.

[9] HOU Zhen-ting, ZHANG Xuan, KONG Xiang-xing. (2010) A new analytical algorithm for computing probability distribution of project completion time. Journal of Central South University of Technology: 1006-1010. DOI: 10.1007 / s11771-010-0591-4.

[10] Dubois D., Fargie, H., Fortin J. (2005) Computational methods for determining the latest starting times and floats of tasks in interval-valued activity networks Journal of Intelligent Manufacturing 16(4):407-421. DOI: 10.1007/s10845-005-1654-5.

[11] Abdelkader Y.H, Al-Ohali M. (2013) Estimating the Completion time of Stochastic Activity networks with uniform distributed activity Times Archives Des Sciences Journal Vol 66(4):115-134. [https://www.researchgate.net/publication/236135085\\_Estimating\\_the\\_Completion\\_time\\_of\\_Stochastic\\_Activity\\_networks\\_with\\_uniform\\_distributed\\_activity\\_Times](https://www.researchgate.net/publication/236135085_Estimating_the_Completion_time_of_Stochastic_Activity_networks_with_uniform_distributed_activity_Times).

[12] Sireesha V., Ravi Shankar N. (2011) Analysis of time estimates on right skewed distribution of activity times in PERT // Journal of Statistics and Mathematics. V. 2, Issue 1:15-22. <http://www.bioinfo.in/contents.php?id=85>

[13] Feller V. (1971) Introduction to probability theory and its applications. V. 2. ISBN: 978-0-471-25709-7.

[14] Vadzinsky R. N. (2001) Handbook of probability distributions. St. Petersburg Science. ISBN: 5-02-024919-X.

[15] Kendall M. Stuart A. (2006) Advanced Theory of Statistics. Distribution Theory. Journal of the American Statistical Association. DOI: 10.2307 / 27639788.

[16] Butaev M.M., Tarasov A.A. (2018) An analytical estimate of the processing time of a request by an information system. Radio electronics issues. V 12. : 69-73. (in Russ.).

[17] Korn G., Korn T. (2010) Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover Publications, Inc, Mineola, New York. ISBN: 0-486-41147-8.

[18] Udoumoh E.F., Ebong D.W. (2017) A Review of Activity Time Distributions in Risk Analysis American Journal of Operations Research 07(06):356-371. DOI: 10.4236/ajor.2017.76027.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.96>

Volume 6, Number 334 (2020), 45 – 52

UDK 004.9

**Zh.B. Sadirmekova<sup>1\*</sup>, M.A. Sambetbayeva<sup>1,2</sup>, J.A. Tussupov<sup>1</sup>, Zh.T. Altynbekova<sup>3</sup>**<sup>1\*</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan;<sup>2</sup>Institute of Information and Computing Technologies, Almaty, Kazakhstan;<sup>3</sup>Taraz innovation and Humanities University Taraz, Kazakhstan.

E-mail: \*Janna\_1988@mail.ru, tussupov@mail.ru, madina\_jgtu@mail.ru, janka1930@mail.ru

**BUILDING AN INFORMATION SYSTEM TO SUPPORT SCIENTIFIC  
AND EDUCATIONAL ACTIVITIES BASED  
ON THE ONTOLOGICAL MODEL OF THE SUBJECT AREA**

**Abstract.** The paper considers an approach to the creating an information system for supporting scientific and educational activities (ISSEA). Such a system is designed to systematize knowledge and information resources on the required educational and scientific topics, ensure their integration into a single information space and provide meaningful access to them.

The conceptual approach to the development process of ISSEA is based on combining the most important components of Semantic Web technology, in particular, the use of ontology to represent the semantics of information educational resources and support their intellectual analysis and knowledge management methods to improve the effectiveness of access to heterogeneous loosely connected information on various aspects of educational and scientific activities. Such information systems (is) represent information objects of knowledge (in the form of a network of knowledge and data), search for them, and ontology-driven navigation. ISSEA is equipped with an ergonomic web user interface and special editors designed to manage the knowledge integrated into it.

**Key words:** ontology; information system; integration; scientific and educational activities.

**Introduction.** Modern science and education today need to concentrate and generalize the accumulated information on various branches of knowledge and use it effectively, but meeting this need is complicated by the fact that, due to its diversity and multi-aspect, scientific and educational information resources are dispersed on remote pages of many sites and in distributed electronic libraries and archives. To solve this problem, it is necessary to solve the problem of bringing such resources related to a given area of knowledge into a single information space.

Support for the logical integrity of integrated resources will be provided on the basis of an ontology that provides a coherent and consistent view of the area of knowledge to which the integrated resources belong.

Combining scientific and educational resources on a given topic into a single information space and supporting their logical integrity will create prerequisites for solving the problem of providing meaningful access to them and mechanisms for their intellectual processing to a wide range of users. To ensure such access, the concept and architecture of an intelligent information system managed by ontology will be developed.

Domain ontologies currently find their main application in the field of building search engines, knowledge representation systems, knowledge engineering, and in solving problems of semantic integration of information resources. Ontology is defined as "a formal specification of conceptualization that takes place in some context of the domain" [1-2]. Conceptualization, in turn, is defined as the representation of the subject area through the description of a set of concepts (concepts) of the subject area and the relationships (relations) between them.

*The information system for scientific and educational activities performs the following functions:*

1. Provides access to information about various aspects and participants of scientific activity, researchers' personalities, groups, communities and organizations involved in the research process.
2. Allows you to integrate related resources on the Internet (relational databases, XML and HTML resources, news channels, etc.) into a single information space.
3. Provides a means to search for information of interest to the user in the entire information space of the portal.
4. Provides informational support for resource users (for example, when announcing various events and events).
5. Supports a flexible user interface that allows you to take into account the user's preferences when working with the resource and the services provided.

**Conceptual model of knowledge representation.** To represent the knowledge of the ISSEA, a formalized model is needed that provides flexible means of describing the concepts of the problem and subject areas and various semantic relationships between them [3-4]. An important requirement for the knowledge representation model is the ability to set restrictions on the values of properties of objects in the domain and describe the semantics of relations in the form of axioms [5]. Metaontology of the following type is proposed as a conceptual model of knowledge representation that meets the requirements described above:

$$O=(K, B, T, D, S, P, A),$$

where  $K$  is a finite non-empty set of classes describing concepts of some subject or problem domain;  $B$  is a finite set of binary relations defined on classes (concepts);  $T$  be a set of standard types;  $D$ -set of domains (sets of values of the standard string type);  $S$  is a finite set of attributes that describe the properties of concepts  $K$  and relations  $B$ ;  $P$ -set of restrictions on the values of attributes of concepts and relationships;  $A$  is a set of axioms that define the semantics of ontology classes and relations. There are three types of relationships in the ontology:  $BT$  is an asymmetric, transitive, reflexive binary inheritance relation that can be used to construct hierarchies of  $K$  concepts;  $BP$  is a binary transitive inclusion relation ("part-whole") and  $BA$  is a finite set of associative relations [6-7].

The ISSEA ontology is based on the above meta-ontology. To simplify the system configuration for the selected area of knowledge and its further maintenance, the basic ontologies that are independent of the IS domain are highlighted, as well as a subject ontology that describes a specific area of knowledge (figure 1). As the base ontology was selected as two of the ontology. The first of them describes the problem area of the system. It does not depend on the subject area of the system and is a top-level ontology that includes classes of concepts related to the organization of educational activities, such as *Person, Organization, Scientific activity, Scientific events, Publication, Geographical location, and a Collection of conference materials*. Such concepts are used to describe participants in ontology, organization of educational work, events (seminars, conferences), joint projects, and various types of information resources.

The second ontology is the ontology of subject knowledge, which defines meta-concepts for describing the concepts of possible subject areas, which define structures for describing the concepts of a specific area of knowledge. The terms of the subject area of the second ontology include the *Training course, Competence, The task of the training course, methods for solving problems, and the Result of the course development*.

The concepts of basic ontologies are linked by associative relations, the choice of which is made not only based on the completeness of the representation of the problem and subject areas of IS, but also taking into account the ease of navigation through educational content and information search. The ontology built in this way allows you to describe the subject and problem area of IS, and also sets structures for representing real objects (including information resources) and relationships between them. The semantics of relations between information objects is determined by the relations defined between the corresponding ontology concepts. The totality of such information objects and their connections forms the information content or ISSEA content.

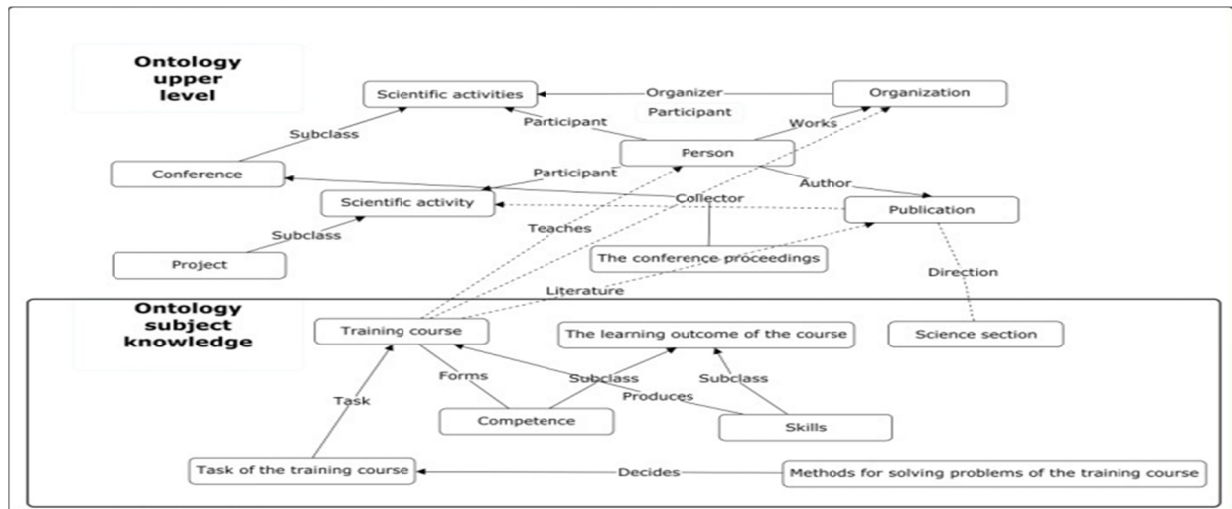


Figure 1 - Basic ontologies ISSEA

**Information content of the ISSEA.** Setting up the ISSEA for the subject area and managing the system content is carried out using specialized editors (ontology editor and data editor), implemented as a web application and available to registered users-experts on the Internet. The ontology description language and the ontology editor were selected and designed in such a way that they were clear, transparent, and easy to use. As a prototype of the ontology description language, the Already well-established SEMP-TAO knowledge representation language ISSEA taken [8-12].

The main structure for representing knowledge and data in this language is a heterogeneous semantic network consisting of objects connected by directed binary relations. The object of a semantic network can be any entity of the subject area identified by an expert or knowledge engineer. Each object is characterized by its own name and the values of the object's attribute slots. Restrictions can be set on object slots, which are logical expressions that link the values of object slots. Objects with the same properties are combined into classes. Classes have an inheritance relation defined that forms a class hierarchy. A special feature of relationships is that they can have their own attributes that define the relationship between arguments:

$$R( Arg1, Arg 2, Matr),$$

where  $R$  is the name of the relationship,  $Arg1, Arg 2$  –relation arguments (classes),  $Matr$  – a set of attributes that describe additional properties of the relationship.

Mathematical properties such as transitivity, symmetry, and reflexivity can also be attributed to relationships. Ontologies are managed using the ontology editor. In order to ensure distributed ontology development, this editor supports a mechanism for delegating rights to experts at different levels. You can use the ontology editor to create, modify, and delete any ontology elements – classes, relationships, domains, and define and modify concept hierarchies.

For a more convenient representation of ISSEA information, the ontology editor includes tools for configuring knowledge and data visualization, which allow you to set a template for visualizing objects of this class and a template for visualizing links to them for each ontology class. A class object visualization template defines the order in which all its attributes and related relationships are displayed. For clarity and meaningful representation of a reference to a specific class object, the visualization template can include both attributes of this class, and attributes of classes associated with it by relations, as well as directly attributes of these relations. The attribute values included in the link template are used to build a text representation of the object reference (hyperlinks). In order to exchange ontologies with other information systems, as well as to integrate ontologies developed by other researchers into the ISSEA, a subsystem that performs two functions has been implemented and is being debugged: 1) converting an ontology presented in the ISSEA format to an OWL representation, and 2) translating an ontology presented in the OWL format to an internal ISSEA format.

New information objects are entered using an ontology-driven data editor. The data editor allows you to create, edit, and delete information objects and relationships between them. Forms for entering specific IO and their relationships are automatically generated using the ISSEA ontology. The peculiarity of the proposed approach is that the ISSEA provides access not only to its own information resources, but also supports navigation through pre-marked (indexed) resources located on the Internet. At the same time, information about resources is accumulated by a collector of ontological information about resources, i.e. a special ISSEA subsystem that collects, analyzes, evaluates relevance, automatically indexes and classifies Internet resources that are close to the subject of is. Collector includes two modules: 1) module for collecting information (search robot) and 2) module for indexing and classifying resources. The information collection module searches for web documents using links set by experts and stored in a special database, and also determines their relevance to the IS topic. The resource indexing and classification module uses an ontology and a subject dictionary to build a meaningful index for each document and define the science section that it belongs to.

**The organization of meaningful access on the basis of ontologies.** Meaningful access to systematized knowledge and information resources of a given area of knowledge is provided by means of advanced navigation and search tools provided by ISSEA. The main scenario of a user working with ISSEA consists of selecting objects of a certain class either directly using visualization tools, or using a search engine, viewing similar objects, navigating through their associations, and filtering their lists.

**Navigation.** For the end user, the data for the ISSEA is represented as a set of related information objects. All information about a particular object and its relationships is displayed as an HTML page, the format and content of which depend on the class of this object and the visualization template specified for it. In this case, objects associated with this object are represented on its page as hyperlinks that allow you to go to their detailed description.

The list of objects is displayed as a page containing a set of links to these objects. For large arrays of objects, a composite page is formed that includes a list of pages with navigation elements according to the ISSEA data, which is the process of moving from one information object to another using the links set between them. For example, when viewing information about a specific *Grant*, we can see the values of its attributes and its relationship to other objects. Using the links provided as navigation elements, you can view detailed information about both direct links and reverse links (about *grant participants*, *about publications describing this grant*). When you click on a specific link of any information object, we can get a fairly large list of objects (for example, a list of all participants in a major project or conference). In this regard, a mechanism for filtering lists of information objects was introduced, which is understood as a way to select a subset of IO from the list by imposing restrictions on it, i.e. filter tasks. The filter is a set of conditions that define acceptable values for IO attributes and requirements for the existence of links with other information objects. This method allows you, for example, to filter a set of project participants by age or scientific degree (conditions for an attribute), and by the research methods they use (conditions for a related object).

**Search.** The search is also based on ontology, which allows the user to set the query in terms of the ISSEA domain. The main elements of such a query are the concepts and relations of the ontology, as well as the restrictions that the required data must satisfy. Acceptable limits for an attribute depend on the type of its values. For example, for attributes such as "number" (integer) and "date" (data), you can set an exact value or an acceptable range of values. To set restrictions on objects that are associated with an associative relationship with the desired object, the user can set conditions for the values of all attributes of related objects. Conditions can also be set for the attribute values of the corresponding relationships. For example, the query "Find recommended literary works of the type "article" in a training course in the period from 1920 to 1990".formally it will look like this:

**Class** «Training course»:

**Relation** «recommended literary works»:

**Class** «Publication»

**Attribute** «Type» = «article »

**Attribute** «Start date »: (>= 1920) & (<=1990)

**Attribute** «Expiry date»: (>= 1920) & (<=1990)

Now the search queries are specified using a special graphical interface that is managed by the ontology of the ISSEA. When the user selects a class of information objects to search for, a search form is



automatically generated. This form allows you to set restrictions on the attribute values of objects of the selected class, as well as on the attribute values of objects associated with this object by associative relations.

**Conclusion.** To date, there are a large number of approaches to building an information system that are based on using ontology as a conceptual model. The proposed approach to building an information system is based on the technology being developed for creating and maintaining distributed learning information environments. The purpose of the technology for organizing information resources of knowledge on ISSEA is to structure, systematize, organize context-dependent search, as well as generate new knowledge based on existing knowledge in the environment. The information base of the ISSEA consists of ontologies that, along with the traditional description of the subject area, contain a related description of the structure and typology of the corresponding data stores and network resources. In addition, using the ontology as the basis of the ISSEA, which is its declarative component, makes the system easily extensible and customizable, so that it can integrate both new knowledge and new sections of information resources.

Ontology provides tools for effectively presenting a variety of information on a given topic, supports the systematization and integration of relevant information resources, and provides meaningful access to them.

Thanks to the use of ontologies as an information model, the ISSEA is not just another catalog of resources on a given topic, but a network of knowledge and data that allows you to maintain easy navigation and meaningful search through its links. Dividing the ISSEA ontology into subject-independent and subject-specific ontologies makes the ISSEA customizable for any field of scientific knowledge. The proposed possibility of declarative adjustment of the ontology during the operation of the ISSEA will allow tracking the dynamics of new knowledge and information resources on the topic and thus support its relevance and usefulness.

**Acknowledgment.** The work is supported by the grant of funding of scientific and (or) scientific and technical research for 2018-2020. MES RK (№ AP 05133546).

**Ж.Б. Садирмекова<sup>1</sup>, М.А. Самбетбаева<sup>1,2</sup>, Д.А. Тусупов<sup>1</sup>, Ж.Т. Алтынбекова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Евразиялық ұлттық университеті, Нур-Султан, Қазақстан;

<sup>2</sup>Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup>Тараз инновациялық – гуманитарлық университеті, Тараз, Қазақстан

#### **ПӘНДІК АЙМАҚТЫҢ ОНТОЛОГИЯЛЫҚ МОДЕЛІ НЕГІЗІНДЕ ҒЫЛЫМИ-БІЛІМ БЕРУ ҚЫЗМЕТІН ҚОЛДАУДЫҢ АҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕСІН ҚҰРУ**

**Аннотация.** Жұмыста ғылыми-білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесін құру тәсілі қарастырылады. Мұндай жүйе талап етілетін білім беру және ғылыми тақырыптар бойынша білім мен ақпараттық ресурстарды жүйелеуге, олардың бірыңғай ақпараттық кеңістікке кірігуін қамтамасыз етуге және оларға мазмұнды қол жеткізуді қамтамасыз етуге арналған. Ғылыми-білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесін әзірлеу процесіне тұжырымдамалық көзқарас Semantic Web технологиясының маңызды компоненттерін біріктіруге, атап айтқанда, ақпараттық білім беру ресурстарының семантикасын ұсыну үшін онтологияны қолдануға және білім беру мен ғылыми қызметтің әртүрлі аспектілері бойынша гетерогенді әлсіз байланысқан ақпаратқа қол жеткізудің тиімділігін арттыру үшін олардың зияткерлік талдауы мен білімді басқару әдістерін қолдауға негізделген. Мұндай ақпараттық жүйелер ақпараттық білім объектілерін ұсынуды (білім мен деректер желісі түрінде), оларды іздеуді және онтология басқаратын навигацияны қамтамасыз етеді. Ғылыми-білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесінің эргономикалық қолданушы web-интерфейсімен және оған біріктірілген білімді басқаруға арналған арнайы редакторлармен жабдықталған. Бүгінгі таңда онтологияны тұжырымдамалық модель ретінде пайдалануға негізделген ақпараттық жүйені құрудың көптеген тәсілдері бар. Ақпараттық жүйені құрудың ұсынылған тәсілі таратылған оқытудың ақпараттық ортасын құру және қолдау үшін әзірленген технологияның негізі болып табылады. Ақпараттық білім ресурстарын ұйымдастыру технологиясының мақсаты-құрылымдау, жүйелеу, контекстке тәуелді іздеуді ұйымдастыру, сонымен қатар ақпараттық жүйелер негізінде жаңа білімді қалыптастыру. Ғылыми-білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесінің ақпараттық негізі онтологиядан тұрады, олар пәндік

аймақтың дәстүрлі сипаттамасымен қатар тиісті деректер қоймалары мен желілік ресурстардың құрылымы мен типологиясының сипаттамасынан тұрады. Сонымен қатар, онтологияны ақпараттық жүйенің негізі ретінде пайдалану, оның декларативті құрамдас бөлігі болып табылады, жүйені оңай кеңейтеді және конфигурациялайды, соның арқасында жаңа білім де, ақпараттықресурстардың жаңа бөлімдері де оған қосыла алады.

Онтология берілген тақырып бойынша әр түрлі ақпаратты тиімді ұсынуға, тиісті ақпараттық ресурстарды жүйелеуге және интеграциялауға және оларға мазмұнды қол жеткізуге мүмкіндік береді.

Онтология бойынша келесілер автоматты түрде құрылады:

- Ақпараттық жүйенің ішкі деректер базасының схемасы (деректер базасының логикалық құрылымы және оның тұтастығын шектеу);
- Ақпараттық жүйенің дерекқорын деректермен толтыруға арналған нысандар (онтология ұғымдарының даналары болып табылатын ақпараттық объектілер);
- Ақпараттық жүйенің ақпараттық кеңістігі бойынша навигация схемасы (онтология қатынастары бойынша);
- Іздеу сұрауларының формалары (онтология ұғымдары мен қатынастары бойынша).

Онтологияны ақпараттық модель ретінде қолданудың арқасында ғылыми және білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесі-бұл берілген тақырып бойынша ресурстардың тағы бір каталогы ғана емес, сонымен қатар ыңғайлы навигация мен мазмұнды іздеуді қолдайтын білім мен мәліметтер желісі. Ғылыми және білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесінің онтологиясын пәнге тәуелді және пәндік онтологияға бөлу ғылыми білімнің кез-келген саласына икемделеді. Пайдалану барысында онтологияны декларативті қайта құру мүмкіндігі ғылыми-білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесі тақырып бойынша жаңа білім мен ақпараттық ресурстардың пайда болу динамикасын бақылауға мүмкіндік береді және сол арқылы оның өзектілігі мен пайдалылығын қолдауды қамтамасыз етеді.

Ғылыми-білім беру қызметіне арналған ақпараттық жүйе келесі функцияларды орындайды:

1. Ғылыми қызметтің әртүрлі аспектілері мен қатысушылары, зерттеушілердің тұлғалары туралы ақпаратқа, зерттеу процесіне енгізілген топтар, қоғамдастықтар мен ұйымдар туралы ақпаратқа қол жеткізуді қамтамасыз етеді;

2. Байланысты ресурстарды Интернетке (реляциялық деректер базасы, XML және HTML ресурстары, жаңалықтар арналары және т.б.) бірыңғай ақпараттық кеңістікке біріктіруге мүмкіндік береді;

3. Порталдың барлық ақпараттық кеңістігінде пайдаланушыны қызықтыратын ақпаратты іздеу құралдарын ұсынады;

4. Ресурс пайдаланушыларына ақпараттық қолдауды қамтамасыз етеді (мысалы, әртүрлі оқиғалар мен іс-шараларды жариялау);

5. Ресурстармен және көрсетілетін қызметтермен жұмыс істеу кезінде пайдаланушының қалауын ескеруге мүмкіндік беретін икемді пайдаланушы интерфейсін қолдайды.

**Түйін сөздер:** онтология, ақпараттық жүйе, интеграция, ғылыми және білім беру қызметі.

**Ж.Б. Садирмекова<sup>1</sup>, М.А. Самбетбаева<sup>1,2</sup>, Д.А. Тусупов<sup>1</sup>, Ж.Т. Алтынбекова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Евразийского национального университета им. Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

<sup>2</sup>Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан.

<sup>3</sup>Таразский инновационно-гуманитарного университета, Тараз, Казахстан.

## **ПОСТРОЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ОНТОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ**

**Аннотация.** В работе рассматривается подход к созданию информационной системы поддержки научно-образовательной деятельности (ИСНОД). Подобная система призвана систематизировать знания и информационные ресурсы по требуемой образовательной и научной тематике, обеспечить их интеграцию в единое информационное пространство и предоставить к ним содержательный доступ. Концептуальный подход к процессу разработки ИСНОД базируется на объединении наиболее важных компонентов технологии Semantic Web, в частности, использовании онтологии для представления семантики информационных образовательных ресурсов и поддержки их интеллектуального анализа и методик управления знаниями для повышения эффективности доступа к гетерогенной слабосвязанной информации по различным аспектам образовательной и научной деятельности. Такие информационные системы (ИС) обеспечивают представление информационных объектов знаний (в виде сети знаний и данных), их поиск и управляемую онтологией навигацию. ИСНОД снабжен эргономичным пользовательским web-интерфейсом и

специальными редакторами, предназначенными для управления знаниями, интегрируемыми в него. На сегодняшний день существует большое количество подходов к построению информационной системы, которые базируются на использовании в качестве концептуальной модели онтологию. Предлагаемый подход к построению информационной системы положен в основу разрабатываемой технологии создания и сопровождения информационных сред распределенного обучения. Целью технологии организации информационных ресурсов знаний на ИСНОД является структуризация, систематизация, организация контекстнозависимого поиска, а также генерация новых знаний на основании уже имеющихся в среде ИС. Информационную основу ИСНОД составляют онтологии, которые наряду с традиционным описанием предметной области содержат соотнесенное с ним описание структуры и типологии соответствующих хранилищ данных и сетевых ресурсов. Кроме того, использование в качестве основы ИСНОД онтологии, являющейся ее декларативным компонентом, делает систему легко расширяемой и настраиваемой, благодаря чему в нее могут интегрироваться как новые знания, так и новые срезы информационных ресурсов.

Онтология предоставляет средства для эффективного представления разнообразной информации по заданной тематике, поддерживает систематизацию и интеграцию релевантных информационных ресурсов и содержательный доступ к ним.

По онтологии автоматически строятся:

- схема внутренней базы данных ИС (логическая структура БД и ее ограничения целостности);
- формы для заполнения БД ИС данными (информационными объектами, являющимися экземплярами понятий онтологии);
- схема навигации по информационному пространству ИС (по отношениям онтологии);
- формы поисковых запросов (по понятиям и отношениям онтологии).

Благодаря использованию онтологий в качестве информационной модели, ИСНОД представляет собой не просто еще один каталог ресурсов по заданной тематике, а сеть знаний и данных, по связям которой поддерживается удобная навигация и содержательный поиск. Разделение онтологии ИСНОД на предметно-независимые и предметные онтологии делает ИСНОД настраиваемым на любую область научных знаний. А возможность декларативной подстройки онтологии в ходе эксплуатации ИСНОД позволит отслеживать динамику появления новых знаний и информационных ресурсов по тематике и, тем самым, обеспечит поддержку его актуальности и полезности.

**Информационная система для научно-образовательной деятельности выполняет следующие функции:**

1. обеспечивает доступ к информации о различных аспектах и участниках научной деятельности, личностях исследователей, информации о группах, сообществах и организациях, включенных в исследовательский процесс;
2. позволяет интегрировать связанные ресурсы в сети Интернет (реляционные базы данных, XML и HTML ресурсы, новостные каналы и т. д.) в единое информационное пространство.);
3. предоставляет средства поиска интересующей пользователя информации во всем информационном пространстве портала.;
4. обеспечивает информационную поддержку пользователей ресурса (например, анонсирование различных событий и мероприятий);
5. поддерживает гибкий пользовательский интерфейс, позволяющий учитывать предпочтения пользователя при работе с ресурсом и предоставляемыми услугами.

**Ключевые слова:** онтология, информационная система, интеграция, научно-образовательная деятельность.

#### **Information about authors:**

Sadirmekova Zhanna Bakirbayevna, PhD student of specialty 6D070300 "Information system", L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan, e-mail:Janna\_1988@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7514-9315>;

Tussupov Jamalbek Aliaskarovich, Head of the Department of Information Systems, Eurasian National University named after LN Gumilev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Nur-Sultan, Kazakhstan, e-mail:tussupov@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0002-9179-0428>;

Sambetbayeva Madina Aralbayevna, Ph.D., Associate Professor, Nur-Sultan, Kazakhstan, Department of Information Systems, Eurasian National University named after L.N. Gumilev. Senior Researcher, Institute of Information and Computing Technologies, Almaty, Kazakhstan, e-mail:madina\_jgtu@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0001-9358-1614>;

Altynbekova Zhanar Tansykovna, senior lecturer of the Department of "Information and communication technologies" of Taraz innovation and Humanities University, Taraz, Kazakhstan, e-mail: janka1930@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0001-5258-7243>

**REFERENCES**

- [1] Arsky Yu.M, Gilyarevsky RS, Turov IS, Chyorny AI. (1996) Infosphere: information structures, systems, and processes in science and society 489 (in Eng)
- [2] Fedotov AM, Tusupov JA, Sambetbayeva MA, Fedotova OA, Sagnayeva SK, Bapanov AA, Tazhibayeva SZ (2016) Classification model and morphological analysis in multilingual scientific and educational information systems 96-111(in Eng)
- [3] Zagorulko Y, Borovikova O, Zagorulko G Pattern-based methodology for building the ontologies of scientific subject domains 529–542 (in Eng)
- [4] DSpace: an open source solution for accessing, managing and preserving scholarly works. Retrieved from: <http://www.dspace.org> (in Eng)
- [5] Sadirmekova ZhB., Tusupov DA. (2019) Institutional open access repositories 483–486 (in Eng)
- [6] Functional requirements for bibliographic records, final report. URL: <http://archive.ifla.org/VII/s13/frbr/frbr.htm>.
- [7] Zhizhimov OL, Fedotov AM, Fedotova OA, Construction of a generic model of an information system for processing scientific heritage documents 5-14 (in Eng)
- [8] ANSI/NISO Z39.88-2004 (R2010) (2010) The open URL framework for context-sensitive services. National Information Standards Organization 122 (in Eng)
- [9] CERIF 2008 - 1.2 Full Data Model (FDM). Introduction and specification. URL: [http://www.eurocris.org/Uploads/Web%20pages/CERIF2008/Release\\_1.2/CERIF2008\\_1.2\\_FDM.pdf](http://www.eurocris.org/Uploads/Web%20pages/CERIF2008/Release_1.2/CERIF2008_1.2_FDM.pdf) (in Eng)
- [10] Library linked data incubator group final report. Retrieved from: <http://www.w3.org/2005/Incubator/lld/XGR-lld-20111025>
- [11] Braginskaya L, Kovalevsky V, Grigoryuk A, Zagorulko G. Ontological approach to information support of investigations in active seismology 27-29. <https://doi:10.1109/RPC.2017.8168060> (in Eng)
- [12] Fedotov AM, Tusupov JA, Sambetbayeva MA, Sagnayeva SK, Bapanov AA, Nurgulzhanova AN, Yerimbetova AS (2016) Using the thesaurus to develop it inquiry system 44-61(in Eng). URL: <http://www.jatit.org/volumes/Vol86No1/6Vol86No1.pdf>

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.97>

Volume 6, Number 334 (2020), 53 – 60

UDK 521.1

MRNTI 41.03.02

**M. Zh. Minglibayev<sup>1,2</sup>, A.B. Kosherbayeva<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;<sup>2</sup>Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: minglibayev@gmail.com, kosherbaevaayken@gmail.com

**EQUATIONS OF PLANETARY SYSTEMS MOTION**

**Abstract.** The study of the dynamically evolution of planetary systems is very actually in relation with findings of exoplanet systems.  $N$  free spherical bodies problem is considered in this paper, mutually gravitating according to Newton's law, with isotropically variable masses as a celestial-mechanical model of non-stationary exoplanetary systems. The dynamic evolution of planetary systems is learned, when evolution's leading factor is the masses' variability of gravitating bodies themselves. The laws of the bodies' masses varying are assumed to be known arbitrary functions of time. When doing so the rate of varying of bodies' masses is different. The planets' location is such that the orbits of planets don't intersect. Let us treat this position of planets is preserve in the evolution course. The motions are researched in the relative coordinates system with beginning in the center of the parent star, axes that are parallel to corresponding axes of the absolute coordinates system. The canonical perturbation theory is used on the base aperiodic motion over the quasi-canonical cross-section. The bodies evolution is studied in the osculating analogues of the second system of canonical Poincare elements. The canonical equations of perturbed motion in analogues of the second system of canonical Poincare elements are convenient for describing the planetary systems dynamic evolution, when analogues of eccentricities and analogues of inclinations of orbital plane are sufficiently small. It is noted that to obtain an analytical expression of the perturbing function main part through canonical osculating Poincare elements using computer algebra is preferably. If in expansions of the main part of perturbing function is constrained with precision to second orders including relatively small quantities, then the equations of secular perturbations will obtained as linear non-autonomous system. This circumstance meaningful makes much easier to study the non-autonomous canonical system of differential equations of secular perturbations of considering problem.

**Keywords:** planetary systems, variable mass, Poincare elements, theory of perturbations, evolution equations.

**1. Introduction.** In relation with findings of exoplanet systems, the study of the dynamically evolution of planetary systems is very actually. Observations materials are wealthy [1-3], especially the study of planetary systems in the stage of non-stationary is represents of interesting, when leading factor of evolution is variability of masses of graviting bodies [4-7].

In this paper,  $n$  free spherical bodies problem is considered, mutually gravitating according to Newton's law, with isotropically variable masses. The laws of the masses varying will be considered to be known. On the base aperiodic motion over the quasi-canonical cross-section the canonical perturbation theory is used [7-8]. The motions are researched in the relative coordinates system, in the analogues of the second system of canonical Poincare elements.

**2. Problem statement and differential equations of motion in the relative coordinates system.** The motion of planetary systems is considered, consisting of  $n+1$  spherical bodies with variable masses mutually gravitating according to Newton's law. The following notations are entered:  $T_0$  – the parent star of planetary system,  $T_i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ) – planets. The motions are studied in the relative coordinates system with the beginning in the center of the parent star  $T_0$ , axes that are parallel to corresponding axes of the absolute coordinates system.

The planets' location is such that  $T_i$  is inner planet relative to planets  $T_{i+1}$ , but outer one relative to  $T_{i-1}$ . Let us treat that this position of planets in the evolution course is preserve.

The masses of bodies are changed isotropically over time and laws of variable of masses are assumed to be known

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad \dots, \quad m_n = m_n(t) \quad (2.1)$$

Let the rate of masses varying is different

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_i}{m_i}, \quad \frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_k}{m_k}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq k, \quad (2.2)$$

The motion equations of  $n$  planets in the relative coordinates system with isotropically variable masses can be written as [7,9]

$$\ddot{\vec{r}}_i = -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i + f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{\Delta_{ik}^3} - \frac{\vec{r}_k}{r_k^3} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

where  $\Delta_{ik}$  mutual distances of the center of spherical bodies

$$\Delta_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2} = \Delta_{ki}, \quad (2.4)$$

$f$  – the gravitational constant,  $m_0 = m_0(t)$  – mass of the parent star,  $m_i = m_i(t)$  – mass of planet  $T_i$ ,  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  – radius-vector of the center of spherical bodies, sign "stroke" in the summation denotes that the  $i \neq k$ .

**3. The motion equations in osculating elements.** Equations of the motion (2.3) are rewritten in the form

$$\ddot{\vec{r}}_i + f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i - \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i} \vec{r}_i = \vec{F}_i, \quad \gamma_i = \frac{m_0(t_0) + m_i(t_0)}{m_0(t) + m_i(t)} = \gamma_i(t), \quad (3.1)$$

where  $t_0$  – is initial moment of time,

$$\vec{F}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} W_i,$$

$$W_i = W_{ci} + W_{gi}, \quad (3.2)$$

$$W_{gi} = f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right), \quad W_{ci} = -\frac{\ddot{\gamma}_i}{2\gamma_i} r_i^2. \quad (3.3)$$

Obtained form of relative motion equations (3.1) is convenient to use perturbations theory formulated to such non-stationary systems [7].

When doing so expressions (3.2) are the perturbing forces. If the perturbing forces are equal to zero, then obtain integrable unperturbed motions.

At  $W_i = 0$  the equations (3.1) describe aperiodic motion over the quasi-canonical cross-section [7,8]

$$\ddot{\vec{r}}_i + f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i - \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i} \vec{r}_i = 0 \quad (3.4)$$

The solution of differential equations (3.4) is similar to the solution of the classical two body problem with constant masses

$$\begin{aligned} x_i &= \gamma_i \rho_i [\cos u_i \cdot \cos \Omega_i - \sin u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i], \\ y_i &= \gamma_i \rho_i [\cos u_i \cdot \sin \Omega_i + \sin u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i], \\ z_i &= \gamma_i \rho_i \sin u_i \cdot \sin i_i, \quad r_i = \gamma_i \rho_i, \quad u_i = \theta_i + \omega_i, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\rho_i = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i \cos \theta_i}, \quad (3.6)$$

where  $u_i$  – analogue of the latitude argument,  $\theta_i$  – analogue of the true anomaly. The solutions (3.5)-(3.6) will be used as initial unperturbed motion. The values

$$a_i, e_i, i_i, \omega_i, \Omega_i \quad (3.7)$$

are analogues of known Kepler elements. When doing so,  $a_i$  – analogue of a semimajor axis,  $e_i$  – analogue of eccentricity,  $\omega_i$  – analogue of the pericenter argument,  $i_i$  – analogue of inclinations of the orbit,  $\Omega_i$  – analogue of the longitude of an ascending node.

In the case of quasi-elliptic motion  $e_i < 1$  the dependence of analogues of the mean anomaly  $M_i$  on time

$$M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad (3.8)$$

are determined taking into account the laws of masses variation. Here  $n_i$  – the analogue of mean motion,  $\mu_{i0}$  – gravitational parameter

$$n_i = \frac{\sqrt{\mu_{i0}}}{a_i^{3/2}} = \text{const}, \quad \mu_{i0} = f[m_0(t_0) + m_i(t_0)]. \quad (3.9)$$

When doing so,  $\phi_i(t)$  – the primary function of the values

$$\frac{1}{\gamma_i^2(t)} = \left( \frac{m_0(t) + m_i(t)}{m_0(t_0) + m_i(t_0)} \right)^2. \quad (3.10)$$

Correspondingly  $\phi_i(\tau_i)$  is a dynamically element, analogue of the pericenter passage time. By  $\tau_i$  – is denoted passage time through the pericenter. We emphasize that in unperturbed motion mean angular velocity is variable and depends on laws of masses variability of corresponding bodies.

$$\dot{M}_i = n_i \left( \frac{1}{\gamma_i^2(t)} \right) = n_i \left( \frac{m_0(t) + m_i(t)}{m_0(t_0) + m_i(t_0)} \right)^2. \quad (3.11)$$

In unperturbed motion, formally mathematically, the Kepler equations are occurs, which allows to find coordinates and velocities as functions of time.

In the case of quasi-elliptic motion ( $e_i < 1$ ), regular integration of the differential equation of unperturbed motion (3.7) can be defined by the following six elements of quasi-elliptic motion

$$a_i, e_i, i_i, \omega_i, \Omega_i, \phi_i(\tau_i). \quad (3.12)$$

In work [7] a corresponding perturbation theory is constructed, which will be widely used in this paper, by using elements (3.12) as unperturbed.

For our purposes analogues of the second system of canonical Poincare elements are preferred

$$\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i, \quad (3.13)$$

which are entered according to the formulas

$$\Lambda_i = \sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i}, \quad \lambda_i = l_i + \pi_i, \quad (3.14)$$

$$\xi_i = \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos \pi_i, \quad \eta_i = -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin \pi_i, \quad (3.15)$$

$$p_i = \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i)} \cos \Omega_i, \quad q_i = -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i)} \sin \Omega_i. \quad (3.16)$$

where

$$l_i = M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad \pi_i = \Omega_i + \omega_i, \quad (3.17)$$

The differential equations of  $n$  spherical bodies motion in the osculating analogues of the second system of Poincare variable (3.14)-(3.16) have canonical form

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

where the Hamilton functions

$$R_i^* = \frac{\mu_{i0}^2}{2\Lambda_i^2} \cdot \frac{1}{\gamma_i^2(t)} + W_i(t, \Lambda_i, \xi_i, p_i, \lambda_i, \eta_i, q_i) \quad (3.19)$$

The canonical equations of perturbed motion (3.18) are convenient for describing the dynamic evolution of planetary systems, when analogues of eccentricities and analogues of inclinations of orbital plane are sufficiently small.

$$e_i \ll 1, \quad i_i \ll 1. \quad (3.20)$$

The canonical equations of motion (3.18) rewrite in the form

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i} = -\frac{\mu_{i0}^2}{\gamma_i^2 \Lambda_i^3} - \frac{\partial W_i}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_i}, \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial W_i}{\partial \xi_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \eta_i}, \\ \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_i}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

At  $W_i = 0$  it can be seen from equations (3.21) that the canonical variables  $\Lambda_i, \eta_i, \xi_i, q_i, p_i$  remain constant, and the element  $\lambda_i$  – mean longitude is an increasing function of time.

**4. The expansion of the perturbing functions.** To write explicitly the right-hand sides of the perturbed motion equations (3.21), it is necessary to Express the perturbing function (3.2)-(3.3) in terms of the osculating elements (3.14) - (3.16). The expression of the value  $W_{ci}$  through osculating elements is simple, and its explicit analytical form is known [7]. The main difficulties represent the expansion into a series of the force function of the Newtonian interaction of bodies

$$W_{gi} = f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right). \quad (4.1)$$

through osculating elements (3.14)-(3.16).

It is advisable to emphasize the main and indirect parts in the expression of the perturbing function (4.1)

$$\begin{aligned} W_{gi} &= f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right) = f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{r_k^3} \right) = \\ &= f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{r_i \cdot r_k \cdot \text{Cos} \psi_{ik}}{r_k^3} \right) = f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f \sum_{k=1}^n m_k \left( r_i \cdot \left( \frac{1}{r_k^2} \right) \cdot \text{Cos} \psi_{ik} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

We denote the main and indirect parts of the perturbing function (4.1)

$$W_{gi,main} = f \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{1}{\Delta_{ik}} \right), \quad W_{gi,ind} = -f \sum_{k=1}^n m_k \left( r_i \cdot \left( \frac{1}{r_k^2} \right) \text{Cos}(\psi_{ik}) \right). \quad (4.3)$$



The indirect part of the perturbing function (4.3) does not contribute to the expressions of the secular perturbing function as in the classical many body problem [10]. Therefore, it is sufficient to have an analytical expression of the main part of the perturbing function (4.3) in terms of the canonical elements (3.14)-(3.16) to obtain differential equations of secular perturbations in the canonical osculating elements (3.14)-(3.16).

To obtain an analytical expression of the main part of the perturbing function (4.3), through the canonical osculating elements (3.14)-(3.16), it is necessary to have a decomposition in a series of quantities

$$\left( \frac{1}{\Delta_{ik}} \right), \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq k. \tag{4.4}$$

These are very cumbersome and time-consuming algebraic calculations that are performed using computer algebra. In work [8,11,12], such calculations were performed for the two-planet problem of three bodies with variable masses, with precision to second orders including relatively small quantities (3.20).

For the  $n$  planetary problem of many body with isotropically varying masses, considered in this paper, the expansion into a series of quantities (4.4) is performed in exactly the same way. However, the calculation volume for a many planet problem is growing, which is natural.

**5. The equations of secular perturbations.** The equations of secular perturbations that determine the behavior of orbital parameters over long time intervals are obtained from the equations of motion (3.21) if instead the perturbing functions  $W_i$  their secular part is substituted

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i} = -\frac{\mu_{i0}^2}{\gamma_i^2 \Lambda_i^3} - \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\Lambda}_i &= 0, \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \xi_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \eta_i}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial q_i}. \\ W_i^{(sec)} &= W_{gi}^{(sec)} + W_{ci}^{(sec)}, & W_{gi}^{(sec)} &= W_{gi,\Gamma\Omega}^{(sec)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Naturally, the following system of canonical equations is split off from the system of differential equations (5.1)

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \xi_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \eta_i}, \\ \dot{q}_i &= -\frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.3}$$

If, in the expansion into a series of quantities (4.4), we restrict ourselves to second-order accuracy, including relatively small quantities (3.20), then the system of equations (5.3) will turn out to be a linear non-Autonomous system. When doing so approximate formulas for the relationship of various systems of osculating elements as initial assumptions have the form

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{\Lambda_i} e_i \cos \pi_i, & \eta_i &= -\sqrt{\Lambda_i} e_i \sin \pi_i, & \Lambda_i e_i^2 &= \xi_i^2 + \eta_i^2, & tg \pi_i &= -\eta_i / \xi_i, \\ p_i &= \sqrt{\Lambda_i} \sin i \cos \Omega_i, & q_i &= -\sqrt{\Lambda_i} \sin i \sin \Omega_i, & \Lambda_i \sin^2 i &= p_i^2 + q_i^2, & tg \Omega_i &= -q_i / p_i. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Then, in turn, the resulting system of canonical equations (5.3) is divided into two separate subsystems (see details in [8]). The first subsystem defines the equations of secular perturbations for eccentric elements. The second subsystem defines the equations of secular perturbations for the oblique elements. The linearity of the system of differential equations (5.3) in the approximation (5.4) significantly facilitates the study of the non-Autonomous canonical system of differential equations of secular perturbations (5.3) of the problem in this formulation.

**6. Conclusion.** In this paper, the differential equations of secular perturbations for non-stationary  $n$  planetary systems with isotropically varying masses in analogs of the second system of canonical Poincare elements are obtained in analytical form.

To obtain the actual expansion of the perturbing function through osculating elements, it is planned to use the analytical computing system "Wolfram Mathematica" [13,14].

The resulting equations will be used to study the effects of mass variability during the evolution of exoplanetary systems. This will take into account the effects of the decrease in the mass of the parent star and the increase in the mass of planets due to the accretion of matter from the remnants of the protoplanetary disk.

М.Дж. Минглибаев<sup>1,2</sup>, А.Б. Кошербаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Өл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup> В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Алматы, Қазақстан

### ПЛАНЕТА ЖҮЙЕСІНІҢ ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУЛЕРІ

**Аннотация.** Экзопланета жүйесінің ашылуына байланысты планета жүйелерінің динамикалық эволюциясын зерттеу өзекті мәселеге айналды. Жұмыста ньютон заңы бойынша өзара гравитацияланатын, нестационарлы экзопланеталық жүйелердің аспан-механикалық моделі ретінде массалары изотропты өзгертін, еркін сфералық  $n$  дене мәселесі қарастырылған. Масса изотропты өзгерген кезде әр денеге әсер ететін реактивті күштердің қосындысы нөлге тең, сол себепті де қозғалыс теңдеуі ықшамдалады. Алайда дене массаларының айнымалылығы әсерінен дифференциалды теңдеулер жүйесі автономды емес түрге келеді әрі бұл мәселені айтарлықтай күрделендіреді. Сондықтан мәселе ұйытқу теориясы әдістерімен зерттеледі. Гравитацияланатын дене массасының өзгерісі эволюцияның жетекші факторы ретінде қарастырылған жағдайда планета жүйелерінің динамикалық эволюциясы зерттеледі. Дене массаларының өзгеру заңдылығы кез келген және белгілі уақыт функциясы ретінде есепке алынады. Сонымен қатар, дене массаларының өзгеру қарқындылығы әртүрлі. Планеталардың орналасуы олардың орбиталары бір-бірімен кездеспейтіндей жағдайда қарастырылған. Эволюция кезінде планеталардың осылай орналасу жағдайы сақталады деп есептейміз. Осындай жолмен ұйытқу теориясының әдістерін қолданудың математикалық дұрыстығы негізге алынады. Планета массалары орталық жұлдыз массасынан әлдеқайда кіші деп қарастырамыз. Планета жүйесінің орталық жұлдызы центрлік дене болып саналады. Жұмыста квазиэллиптикалық қозғалыс зерттеледі. Квазиэллиптикалық қозғалыс жағдайында орташа аномалия аналогының уақытқа тәуелділігі ұйытқымаған қозғалыс кезінде массалардың өзгеру заңдылығы есебінде анықталады. Ұйытқымаған қозғалыс кезінде координаталар мен жылдамдықты уақыт функциясы ретінде анықтауға мүмкіндік беретін Кеплер теңдеуі математикалық тұрғыдан орынды деп саналады. Квазиэллиптикалық жағдайда ұйытқымаған қозғалыстың дифференциалдық теңдеуін тұрақты интегралдау квазиэллиптикалық қозғалыстың алты элементтің сәйкес аналогтарымен анықталады. Жұмыста Пуанкаре канондық элементтердің екінші жүйе аналогы негізінде канондық ұйытқу теориясы кең қолданылады. Дене эволюциясы Пуанкаре канондық элементтерінің екінші жүйесінің лездік аналогтарында зерттеледі. Эксцентриситет аналогтары мен орбита жазықтығының көлбеулік аналогтары жеткілікті түрде кіші шама болған жағдайда Пуанкаре канондық элементтерінің екінші жүйе аналогтарындағы ұйытқыған қозғалыстың канондық теңдеуі планета жүйелерінің динамикалық эволюциясын сипаттауда ыңғайлы болып саналады. Ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігінің аналитикалық өрнегін шексіз қатар ретінде Пуанкаре канондық лездік элементтерінде алу үшін компьютерлік алгебраны қолдану қажеттігі көрсетіледі. Негізінде қатарға жіктеу әдісі ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігінің аналитикалық өрнегін кез келген дәлдікте алуға мүмкіндік береді. Егер ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігін жіктеуде кіші шамаға қатысты екінші реттік дәлдікті қоса есептеумен шектелсек, онда ғасырлық ұйытқу теңдеулері сызықты автономды емес жүйе болып есептеледі. Осындай жағдайда алынған ғасырлық ұйытқудың канондық теңдеуінің жүйесі екі ішкі жүйеге жіктеледі. Бірінші жүйе ғасырлық ұйытқу теңдеулерін эксцентрицитеттік элементтер үшін анықтайды. Екінші жүйе ғасырлық ұйытқу теңдеулерін обликалық элементтер үшін анықтайды. Осы жағдай қарастырылып отырған мәселенің ғасырлық ұйытқуының дифференциалды теңдеуінің автономды емес канондық жүйесін зерттеуді айтарлықтай жеңілдетеді.

**Түйін сөздер:** планеталық жүйелер, өзгермелі масса, Пуанкаре элементтері, ұйытқу теориясы, эволюциялық теңдеулер.

М.Дж. Минглибаев<sup>1,2</sup>, А.Б. Кошербаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup>Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ

**Аннотация.** В связи с открытиями экзопланетных систем изучение динамической эволюции планетных систем является весьма актуальной. В настоящей работе рассмотрена задача  $n$  свободных сферических тел, взаимогравитирующих по закону Ньютона, с изотропно изменяющимися массами как небесно-механическая модель нестационарных экзопланетных систем. При изотропном изменении масс суммарные реактивные силы, действующие на каждое тело, равны нулю, поэтому уравнение движения упрощается. Однако из-за переменности масс тел система дифференциальных уравнений становится неавтономными, что существенно усложняет задачу. Поэтому проблема исследуется методами теории возмущения. Изучается динамическая эволюция планетных систем, когда ведущим фактором эволюции является переменность масс самих гравитирующих тел. Законы изменения масс тел считаются известными произвольными функциями времени. При этом темп изменения масс тел различный. Расположение планет таково, что орбиты планет не пересекаются. Будем считать, что это положение планет в ходе эволюции сохраняется. Этим обеспечивается математическая корректность применяемых методов теории возмущений. Считается, что массы планет намного меньше, чем масса центрального тела. Центральным телом является родительская звезда рассматриваемой планетной системы. Движения исследованы в относительной системе координат с началом в центре родительской звезды, оси которой параллельны соответствующим осям абсолютной системы координат. Используется каноническая теория возмущений на базе аperiодического движения по квазиконическому сечению. В работе рассматривается квазиэллиптическое движение. В случае квазиэллиптического движения зависимость аналогов средней аномалии от времени в невозмущенном движении определяются с учетом законов изменения масс. В невозмущенном движении формально математически имеет место уравнение Кеплера, которое позволяет найти координат и скорости как функции времени. Постоянные интегрирования дифференциального уравнения невозмущенного движения, в случае квазиэллиптического движения, определены шестью элементами квазиэллиптического движения, соответствующими аналогами кеплеровской орбиты. В настоящей работе широко использованы каноническая теория возмущения, на базе аналогов второй системы канонических элементов Пуанкаре. Динамическая эволюция тел также изучается в оскулирующих аналогах второй системы канонических элементов Пуанкаре. Канонические уравнения возмущенного движения в аналогах второй системы канонических элементов Пуанкаре, удобные для описания динамической эволюции планетных систем, когда аналоги эксцентриситетов и аналоги наклонности орбитальной плоскости – достаточно малые величины. Отмечается, что для получения аналитического выражения главной части возмущающей функции в виде бесконечных рядов, выраженные через канонические оскулирующие элементы Пуанкаре, предпочтительно использование компьютерной алгебры. Методика разложения в ряды, в принципе, дает возможность получения аналитического выражения главной части возмущающей функции, с любой заданной точностью. Если в разложение главной части возмущающей функции ограничиться с точностью до вторых порядков включительно относительно малых величин, то уравнение вековых возмущений получится линейной неавтономной системой. Тогда полученная система канонических уравнений вековых возмущений разделяется на две отдельные подсистемы. Первая подсистема определяет уравнений вековых возмущений для эксцентрических элементов. Вторая подсистема определяет уравнений вековых возмущений для облических элементов. Это обстоятельство существенно облегчает исследования неавтономной канонической системы дифференциальных уравнений вековых возмущений рассматриваемой проблемы.

**Ключевые слова:** планетные системы, переменная масса, элементы Пуанкаре, теория возмущений, эволюционные уравнения.

### Information about authors:

Minglibayev Mukhtar Zhumabekovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of al-Farabi Kazakh National University, Chief Researcher of Fesenkov Astrophysical Institute. e-mail: minglibayev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8724-2648>

Kosherbayeva Aiken Bakutzhonovna, PhD-student of al-Farabi Kazakh National University. e-mail: kosherbaevaayken@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8223-2344>

REFERENCES

- [1] <http://www.openexoplanetcatalogue.com>
- [2] <http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>
- [3] <http://exoplanet.eu>
- [4] Omarov T.B. (2002) (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. *New-York: Nova Science Publ.Inc.* P.260. ISBN:1-59033-331-4
- [5] Bekov A.A., Omarov T.B. (2003) The theory of orbits in non-stationary stellar systems // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. Vol. 22(2). P.145-153. DOI: 10.1080/1055679031000084803 (in Eng.).
- [6] Eggleton P. (2006) Evolutionary processes in binary and multiple stars. *Cambridge University Press*. P.332. ISBN:9780511536205
- [7] Minglibayev M.Zh. (2012) Dynamics of gravitating bodies with variable masses and sizes [Dinamika gravitiruyushchikh tel s peremennymi massami i razmerami]. *LAP LAMBERT Academic Publishing*. P.224. Germany.ISBN:978-3-659-29945-2 (in Russ.).
- [8] Minglibayev M. Zh., Mayemerova G.M. (2014) Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses // *Astronomy Reports*. Vol.58(9). P.667-677. DOI: 10.1134/S1063772914090066 (in Eng.).
- [9] Minglibayev M.Zh., Kosherbayeva A.B. (2020) Differential equations of planetary systems // *Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*. Vol.2(330).P.14-20. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1483.26> (in Eng.).
- [10] Murray C.D., Dermott S.F. (2010) Solar System Dynamics [Dinamika Solnechnoj sistemy]. *Per.s angl.pod.red. I.I.Shevchenko. –Moscow:Fizmatlit*, P.588. ISBN:978-5-9221-1121-8 (in Russ.).
- [11] Minglibayev M. Zh., Prokopenya A.N., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U. (2017) Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates // *Mathematics in Computer Science*. Springer international publishing V. 11(334). P.383-391. DOI: 10.1007/s11786-017-0306-4
- [12] Prokopenya A., Minglibayev M., Shomshekova S. (2019) Applications of Computer Algebra in the Study of the Two-Planet Problem of Three Bodies with Variable Masses // *Programming and Computer Software*. V.45(2). P.73–80. DOI:10.1134/S0361768819020087 (in Eng.).
- [13] Wolfram S. (2017) An elementary introduction to the Wolfram Language. *New York: Wolfram Media,Inc*. P.324. ISBN: 978-1-944183-05-9
- [14] Prokopenya A.N. (2005) Solving physical problems using the Mathematica system [Reshenie fizicheskikh zadach c ispolzovaniem sistemy Mathematica]. *BSTU Publishing, Brest*. P.260.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.98>

Volume 6, Number 334 (2020), 61 – 67

UDC 523.985

MRNTI 41.21.05; 41.21.19

**A. Sarsembayeva<sup>1,\*</sup>, F. Belisarova<sup>1</sup>, M. Odsuren<sup>2,†</sup>, A. Sarsembay<sup>3</sup>,  
 A. Tutebayeva<sup>1</sup>, A. Orazymbet<sup>1</sup>, M. Abyshev<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Department of Physics and Technology, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;<sup>2</sup>School of Engineering and Applied Sciences, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia;<sup>3</sup>School-Lyceum №250 named after T. Komekbayev, Karmakchi area, Kyzylorda region, Kazakhstan.

E-mail: \*sarsembaeva.a@kaznu.kz; †odsuren@seas.num.edu.mn; farida.belisarova@kaznu.kz; cronus87\_87@mail.ru; tutebayeva.aisulu@kaznu.kz; ayazhan.oralymbet@kaznu.kz; medeu.abishev@kaznu.kz

## DEFINITION OF THE RECONNECTION RATE OF MOST POWERFUL SOLAR FLARES

**Abstract.** We observed top 10 X-class solar flares registered in the period November 1997 - September 2017. We measure physical parameters of 10 solar flares, such as the temporal scale, size, and magnetic flux density, and find that the sizes of flares tend to be distributed more broadly as the GOES class becomes weaker and that there is a lower limit of magnetic flux density that depends on the GOES class. We also made a brief analysis of solar flares registered in these days, also has shown the duration of time and peak of solar flares in Universal time.

We have identified several physical quantities of solar flares and estimated reconnection rate of solar flares. To determine the physical parameters we used images taken with the AIA instrument on board SDO satellite at wavelengths 131 Å, 174 Å, 193 Å, 211 Å, 335 Å, 1600 Å, 1700 Å, 4500 Å, SXT - pictures, HMI Magnetogram, SOLIS Chromospheric Magnetogram, GOES XRT-data. We estimate reconnection inflow velocity, coronal Alfvén velocity, and reconnection rate using the observed values. The inflow velocities are distributed from a few km s<sup>-1</sup> to several tens of km s<sup>-1</sup>, and the Alfvén velocities in the corona are in the range from 10<sup>3</sup> to 10<sup>4</sup> km s<sup>-1</sup>. Hence, the reconnection rate is 10<sup>-3</sup>. We find that the reconnection rate in a flare tends to decrease as the GOES class of the flare increases.

**Keywords:** solar flares, X-rays, reconnection rate.

**Introduction.** Solar flares are strong “explosions”, seen as sudden brightening atmosphere of the Sun over active regions (sunspot groups). They take position in the chromosphere and the corona, but the powerful ones can increase temperature even the photosphere (producing a flare visible even in white light).

Richard Carrington, who was drawing sunspots, when he suddenly noticed two bright spots in one of the sunspot groups, observed the first Solar flare in 1859. They brightened and faded in just ten minutes. Carrington already noticed that this phenomenon was followed by the appearance of northern lights on the following night. These white-flares are very rare, less than a hundred of them were observed in the last century. In the short wavelength range (UV and X-ray) the brightening is even more bigger. During a flare, the total ultraviolet radiation of the Sun rises with a significant factor, while the level of sum X-ray radiation from the Sun can grow with orders of magnitudes [1].

Flares produce effects across the entire electromagnetic spectrum. They produce x-rays and ultraviolet radiation, which indicates very high temperatures during a flash. Radio waves show that a small fraction of particles is accelerated to high energies. Most of the radiation is synchrotron radiation generated by electrons moving along spiral paths around magnetic field lines. The flux of high-energy particles and

cosmic rays also increases on Earth as a result of intense flash. Magnetic storms on Earth often occur with a delay of about 36 hours after a flare event was observed on the Sun. This is mainly interpreted as the amplification of the solar wind, which compresses the magnetosphere and increases the magnetic field at the surface of the Earth. Flashes appear in areas where a sharp change in the direction of the local magnetic field occurs. The preferred mechanism for explaining the sudden release of energy in flashes is magnetic reconnection.

Solar flares are giant explosions on the sun that send energy, light and high speed particles into space. These flares are often associated with solar magnetic storms known as coronal mass ejections (CMEs). The number of solar flares increases approximately every 11 years, and the sun is currently moving towards another solar maximum, likely in 2013. That means more flares will be coming, some small and some big enough to send their radiation all the way to Earth.

The biggest flares are known as "X-class flares" based on a classification system that divides solar flares according to their strength. The smallest ones are A-class (near background levels), followed by B, C, M and X. Similar to the Richter scale for earthquakes, each letter represents a 10-fold increase in energy output. So an X is ten times an M and 100 times a C. Within each letter, class there is a finer scale from 1 to 9 [2-3].

C-class and smaller flares are too weak to noticeably affect Earth. M-class flares can cause brief radio blackouts at the poles and minor radiation storms that might endanger astronauts [4].

The most powerful flare measured with modern methods was in 2003, during the last solar maximum, and it was so powerful that it overloaded the sensors measuring it. Massive solar X-ray flare, which occurred on 4 November, was, at best estimate, an X28. This is a new number 1 X-ray flare for the record books, the most powerful in recorded observational history.

In this work, we have identified several physical quantities of X-class solar flares and estimated reconnection rate of X-class solar flares. We have analyzed top 10 strongest solar flares registered from the period November 1997 - September 2017.

Table 1 - Strongest solar flares since November 1997 [6].

№	GOES class	Date	Region	Start	Maximum	End
1	X28+	2003/11/04	10486	19:29	19:50	20:06
2	X20+	2001/04/02	9393	21:32	21:51	22:03
3	X17.2+	2003/10/28	10486	09:51	11:10	11:24
4	X17+	2005/09/07	10808	17:17	17:40	18:03
5	X14.4	2001/04/15	9415	13:19	13:50	13:55
6	X10	2003/10/29	10486	20:37	20:49	21:01
7	X9.4	1997/11/06	8100	11:49	11:55	12:01
8	X9.3	2017/09/06	2673	11:53	12:02	12:10
9	X9	2006/12/05	10930	10:18	10:35	10:45
10	X8.3	2003/11/02	10486	17:03	17:25	17:39

**Data analysis.** The amount of energy released during a flare [7-9],  $E_{flare}$ , can be explained by the magnetic energy stored in the solar atmosphere,

$$E_{flare} \sim E_{mag} = \frac{B_{cor}^2}{8\pi} L^3 \quad (1)$$

where  $L$  is the characteristic size of the flare and  $B_{cor}$  is the characteristic magnetic flux density in the corona. Since the released magnetic energy balances the energy flowing into the reconnection region, we can describe the energy release rate as

$$\left| \frac{dE_{mag}}{dt} \right| \sim 2 \frac{B_{cor}^2}{4\pi} V_{in} L^2 \tag{2}$$

where  $V_{in}$  is the inflow velocity of the plasma. Therefore, the time required for the energy inflow to supply the flare energy is estimated as

$$\tau_{flare} \sim E_{flare} \left( \left| \frac{dE_{mag}}{dt} \right| \right)^{-1} \sim \frac{L}{4V_{in}} \tag{3}$$

and this should be the timescale of the flare. Using this timescale, we can estimate the inflow velocity  $V_{in}$  as

$$V_{in} \sim \frac{L}{4\tau_{flare}} \tag{4}$$

To evaluate the reconnection rate in nondimensional form,  $M_A \equiv \frac{V_{in}}{V_A}$ , we must estimate the Alfvén

velocity in the inflow region:  $V_A = \frac{B_{cor}}{(4\pi\rho)^{1/2}}$ . Hence, if we measure the coronal density  $\rho$ , the spatial scale of the flare  $L$ , the magnetic flux density in the corona  $B_{cor}$ , and the timescale of flares  $\tau_{flare}$ , we can calculate inflow velocity  $V_{in}$ , Alfvén velocity  $V_A$ , and reconnection rate  $M_A$  [10-11].

The Geostationary Operational Environmental Satellite or GOES [5] carry out monitoring of solar flares in a real time. Data on the electrons, protons, and X-rays were taken from satellites GOES 13, GOES 14 and GOES 15 [5-6].

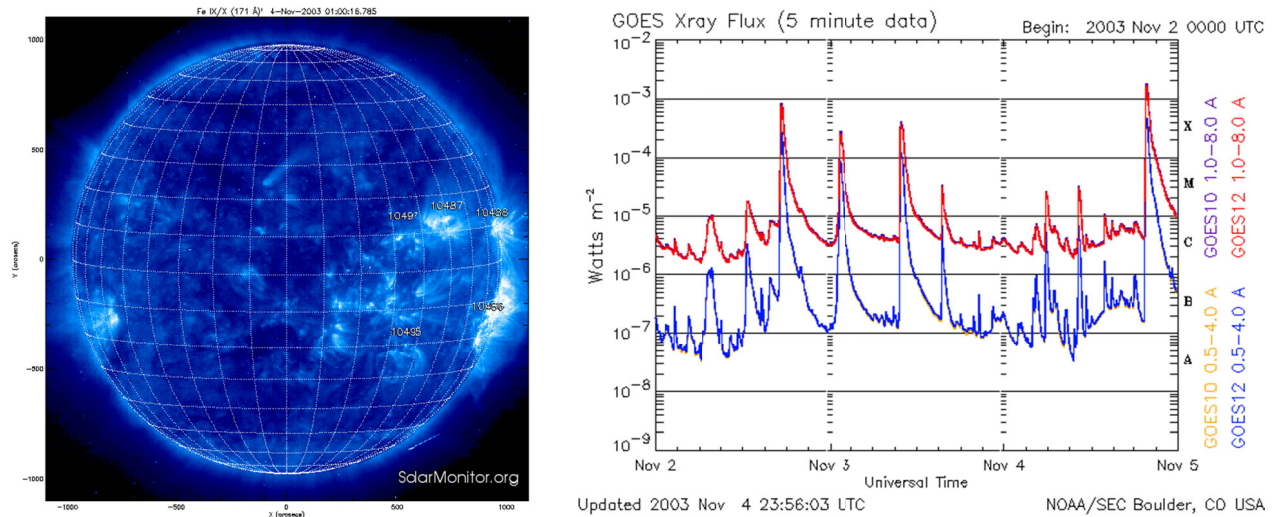


Figure 1 - Active area 10486 (XRT Hinode) and the total X-ray flux obtained in GOES 13 and GOES 15 [5]

In figure 1 shown the images obtained on the board of Hinode satellite in XRT (November 4, 2003, X28). To determine the length of the loops, we used SXT images. From the SXT data, we get values for the length of the loops.

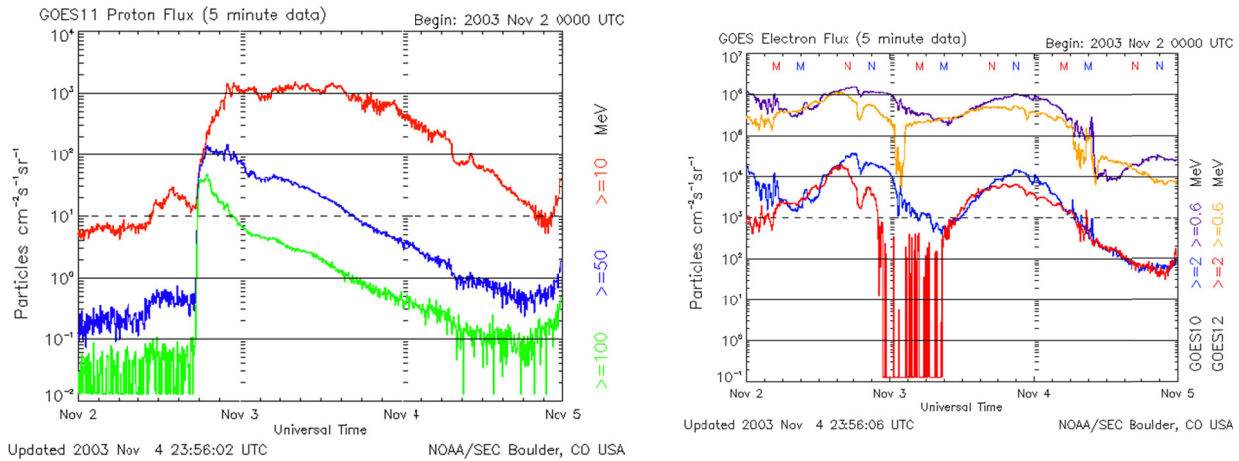


Figure 2 - Total proton and electron flux obtained in GOES 13 and GOES 15 [5]

In figure 2 shows the total flux of X-rays and an electron, which was registered on November 4, 2003.

**Results.** Using the above described method, we analyzed 10 X-class solar flares that have been registered 1997-2017 years. Examined the dependence of the reconnection rate from GOES class of solar flares. Table 2 summarizes the parameters of the flares obtained in this work.

Table 2 - Parameters of the flares

Date	Active region	GOES class	$\tau(s)$	$L(cm)$	$T(10^6 K)$	$V_{in}(cm \cdot s^{-1})$	$M_A$	$E_{flare} / \tau(erg \cdot s^{-1})$
2003/11/04	10486	X28+	1260	$2,39 \cdot 10^9$	14	$4,75 \cdot 10^5$	$5,93 \cdot 10^{-4}$	$8,73 \cdot 10^{27}$
2001/04/02	9393	X20+	1140	$1,31 \cdot 10^9$	14	$2,86 \cdot 10^5$	$3,57 \cdot 10^{-4}$	$1,57 \cdot 10^{27}$
2003/10/28	10486	X17.2+	4740	$2,32 \cdot 10^9$	14	$1,22 \cdot 10^5$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,12 \cdot 10^{27}$
2005/09/07	10808	X17+	1380	$1,96 \cdot 10^9$	14	$3,55 \cdot 10^5$	$4,43 \cdot 10^{-4}$	$4,37 \cdot 10^{27}$
2001/04/15	9415	X14.4	1860	$1,38 \cdot 10^9$	14	$1,85 \cdot 10^5$	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{27}$
2003/10/29	10486	X10	720	$2,39 \cdot 10^9$	14	$8,31 \cdot 10^5$	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$1,53 \cdot 10^{28}$
1997/11/06	8100	X9.4	360	$1,74 \cdot 10^9$	14	$1,21 \cdot 10^5$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{28}$
2017/09/06	12673	X9.3	540	$7,98 \cdot 10^8$	14	$3,69 \cdot 10^5$	$4,61 \cdot 10^{-4}$	$7,55 \cdot 10^{26}$
2006/12/05	10930	X9	1020	$4,35 \cdot 10^8$	14	$1,07 \cdot 10^5$	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$6,48 \cdot 10^{25}$
2003/11/02	10486	X8.3	1320	$2,32 \cdot 10^9$	14	$4,39 \cdot 10^5$	$5,49 \cdot 10^{-4}$	$7,6 \cdot 10^{27}$

There is a weak correlation between the timescale  $\tau_{flare}$  and the GOES peak flux (figure 3a). The characteristic size of flares, L, shows a larger scatter when the GOES peak flux is smaller (figure 3b). Figure 4 shows the dependence of the reconnection rate  $M_A$  from GOES class.

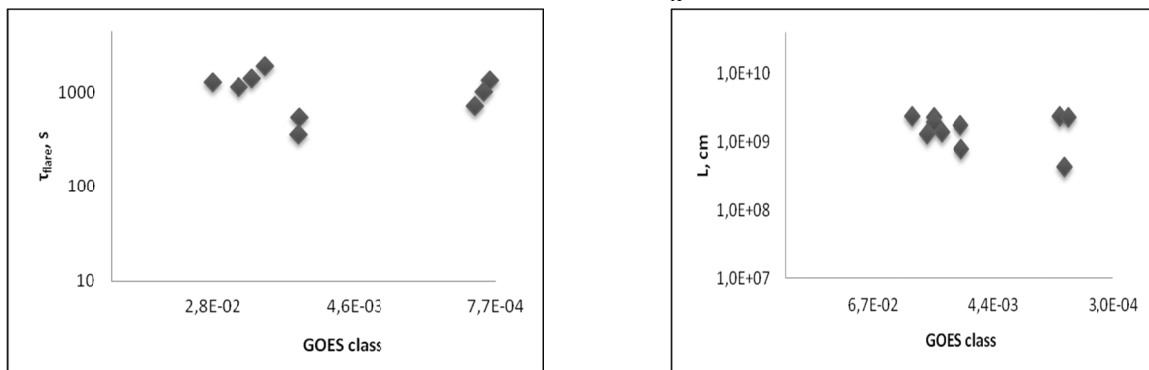


Figure 3 - Physical parameters of each flare plotted against the GOES class. (a) Timescale  $\tau_{flare}$ . (b) Size L



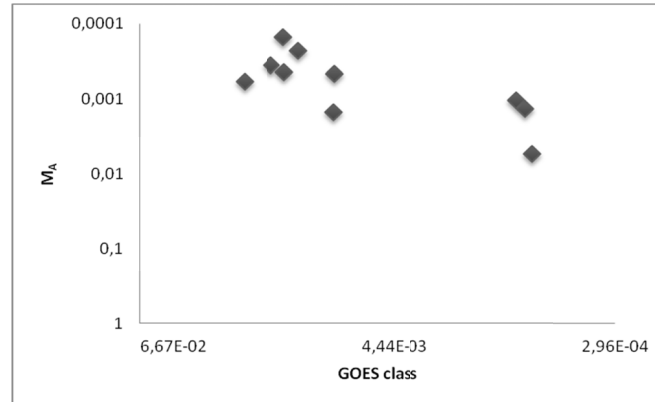


Figure 4 - Reconnection rate  $M_A$  plotted against GOES class

**Conclusion.** The values of reconnection rate are distributed in the range from  $10^{-4}$  –  $10^{-3}$ . Here, the value of the reconnection rate decreases as the GOES class increases. The value of the reconnection rate obtained in this study is within 1 order of magnitude from the predicted maximum value of the Petschek model [12].

**А.Т. Сарсембаева<sup>1,\*</sup>, Ф.Б. Белисарова<sup>1</sup>, М. Одсурен<sup>2,†</sup>, А.Т. Сарсембай<sup>3</sup>,  
А.С. Түтебаева<sup>1</sup>, А.Т. Оразымбет<sup>1</sup>, М.Е. Абишев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup>Инженерлік және қолданбалы ғылымдар институты,

Моңғолия ұлттық университеті, Улан-Батор, Моңғолия;

<sup>3</sup>Т. Көмекбаев атындағы №250 мектеп-лицейі, Қызылорда, Қазақстан

#### ЕҢ ҚУАТТЫ КҮН ЖАРҚЫЛЫНЫҢ ҚАЙТА ҰШТАСУ ЖЫЛДАМДЫҒЫН АНЫҚТАУ

**Аннотация.** Күн жарқылы барлық электромагниттік спектрге әсер етеді. Күн жарқылы кезінде рентген және ультрариолет сәулесі шығады әрі бұл күн жарқылында өте жоғары температураның бар екенін көрсетеді. Радиотолқын бөлшектердің кішкене бөлігінің жоғары энергияға дейін үдейтіндігін көрсетеді. Сәулеленудің көп бөлігі – спираль траекториясымен, магнит өрісі айналасындағы күш сызығы бойымен қозғалатын электрон тудыратын синхротронды сәулелену. Қарқынды жарқыл нәтижесінде жерде жоғары энергетикалық бөлшектер мен ғарыштық сәуле ағыны да артады. Жердегі магниттік дауыл көбінесе күнде қарқынды жарқыл оқиғасы байқалғаннан кейін шамамен 36 сағатқа кешігеді. Бұл негізінен магнитосфераны қысып, Жер бетіндегі магнит өрісін арттыратын күн желінің күшеюі деп түсіндіріледі. Күн жарқылы жергілікті магнит өрісінің бағыты күрт өзгертін жерде пайда болады. Күн жарқылы кезінде энергияның кенеттен босатылуын түсіндіретін қолайлы механизм – магнитті қайта ұштасу.

Күндегі қарқынды жарқыл – күн атмосферасындағы ең әсерлі энергетикалық оқиғалардың бірі. Күн жарқылының күн тәжінің энергетикалық тепе-теңдіктегі орнын және ғарыштық ауа-райындағы маңызды рөлін ескере отырып, күн белсенділігіне бақылау жұмыстары жүргізілді, энергия шығымы мен күн жарқылы индукциясының пайда болу жағдайы зерттелді. Ұлттық күн обсерваториялары көп уақытты қамтитын түрлі мәлімет (мысалы, Solar and Heliospheric Observatory, SOHO), көрініс (Solar Terrestrial Relations Observatory, STEREO) және көптеген ақпараттармен қамтамасыз етеді (Solar Dynamics Observatory, SDO). Нақтырақ айтсақ, SDO деректеріне тек бірнеше деректер қоймасы арқылы қол жеткізуге болады, мысалы, ғылыми құндылығы бар толық каденттік мәлімет немесе толық дискідегі ірі өлшемді мәліметтерді жүктеу қиынырақ.

1997 жылғы қараша мен 2017 жылғы қыркүйек аралығында тіркелген X-классына жататын 10 ең мықты күн жарқылының зерттедік. Мақалада 10 күн жарқылының физикалық параметрлерін өлшедік, ол негізінен уақыт шкаласы, күн жарқылының өзіндік өлшемін және магнит ағынының тығыздығын, GOES классы әлсірей бастаған сайын күн жарқылының өзіндік өлшемдері кеңірек таралуға бейім болатындығын анықтадық. GOES классына тәуелді магнит ағыны тығыздығының төменгі шегі анықталды. Сондай-ақ, 20-25 наурыз аралығында тіркелген күн жарқылына қысқаша талдау жүргіздік, күн жарқылы уақыт шкаласының ұзақтығы және бүкіл әлемдік уақытта көрсетілген максимумы анықталды.

Күн жарқылының бірнеше физикалық мәні мен қайта ұштасу жылдамдығын есептеп талқыладық. Физикалық параметрлерді анықтау үшін SDO спутнигі бортында AIA инструментінің 131 Å, 174 Å, 193 Å, 211 Å, 335 Å, 1600 Å, 1700 Å, 4500 Å толқын ұзындығында алынған және SXT суреті, HMI Magnetogram, SOLIS Chromospheric Magnetogram, GOES XRT деректері пайдаланылды. Байқау нәтижесінде алынған мәнді қолдана отырып, магниттік қайта ұштасудың түсу жылдамдығын, короналық Альфвен жылдамдығын және магниттік қайта ұштасуды есептедік. Ағынның түсу жылдамдығы бірнеше км с<sup>-1</sup>-ден бірнеше ондаған км-ге с<sup>-1</sup>-ге дейін таралған, ал коронадағы Альфвен жылдамдығы 10<sup>3</sup>-тен 10<sup>4</sup> км с<sup>-1</sup> диапазон аралығын құрайды. Сонымен, магнитті қайта ұштасу жылдамдығы 10<sup>3</sup> мәнін құрайды. Күн жарқылындағы магнитті қайта ұштасу жылдамдығы төмендеген сайын GOES класының жоғарылайтыны анықталды.

**Түйін сөздер:** күн жарқылы, рентген сәулесі, қайта ұштасу жылдамдығы.

**А.Т. Сарсембаева<sup>1,\*</sup>, Ф.Б. Белисарова<sup>1</sup>, М. Одсурен<sup>2,†</sup>, А.Т. Сарсембай<sup>3</sup>,  
А.С. Түтебаева<sup>1</sup>, А.Т. Оразымбет<sup>1</sup>, М.Е. Абишев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Физико-технический факультет, КазНУ им.аль-Фараби, Казакстан;

<sup>2</sup>Школа инженерных и прикладных наук,

Национальный университет Монголии, Улан-Батор, Монголия;

<sup>3</sup>Школа-лицей №250 им. Т. Комекбаева, Кармакчинский район, Кызылординская область, Казакстан

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕСОЕДИНЕНИЯ НАИБОЛЕЕ МОЩНЫХ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК**

**Аннотация.** Солнечные вспышки производят эффекты во всем электромагнитном спектре. Они производят рентгеновское и ультрафиолетовое излучение, что указывает на очень высокие температуры во время вспышки. Радиоволны показывают, что небольшая часть частиц ускоряется до высоких энергий. Большая часть излучения – это синхротронное излучение, генерируемое электронами, движущимися по спиральным траекториям вокруг силовых линий магнитного поля. Поток частиц высоких энергий и космических лучей также увеличивается на Земле в результате интенсивной вспышки. Магнитные бури на Земле часто возникают с задержкой примерно на 36 часов после того, как на Солнце наблюдалась вспышка. Это в основном интерпретируется как усиление солнечного ветра, который сжимает магнитосферу и увеличивает магнитное поле у поверхности Земли. Вспышки появляются в местах, где происходит резкое изменение направления местного магнитного поля. Предпочтительный механизм для объяснения внезапного высвобождения энергии при вспышках – это магнитное пересоединение.

Вспышки на Солнце – одно из самых впечатляющих энергетических событий в солнечной атмосфере. Учитывая их роль в энергетическом балансе солнечной короны и их функцию, играющую важную роль в космической погоде, многочисленные наблюдения исследовали выделение энергии и индукцию солнечных вспышек, уделяя особое внимание солнечной активности. Национальные солнечные обсерватории предоставляют всей сети множество данных, охватывающих обширные временные диапазоны (например, Солнечная и гелиосферная обсерватория, SOHO), многочисленные перспективы (обсерватория солнечно-земных отношений, STEREO) и возвращают много информации (обсерватория солнечной динамики, SDO). В частности, огромный объем SDO-данных доступен только из нескольких хранилищ, такой тип данных, как данные полной каденции или полный диск, представляющий научную ценность, трудно загрузить из-за их размера.

Мы наблюдали 10 мощных солнечных вспышек класса X, зарегистрированных в период с ноября 1997 г. по сентябрь 2017 г. Мы измерили физические параметры 10 солнечных вспышек, в основном шкалу времени, характерный размер вспышек и плотность магнитного потока, и обнаружили, что характерные размеры вспышек имеют тенденцию распределяться более широко, поскольку класс GOES становится слабее и здесь существует нижний предел плотности магнитного потока, которая зависит от класса GOES. Мы также сделали краткий анализ солнечных вспышек, зарегистрированных в эти дни, а также показана продолжительность времени вспышки и ее максимум по Всемирному времени.

Мы определили несколько физических величин вспышек и оценили скорость пересоединения солнечных вспышек. Для определения физических параметров мы использовали снимки, полученные с инструмента AIA на борту спутника SDO на длинах волн 131 Å, 174 Å, 193 Å, 211 Å, 335 Å, 1600 Å, 1700 Å, 4500 Å, SXT - снимки, HMI Magnetogram, SOLIS Chromospheric Magnetogram, GOES XRT-данные. Используя наблюдаемые значения, мы оценили скорость притока магнитного пересоединения, корональную альфвеновскую скорость и магнитное пересоединение. Скорости притока распределяются от нескольких км с<sup>-1</sup> до нескольких десятков км с<sup>-1</sup>, а альфвеновские скорости в короне находятся в диапазоне от 10<sup>3</sup> до 10<sup>4</sup> км с<sup>-1</sup>. Следовательно, магнитное пересоединение составляет 10<sup>-3</sup>. Мы находим, что скорость магнитного пересоединения в вспышке имеет тенденцию уменьшаться с увеличением класса GOES.

**Ключевые слова:** солнечная вспышка, рентгеновское излучение, скорость пересоединения.

**Information about authors:**

Sarsembayeva Aiganym, PhD, Senior lecturer, Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University, sarsembaeva.a@kaznu.kz; <https://orcid.org/0000-0002-3003-0038>;

Odsuren Myagmarjav, Associate professor, School of Engineering and Applied Sciences and Nuclear Research Center, National University of Mongolia, odsuren@seas.num.edu.mn; <https://orcid.org/0000-0003-2756-4909>;

Belisarova Farida, Associate professor, Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University, Email: farida.belisarova@kaznu.kz; <https://orcid.org/0000-0003-0531-3818>;

Sarsembay Akmaral, B.Sc., High school teacher, School-Lyceum No250 named after T.Komekbayev, cronus87\_87@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1066-8755>;

Tutebayeva Aisulu, B. Sc., Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University, tutebayeva.aisulu@kaznu.kz; <https://orcid.org/0000-0002-0345-0395>;

Orazymbet Ayazhan, B. Sc., Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University, ayazhan.orazymbet@kaznu.kz; <https://orcid.org/0000-0002-7833-4858>;

Abyshv Medeu, Associate professor, Head of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University, medeu.abishev@kaznu.kz; <http://orcid.org/0000-0003-3602-6934>

**REFERENCES**

- [1] Sweet P.A. Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958. P.123.
- [2] Parker E.N. Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids // J. Geophys. Res. 1957. V. 62. P.509-520.
- [3] Parker E.N. The solar flare phenomenon and theory of reconnection and annihilation of magnetic fields // Astrophys. J. Supp. 1963. V. 8. P.177-211.
- [4] Garcia, H. A.: 2004, Space Weather 2, S06003.
- [5] <http://www.ngdc.noaa.gov/stp/satellite/goes/>
- [6] <ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/space-weather/solar-data/solar-features/solar-flares/x-rays/goes/>
- [7] Isobe H., Takasaki H., Shibata K. Measurement of the Energy Release Rate and the Reconnection Rate in Solar Flares // ApJ. 2005. Vol.632. P.1184.
- [8] A.T. Sarsembayeva. Definition of reconnection rate of solar flares registered in 2011-2012 years. Adv. Studies Theor. Phys., Vol.6, 2012, no.28, 1405-1408.
- [9] Sarsembayeva A.T., et al. 26 January, 2019 solar flares diagnostics based on the soft x-ray emission measures. NEWS of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Physical and Mathematical. №2, 2019. P.41-46. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.10>
- [10] K. Nagashima, Statistical study of the reconnection rate in solar flares observed with Yohkoh SXT, ApJ, 647, 654, 2006.
- [11] Sarsembayeva A.T., et al. Solar activity monitoring for the PERIOD March 20-25, 2019. NEWS of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Physical and Mathematical. №4, 2020. P.35-41. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.63>
- [12] Petschek H.E. Magnetic field annihilation // Physics of Solar Flares / ed. by W.N. Hess. NASA SP-50. Washington: DC, 1964. P. 425-439.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.99>

Volume 6, Number 334 (2020), 68 – 73

UDC 530.1

**N.S. Serikbayev<sup>1,3</sup>, G. N. Nugmanova<sup>2,3</sup>, A.A. Meirmanova<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of General and Theoretical Physics, Nur-Sultan, Kazakhstan;

<sup>2</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of Mathematical and Computer Modeling, Nur-Sultan, Kazakhstan;

<sup>3</sup>LLP “Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics”, Nur-Sultan, Kazakhstan.

E-mail: ns.serikbayev@gmail.com; nugmanovagn@gmail.com; akbotameirmanovaa@gmail.com

**GAUGE EQUIVALENCE BETWEEN THE TWO-COMPONENT GENERALIZATION OF THE (2+1)-DIMENSIONAL DAVEY-STEWARTSON I EQUATION AND  $\Gamma$  - SPIN SYSTEM**

**Abstract.** In recent years, multidimensional nonlinear evolutionary equations have been actively studied within the framework of the theory of solitons. Their relevance is confirmed by numerous scientific publications. In this work the gauge equivalence between the (2+1)-dimensional integrable two-component Davey-Stewartson I (DSI) equation and the  $\Gamma$  - spin system is established. Multicomponent generalizations of nonlinear integrable equations are of current interest from both physical and mathematical points of view. In the theory of integrable (soliton) equations, one of the key models is integrable nonlinear Schrodinger-type (NLS) equations. A two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation, obtained on the basis of its one-component representation, and its corresponding Lax representation were proposed. A geometric connection between the two-layer spin system and the integrable two-component Manakov system is found. The nonlinear equations are integrated using the inverse scattering problem method by means of a linear system. For each integrable nonlinear equation, as is known, there is a Lax pair of two linear equations, a compatibility condition, that is, a condition of zero curvature, which this equation serves. We have obtained Lax pair whose zero curvature condition gives the  $\Gamma$  - spin system.

**Key words:** Gauge equivalence,  $\Gamma$  - spin systems, integrable nonlinear equations, Manakov system, Davey-Stewartson I (DSI) equation.

**1. Introduction**

Integrable spin systems are an important subclass of integrable nonlinear equations. Multicomponent generalizations of nonlinear integrable equations are of current interest from both physical and mathematical points of view. In the theory of integrable (soliton) equations, one of the key models is integrable nonlinear Schrodinger-type (NLS) equations [1, 2]. The DS equations of types I and II are the (1+1)-dimensional generalizations of NLS equations [3]. In the work [4, 5], a two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation, obtained on the basis of its one-component representation, and its corresponding Lax representation were proposed. A geometric connection between the two-layer spin system and the integrable two-component Manakov system is established in [6-8]. The concept of gauge equivalence of two spectral problem was introduced in [5]. The main result of this work is the establishment of gauge equivalence between the (2+1)-dimensional integrable two-component DS-I equation and the  $\Gamma$  -spin system.

Consider the (2+1)-dimensional DSI equation [4]:

$$iq_{1t} + q_{1xx} + q_{1yy} - \nu_1 q_1 - \omega_1 q_2 = 0, \tag{1}$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + q_{2yy} - \omega_2 q_1 - \nu_2 q_2 = 0, \tag{2}$$

$$-ir_{1t} + r_{1xx} + r_{1yy} - v_1r_1 - \omega_1r_2 = 0, \tag{3}$$

$$-ir_{2t} + r_{2xx} + r_{2yy} - \omega_2r_1 - v_2r_2 = 0, \tag{4}$$

$$v_{1xx} - v_{1yy} = (2r_1q_1 + r_2q_2)_{xx} + 2(r_2q_2)_{xy} + (2r_1q_1 + r_2q_2)_{yy}, \tag{5}$$

$$v_{2xx} - v_{2yy} = (r_1q_1 + 2r_2q_2)_{xx} + 2(r_1q_1)_{xy} + (r_1q_1 + 2r_2q_2)_{yy}, \tag{6}$$

$$\omega_{1xx} - \omega_{1yy} = (q_1r_2)_{xx} - 2(q_1r_2)_{xy} + (q_1r_2)_{yy}, \tag{7}$$

$$\omega_{2xx} - \omega_{2yy} = (q_2r_1)_{xx} - 2(q_2r_1)_{xy} + (q_2r_1)_{yy}, \tag{8}$$

where  $r = \pm q^*$ ,  $q^*$  is the complex conjugate of  $q$ ,  $q_i = q_i(x, y, z)$ ,  $r_i = r_i(x, y, z)$  are complex-valued functions and  $v_i = v_i(x, y, t)$ ,  $\omega_i = \omega_i(x, y, t)$  ( $i = 1, 2$ ) are real functions.

Lax representation for this equation is given in the form

$$F_y = \Sigma F_x + QF, \tag{9}$$

$$F_t = 2i\Sigma F_{xx} + 2iQF_x + A_0F, \tag{10}$$

where

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & i(q_{1x} + q_{1y}) & i(q_{2x} + q_{2y}) \\ -i(r_{1x} - r_{1y}) & c_{22} & c_{23} \\ -i(r_{2x} - r_{2y}) & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

The one-component cases of these equations have been extensively studied in [2, 3].

## 2. Gauge equivalence between the $\Gamma$ - spin system and two-component generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation

The  $\Gamma$  - spin system reads as

$$i\Gamma_t - 4i\alpha_x\Gamma + 4i\alpha\Gamma_x + 4i\alpha_y + \Gamma \{ \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + (\Gamma_x - \Gamma_y)^2 \} = 0, \tag{11}$$

where

$$\Gamma = g^{-1} \Sigma g, \Gamma^2 = I, \tag{12}$$

are

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \in su(3).$$

The Lax pair is given as

$$\Phi_y = \Gamma\Phi_x, \tag{13}$$

$$\Phi_t = 2i\Gamma\Phi_{xx} + iV'\Phi_x, \tag{14}$$

where

$$V' = 4i\alpha + \Gamma_x + \Gamma\Gamma_y. \tag{15}$$

**Theorem.** *The two-component generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation (1)-(8) and  $\Gamma$ -spin system (11) is gauge equivalent to each other.*

*Proof.* According to the definition, the systems (9)-(10) and (13)-(14) are gauge equivalent if eigenfunctions  $F$  and  $\Phi$  can be connected as  $\Phi = g^{-1}F$  or  $F = g\Phi$ , where  $g$  is the solution of Eq. (9) at zero spectral parameter  $\lambda$ .

From the transformation  $F = g\Phi$  we take the derivatives with respect to  $y$  and  $t$ , then equate them to the left sides of the Eqs. (13)-(14). As a result, we obtain the following equations

$$\Phi_y = (g^{-1}\Sigma g_x + g^{-1}Qg - g^{-1}g_y)\Phi + g^{-1}\Sigma g\Phi_x. \quad (16)$$

$$\Phi_t = 2ig^{-1}\Sigma g\Phi_{xx} + 2ig^{-1}(2\Sigma g_x + Qg)\Phi_x + g^{-1}(2i\Sigma g_{xx} + 2iQg_x + A_0g\Phi - g_t)\Phi. \quad (17)$$

On the other hand, according to the definition of gauge equivalence,  $g$  satisfies Eqs. (9)-(10):

$$g_y = \Sigma g_x + Qg, \quad (18)$$

$$g_t = 2i\Sigma g_{xx} + 2iQg_x + A_0g. \quad (19)$$

Substituting these equations into (16)-(17), we obtain

$$\Phi_y = \Gamma\Phi_x. \quad (20)$$

$$\Phi_t = (4ig^{-1}\Sigma gg^{-1}g_x + 2ig^{-1}Qg)\Phi_x + 2ig^{-1}\Sigma g\Phi_{xx}. \quad (21)$$

Further, making the substitution  $\Gamma = g^{-1}\Sigma g$  in the last equations, one can rewrite them as

$$\Phi_y = \Gamma\Phi_x, \quad (22)$$

$$\Phi_t = 2i\Gamma\Phi_{xx} + i(4\Gamma g^{-1}g_x + 2g^{-1}Qg)\Phi_x. \quad (23)$$

As can be seen, it is necessary to express  $g^{-1}g_x$  and  $g^{-1}Qg$  in terms of  $\Gamma$ -spin. To begin with, let us define  $\Gamma_x$ :

$$\Gamma_x = (g^{-1}\Sigma g_x)_x = [\Gamma, g^{-1}g_x]. \quad (24)$$

Next we introduce the notation

$$g_x g^{-1} = i\theta_0. \quad (25)$$

Here

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & -\alpha & 0 \\ \rho & 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (26)$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  and  $\rho$  are real functions. Then Eq. (24) will take the following form

$$\Gamma_x = g^{-1}[\Sigma, g_x g^{-1}]g = 2ig^{-1}\theta_1 g, \quad (27)$$

and

$$\Gamma\Gamma_x = (g^{-1}\Sigma g)(2ig^{-1}\theta_1 g) = 2ig^{-1}\theta_2 g, \quad (28)$$

where

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \eta & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

In a similar way we find  $\Gamma_y$ :

$$\Gamma_y = \Gamma\Gamma_x + 2g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ r_1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} g. \quad (30)$$

From this equation the commutator simply is  $[\Gamma, \Gamma_x] = 2\Gamma\Gamma_x$  and  $\Gamma\Gamma_y + \Gamma_x = 2g^{-1}Qg$ . Taking into account the above expressions and after some calculations, we get the following:

$$g^{-1}g_x = i\alpha\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma\Gamma_x, \quad (31)$$

$$g^{-1}Qg = \frac{1}{2}(\Gamma\Gamma_y - \Gamma_x). \quad (32)$$

If the last equations are substituted into Eq. (23), then the output is Eq. (14).

That is, here we have obtained Lax pair whose zero-curvature condition gives the  $\Gamma$  - spin system (11). Thus, we obtained the system of Eqs. (11)-(14), which was required to prove.

## 2. Conclusion.

To conclude, we obtained the Lax representation of the  $\Gamma$  - spin system (13)-(14) that is gauge equivalent to the Lax pair of the two-component generalization DSI (9)-(10).

*The work was supported by the MES RK on the GF, IRN AP08857372.*

Н.С. Серикбаев<sup>1,3</sup>, Г. Н. Нугманова<sup>2,3</sup>, А.А. Мейрманова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;

<sup>2</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;

<sup>3</sup>«Рэтбай Мырзақұлов атындағы Еуразия халықаралық теориялық физика орталығы» ЖШС, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

### ЕКІ КОМПОНЕНТТІ ЖАЛПЫ (2+1)-ӨЛШЕМДІ ДЭВИ-СТЮАРТСОН І ТЕҢДЕУІ МЕН $\Gamma$ - СПИНДІК ЖҮЙЕСІ АРАСЫНДАҒЫ КАЛИБРЛІК ЭКВИВАЛЕНТІЛІГІ

**Аннотация.** Соңғы жылдары солитондар теориясы аясында көпөлшемді сызықты емес эволюциялық теңдеулер белсенді зерттелуде. Олардың өзектілігі көптеген ғылыми жарияланымдармен дәлелденеді. Интегралданатын (солитонды) теңдеулер теориясында Шредингер типіндегі интегралданатын сызықты емес теңдеулер (ШСТ) негізгі модельдердің бірі болып саналады. Бұл теңдеуді алғаш рет Э.Шредингер кванттық жүйелердің іргелі қасиеттерін талдау үшін ұсынған және бастапқыда ол атом ішіндегі бөлшектердің өзара әрекеттесу үдерісін сипаттау үшін қолданылған [1-2].

Сызықтық емес интегралданатын теңдеулердің көпкомпонентті жалпылануы физикалық және сондай-ақ математикалық тұрғыдан қазіргі уақытта қызығушылық тудырады. Жалпыланған ШСТ теңдеуі толқындық үдерістер физикасындағы құбылыстардың тұтас жиынтығын сипаттайды. Ол физиканың түрлі саласындағы толқынды сипаттауда кеңінен тараған, атап айтқанда, сызықтық емес оптика, плазмалық физика және т.б. I және II типті Дэви-Стюартсона (ДС) теңдеуі ШСТ теңдеуінің біркомпонентті (2+1)-өлшемді жалпылануы саналады [3], ал [4-5] жұмыста интегралданатын (2+1)-өлшемді ДСІ теңдеуінің екі компонентті жалпылануы ұсынылған.

Сызықтық емес теңдеулер интегралданады, яғни сызықтық жүйе арқылы шашыранды кері есеп әдісі арқылы шешуге болады, мәні бойынша сызықтық теория әдістерімен сызықтық емес есепті зерттеуге мүмкіндік береді. Біз білетіндей, әрбір интегралданатын сызықтық емес теңдеуге арналған екі сызықтық теңдеуден тұратын Лакс жұбы бар, үйлесімділік шарты, яғни нөлдік қисықтық шарты берілген теңдеу болып саналады. [4]-жұмыста ұсынылған екі компонентті ДСІ теңдеуі оның бір компонентті ұсыну және сәйкес Лакс ұсынысы негізінде алынған. Жалпы Лакс жұбы сәйкес сызықтық емес теңдеу интегралдылығына кепілдік бермейді, бірақ бұл – қажетті шарт.

Сызықтық емес интегралданатын теңдеулерді зерттеудегі тағы бір ұғым – калибрлік эквиваленттілік маңызды рөл атқарады. Екі спектрлік есептің калибрлік эквиваленттілік ұғымы [2]-де енгізілді. Калибрлік эквиваленттік – қарастырылған теңдеулерге тән кейбір маңызды жалпы сипаттамаларды ашуға мүмкіндік беретін, сызықтық емес теңдеулерді зерттеуге арналған тәсіл. Калибрлік эквиваленттілік бірқатар жаңа интегралданатын теңдеулер құруға және Лакс жұбы арқылы дәл шешуге мүмкіндік береді.

[6-8] жұмыста екіқабатты спиндік жүйе мен интегралданатын екі компонентті Манаков жүйесі арасындағы калибрлік эквиваленттілік анықталған.

Мақалада (2+1)-өлшемді интегралданатын екі компонентті ДСІ теңдеуі (1)-(8) мен  $\Gamma$  -спиндік жүйесі (11) қарастырылған, олардың өзара байланысы зерттелген.

Калибрлі эквиваленттілік анықтамасына сәйкес, (9)-(10) және (13)-(14) жүйесінің  $F$  және  $\Phi$  меншікті функцияларын  $\Phi = g^{-1}F$ ,  $g$  немесе  $F = g\Phi$ , мұндағы  $g$  - (9) теңдеудің  $\lambda$  нөлдік спектрлік параметр кезіндегі

пешімі деп байланыстырсақ, калибрлік эквивалентті деп сипатталады.  $F = g\Phi$  түрлендіруінен  $u$  және  $t$ -ға қатысты туынды аламыз, содан кейін оларды (13)-(14) теңдеулердің сол жақ бөлігіне теңестіреміз және т.б. Осылайша осы екі теңдеудің калибрлік эквиваленттілігі сәйкесінше Лакс жұбы арқылы ДСІ теңдеуінің (9)-(10) Лакс жұбы және  $\Gamma$  - спиндік жүйесінің (13)-(14) Лакс жұбы арасында дәлелденген.

Жұмыстың негізгі нәтижесі (2+1) өлшемді интегралданатын екі компонентті ДСІ теңдеуі мен  $\Gamma$  -спиндік жүйесі арасындағы калибрлік эквивалент орнатылғандығы болып саналады.

Н.С. Серикбаев<sup>1,3</sup>, Г. Н. Нугманова<sup>2,3</sup>, А.А. Мейрманова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра Общей и Теоретической Физики, Нур-Султан, Казахстан;

<sup>2</sup>Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра Математического и Компьютерного Моделирования, Нур-Султан, Казахстан

<sup>3</sup>ТОО “Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics”, Нур-Султан, Казахстан

### КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ОБОБЩЕНИЕМ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДЭВИ-СТЮАРТСОНА I И $\Gamma$ - СПИНОВОЙ СИСТЕМОЙ

**Аннотация.** В последние годы в рамках теории солитонов активно изучаются многомерные нелинейные эволюционные уравнения. Их актуальность подтверждается многочисленными научными публикациями. В теории интегрируемых (солитонных) уравнений одной из ключевых моделей являются интегрируемые нелинейные уравнения типа Шредингера (НУШ). Впервые это уравнение было предложено Э. Шредингером для анализа фундаментальных свойств квантовых систем, и первоначально с его помощью описывались процессы взаимодействия внутриатомных частиц [1-2].

Многокомпонентные обобщения нелинейных интегрируемых уравнений в настоящее время представляют интерес как с физической, так и с математической точки зрения. Обобщенное уравнение НУШ описывает целую совокупность явлений в физике волновых процессов. Оно широко распространено при описании волн в различных областях физики, в частности в волновых явлениях нелинейной оптики, физике плазмы и т.д. Как известно уравнения Дэви-Стюартсона (ДС) типов I и II являются однокомпонентными (2+1)-мерными обобщениями уравнений НУШ [3], а в работах [4, 5] предложено двухкомпонентное интегрируемое обобщение (2+1)-мерного уравнения ДСІ.

Нелинейные уравнения интегрируются, т.е. их можно решить с помощью метода обратной задачи рассеяния посредством линейной системы, который позволяет исследовать нелинейную задачу, по существу, методами линейной теории. Как мы знаем для каждого интегрируемого нелинейного уравнения существует пара Лакса из двух линейных уравнений, условием совместности, то есть условием нулевой кривизны которых служит данное уравнение. Предложенное в работе [4] двухкомпонентное уравнение ДСІ, получено на основе его однокомпонентного представления и соответствующего ему представления Лакса. Вообще, существование пара Лакса не гарантирует интегрируемость соответствующего нелинейного уравнения, но является необходимым условием.

Еще одно понятие – калибровочная эквивалентность – играет важную роль в исследованиях нелинейных интегрируемых уравнений. Понятие калибровочной эквивалентности двух спектральных задач было введено в [2]. Калибровочная эквивалентность – это подход к исследованию нелинейных уравнений, который позволяет открыть некоторые важные общие характеристики, присущие рассматриваемым уравнениям. Калибровочная эквивалентность позволяет генерировать ряд новых интегрируемых уравнений и решить их точно с помощью формулы Лакса.

В работах [6-8] найдена калибровочная эквивалентность между двухслойной спиновой системой и интегрируемой двухкомпонентной системой Манакова.

В этой статье рассмотрено (2+1)-мерное интегрируемое двухкомпонентное уравнение ДСІ (1)-(8) и  $\Gamma$  - спиновая система (11), исследована их взаимосвязь. Согласно определению калибровочной эквивалентности, системы (9)-(10) и (13)-(14) калибровочно эквивалентны, если собственные функции  $F$  и  $\Phi$  могут быть связаны следующим образом:  $\Phi = g^{-1}F$  или  $F = g\Phi$ , где  $g$  – решение уравнения (9) при нулевом спектральном параметре  $\lambda$ . Из преобразования  $F = g\Phi$  берем производные по  $u$  и  $t$ , а затем приравниваем их к левым частям уравнений (13)-(14) и т.д. Таким образом, доказана калибровочная эквивалентность этих двух уравнений с помощью соответствующих пар Лакса, т.е. парой Лакса уравнения ДСІ (9)-(10) и парой Лакса  $\Gamma$  - спиновой системы (13)-(14).

Основным результатом данной работы является установление калибровочной эквивалентности между (2+1)-мерным интегрируемым двухкомпонентным уравнением ДСІ и  $\Gamma$  - спиновой системой.



**Information about authors:**

Serikbayev Nurzhan Sagindikovich, PhD, Assoc. Professor, L. N. Gumilyov Eurasian National University, department of General and Theoretical Physics, Kazakhstan, Researcher LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics" Kazakhstan ns.serikbayev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1259-637X>;

Nugmanova Gulgassyl Nukarbaevna, Candidate of physical and mathematical sciences, Assoc. Professor. L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematical and Computer modeling, Kazakhstan, Researcher LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics". Kazakhstan nugmanovagn@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4492-2459>;

Meirmanova Akbota Assylbekovna - PhD student, L. N. Gumilyov Eurasian National University, department of General and Theoretical Physics, Kazakhstan. akbotameirmanovaa@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4050-322X>

**REFERENCES**

[1] Ablowitz M., Clarkson P.. Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series Book, 2003. 149, p. 516

[2] Zakharov V., Takhtadjan L. Equivalence of the nonlinear Schrodinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet, Theor. Math. Phys. 1979. 38, pp. 17-23.

[3] Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves, Proc. of the Royal Society of London Series A, 1974. 338, pp. 101-110.

[4] Serikbayev N., Nugmanova G., Myrzakulov R. On the two-component generalization of the (2+1)-dimensional Davey-Stewartson I equation, Journal of Physics: Conference Series 1391 (2019) 012160, [doi:10.1088/1742-6596/1391/1/012160]

[5] Serikbayev N., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations, Journal of Physics: Conference Series 1391 (2019) 012166, [doi:10.1088/1742-6596/1391/1/012166]

[6] Myrzakul A., Myrzakulov R. Darboux transformations exact soliton solutions of integrable coupled spin systems related with the Manakov system, [arXiv:1607.08151]

[7] Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation, [arXiv:1608.08553]

[8] Nugmanova G., Myrzakul A. Integrability of the two-layer spin system, Proc. of Twentieth Int. Conf. "Geometry, Integrability and Quantization", June 2-7, 2018. Varna, Bulgaria. 2019. pp. 208-214 [doi: 10.7546/giq-20-2019-208-214]

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.100>

Volume 6, Number 334 (2020), 74 – 80

МРНТИ 44.29.31

**Н.М. Айтжанов<sup>1</sup>, Б. Онгар<sup>2</sup>, П.А. Бисенбаев<sup>2</sup>, Е.С. Байтенов<sup>2</sup>, А. Жанибекұлы<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Институт электроэнергетики и электротехники,

Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup> Казахская академия трансформации и коммуникаций имени М.Тынышпаева, Алматы, Казахстан.

E-mail: ongar\_bulbul@mail.ru

## **ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В СЕТЯХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ СТАБИЛИЗАТОРА НАПРЯЖЕНИЯ С ФУНКЦИЕЙ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ**

**Аннотация.** Энергосберегающий стабилизатор напряжения относится к области электротехники и может быть использован для электропитания электротехнической аппаратуры, приводов, двигателей, осветительных сетей, блоков питания систем связи, автоматики и телемеханики с целью оптимизации работы электрооборудования и энергосбережения. Снижение расхода электроэнергии может быть достигнуто за счет исключения потребления нагрузкой ненужной для нормального режима работы энергии, и за счет снижения величины тока и потерь энергии в питающей сети. Кроме того, увеличится срок службы осветительных и бытовых электроприборов, которые будут работать при нормальном, а не повышенном напряжении. При снижении напряжения и потреблении нагрузкой той же мощности ток в сети увеличивается пропорционально уменьшению напряжения, что вызовет перегрев элементов сети до места установки стабилизатора, срабатывание автоматов, предохранителей и других элементов защиты, т.е. перебой в электроснабжении потребителей. Любой стабилизатор не является источником энергии, и его применение при значительном уменьшении напряжения в сети (дефиците мощности) не дает желаемого результата. К.П.Д. таких стабилизаторов составляет 95-97% , т.е до 5% энергии теряется в регулирующем устройстве, что ограничивает их применение в целях экономии энергии, а также возрастают масса, габариты и стоимость. Предлагаемое устройство основано на применении в качестве регулирующего органа маломощного трансформатора, работающего в режиме автотрансформатора с коэффициентом трансформации, близким к 1. Путем переключения обмотки высокого напряжения трансформатора под нагрузкой без разрыва цепи получают 3 режима работы устройства. Устройства регулирования используются: для снижения расхода электроэнергии до 20% в жилых и общественных зданиях, магазинах, сети наружного освещения; для обеспечения нормального режима работы станков с ЧПУ, технологических линий и т.д. По простоте схемы, окупаемости (около двух лет), надежности работы аналогов не имеет. Уменьшит допустимый во всем мире ненужный расход электроэнергии не менее чем на 10% и потери в сетях – до 40%.

**Ключевые слова:** стабилизатор напряжения, электрические сети, трехфазное и однофазное питание, регулирование напряжения, энергосбережение, синусоида токов сети, коэффициент мощности, ЭСУ-энергосберегающее устройство.

**Введение.** В последние десятилетия спрос на электроэнергию постоянно растет. Для того чтобы обеспечить поставку необходимого уровня напряжения для всех пользователей на той же инфраструктуре, а также учитывая тот факт, что напряжение постоянно колеблется в пределах  $\pm 10\%$  в связи с изменением спроса на сети, многие учреждения получают более высокое напряжение, чем им на самом деле требуется.

Как результат, электросети изначально неэффективны, и что более важно перенапряжения поставляются на объекты по причинам биллинга, что приводит к расходу энергии, отказ оборудования и сокращение срока службы оборудования [1].

Так как все электрическое оборудование предназначено для работы в правовом диапазоне  $220 \text{ В} \pm 5\%$ , то эксплуатация этого оборудования на повышенном напряжении приводит к потерям электроэнергии.

Предлагаем альтернативное решение проблемы установкой на объект АО «Алель-Агро» энергосберегающего стабилизатора напряжения с функцией энергосбережения для оптимизации поставки электроэнергии и мониторинга сети.

**Технический обзор ЭСУ.** Качество электроэнергии является одним из ключевых показателей. В зависимости от типов нагрузки в системах и качества, обеспечиваемого поставщиком электроэнергии, пользователи сталкиваются с одной из перечисленных ниже проблем (или их комбинаций):

- гармонические искажения;
- неравномерная нагрузка фаз;
- максимальный пусковой ток;
- кратковременное падение напряжения;
- снижение коэффициента мощности.

В зависимости от конкретной системы устранение описанных выше проблем может сэкономить 10–40% энергии в зависимости от степени проявления каждого из негативных факторов.

Энергосберегающее устройство ЭСУ обеспечивает комплексное решение перечисленных выше проблем, одной из которых является корректировка коэффициента мощности, при этом основное внимание уделяется экономии электроэнергии.

Коммутирующий блок выполнен на базе управляющих выходов анализатора, которые через помехоподавляющую схему, состоящую из RC-супрессора и конденсаторных пускателей с группой подавления пусковых токов или контакторов типа двунормально открытых или двунормально закрытых, совершают коммутацию первичной обмотки регулировочного трансформатора.

Размыкающий и замыкающий контакты соединены последовательно, при этом первичная обмотка трансформатора подключена с одной стороны параллельно вторичной первыми одноименными выводами непосредственно, с другой – через второй размыкающий контакт [2-3].

К точке соединения второго вывода первичной обмотки и второго размыкающего контакта подключен второй замыкающий контакт от блока управления, совмещенного с анализатором, параллельно первичной обмотке упомянутого трансформатора включен конденсатор, а параллельно коммутирующим элементам включены RC-цепи.

Параллельно нагрузке включен выходной конденсатор, в него введен силовой двухполюсный автомат с независимым расцепителем, контакты которого включены последовательно в цепь нагрузки на входе и выходе регулировочного узла, между сетью и входом и между нагрузкой и выходом упомянутого узла.

Дополнительный узел защиты с дистанционным управлением, подключенный входом к точке соединения первого силового контакта со входом регулировочного узла, выходом к нейтральному проводу сети.

Второй и третий контакты трехполюсного автомата защиты упомянутого дополнительного узла подключены между нейтральным проводом и точкой соединения упомянутого второго замыкающего контакта с конденсатором первой RC-цепи и между выходным выводом первичной обмотки трансформатора и точкой соединения вторых замыкающего и размыкающего контактов коммутирующего блока.

Энергосберегающий эффект устройства основан на принципе независимого пофазного регулирования напряжения в сети, что позволяет добиться экономии до 40% электроэнергии по сравнению с аналогами и получить КПД устройства не менее 99,7%. При этом потери активной мощности на стабилизаторе напряжения в 15 раз меньше по сравнению с аналогами, а срок службы составляет 20-25 лет [4].

Энергосберегающее устройство предназначено для использования на гражданских и промышленных объектах в сетях 0,4 кВ.

Для контроля и регистрации параметров электросети и режимов работы устройства предусмотрена возможность дистанционного управления и резервирования, а также использования средств связи, как, например, сотовый модем 3G. Подключение и передача данных осуществляется по протоколу TCP/IP и интерфейсу Ethernet.

Схема подключения ЭСУ.

ЭСУ подключается последовательно в сеть после счетчика электрической энергии (рис. 1). Монтаж выполняется квалифицированным персоналом с группой по электробезопасности не ниже третьей.

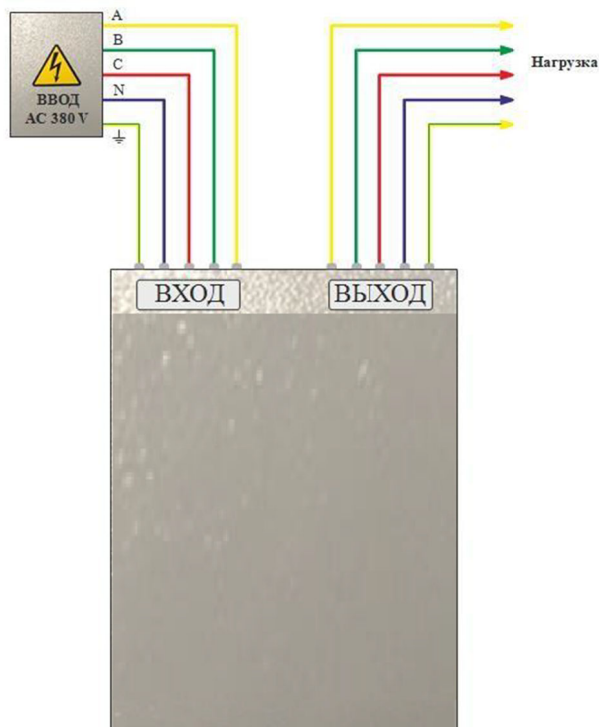


Рисунок 1 – Схема подключения ЭСУ

#### Отличия энергосберегающего устройства ЭСУ от подобных / похожих устройств

- Реальная экономия электроэнергии до 25%.
- Бесплатная дополнительная электрическая мощность.
- Функция стабилизации напряжения.
- Продление срока эксплуатации электроприборов в 1,5 - 2,5 раза.
- КПД=99,7% против макс 96% у стабилизаторов. Коэффициент передачи мощности сети в нагрузку электромагнитным путем составляет 1:18, у стабилизаторов он равен 1:2.
- Потребляемая мощность ЭСУ от фактической мощности нагрузки не превышает 0,4%.
- Конструкция проста и надежна, без сложных коммутационных элементов, что является гарантом долгой эксплуатации.
- Устройство снабжено системой «Байпас».
- Процесс регулирования происходит без разрыва цепи и искажения синусоиды напряжения.
- Мощность нагрузки может колебаться от 0 до 100%, что не сказывается на качестве регулирования.
- Массогабаритные показатели ниже в 2- 2,5 раза, а также стоимость и срок окупаемости оборудования.

#### Параметры экономии электроэнергии с помощью ЭСУ в АО «Алель-Агро»

На объекте были установлены энергосберегающий стабилизатор «ЭСУ» и УКРМ (автоматическая конденсаторная установка) на 25 кВАр в компрессорном цеху [5].

В компрессорном цеху установлен компрессор Z40-154Y фирмы Frascold со следующими электротехническими характеристиками:

- максимальная мощность кВт- 37,9 кВт;
- максимальный рабочий ток А-77,9 А;

- объемная производительность м3/час-154,4;
- коэффициент мощности  $\cos\phi$ - 0,75;
- трехфазное напряжение питания-380-420В.

На щит управления в компрессорном цеху АО «Алель Агро» был установлен анализатор качества электрической энергий «Circutor ARI-5» номер поверки-ВА-04-01-08929 на период 4 часа с 12:39 до 16:39 26.08.19г.

Параметры электрической сети до и после установки стабилизатора ЭСУ и УКРМ 25 кВАр»

Таблица 1 – Параметры электрической сети до установки стабилизатора ЭСУ и УКРМ 25 кВАр»

Date 26.08.2019 12:39:59		Period: 04:00:00			
	Phase 1	Phase 2	Phase 3	Phase III	
Voltage [V]	227	228	224	226	~
Current [A]	31.918	28.942	27.983	29.614	~
Apparent Power [VA]	7245.386 ~	6598.776 ~	6268.192 ~	20173	20173
Power [W]	5473	4610	4672	14755	
Reactive P. L [var]	4801	4777	4227	13805	
Reactive P. C [var]	0	0	0	0	
Power factor	0.75	0.69	0.74	0.73	
Frequency [Hz]					50.0

Таблица 2 – Параметры электрической сети после установки стабилизатора ЭСУ и УКРМ 25 кВАр»

Date 26.08.2019 18:47:08		Period: 04:00:00			
	Phase 1	Phase 2	Phase 3	Phase III	
Voltage [V]	223	224	220	222	~
Current [A]	20.290	18.020	18.083	18.798	~
Apparent Power [VA]	4124.670 ~	3736.480 ~	3686.000 ~	11547	11547
Power [W]	4102	3696	3686	11484	
Reactive P. L [var]	411	464	129	1004	
Reactive P. C [var]	0	0	0	0	
Power factor	0.99	0.98	1.00	0.99	
Frequency [Hz]					50.0

Таблица 3 – Результаты установки ЭСУ на 80А и УКРМ 25 кВАр на компрессоре Z40-154У фирмы Frascold

Параметры	ЭСУ и СЭБ Energy-S выключен	ЭСУ и СЭБ Energy-S включен
Напряжение, В	226	222
Ток, А	29,614	18,798
Кэф. мощности, $\cos\phi$	0,73	0,99
Макс ток, А	33,462	22,308
Активная мощность, квт.	14,755	11,484
ИТОГО	ОБЩАЯ ЭКОНОМИЯ КВТ.Ч СОСТАВИЛО 22,1%	
Срок окупаемости	1,2 года	

**Выводы.** Основным принципом работы прибора ЭСУ является приведение уровня питающего напряжения к оптимально низкому (допустимому по ГОСТ) значению. Эффект применения тем больше, чем значительнее отличие питающего напряжения от минимально допустимого напряжения - 209 В. Важнейшее значение имеет характер нагрузки, которая, по сути дела, делится на две основные группы:

1. Освещение и смешанная (бытовая) нагрузка: бытовые эл. приборы, компьютеры, однофазные эл. двигатели и т.п. – это офисные здания, магазины, больницы, школы, вокзалы, физкультурно-оздоровительные комплексы и т.п. (9% – 21% эффект экономии).

2. Асинхронные электродвигатели (насосные, компрессорные станции, крупные вент. Системы). На такой нагрузке можно снижать питающее напряжение только в том случае, если уровень

загрузки двигателей по мощности составит менее 50%-55% (зависит от его ном.  $\cos \varphi$ ), здесь снижение напряжения приведёт к снижению общего тока в двигателе, и к экономии порядка 4%-18%.

Если же уровень загрузки асинхронных двигателей будет более 70%-75% эффекта либо вообще не будет, либо он будет обратный (рост тока в роторе, нагрев, потери), хотя формально все параметры в ГОСТе.

Следует заметить, что, как правило, усреднённый уровень загрузки не превышает 65%, но в каждом отдельном случае необходимо проводить замеры, сопоставляя номинальный паспортный ток с реально протекающим. Вышеизложенные рассуждения позволяют сделать следующие выводы:

а) Объекты с освещением и смешанной нагрузкой (п.1) дают максимальный эффект, если питающее напряжение на них составляет 226В - 240В. Это позволит нам регулировать напряжение на 12В - 16В, получать эффект в 10% - 20%. Малые регулировки напряжения 215В-221В дадут и эффект в 5%-7%.

б) Объекты с асинхронными двигателями прежде всего надо оборудовать устройствами компенсации реактивной мощности и желательно индивидуальной компенсации.

в) Объекты, на которых есть и то, и другое можно оценить, интегрируя методики пунктов А и Б.

Например, если в структуре присутствуют 75% активной нагрузки, а двигатели составляют 25%, сетевое напряжение – порядка 225В-231В, то все предложенные мероприятия, скорее всего, приведут к экономии в 10% - 15%.

г) Надо также помнить, что ЭСУ применяется и для стабилизации напряжения сети, которая при пониженном напряжении (меньше 207В) не даёт экономии по расходу эл. энергии, но благотворно влияет на технологический процесс.

д) Надо понимать, что окупаемость прибора напрямую зависит от его мощности и от времени его использования, например, в течение года. Чем выше мощность ЭСУ, тем меньше его удельная стоимость на 1кВт. Объекты с приборами от 80 -100 кВт и более, с продолжительностью работы 12 ч и более 365 дней в год и тарифом от 20 тенге окупаются примерно за 1- 3 года.

е) Замеры производятся в планируемых местах установки ЭСУ анализатором качества сети. На длинных линиях необходимо измерять параметры и в начале, и в конце линии (выборочно вольтметром), дабы не снизить напряжение ниже допустимого.

ж) Фидера, питаемые от одного источника (трансформатора), можно консолидировано пропускать через один ЭСУ, если учёт на них общий и это целесообразно с экономической точки зрения.

**Н.М. Айтжанов<sup>1</sup>, Б. Онгар<sup>2</sup>, П. Бисенбаев<sup>2</sup>, Е.С. Байтенов<sup>2</sup>, А. Жанибекұлы<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Алматы энергетика және байланыс университеті,

Электроэнергетика және электротехника институты, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup>М.Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы, Алматы, Қазақстан

### **ӨНЕРКӘСІПТІК КӘСІПОРЫН ЖЕЛІСІНДЕГІ ЭНЕРГИЯ ТИІМДІЛІГІН ЖӘНЕ ПАЙДАЛАНУ МҮМКІНДІГІН БАҒАЛАУ**

**Аннотация.** Энергияны үнемдейтін кернеу тұрақтандырғышы электротехника саласына жатады және электр жабдықтарының жұмысын оңтайландыру және электр қуатын үнемдеу мақсатында электр жабдығы, жетек, қозғалтқыш, жарықтандыру желісі, байланыс жүйелерінің қуат көзін, автоматика мен телематиканы электрмен жабдықтауда қолдануға болады. Энергия шығынын азайтуға энергияның қалыпты жұмыс істеуі үшін қажетсіз жүктемені тұтынуды жою және жеткізу желісіндегі ток пен энергия шығынын азайту арқылы қол жеткізуге болады. Сонымен қатар, жарықтандыру және тұрмыстық электр құрылғыларының қызмет ету мерзімі артады, олар қалыпты және кернеу орташа жұмыс істейді. Кернеу төмендегенде және жүктеме бірдей қуат тұтынғанда желідегі ток кернеудің төмендеуіне пропорционалды түрде өседі әрі бұл тұрақтандырғыш орнатылған жерге, желілік элементтердің қызып кетуіне, автоматты құрылғы, сақтандырғыш және басқа қорғаныс элементтерінің жұмысына ықпал етеді, яғни тұтынушыларды электрмен жабдықтаудағы үзіліс болып есептеледі. Кез-келген тұрақтандырғыш энергия көзі болып саналмайды және оны желідегі кернеудің айтарлықтай төмендеуі арқылы пайдалану (қуат тапшылығы) қажетті нәтиже бермейді. ПӘК осындай

тұрақтандырғыштардың 95-97% құрайды, яғни 5%-ке дейін энергияны реттеуші құрылғыда жоғалтады, бұл энергияны үнемдеу, сондай-ақ салмағын, мөлшері мен құнын арттыру мақсатында оларды пайдалануды шектейді. Ұсынылған қондырғы трансформация коэффициенті 1-ге жақын автотрансформатор режимінде жұмыс істейтін төмен қуатты трансформатордың реттегіш органы ретінде пайдалануға негізделген. Трансформатордың жоғары вольтты орамасын жүктеме кезінде контурды бұзбай ауыстыру арқылы құрылғының 3 жұмыс режимі алынады. Басқару құрылғылары келесідей қолданылады: тұрғын және қоғамдық ғимарат, дүкен, сыртқы жарықтандыру желілерінде электр энергиясын тұтынуды 20% дейін азайту; сандық бағдарламаны басқарушы машиналары мен технологиялық желілердің, т.б. қалыпты жұмысын қамтамасыз ету. Оның схеманың қарапайымдылығы, өзін-өзі ақтау (екі жылға жуық) және пайдалану сенімділігі бойынша баламалары кездеспейді. Бұл бүкіл әлемде рұқсат етілмеген энергияны тұтынуды кем дегенде 10%-ға және желі шығынын 40%-ға дейін азайтуға мүмкіндік береді.

Сонымен, номиналды кернеудің жоғарылауы барысында ысырап болатын қуат пен электр энергиясы азайып, пайдалану шығыны төмендейді, сым қимасы мен желі құрылысына металл шығыны азаяды, желілер бойынша берілетін шекті қуат артады, болашақта желінің дамуы жеңілдетіледі, бірақ желі құрылысына капиталдық салым артады. Электр энергиясы мен қуат шығынының артуы үлкен эксплуатациялық шығынға ұшыратады, сонымен қатар өткізу қабілеті әлсіз. Осыған байланысты оны жобалау кезінде желінің номиналды кернеуін дұрыс таңдаудың маңыздылығы айқын болады. Экономикалық мақсатқа сай номиналды кернеу жүктеме қуаты, корек көзінен қашықтыққа, олардың бір-біріне қатысты орналасуы, электр желісінің таңдалған конфигурациясы, кернеуді реттеу тәсілдері сынды бірқатар факторларға тәуелді. Сым мен кабель қимасын қажет ететін қыздыру шарттары бойынша таңдау электр желілерінің сенімді жұмыс атқаруы үшін аса маңызды міндет болып саналады. Өнеркәсіп электр желілеріндегі есептеу нәтижелері – модельдеу және энергия үнемдеу.

**Түйін сөздер:** кернеу тұрақтандырғышы, электр желілері, үшфазалы және бірфазалы электрмен жабдықтау, кернеу реттеу, энергия үнемдеу, синусомдық желілер, қуат коэффициенті, энергия үнемдейтін құрылғы.

**N.M. Aitzhanov<sup>1</sup>, B. Ongar<sup>2</sup>, P.A. Bissenbaev<sup>2</sup>, E.S. Baitenov<sup>2</sup>, A. Zhanibekuly<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Institute of electric power and electrical engineering,

Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup> Kazakh Academy of Transport and Communications named after M. Tynyspayev, Almaty, Kazakhstan

#### **ASSESSMENT OF ENERGY EFFICIENCY AND POSSIBILITY OF USE IN THE NETWORKS OF INDUSTRIAL ENTERPRISES VOLTAGE STABILIZER WITH ENERGY SAVING FUNCTION**

**Abstract.** The energy-saving voltage stabilizer belongs to the field of electrical engineering and can be used to supply power to electrical equipment, drives, motors, lighting networks, power supplies for communication systems, automation and telematics in order to optimize the operation of electrical equipment and energy saving. Reducing power consumption can be achieved by eliminating the consumption of the load unnecessary for normal operation of energy, and by reducing the amount of current and energy losses in the supply network. In addition, the service life of lighting and household electrical appliances will increase, which will operate at normal and not increased voltage. When the voltage decreases and the load consumes the same power, the current in the network increases in proportion to the decrease in voltage, which will cause overheating of the network elements to the place where the stabilizer is installed, the operation of automatic devices, fuses and other protection elements, i.e. interruption in power supply to consumers. Any stabilizer is not a source of energy, and its use with a significant decrease in the voltage in the network (power shortage) does not give the desired result. ECE of such stabilizers is 95-97%, that is, up to 5% of energy is lost in the regulating device, which limits their use in order to save energy, as well as increase the weight, dimensions and cost. The proposed device is based on the use as a regulating body of a low-power transformer operating in the autotransformer mode with a transformation ratio close to 1. By switching the high-voltage winding of the transformer under load without breaking the circuit, 3 operating modes of the device are obtained. Control devices are used: to reduce electricity consumption by up to 20% in residential and public buildings, shops, outdoor lighting networks; to ensure the normal operation of numerically controlled machines, technological lines, etc. It has no analogs in terms of simplicity of the scheme, payback (about two years), and reliability of operation. It will reduce the unnecessary energy consumption allowed worldwide by at least 10% and network losses by up to 40%.

Thus, an increase in the rated voltage reduces power and electricity losses, reduces operating costs, reduces the cross-section of wires and metal structures, increases the maximum network capacity, contributes to the further development of the network, but increases capital investments in network construction. The increase in electricity and power consumption leads to high operating costs as well as low bandwidth. In this regard, when designing it, it is

important to choose the correct rated voltage. The nominal voltage for economic purposes depends on a number of factors: load capacity, distance from power sources, their relative position, the chosen configuration of the power grid, methods of voltage regulation. The selection of the cross-section of wires and cables for the permissible heating conditions is a very important task for the reliable operation of electrical networks. Calculation results of modeling industrial electrical networks and energy saving.

**Key words:** voltage stabilizer, electrical networks, three-phase and single-phase power supply, voltage regulation, energy saving, sinusoidal network currents, power factor, ESD-energy-saving device.

**Information about authors:**

Aitzhanov Nurgali, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Department Almaty, Kazakhstan; nurgali53@mail.ru; <https://orchid.org/0000-0001-7482-4828>;

Ongar Bulbul, Doctor of Philosophy (PhD), Associate Professor Kazakh Academy of Transport and Communications, Almaty, Kazakhstan; ongar\_bulbul@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8333-8343>;

Bissenbaeyev Parassat, master student, Kazakh Academy of Transport and Communications, Almaty, Kazakhstan; parasatbisenbaev@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0001-8121-004X>;

Baitenov Erkinbek, master student, Kazakh Academy of Transport and Communications, Almaty, Kazakhstan; erkinbek.baytenov@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7460-3539>;

Zhanibekuly Ayan, master student, Kazakh Academy of Transport and Communications, Almaty, Kazakhstan; zh\_ayan@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8547-2968>

**REFERENCES**

[1] Inventor Andre Smit Current Assignee Siemens Industry Inc. Method and system for programming and implementing automated fault isolation and restoration using sequential logic. 13 апрель, 2011 г.

[2] Neal George Stewart Wing Ling Cheng Current Assignee Edge Electrons Ltd. Energy saving high frequency series buck AC voltage regulator system. 2014

[3] Guy J. Lestician. Power pod controller system. August 23, 2000

[4] Simon James REDFORD (GB) Simon James REDFORD Lee JUBIE (GB) Lee JUBIE James William DERBY (GB) James William DERBY Stephen James MANGAN (GB) Stephen James MANGAN. Voltage stabilization device. August 10, 2005

[5] Igor Viktorovich Fomin, Valentin Mikhailovich Shevtsov. Method of protection of a switching voltage regulator. 1986 SU.



**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.101>

Volume 6, Number 334 (2020), 81 – 90

UDC 524.7, 524-1:629.78

IRSTI 41.27.29, 89.51.17

**K. Boshkayev<sup>1,2,3,4</sup>, T.K. Konysbayev<sup>1,2,4</sup>, E.B. Kurmanov<sup>2</sup>, M. Muccino<sup>1,5</sup>**<sup>1</sup>National Nanotechnology Laboratory of Open Type (NNLOT), Almaty, Kazakhstan;<sup>2</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;<sup>3</sup>Department of Physics, Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan;<sup>4</sup>Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan;<sup>5</sup>Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Laboratori Nazionali di Frascati, Frascati, Italy.

E-mail: kuantay@mail.ru, konysbayev@aphi.kz, kurmanov.yergali@kaznu.kz, marco.muccino@lnf.infn.it

**DARK MATTER PROPERTIES IN GALAXY U5750**

**Abstract.** We investigate the properties of dark matter (DM) distribution in spiral galaxy U5750, employing the well known and widely used phenomenological density profiles such as pseudo-isothermal, Burkert, Navarro-Frenk-White, Einasto, Moore and exponential sphere. For simplicity we assume that DM distribution is spherically symmetric without accounting for the complex internal structure of the galaxy. We fit the rotation curve observational data of galaxy U5750 for each profile. We infer the model free parameters and estimate the total DM mass, and compare them with those reported in the literature. To discriminate the best fit profile among the considered ones, we make use of the Bayesian Information Criterion (BIC). On the basis of the performed statistical analysis, we provide physical interpretations for choosing certain profiles. In addition, by assuming that DM possesses non-zero pressure, we solve the Newtonian hydrostatic equilibrium equation and construct the pressure profiles as a function of the radial coordinate for each above mentioned profile. Combining the density profiles with the pressure profiles we obtain equations of state for the DM in the considered galaxy. Further, we calculate the speed of sound in the DM medium and show that it behaves not unequivocally for the adopted profiles, though it decreases with an increasing DM density. Finally, we calculate the refracting index and discuss about astrophysical implications of the obtained results.

**Keywords:** dark matter, rotation curves, equation of state, the speed of sound, the refractive index.

**I. Introduction**

At the beginning of the last century astronomers discovered that some stars and galaxies behave differently than theory predicted. The rotation of more distant parts of galaxies did not obey the laws of celestial mechanics. This marked the beginning of a new era to search for DM. The modern epoch of the dark (latent) mass concept began at the end of the last century in connection with the need to explain the kinematics of gas in massive galaxies, i.e. extended rotation curves (RCs) of the gaseous component that did not decrease with increasing distance even outside the stellar disk of galaxies [1,2]. The need to introduce additional mass also arose when simulating the mass distribution in elliptical and dwarf spheroidal galaxies, where disks were missing.

The problem of DM is one of the fundamental and yet unsolved problems in modern astrophysics and cosmology. Unlike ordinary visible/baryonic matter, DM does not participate in electromagnetic interactions, but manifests itself only through gravity (and possibly via weak interaction as well) and therefore is inaccessible to direct observations. It is believed that at present accounts for about 26.8 % of the total mass of all forms of matter in the Universe [3]. The true nature of DM still needs to be understood. It is assumed that DM consists of some experimentally undiscovered particles [4, 5]. They cannot be baryons, since in that case the cosmic microwave background and the large-scale structure of the Universe would be radically different. Nevertheless, up to date, a huge amount of information has been obtained, which allows one to judge about the distribution of DM and its role in the Universe. The number

of scientific works related to the problem of DM is steadily growing from year to year, which reflects a noticeable interest in this intriguing and at the same time fascinating topic [6–8].

In this paper we investigate the observational properties of DM in the spiral galaxy U5750, exploiting various phenomenological density profiles. By analysing the RC data points we infer all the model parameters. We suppose that the DM equation of state (EoS) in a particular galaxy, by default, must not depend upon the density profiles. Hence we intend to check whether this assumption is valid or not. Therefore we involve the Newtonian gravity for simplicity and solve the hydrostatic equilibrium equation to get the pressure profiles. By expressing the pressure in terms of the density for each individual model one derives the EoS of DM in the spiral galaxy U5750. Thus, the main objective of this work is to test whether the DM EoS depends on the adopted density profile or not. In addition we calculate the speed of sound and refractive index in the DM medium [9] as these features of DM can be crucial in structure formations and gravitational lensing effects.

The paper is organized as follows. In section II, we review the main density profiles which are used to study DM distribution in galaxies. In section III we describe methods involved in the paper to perform best fit analyses and derive EoS of DM. In section IV the major results of the paper are shown, namely, the observational data of U5750 RC is analysed. The derivation of the EoS of DM in spiral galaxy U5750, the speed of sound and the refractive index are presented and discussed. In section V our conclusion is summarized.

## II. Dark matter profiles

The distribution of DM in the halos of galaxies is not uniform, concentrating at their centers and dropping off to the periphery. The corresponding distribution function of DM or its profile is usually found by the methods of numerical modeling of the dynamics of stars in galaxies. In this work we have selected the most famous and commonly applied DM density profiles such as pseudo-isothermal (ISO), Moore, Burkert, Navarro-Frenk-White (NFW), Einasto and exponential sphere. All, these profiles possess two model parameters: the DM density at galactic centers or characteristic density  $\rho_0$  and the scale radius  $r_0$ , apart from the Einasto profile, which has another extra free parameter. In Ref. [10] the model parameters of the above listed profiles were estimated for some galaxies. Inferring the numerical values of these parameters is a standard task that can be solved by studying the dynamics of galaxies. Here for our analyses we involve the following models:

- ISO profile [11]:

$$\rho_{Iso}(\xi) = \frac{\rho_0}{1 + \xi^2}, \quad (1)$$

where  $\xi = r/r_0$  is the dimensionless radial coordinate/distance.

- Exponential sphere [12]:

$$\rho_{Exp}(\xi) = \rho_0 e^{-\xi}, \quad (2)$$

- Burkert profile [13]:

$$\rho_{Bur}(\xi) = \frac{\rho_0}{(1 + \xi)(1 + \xi^2)}, \quad (3)$$

- NFW profile [14], which is proposed based on cosmological models of halo formation:

$$\rho_{NFW}(\xi) = \frac{\rho_0}{(1 + \xi)^2}, \quad (4)$$

- Moore profile [15]:

$$\rho_{Moo}(\xi) = \rho_0 \xi^{-1.16} (1 + \xi)^{-1.84}, \quad (5)$$

- Einasto profile [16]:

$$\rho_{Ein}(\xi) = \rho_0 \exp\left[2n\left(1 - \xi^{1/n}\right)\right], \quad (6)$$

where  $\alpha$  is the Einasto free parameter.

The dependence of  $\rho/\rho_0$  on  $r/r_0$  for different DM halo profiles is illustrated in Fig.1 (left panel). At large distances the density always goes down.

### III. Methods

In the RCs of galaxies the rotation (linear) speed  $v$  of stars and gas depends on the distance  $r$  from the center to the halo. The RC allows to determine the galaxy's mass profile as a function of the radial distance. By equating the centrifugal and gravitational forces acting on a star moving in a circular orbit at a distance  $r$  from the center of the galaxy one finds the circular velocity

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (7)$$

The RCs do not drop off according to Newton's laws but stay flat near the edge of the galaxies. The DM mass  $M(r)$  in Eq. (7) can be computed by integrating the mass balance formula (see Eq. (10) below)

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (8)$$

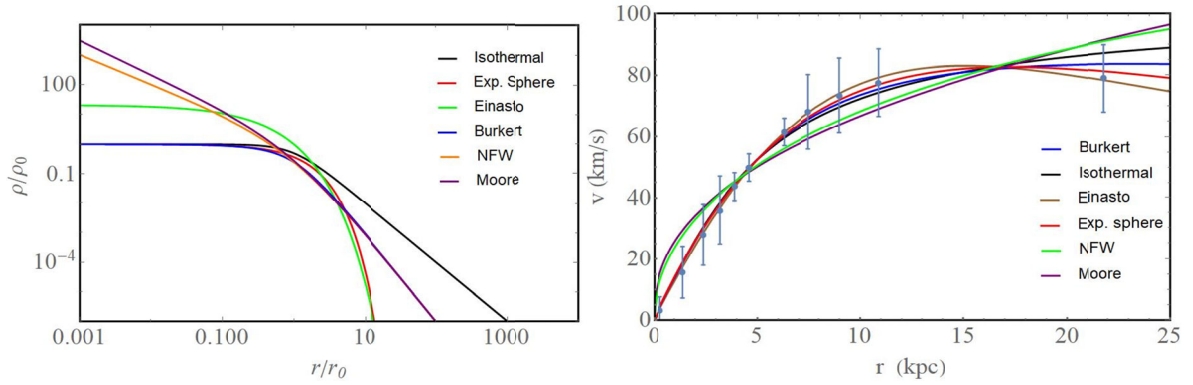


Figure 1 - Color online. Left panel: different phenomenological DM density profiles. We choose  $\alpha = 1.5$  for the Einasto profile. Right panel: RCs of galaxy U5750 and fits obtained by using the DM profiles considered in this work

where  $\rho(r)$  is the DM density profile taken from Eqs. (1) – (6).

In order to search for the best fit parameters of each DM profile, we use the  $\chi^2$  function which is defined as follows

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{v_i - v(\rho_0, r_0, r)}{\sigma_{v,i}} \right]^2, \quad (9)$$

where  $v_i$  and  $\sigma_{v,i}$  are the  $N$  data points from RC of galaxy U5750 and their corresponding errors, respectively (see Fig. 1, right panel). The RCs for each DM profiles are described by the  $v(\rho_0, r_0, r)$ , given by Eq. (7). We apply the Levenberg-Marquardt method ( This algorithm is an iterative technique that locates the minimum of a function that is expressed as the sum of squares of nonlinear functions. It consists in a combination of the Gauss–Newton algorithm and the method of the steepest descent gradient) [17, 18] to minimize Eq. (9).

To derive an EoS of DM in the considered galaxy we perform computations in the Newtonian gravity (NG) for simplicity and clarity. So we will proceed with the Newtonian hydrostatic equilibrium equations:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (10)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (12)$$

where  $M(r)$  is the mass profile enclosed inside a sphere of radius  $r$ ,  $P(r)$  is the pressure profile,  $G$  is the gravitational constant,  $\Phi(r)$  is the internal gravitational potential of the DM distribution.

#### IV. Results and discussion

In this section we present our main results providing technical details and discussions.

##### A. Best fit models

By exploiting each DM profile we infer the model free parameters from the fit and construct theoretical RCs which become flat at large distances. The best fit parameters are listed in table I and shown in figure 1 (right panel). The  $\chi^2$  values are also shown in the last column of table I. For the NFW profile the parameters are unconstrained and are not listed in Table I. This is in line with the results in Refs. [19, 20], where the large uncertainties in the NFW parameters have been found. This is mainly caused by the linear rise of the inner rotation curve. The same is true for the Moore profile, whose fit was not good.

To compare the 4 profiles of table I, which have different number of parameters and are not nested into each other, we employ the Bayesian Information Criterion (*BIC*) (The BIC is a selection criterion among a finite set of models, conceived to solve the overfitting issue when increasing the number of parameters in the fitting function) [21]. From the  $\chi^2$  definition, the BIC is defined as

$$BIC = \chi^2 + k \ln N, \quad (13)$$

where  $k$  is the number of model parameters. For example, in the case of the Einasto profile  $k = 3$ , while for all the other profiles  $k = 2$ . A profile with a minimum BIC value is favored, according to Ref. [22]. As one can see from Table I for galaxy U5750 the Einasto profile has the minimum BIC, while the ISO profile has the maximum value.

Table I - Best fit model parameters for galaxy U5750.

For comparison, the mass of the dark matter in this galaxy is  $2.9 \times 10^{10} M_{\odot}$  according to Ref. [23]

Profiles	$\rho_0 \pm \sigma_{\rho_0} [10^{-3} M_{\odot} / pc^3]$	$r_0 \pm \sigma_{r_0} [kpc]$	$M \pm \sigma_M [M_{\odot}]^a, M_{\odot}$	$M \pm \sigma_M [M_{\odot}]^b, M_{\odot}$	BIC	$\chi^2$
Burkert	$11.73 \pm 0.65$	$7.16 \pm 0.38$	$(3.54 \pm 0.42) \times 10^{10}$	$(6.88 \pm 1.61) \times 10^9$	54	0.70
ISO	$10.71 \pm 1.00$	$4.23 \pm 0.38$	$(3.85 \pm 0.69) \times 10^{10}$	$(2.19 \pm 0.87) \times 10^9$	61	1.37
Einasto <sup>c</sup>	$2.14 \pm 0.10$	$9.37 \pm 0.20$	$(3.11 \pm 0.23) \times 10^{10}$	$(1.24 \pm 0.13) \times 10^{10}$	37	0.13
Exp. sphere	$12.50 \pm 0.50$	$5.11 \pm 0.19$	$(3.34 \pm 0.32) \times 10^{10}$	$(3.36 \pm 0.55) \times 10^9$	49	0.47

<sup>a</sup>The DM total mass is calculated using the last RC data point in the halo for  $r$

<sup>b</sup>The DM total mass is calculated using the scale radius  $r_0$

<sup>c</sup>For the Einasto profile free parameter  $\alpha = 0.73 \pm 0.05$

In figure 1 (right panel) the gray thick points show the observational data points of galaxy U5750 with the attached error bars. The DM profiles are shown with solid curves: ISO (black), exponential sphere (red), Einasto (brown) and Burkert (blue), NFW (green), Moore (purple).

##### B. Equation of state

In order to obtain the formulas of the pressure in NG, the density profiles Eqs. (1) - (6) are plugged in Eqs. (10) - (11) and then are integrated to fulfill boundary conditions i.e. at infinity the pressure must be zero. However, due to the complexity for the Einasto, Moore, NFW and Burkert profiles all computations

are carried out numerically, while for the ISO and exponential sphere profiles the sought expressions can be derived analytically. As a result, the pressure formulas of the DM halo for the ISO and exponential sphere profiles in Eqs. (1) and (2) are give by, respectively

$$P(\xi) = 2G\pi r_0^2 \rho_0^2 \left[ \frac{\pi^2}{4} - \frac{2}{\xi} \arctan(\xi) - \arctan(\xi)^2 \right], \quad (14)$$

$$P(\xi) = 2G\pi r_0^2 \rho_0^2 \left[ 4\Gamma[-1, \xi] - 8\Gamma[-1, 2\xi] - 4\Gamma[0, 2\xi] - e^{-2\xi} \right], \quad (15)$$

where the gamma function is defined as  $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$ , with  $a = 0, -1$

Combining Eqs. (14) and (15) together with Eqs. (1) and (2), we obtain the EoS for the ISO and exponential sphere, respectively

$$P(\rho) = 2G\pi r_0^2 \rho_0^2 \left[ 4\Gamma\left[-1, \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] - 8\Gamma\left[-1, 2\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] - 4\Gamma\left[0, \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right], \quad (16)$$

$$P(\rho) = \frac{G\pi r_0^2 \rho_0^2}{2} \left[ \pi^2 - \frac{8\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho_0 - \rho}} \arctan\left[\frac{\sqrt{\rho_0 - \rho}}{\sqrt{\rho}}\right] - 4 \arctan\left[\frac{\sqrt{\rho_0 - \rho}}{\sqrt{\rho}}\right]^2 \right], \quad (17)$$

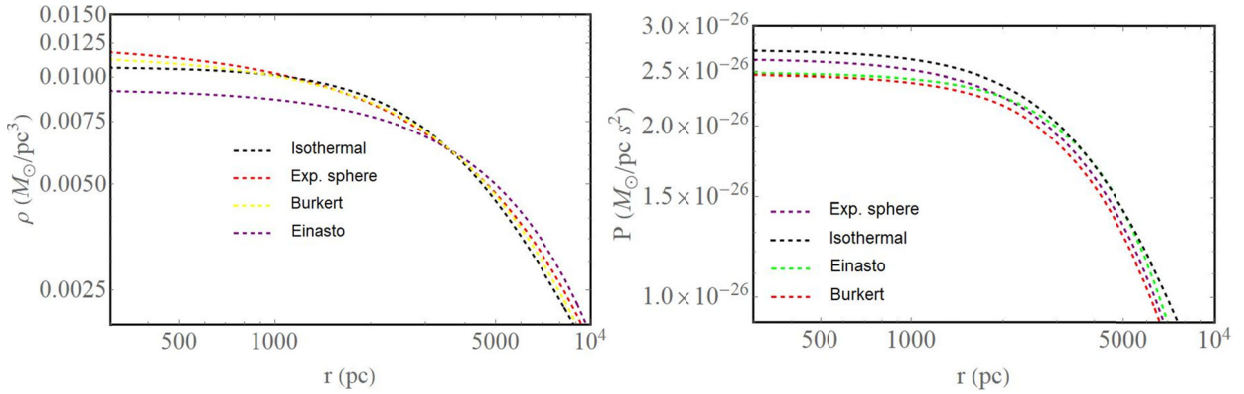


Figure 2 - Color online. Logarithmic density profiles (left panel) and logarithmic pressure profiles (right panel) of DM in the halo for the profiles listed in table I

In figure 2 we plotted  $\rho(r)$  (left panel) and  $P(r)$  (right panel) for galaxy U5750, using Eqs. (1) – (6) and (14) – (15). As one can see, the pressure profiles follow the same trend as the density profile. In figure 3 we plot the equation of state (left panel), obtained from Eqs. (16) and (17) for ISO and exponential sphere profiles and from numerical integrations for the Burkert and Einasto profiles.

It should be noted that for the ISO, exponential sphere and Burkert profiles  $\rho_0$  is the central density. However for the Einasto, NFW and Moore profiles  $\rho_0$  is the characteristic density, i.e. the density near the galactic center can be chosen arbitrarily larger than  $\rho_0$  in these models. Thus, as one can see from figure 3, the behaviour of the EoS is different for each profile. These results are similar to the ones obtain in Ref. [24].

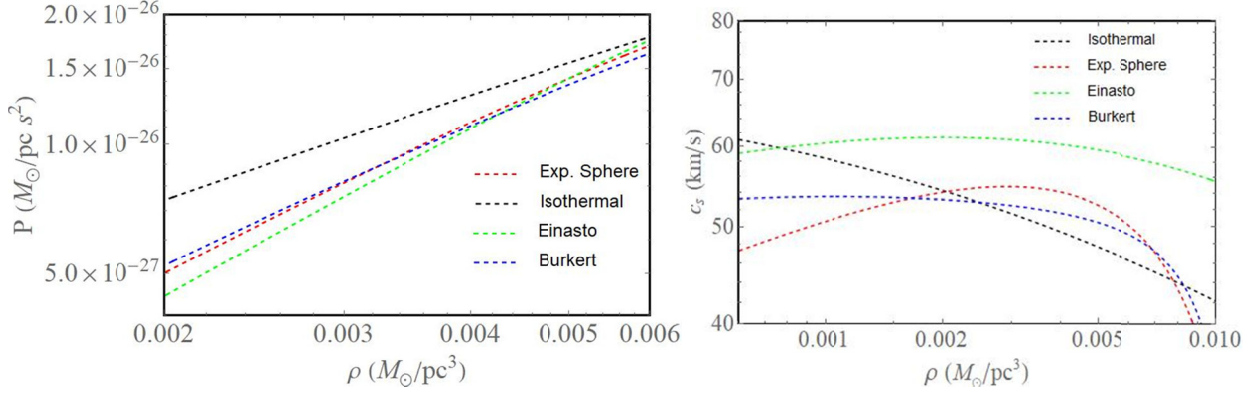


Figure 3 - Color online. The equation of state of DM (left panel) and speed of sound (right panel) in DM for the profiles listed in table I

### C. Speed of sound

Perturbations due to DM, in adiabatic regime, can be accounted by means of the speed of sound

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad (18)$$

which can be deduced analytically from Eqs. (16) and (17) for the ISO and exponential sphere profiles, respectively,

$$c_s^2 = \frac{4G\pi r_0^2 \left[ 2(\rho_0 - \rho) - \rho \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \left(2 + \rho \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right) \right]}{\ln^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}, \quad (19)$$

$$c_s^2 = \frac{4G\pi r_0^2 \rho_0^2 \left[ (\rho_0 - \rho) - \sqrt{\rho(\rho_0 - \rho)} \arctan\left(\sqrt{\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}}\right) \right]}{(\rho_0 - \rho)^2}, \quad (20)$$

In figure 3 (right panel) we plot the speed of sound, according to Eqs. (19) and (20) for the ISO and exponential sphere profiles, respectively and from numerical integration for the Burkert and Einasto profiles. For large densities the speed of sound goes down. This behaviour is utterly opposite of compact objects, where the speed of sound goes up with increasing density. However, in cosmology if the speed of sound is less than in its surroundings then this fact allows to form structures as galaxies, i.e. galaxies are formed inside dark matter halos.

### D. Refractive index

It is also interesting to study the refractive index  $n$  induced by the DM halo of galaxy U5750. In the weak field regime it is given by

$$n(r) = 1 - \frac{\Phi(r)}{c^2} - \int \frac{GM(r)}{c^2 r^2} dr, \quad (21)$$

In figure 4 we plot the refractive index  $n$  as a function of the radial coordinate in the DM distribution for the above considered profiles in galaxy U5750. As expected, the value of the index is very small in the halo region. In the core region it grows slowly and becomes constant, slightly larger than in vacuum. So, the gravitational lensing is quite weak. However, with our current techniques it is possible to measure the lensing effects with high precision [25].

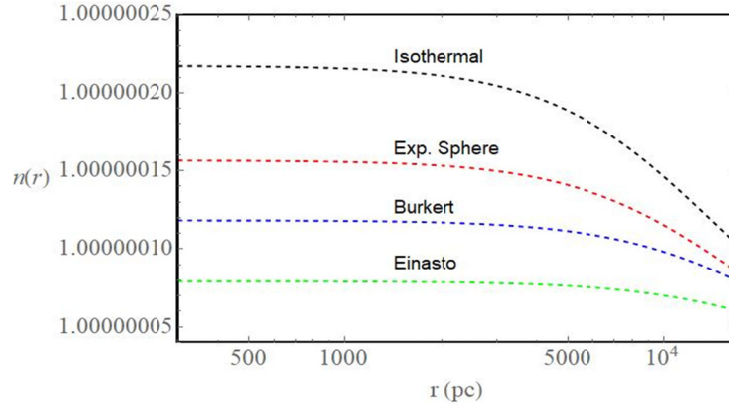


Figure 4 - Color online. The refractive index for DM in galaxy U5750 for the profiles listed in table I

## V. Conclusion

We analysed the RC of the spiral galaxy U5750 and inferred the free parameters of the considered profiles with the help of the least square method. We used the well-known DM density profiles in the literature and, in addition, we considered as an instructive example the exponential sphere profile for comparison. Unlike other profiles, the exponential sphere profile is usually applied to study the inner parts of galaxies [12], and here we used it to the halo. Although this model has one of the lowest BIC and good estimation of the DM total mass, its use in the description of the halo is not physically motivated.

We considered also the NFW and Moore profiles for completeness, though the density profile diverges as  $r \rightarrow 0$  causing the cuspy halo problem. Moreover, from the fit the parameters of these two models were not well constrained in accordance with Refs. [19, 20]. Indeed, we conclude that the two profiles are not appropriate to study DM EoS.

It turned out that only three profiles, i.e. ISO, Burkert and Einasto profiles, are suitable for the analysis of the DM equation of state as  $r \rightarrow 0$ , where the density tends to be finite avoiding cusps. Out of the three profiles, Einasto profile has the minimum BIC number and ISO profile the maximum one. The same is true for  $\chi^2$  values, though the Burkert and ISO profiles values are closer to unity. The difference in BIC between Einasto (with three free parameters) and ISO (with two free parameters) profiles is  $\Delta BIC = 24$ ; the difference in BIC between Einasto and Burkert (with two free parameters) profiles is  $\Delta BIC = 17$ . These results exhibit a very strong evidence against the ISO and Burkert models. So, we can conclude that Einasto profile is the most suited profile to study the DM equation of state of the galaxy U5750.

Although the behavior of  $\rho(r)$  and  $P(r)$  profiles is similar, the equation of state  $P(\rho)$  is not unique, we expected that it would be model independent. However, our supposition was not confirmed. This only means that DM problem remains not fully solved and understood. Therefore, one should propose new ideas, theoretical models and probably some experiments to better comprehend the nature of DM.

In addition we estimated the speed of sound and showed that it is different among the considered profiles. Nevertheless, the speed of sound had a tendency to decrease with increasing density for all profiles. This is a unique feature for DM which plays a key role in the large-scale structure formation.

Furthermore, we calculated the refractive index in the dark matter distribution. It was constant near the galactic core and was decreasing in the halo region. Its value was slightly larger in the galaxy filled with DM than in vacuum. This characteristic can be used to measure and explore gravitational lensing effects.

It would be interesting to study dark matter properties in other galaxies including their complex structures such as a core, bulge, disk and halo. This will be the issue of future studies.

## Acknowledgement

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Target Program 'Center of Excellence for Fundamental and Applied Physics' IRN: BR05236454, Grants: IRN AP08052311 and IRN AP05134454.

К. Бошкаев<sup>1,2,3,4</sup>, Т.К. Конысбаев<sup>1,2,3</sup>, Е.Б. Курманов<sup>2</sup>, М. Муччино<sup>1,5</sup>

<sup>1</sup>АТҰНЗ, <sup>2</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup>В.Г. Фесенков атындағы астрофизика институты, Алматы, Қазақстан;

<sup>4</sup>Физика кафедрасы, Назарбаев Университеті, Нұр-Султан, Қазақстан;

<sup>5</sup>ҰЯФИ, Фраскати Ұлттық лабораториясы, Фраскати, Италия

## U5750 ГАЛАКТИКАСЫНДАҒЫ ҚАРАҢҒЫ МАТЕРИЯНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

**Аннотация.** Қараңғы материя (ҚМ) мәселесі - қазіргі астрофизиканың, космологияның және элементар бөлшектер физикасының іргелі және әлі шешілмеген мәселелерінің бірі. ҚМ-ның бариондық материядан айырмашылығы, ол электромагниттік өзара әсерлесуге қатыспайды, тек гравитациялық әсерлесулер арқылы байқалады (мүмкін, әлсіз әсерлесу арқылы да), сондықтан оны тікелей бақылаулар арқылы тіркеу және зерттеу мүмкіндігі осы күнге дейін болмай жатыр. Қазіргі кезде ҚМ Әлемнің жалпы энергетикалық үлесінің 26.8% құрайтын материяның ерекше түрі. Астрономиялық бақылаулар қараңғы материя негізінен галактика іспетті ірі масштабты ғарыш объектілерінің және олардың кластерлерінің айналасында шоғырланатынын көрсетеді. Бұл ретте қараңғы материя галактика массасының 90% - на дейін құрайтын галодан тұрады.

Бұл жұмыста U5750 шиыршықты галактикасында ҚМ таралуы зерттеледі. U5750 галактиканың сипаттамаларын зерттеу үшін изотермиялық, Буркерт, Наварро-Франк-Уайт, Эйнасто және Мур сияқты белгілі және кеңінен қолданылатын тығыздық профилдері қарастырылды. Сонымен қатар, салыстыру үшін экспоненциалды сфераның профилі зерттелді. Әдетте ол галактикалардың ішкі бөліктерін зерттеу үшін қолданылады, бірақ мақалада мысал ретінде келтірілді. Галактика динамикасындағы қараңғы материяны есепке алу Ньютондық жуықтау аясында да сәтті жүзеге асырылады. U5750 галактикасы үшін изотермиялық профиль ең үлкен ВІС және ең үлкен  $\chi^2$  көрсетті. НФУ және Мур профилдері  $r \rightarrow 0$  болған кезде, орталық тығыздық шексіздікке ұмтылады. Сондықтан бұл екі профиль ҚМ күй теңдеуін зерттеуге жарамайды, бірақ үлкен қашықтықта олар жазық айналу қисықтарын береді. Ал, Буркерт, Эйнасто және изотермиялық профилдері  $r \rightarrow 0$  кезінде ҚМ күй теңдеуін талдауға өте қолайлы. Жоғарыда айтылған барлық профилдердің ішінде Эйнасто профилі үшін ВІС-тің мәні минималды, ал изотермиялық профиль үшін ВІС – тің максималды болды.

Сонымен қатар, гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі және әр профиль үшін радиалды координатаның функциясы ретінде қысым профилдері тұрғызылды. Қарастырылып отырған галактикадағы ҚМ үшін күй теңдеуі алынды және дыбыс жылдамдығы есептелінді. Эйнасто, изотермиялық, Буркерт және экспоненциалды сфера профилдерінде тығыздықтың артуымен дыбыс жылдамдығы азаятындығы көрсетілді. Егер ортада дыбыс жылдамдығы азаятын болса, онда ол Әлемнің ірі масштабты құрылымдарының қалыптасуына ықпал ететіні космологиядан белгілі. Сондай-ақ, ҚМ-ның үлестіруіндегі сыну көрсеткіші есептелінді. Сыну көрсеткіші галактиканың ортасына жақындаған сайын тұрақты болатыны, ал гало аймағында азаятындығы көрсетілді. Оның сандық мәні вакуумға қарағанда ҚМ бар галактикада көп болды. Бұл сипаттаманы гравитациялық линзалау эффектісін зерттеу үшін қолдануға болады.

**Түйін сөздер:** қараңғы материя, айналу қисықтары, күй теңдеуі, дыбыс жылдамдығы, сыну көрсеткіші.

К.Бошкаев<sup>1,2,3,4</sup>, Т.К. Конысбаев<sup>1,2,3</sup>, Е.Б. Курманов<sup>2</sup>, М. Муччино<sup>1,5</sup>

<sup>1</sup>ННЛОТ, <sup>2</sup>Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

<sup>3</sup>Астрофизический институт В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан;

<sup>4</sup>Кафедра физики, Назарбаев Университет, Нур-Султан, Казахстан;

<sup>5</sup>НИЯФ, Национальная Лаборатория Фраскати, Фраскати, Италия

## СВОЙСТВА ТЕМНОЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ U5750

**Аннотация.** Проблема темной материи (ТМ) является одной из фундаментальных и пока нерешенных проблем современной астрофизики, космологии и физики элементарных частиц. В отличие от обычного видимого / барионного вещества, ТМ не участвует в электромагнитных взаимодействиях, но проявляет себя только через гравитацию (и, возможно, также через слабое взаимодействие) и поэтому недоступна для прямых наблюдений. Считается, что в настоящее время ТМ составляет около 26,8% от общей массы всех форм материи во Вселенной. Астрономические наблюдения показывают, что ТМ в основном концентрируется вокруг крупномасштабных космических объектов типа галактик и их кластеров.

В данной работе исследуется распределение ТМ в спиральной галактике U5750. Для исследования характеристик данной галактики рассмотрены известные и широко используемые профили плотности, такие



как изотермический, Буркерта, Наварро-Френка-Уайта (НФУ), Эйнасто и Мура. Кроме того, для сравнения рассмотрен профиль экспоненциальной сферы. Обычно он применяется для изучения внутренних частей галактик, но здесь был приведен в качестве примера. Нахождение численного значения параметров профиля гало темной материи представляет собой определенную проблему, которую, на наш взгляд, можно решить путем исследования динамики галактик. При этом учет темной материи в динамике галактик удачно реализуется в рамках Ньютоновского приближения. Для галактики U5750 изотермический профиль показал самый большой Bayesian Information Criterion (BIC) и самый большой  $\chi^2$ . Профили НФУ и Мура расходятся при  $r \rightarrow 0$ , вызывая проблему кэпа (the halo problem). Для исследования уравнения состояния ТМ эти два профиля не подходят, хотя на больших расстояниях они дают плоские кривые вращения. А профили Буркерта, Эйнасто и изотермический лучше всего подходят для анализа уравнения состояния ТМ при  $r \rightarrow 0$ , так как плотность становится конечной. Из всех выше перечисленных профилей Эйнасто имеет минимальный BIC, а изотермический профиль максимальный BIC.

Помимо этого, было решено уравнение гидростатического равновесия и построены профили давления как функция радиальной координаты для каждого профиля. Объединяя профили плотности с профилями давления, получено уравнение состояния ТМ в рассматриваемой галактике. Рассчитана скорость звука в ТМ и показана, что скорость звука ведет себя не однозначно. Для профилей Эйнасто, Буркерта, изотермического и экспоненциальной сферы скорость звука уменьшается с увеличением плотности. Это уникальная особенность ТМ, которая играет ключевую роль в формировании структуры. Из космологии известно, что если скорость звука в среде уменьшается, то она способствует образованию крупномасштабных структур Вселенной. Кроме того, рассчитан показатель преломления в распределении темной материи. Показатель преломления был постоянным вблизи галактического ядра и уменьшался в области гало. Его значение было несколько больше в галактике, заполненной ТМ, чем в вакууме. Эту характеристику можно использовать для измерения и изучения эффектов гравитационного линзирования.

**Ключевые слова:** темная материя, кривые вращения, уравнение состояния, скорость звука, показатель преломления

#### Information about authors:

Boshkayev Kuantay - PhD in Theoretical Physics and PhD in Relativistic Astrophysics, Associate Professor at the Department of Theoretical and Nuclear Physics, KazNU, Research Associate at NNLOT, KazNU, Almaty, Kazakhstan, kuantay@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1385-270X>;

Konysbayev Talgar – junior researcher, Fesenkov Astrophysical Institute “NCSRT” NSA RK, PhD student at Faculty of Physics and Technology, Al-Farabi Kazakh National University, konysbayev@aphi.kz, <https://orcid.org/0000-0001-9476-3700>;

Kurmanov Ergali – PhD student at Faculty of Physics and Technology, Al-Farabi Kazakh National University. E-mail: kurmanov.yergali@kaznu.kz, <https://orcid.org/0000-0003-3695-0166>;

Muccino Marco - PhD in Relativistic Astrophysics, Research Associate at INFN, Laboratori Nazionali Di Frascati, Frascati, Italy, marco.muccino@lnf.infn.it, <http://orcid.org/0000-0002-2234-9225>

#### REFERENCES

- [1] Einasto J., Kaasik A. and Saar E. (1974) Dynamic evidence on massive coronas of galaxies, *Nature*, 250(5464):309–310.
- [2] Rubin V. C., Burstein D., Ford W. K. and Thonnard N (1985) Rotation velocities of 16 SA galaxies and a comparison of Sa, SB and SC rotation properties, *Astrophys. J.*, 289:81–104.
- [3] Planck Collaboration and P. A. R. Ade et al. Planck Collaboration. (2013) Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, *J. Astr. Astrophys.*, 571:A1, DOI: 10.1051/0004-6361/20132152.
- [4] Bertone G., Hooper D. and Silk J. (2005) Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Phys. Rep.*, 405(5-6):279–390, DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031.
- [5] Schumann M. (2019) Direct detection of WIMP dark matter: concepts and status, *J. of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46(10):103003, DOI: 10.1088/1361-6471/ab2ea5.
- [6] Tam S., Jauzac M, Harvey D. et al. (2020) The distribution of dark matter and gas spanning 6 Mpc around the post-merger galaxy cluster MS0451–03, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 496(3):4032–4050, DOI: 10.1093/mnras/staa1828.
- [7] Ablimit I., Zhao G., Flynn, Ch. and Bird S. (2020) The Rotation Curve, Mass Distribution, and Dark Matter Content of the Milky Way from Classical Cepheids. *Astrophys. J. Lett.*, 895(1):L12, DOI: 10.3847/2041-8213/ab8d45
- [8] Epinat B., Adamczyk P., Bounissou S., Amram P. and Neichel B. (2019) Dark matter distribution in distant galaxies with HARMONI, Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, page Di
- [9] Chechin L.M., Kurmanov E.B. and Konysbayev T.K. (2019) Light rays in the epoch of dark matter domination *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Physical and Mathematical Series*, 5(327):5–10. DOI: 10.32014/2019.2518-1726.54

- [10] Boshkayev K., Zhumakhanova G., Mutalipova K. and Muccino M. (2019) Investigation of different dark matter profiles, *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Physical and Mathematical Series*, 6(328):25–33, DOI: 10.32014/2019.2518-1726.70.
- [11] Jimenez R., Verde L. and Peng Oh. (2003) Dark halo properties from rotation curves, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 339(1):243–259, DOI: 10.1046/j.1365-8711.2003.06165.x.
- [12] Sofue Y.(2013) Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center - From Black Hole to Entire Galaxy, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 65:118, DOI: 10.1093/pasj/65.6.118.
- [13] Burkert A. (1995) The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies, *Astrophys. J. Lett.*, 447:L25–L28, DOI: 10.1086/309560.
- [14] Navarro J., Frenk K. and White S. (1996) The Structure of Cold Dark Matter Halos, *Astrophys. J.*, 462:563, DOI: 10.1086/177173.
- [15] Moore B., Governato F., Quinn T., Stadel J. and Lake G. (1998) Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos, *Astrophys.J. Lett.*, 499(1):L5–L8, DOI: 10.1086/311333.
- [16] Merritt D., Graham A., Moore B.(2006) Empirical models for dark matter halos nonparametric construction of density profiles and comparison with parametric models. *The Astronomical Journal*, 132(6):2685–2700, DOI: 10.1086/508988.
- [17] Levenberg K. (1944) A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2):164–168, DOI: 10.1090/qam/10666.
- [18] Marquardt D. (1963) An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *Journal on applied mathematics*, 11(2):431–441, DOI: 10.1137/0111030.
- [19] Swaters R. A., B. F. Madore B. F. and Trewella M. (2000) High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. *The Astrophysical Journal*, 531(2):L107–L110, DOI: 10.1086/312540
- [20] Kuzio R., Stacy S. McGaugh, de Blok W. J. G. and A. Bosma. (2006) High-resolution optical velocity fields of 11 low surface brightness galaxies. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 165(2):461–479, DOI: 10.1086/505345
- [21] Schwarz D. G. (1963) Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics*, 6(2):461–464.
- [22] Siutsou I., Arguelles C. R. and Ruffini R. (2015) Dark matter massive fermions and Einasto profiles in galactic haloes. *Astronomy Reports*, 59(7):656–666, DOI: 10.1134/S1063772915070124
- [23] de Blok W. J. G. and McGaugh S. S.(1997) The dark and visible matter content of low surface brightness disc galaxies. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 290(3):533–552, DOI:10.1093/mnras/290.3.533
- [24] Barranco J., Bernal B. and Nunez D.(2015) Dark matter equation of state from rotational curves of galaxies, *Mon. Not. Roy.Astr. Soc.*, 449(1):403–413, DOI: 10.1093/mnras/stv302.
- [25] Diego J., Kaiser N. et.al, (2018) Dark Matter under the Microscope: Constraining Compact Dark Matter with Caustic Crossing Events. *Astrophys. J.*, 857(1):25 DOI: 10.3847/1538-4357/aab617

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.102>

Volume 6, Number 334 (2020), 91 – 98

MPHTI: 41.29.21; 41.29.25

UDK 524 D.

**D. Kairatkyzy<sup>1</sup>, H. C. Quevedo<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University,<sup>2</sup>Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

E-mail: kairatkyzy\_dina90@mail.ru

**MASS DISTRIBUTION OF DARK MATTER HALO  
AND SCALE EVOLUTION OF EARLY TYPE GALAXIES**

**Abstract.** In this paper we use two suites of ultra-high resolution N-body simulations Phoenix and Aquarius Projects to study the assembly history of sub-halos and its dependence on host halo mass. We found that more massive haloes have more progenitors, which is in contrast with former works because they counted dynamical progenitors repeatedly. Less massive halos have larger fraction of dynamical progenitors than more massive ones. The typical accretion time depends strongly on host halo mass. Progenitors of galactic halos are accreted at higher redshift than that of cluster halos. Once these progenitors orbit their primary systems, they rapidly lose their original mass but not their identifiers. Most of the progenitors are able to survive to present day. At given redshift, the survival fraction of accreted sub-halos is independent of host halo mass, while sub-halos in high mass halos lost more mass.

In the second part, we use a semi-analytical galaxy formation model compiled on a Millennium Simulation to study the size evolution of massive early-type galaxies from redshift  $z = 2$  to present days. We find that the model we used is able to well reproduce the amplitude and slope of size-mass relation, as well as its evolution. The amplitude of this relation reflects the typical compactness of dark matter halos at the time when most stars are formed. This link between size and star formation epoch is propagated in through galaxy combinations. Minor combinations are increasingly important with increasing present day stellar mass for galaxies more massive than  $10^{11.4}M_{\odot}$ . At lower masses, major combinations are more important. In situ star formation contributes more to the size growth than it does to stellar mass growth. Similar to former works, we find that minor combinations dominate the subsequent growth both in stellar mass and in size for early formed early-type galaxies.

**Key words:** dark matter halo, semi-analytical galaxy formation model.

**1. Introduction.** The un-evolution sub-dark matter halo mass function (USMF) describes the mass distribution of all precursor dark matter halos involved in the construction of the dark halo and its substructures throughout the dark halo formation. The mass distribution of dark matter halos. Some of these dark bodies that fell into the main dark halo disappeared, and some survived as a sub-dark matter halo. Their mass distribution plus the influence of evolution is the current sub-dark matter halo mass distribution. In order to understand the dependence of the sub-dark matter halo mass function on the quality of the main dark halo, we need to know more about it from the USMF. First, whether the USMF of the galaxy cluster darkness and the galaxy dark halo is the same; second, whether the current sub-dark is dependent on the quality of the main dark halo is caused the evolution is different at the beginning. In paper [1] were studied the distribution of the current dark halo in 2009. They found that the USMF does not depend on the quality of the main dark halo. This result is a bit strange, because the energy spectrum of the standard cosmological model is not scale-independent, so it is difficult to understand why the main dark halo of different scales actually have the same USMF.

We use the dim sum of the tree to track all the predecessors. First we need to build the main branches of the dark matter halo and the trees. Our method is to start with the main dark halo of the redshift  $z = 0$ , find the predecessor of the highest quality of its last time point, and then find the predecessor of the

highest quality at this moment. Repeat this step until the darkness of the predecessor is too low cannot be resolved (there are 32 particles in the numerical simulation we used), and the precursors of the largest mass at each moment constitute the main branch of the combined tree. Then, if a dark halo eventually enters the radius of the main branch ( $R_{200}$ ), it is defined as the darkness of the predecessor. The darkness of the predecessor is very important when accretion is a sub-dark halo, and many previous work gives a variety of definitions. For example: in the paper [2] used the moment when the dark halo entered the FOF group of the main branch; in the paper [3] used this dark matter halo to reach the moment of its greatest quality in history. In this work, we define the maximum wraparound velocity ( $V_{max}$ ) of a sub-dark matter halo, and it is also an independent dark halo, defined as its accretion time. Correspondingly, its mass is now defined as the accretion mass. We use this definition because of Gao et al. [4] found that the mass of a satellite galaxy closely related to the peak of the maximum surrounding velocity of the sub-dark matter halo.

The combined tree of dark matter halos is generally very complicated, we need to consider two special cases, I will explain it in detail next. 1) Ejected halo: a dark halo has been briefly appeared within the radius of the main branch, but it is eventually popped out when the redshift  $z = 0$ , and it is disappeared in the outside of the virial radius of the main dark halo. Previous work found that the dark halo that was ejected within the virial radius of 1~3 times around the main dark halo, and the probability of being popped was related to their own quality, which is the main cause of the deviation of the aggregation. Because the main dark halo is less affected by the current sub-dark halo distribution, we did not include this part of the dark halo in the predecessor dark halo sample. 2) Through the dynamical progenitor: that is, the former branch through multiple times of the main branch in dark matter halo. After the dark halos of these predecessors entered the radius of the main branch, one or several redshifts appeared outside of the radius of main branch, but eventually it is disappeared within the main branch or within the main dark halo's virial radius when the redshift  $z = 0$ .

The definition of the dark halo used in our predecessor is completely different from the early observations [5]. They use the combined tree of the FOF group to find the dark halo of the predecessor, and the dark halo which we are looking for the main combination into the  $R_{200}$  of the main dark halo. Because there are some dark halos in the FOF group are only connected by a thin particle "bridge" and do not belong to the same system, our method can remove these false "sub-dark halos". In addition, the way we track the darkness of our predecessors is completely different. When tracking the predecessor's dark halo, they only considered the dark halo of the main branch into the main combination, ignoring the dark halo of the predecessors, which first combined into other dark halos and followed other dark halos into the main branches. This method can give us less statistics of a large number of the dark halo's predecessors. In the work of Li and Mo [6] counted all the dark halo's predecessors, including dark matter halos which first entered other dark halos. But these dark matter halos, which first enter other dark halos, may have been broken up before entering the main dark halo, so they ultimately did not contribute to the sub-structure of the main dark halo, and their quality has been incorporated into their host dark halo at the time. When the host darkness enters the main branch, it is counted as the quality of their host dark halo, so they repeat the statistics of the quality of these dark halos. In our work, there is no statistics of dark halo which are disappears in the darkness of other predecessors. The two important differences between Li Yun's work and our work are that they count as a predecessor of dark halo every time they meet.

**2. Mass distribution of dark matter halo.** In figure 1, we compare the ratio of Phoenix dark halo and Aquarius dark halo through the predecessor dark halo to all front of main dark halos. The figure shows the median values of 7 Phoenix dark halos and 6 Aquarius dark halos. Through the darkness of the predecessor dark halo, the  $R_{200}$  that repeatedly enters the main branch is repeated, and the predecessor dark halo that eventually disappears in the main dark halo. The results for Phoenix are indicated by solid red lines and the results of Aquarius are indicated by solid black lines. The horizontal axis is the quality of the dark halo of the predecessor normalized by the quality of the main dark halo. Note that at this time we are counting the predecessor dark halo which passed through the front, not the number of crossing times of the predecessor dark halo. It can be seen from the figure that when the quality of the current dark halo is greater than 1/1000 of their main dark halo quality, whether it is Phoenix dark halo or Aquarius dark halo, the proportion of predecessor dark halo through the front is small. But the proportion of dark halo lower than this quality is very large. Phoenix's galaxy group has about 35%, and Aquarius's galaxy group has about 50% of its predecessor dark halo has crossed the main branches for many times.

In figure 2, we present the USMF for the integration of the Phoenix numerical simulation and the Aquarius numerical simulation. The red solid and black solid lines represent the median of the USMF for each of the seven Phoenix galaxy cluster halos and the six Aquarius galaxy dark halos, respectively. The quality of the main dark halo limits the quality of its sub-dark halo, and the dark halo of the galaxy cluster is even greater than the mass of the galaxy dark halo. In order to remove the dominant main dark halo dependence to the quality, we use the quality of the predecessor dark halo normalized by the main dark halo mass  $M_{sub} / M_{halo}$ . The figure 2 gives the mass function of the integral, which makes the difference between the different samples more obvious. As can be seen from the figure 2, the USMF is obviously dependent on the quality of the main dark halo, and the Phoenix main dark halo of the galaxy cluster level contains an average of 30% substructures more than the Aquarius main dark halo of the galaxy cluster level.

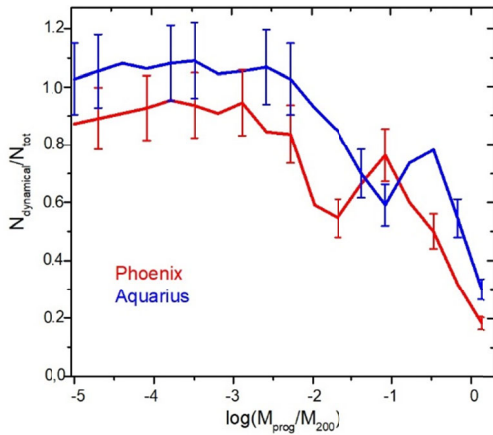


Figure 1 - The median ratio of the seven Phoenix and the six Aquarius to the dark halo of the predecessor to its quality

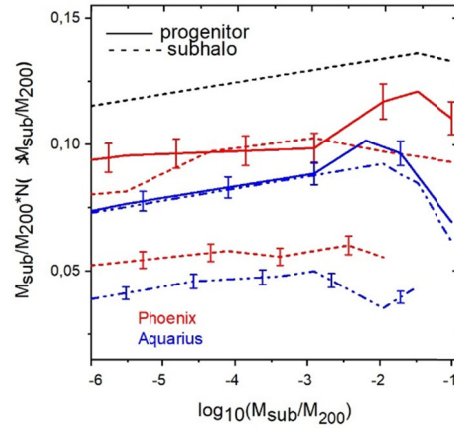


Figure 2 - The median of the seven Phoenix dark halos, and the median of six Aquarius dark halos

Below, we study the survival rate and survival mass ratio of the two redshifts  $z = 2$  and  $z = 4$ , which are accreted by the precursors. The triangle line in figure 3 represents the survival rate, and the number of survivors compared to the number of surviving dark halo, which was accreted by the redshift. The square line indicates the survival quality ratio, and the mass of the dark halo which is surviving to the present, compared to the mass when they were just accreted. Red and black indicate the result of Phoenix dark halo and Aquarius dark halo, respectively. It can be seen that whether it is in Phoenix dark halo or in Aquarius dark halo, at the redshift  $z = 2$ , the accreted predecessor of the dark halo, which mass is larger than the ( $\log(M_{prog} / M_{200, z=0}) > 10^{-5}$ ), about 90% have survived to the present.

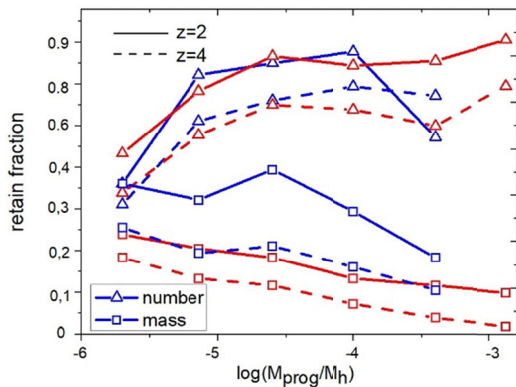


Figure 3 - Phoenix dark halo and Aquarius dark halo in the redshift  $z = 4$  and  $z = 2$  accreted of all precursors

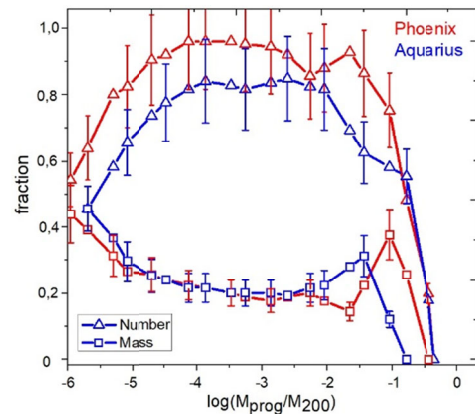


Figure 4 - Survival and survival mass ratios for all precursors

In figure 4, we show the relationship between the survival rate and the survival mass ratio of all the precursors, which accreted at all times in the history of the whole accretion, and the quality of the predecessors. Red and black line give the median values of Phoenix Dark Halo and Aquarius Dark Halo, respectively. The error bars represent the full range of diffusion for each of the seven Phoenix dark halos and six Aquarius dark halos. Triangles and squares represent survival and survival mass ratios, respectively. It can be seen from the figure 4 the survival rate of the dark halo of the predecessor is more dependent on its quality, and the massive predecessor dark halo is more easier to be destroyed, because the greater the mass of the dark halo, the stronger the dynamic friction. The dynamic friction and the tidal stripping force work together to make the massive dark halo predecessor's survival rate lower.

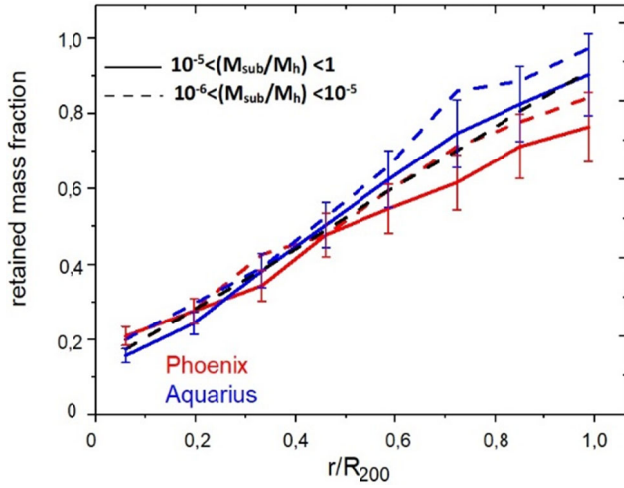


Figure 5 - The median value of the existing sub-dark matter halo in the Phoenix dark and Aquarius dark halo

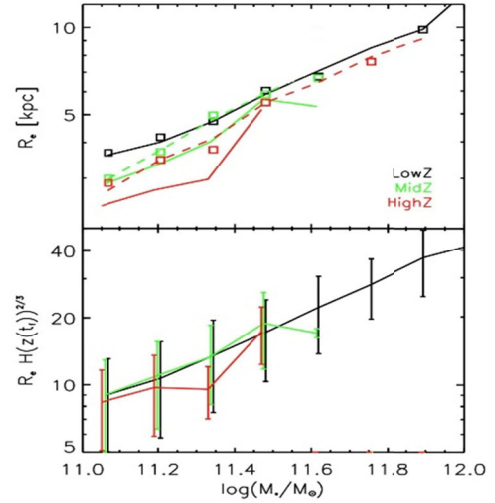


Figure 6 - Scale-quality relationship of early-type galaxies at different redshifts

In figure 5, we show the median value of the survival mass ratio of Phoenix dark halo and Aquarius neutron dark halo and their relationship  $r / r_{200}$  in the main dark halo. To compare the dependence of this relationship on the sub-dark halo mass function, we divided the sub-dark halo samples into two parts according to the mass:  $10^{-6} < M_{sub} / M_h < 10^{-5}$  and  $10^{-5} < M_{sub} / M_h$ . The error bars represent the full dispersion of Phoenix Dark Halo and Aquarius Dark Halo. It can be seen that the survival mass ratio of the sub-dark matter halo has a strong correlation with their distance from the center, and this correlation does not depend on the mass of the sub-dark halo.

In figure 6 gives the median distribution of the scale-quality relationships for the three samples (samples represented by red, green, and black solid lines). It can be seen that the slope of the scale-quality relationship is almost independent of the redshift, and the amplitude has increased by about 1.2 times from the redshift  $z \sim 1.6$  to the present. The square in the upper graph in figure 6 represents the scale-mass distribution of the galaxies of each sample in the redshift  $z = 0$ . Unlike the dashed lines, they only contain the early galaxies of the satellite galaxies when the redshift is  $z = 0$ . About 27% of the MidZ galaxies, about 21% of the HighZ galaxies are satellite galaxies in nowadays. The higher the dark matter of the same mass, the higher the redshift and the denser, the evolution of the dimension follows to this formula  $R_{200}(z) \propto H(z)^{-2/3}$ .

**3. Formation of early galaxies.** In figure 7, we examine the contribution of different physical processes to the mass of early-type galaxies. We follow the main branches of the combined trees of each galaxy, and record the in-situ star formation, the galaxy main combination, the minor combination, starburst, and this contribution of these four physical processes to the mass growth during the growth of the galaxy. Divided by the total stellar mass, and all sample galaxies take the median by mass interval. The solid line indicates the result of the LowZ galaxies, and the dashed line indicates the results of the

MidZ galaxies. In the process of in-situ star formation, we distinguish between stars formed by starbursts caused by galaxies (indicated by black) and stars formed statically on galaxies (indicated by green). We distinguish the main combination (indicated by blue) or minor combination (indicated by red) according to the mass ratio of the two galaxies.

In figure 8, we present the scale-growth process of four galaxies with redshift  $z = 0$  in the model. We record the changes in the mass and radius of the galaxies caused by different physical mechanisms at each moment, and link the changes on the scale-quality map with lines of different colors. The change in quality is monotonous, but the scale is usually increasing or decreasing. At low quality (high redshift time), the scale and quality of our sample galaxies grow mainly through the formation of static stars (black lines) on the galaxies, and the quality formed during this period is only comparable to the final mass of the galaxies. Very small, but the most scaled growth is very effective. After the redshift  $z = 2$  (vertical dotted line), the evolution of the galaxies is dominated by the combination. Consistent with the statistical average, the main combination (blue) dominates the growth of relatively small-mass galaxies, and the minor combination dominates the growth of large-mass galaxies.

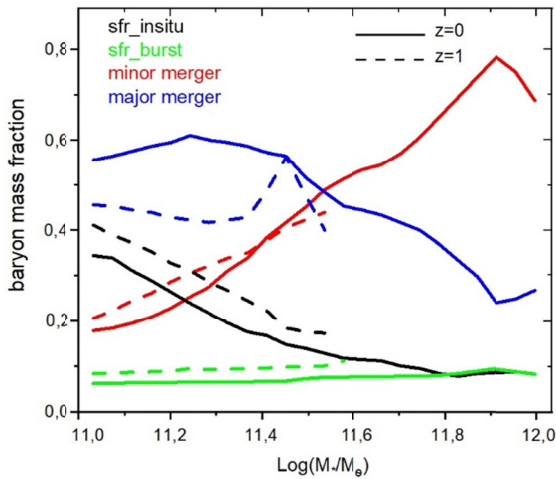


Figure 7 - The contribution of different physical mechanisms to stellar mass growth

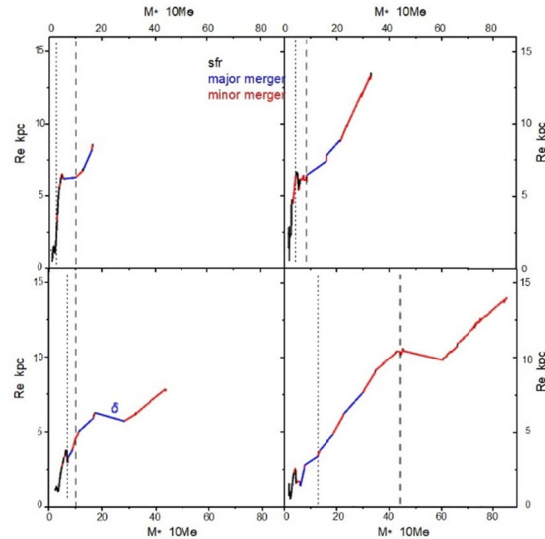


Figure 8 - The ratio of the three main physics to the galaxy-scale growth of the main combination

As shown in figure 9, there are several very important features in the sample which we are tracking. For example: there is no significant difference in the scale of growth between main and minor combination in terms of growth unit mass. Part of the reason is because we used in the calculation of the galaxies' scale changes, contains the mass ratio. Before the combination, the radius of the two galaxies were:  $5.9 \text{ kpc}$  and  $1.7 \text{ kpc}$ , and the corresponding masses were:  $12.2 \times 10^{10} M_{\square}$  and  $8.8 \times 10^{10} M_{\square}$ . After the combination, the projected radius of the newly formed galaxies is  $5.1 \text{ kpc}$ .

Figure 10 shows the average scale and mass change from the (HighZ (red solid line) and MidZ (blue solid line)) high redshift early galaxies to the low redshifts. We will compare the evolution of the galaxies after the minor combination process, which will cause the shape of the galaxies to change. We only consider the scale and quality of the nucleus to remove the influence of the disk of the galaxies. We found that although the MidZ galaxies are not early galaxies when the redshift  $z = 2$ , their scale and quality are pursuing HighZ's early galaxies. As can be seen in figure 16, the HighZ early-type galaxies are redshifted from  $z = 2$  to redshifted  $z = 0$ . The quality has increased by 2 times and the scale has increased by 1.9 times. The MidZ galaxies' mass increased by 1.7 times from the redshift  $z = 1$  to the redshift  $z = 0$ , and the scale increased by 1.5 times.

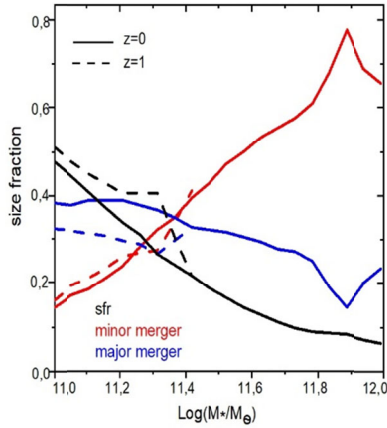


Figure 9 - Four different masses of redshift  $z = 0$  and  $z = 0$  of the early galaxy's mass and scale growth process

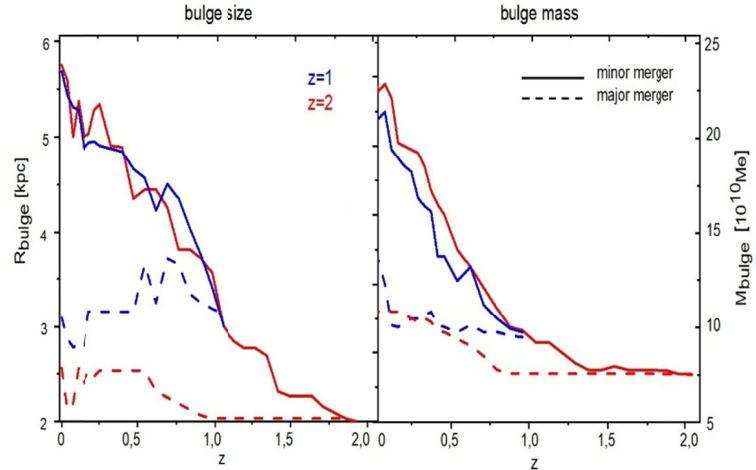


Figure 10 - The mass of the galaxy and the median value of the effective radius of the projection with the redshift

**4. Conclusion.** We use the latest half-system galaxies formation model to study the scale evolution of large-scale early galaxies. We found that the half-mass radius of the early-type galaxies with redshift  $z = 0$  in the simulation is 1.8 times larger than the radius of the early-type galaxies with the redshift  $z = 2$  selected by the same method. This discovery is consistent with many recent observations.

When we choose galaxies in the same way in different redshifts, we are not choosing the same galaxies. In low redshifts, new galaxies are constantly becoming early galaxies. The number of early galaxies has increased by 100 times from redshift  $z = 1$  to  $z = 2$ . Therefore, most of the current early-type galaxies are not early-type galaxies in high redshifts, and the mass range of early-type galaxies are also changed. Therefore, there are two main reasons for the changes in the scale of early-type galaxies.

Convergence, stellar accretion, and in situ star formation preserved this dependence on formation time, to a greater or lesser extent, in the evolution of early-type galaxies during low redshift periods. Compared with star formation, the combination dominates the quality and scale evolution of early low-shifted galaxies, and the minor combination is most important for the evolution of early-type galaxies with  $M_{star} > 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ . The starburst caused by the combination only contributed 5% in quality growth, indicating that starbursts occurred less. Previous studies have shown that the red-shifted  $z = 1$  after the combination is a lack of gas, consistent with our conclusions. In-situ star formation contributes more to scale growth than to mass growth. But for large-scale galaxies, in-situ star formation contributes less to the scale or mass than to the combination process. We found that early-type galaxies formed by high redshifts mainly grew by sub-combination in the subsequent evolution. Their nuclear mass and nuclear sphere radius increased by 2 and 1.9 times from redshift  $z = 1$  to redshift  $z = 0$ , respectively. When we studied the growth of individual galaxies, we found that a single galaxies combination or star formation may also shrink the scale of the galaxies.

The model we used did not incorporate the physical process of gas interaction energy dissipation when combined, which resulted in our results being too large for observations with high redshift gas [10].

Most early-type galaxies formed by high redshifts have evolved to today's central galaxies (of course, most of the current central galaxies are not early-type galaxies at high redshifts). Then it is very interesting to study the high redshift early galaxies in the low redshift state, or the low redshift galaxies in the high redshift mass form distribution. These studies are relatively easy to implement in a half-cutting system. We have conducted some research and look forward to publishing follow-up articles. In addition, the observations emphasize the “binomiality” of galaxies evolution (Huang et al., 2013). The observations show that high-redshift galaxies and low-redshift galaxies are consistent with the mass density profile within 1 kpc from the center. The density profile within the internal 1 kpc is also independent of galaxy mass. That is to say, the early-type galaxies with high redshifts only change externally during the subsequent evolution. This question is also very interesting, but after some tests we made it, we regretted that we could not study this issue using the current model.



Д. Кайратқызы<sup>1</sup>, Э. С. Кеведо<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан;  
<sup>2</sup>Мексика Ұлттық Автономиялық университеті (UNAM)

### ҚАРАҒЫ МАТЕРИЯ ГАЛОСЫНЫҢ МАССАЛЫҚ ТАРАЛУЫ ЖӘНЕ ЕРТЕ ТИПТЕГІ ГАЛАКТИКАЛАРДЫҢ ТҮЗІЛУ ЭВОЛЮЦИЯСЫ

**Аннотация.** Жұмыста суб-галолардың жинақталу тарихын және оның гало массасына тәуелділігін зерттеу үшін Phoenix пен Aquarius Projects-тің жоғары ультра ажыратымдылығының N-денелік модельдеуін қолданамыз. Массалық галоньң негізін қалаушыны анықтадық, бұрынғы жұмыстармен салыстырғанда, олар динамикалық негізін қалаған галоларды бірнеше рет есептеген. Аз массивті галоға қарағанда массасы аз галоларға динамикалық үйкелістің үлкен әсері бар. Әдеттегі жинақтау уақыты гало массасына тәуелді. Галактикалық қараңғы материя галолардың негізін құраушы қызыл ығысу кезінде кластерлік галактикалық галолаларға қарағанда жоғары болады. Бұл бастау өздерінің алғашқы жүйелерінің айналасында болғаннан кейін, идентификаторларын емес, бастапқы массасын тез жоғалтады. Аталық галолардың көпшілігі бүгінге дейін өмір сүріп келді. Берілген қызыл ығысу кезінде аккрецияланған суб-галостардың тіршілік ету үлесі негізін қалаған гало массасына тәуелді емес, ал үлкен галолардағы субгалолар көп массасын жоғалтады.

Екінші бөлімде біз  $z = 2$  қызыл ығысуынан бастап бүгінге дейінгі массивтік ерте типті галактикалардың көлемдік эволюциясын зерттеу үшін Мыңжылдық Модельдеуі бойынша құрастырылған галактиканың пайда болуының жартылай аналитикалық моделін қолданамыз. Біз қолданған модель амплитудасы мен көлбеу мөлшерін, сондай-ақ оның эволюциясын жақсы шығаруға қабілетті екенін анықтаймыз. Бұл қатынастың амплитудасы көптеген жұлдыздар пайда болғандағы қараңғы материя галосының типтік ықшамдылығын көрсетеді. Бұл өлшем мен жұлдыздардың пайда болу дәуірі арасындағы байланыс галактиканың тіркесімдері арқылы таралады. Галактикалар үшін қазіргі жұлдыз массасының өсуіне байланысты кішігірім комбинациялар  $10^{11.4} M_{\odot}$ -ден үлкен маңызға ие. Төменгі массада негізгі комбинациялар маңызды. Жұлдыз өлшемінің ұлғаюына қарағанда жұлдыз массасының көбеюіне көбірек ықпал етеді. Бұрынғы жұмыстарға ұқсас, кішігірім комбинациялар жұлдыздық масса бойынша да, ерте пайда болған ерте типтегі галактикаларда көлем бойынша да басым болады.

**Түйін сөздер:** қараңғы материя гало, галактиканың жартылай аналитикалық түзілуі.

Д. Кайратқызы<sup>1</sup>, Э. С. Кеведо<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. Аль-Фараби,  
<sup>2</sup>Национальный автономный университет Мексики (UNAM)

### МАССОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЛО ТЕМНОЙ МАТЕРИИ И МАСШТАБНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ГАЛАКТИК РАННИХ ТИПОВ

**Аннотация.** В статье мы используем два набора моделирования N-тела сверхвысокого разрешения Phoenix и Aquarius Projects для изучения истории сборки суб-гало и ее зависимости от массы основного гало. Мы обнаружили, что более массивные гало имеют больше предшественников, что контрастирует с предыдущими работами, потому что они неоднократно считали динамические предшественники. Менее массивные гало имеют большую долю динамических предшественников, чем более массивные. Типичное время аккреции сильно зависит от массы основного гало. Предшественники галактических гало аккрецируются на более высоком красном смещении, чем у гало скоплений. Как только эти предшественники вращаются вокруг своих первичных систем, они быстро теряют свою первоначальную массу, но не свои идентификаторы. Большинство предшественников доживают до наших дней. При данном красном смещении доля выживания суб-гало не зависит от массы основного гало, в то время как суб-гало,  $\phi$  в основном гало с большой массой теряют больше массы.

Во второй части мы используем полуаналитическую модель образования галактик, скомпилированную с помощью Millennium Simulation, для изучения эволюции размеров массивных галактик ранних типов от красного смещения  $z = 2$  до наших дней. Мы обнаружили, что использованная нами модель способна хорошо воспроизвести амплитуду и наклон зависимости размер-масса, а также ее эволюцию. Амплитуда этого соотношения отражает типичную компактность гало темной материи в то время, когда образуется большинство звезд. Эта связь между размером и эпохой звездообразования распространяется через комбинации галактик. Второстепенные комбинации становятся все более важными с увеличением современной звездной массы для галактик с массивом более  $10^{11.4} M_{\odot}$ . При более низких массах более важны основные комбинации. Звездо-

образование больше способствует увеличению размеров, чем росту звездной массы. Подобно предыдущим работам, мы обнаруживаем, что незначительные комбинации доминируют в последующем росте как звездной массы, так и размера для рано сформировавшихся галактик ранних типов.

**Ключевые слова:** гало темной материи, полуаналитическое образование галактик.

**Information about the author:**

Kairatkyzy D., Master of Natural Sciences in the direction of "Astronomy", PhD - doctoral student in the specialty "Physics and Astronomy". Senior Lecturer at the Department of Solid State Physics and Nonlinear Physics, Faculty of Physics and Technology, KazNU named after al-Farabi; kairatkyzy\_dina90@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9543-8464>

Quevedo H.C., Professor of Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Institute of Nuclear Science.

**REFERENCES**

- [1] Boylan-Kolchin M., Springel V., White S.D.M., Jenkins A., Lemson G. (2009a). Resolving cosmic structure formation with the Millennium-II Simulation. *MNRAS*, 398:1150–1164.
- [2] Gnedin N.Y. (2000). Effect of Reionization on Structure Formation in the Universe. *ApJ*, 542:535–541.
- [3] Okamoto T., Gao L., Theuns T. (2008). Mass loss of galaxies due to an ultraviolet background. *MNRAS*, 390:920–928.
- [4] Gao L., Frenk C.S., Boylan-Kolchin M., Jenkins A., Springel V., White S. D.M. (2011). The statistics of the subhalo abundance of dark matter haloes. *MNRAS*, 410:2309–2314.
- [5] Springel V., White S.D.M., Jenkins A., Frenk C.S., Yoshida N., Gao L., Navarro J., Thacker R., Croton D., Helly J., Peacock J.A., Cole S., Thomas P., Couchman H., Evrard A., Colberg J., Pearce F. (2005). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 435:629–636.
- [6] Springel V., White S.D.M., Tormen G., Kauffmann G. (2001a). Populating a cluster of galaxies - I. Results at [formmu2]  $z = 0$ . *MNRAS*, 328:726–750.
- [7] Li R., Shan H., Mo H., Kneib J.-P., Yang X., Luo W., vandenBosch F.C., Erben T., Moraes B., Makler M. (2014). First galaxy-galaxy lensing measurement of satellite halo mass in the CFHT Stripe-82 Survey. *MNRAS*, 438:2864–2870.
- [8] Ghigna S., Moore B., Governato F., Lake G., Quinn T., Stadel J. (2000). Density Profiles and Substructure of Dark Matter Halos: Converging Results at Ultra-High Numerical Resolution. *ApJ*, 544:616–628.
- [9] Gao L., Frenk C.S., Boylan-Kolchin M., Jenkins A., Springel V., White S.D.M. (2011). The statistics of the subhalo abundance of dark matter haloes. *MNRAS*, 410:2309–2314.
- [10] Gao L., White S.D.M., Jenkins A., Stoehr F., Springel V. (2004). The subhalo populations of  $\Lambda$ CDM dark haloes. *MNRAS*, 355:819–834.

## МАЗМҰНЫ

<i>Ибраев А.Т.</i> Кватерниондар мен октониондардың коммутативті алгебрасын жасаудың тәсілі.....	5
<i>Алдашев С.А., Канапьянова З.Н.</i> Түрі мен дәрежесі өзгертілген үшөлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған аралас есеп.....	13
<i>Сейтмуратов А.Ж., Айтимов М.Ж., Сейтханова А.К., Остаева А.Б., Төлегенова Э., Джанысова Д.Д., Шамилов Т.</i> Цилиндрлік ығысу толқындарының дербес есебі ( тұрақты мәні $\gamma - \alpha + 2 > 0$ және $\alpha = \beta$ шамасы жағдайында) .....	19
<i>Алдашев С.А., Қазез Е.</i> Бір кластағы азғындалған көп өлшемді гипербола-параболалық теңдеулер үшін аралас есептердің корректілігі.....	27
<i>Бабич М.Ю., Бутаев М.М., Тарасов А.А., Иванов А.И., Малыгин А.Ю., Сауанова К.Т., Сағындықова Ш.Н.</i> Инфокоммуникациялық жүйенің сұранысты өндеудегі біркелкі үлестірімді кездейсоқ уақыт қосындысының таралу функциялары.....	36
<i>Садирмекова Ж.Б., Самбетбаева М.А., Тусупов Д.А., Алтынбекова Ж.Т.</i> Пәндік аймақтың онтологиялық моделі негізінде ғылыми-білім беру қызметін қолдаудың ақпараттық жүйесін құру.....	45
<i>Минглибаев М.Дж., Кошербаева А.Б.</i> Планета жүйесінің қозғалыс теңдеулері.....	53
<i>Сарсембаева А.Т., Белисарова Ф.Б., Одсурен М., Сарсембай А.Т., Түтебаева А.С., Оразымбет А.Т., Абшиев М.Е.</i> Ең қуатты күн жарқылының қайта ұштасу жылдамдығын анықтау.....	61
<i>Серикбаев Н.С., Нұрманова Г. Н., Мейрманова А.А.</i> Екі компонентті жалпы (2+1)-өлшемді Дэви-Стюартсон I теңдеуі мен Г-спиндік жүйесі арасындағы калибрлік эквиваленттілігі.....	68
<i>Айтжанов Н.М., Онгар Б., Бисенбаев П., Байтенов Е.С., Жанібекұлы А.</i> Өнеркәсіптік кәсіпорын желісіндегі энергия тиімділігін және пайдалану мүмкіндігін бағалау.....	74
<i>Бошкаев К., Қонысбаев Т.К., Құрманов Е.Б., Муччино М.</i> U5750 галактикасындағы қараңғы материяның қасиеттері.....	81
<i>Қайратқызы Д., Кеvedo Э. С.</i> Қараңғы материя галосының массалық таралуы және ерте типтегі галактикалардың түзілу эволюциясы.....	91

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ибраев А.Т.</i> Метод построения коммутативной алгебры кватернионов и октонионов.....	5
<i>Алдашев С. А., Канапьянова З. Н.</i> Смешанная задача для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.....	13
<i>Сейтмуратов А.Ж., Айтимов М.Ж., Сейтханова А.К., Остаева А.Б., Тулегенова Э., Джанысова Д.Д., Шамилов Т.</i> Решение частных задач цилиндрических сдвиговых волн (при раскладе постоянных величин $\gamma - \alpha + 2 > 0$ и $\alpha = \beta$ ) .....	19
<i>Алдашев С.А., Казез Е.</i> Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболю-параболических уравнений.....	27
<i>Бабич М.Ю., Бутаев М.М., Тарасов А.А., Иванов А.И., Малыгин А.Ю., Сауанова К.Т., Сагындыкова Ш.Н.</i> Функции распределений сумм равномерно распределённых случайных значений времен обработки запроса инфокоммуникационной системой.....	36
<i>Садирмекова Ж.Б., Самбетбаева М.А., Тусупов Д.А., Алтынбекова Ж.Т.</i> Построение информационной системы поддержки научно-образовательной деятельности на основе онтологической модели предметной области.....	45
<i>Минглибаев М.Дж., Кошербаева А.Б.</i> Уравнения движения планетных систем.....	53
<i>Сарсембаева А.Т., Белисарова Ф.Б., Одсурен М., Сарсембай А.Т., Тугебаева А.С., Оразымбет А.Т., Абишев М.Е.</i> Определение скорости пересоединения наиболее мощных солнечных вспышек.....	61
<i>Серикбаев Н.С., Нугманова Г. Н., Мейрманова А.А.</i> Калибровочная эквивалентность между двухкомпонентным обобщением (2+1)-мерного уравнения Дэви-Стюартсона I и Г-спиновой системой.....	68
<i>Айтжанов Н.М., Онгар Б., Бисенбаев П.А., Байтенов Е.С., Жанибекұлы А.</i> Оценка энергетической эффективности и возможности использования в сетях промышленных предприятий стабилизатора напряжения с функцией энергосбережения.....	74
<i>Бошкаев К., Конысбаев Т.К., Курманов Е.Б., Муччино М.</i> Свойства темной материи в галактике U5750.....	81
<i>Кайратқызы Д., Кеведо Э. С.</i> Массовое распределение гало темной материи и масштабная эволюция галактик ранних типов.....	91

## CONTENTS

<i>Ibrayev A.T.</i> Method for constructing the commutative algebra of quaternion and octonion .....	5
<i>Aldashev C. A., Kanapyanova Z. N.</i> Ixed problem for three-dimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order.....	13
<i>Seitmuratov A., Aitimov M. Zh., Seitkhanova A., Ostayeva A., Tulegenova E., Janyssova D., Shamilov T.</i> Solution of private tasks of cylindrical shear waves (in the case of the distribution of constant values $\gamma - \alpha + 2 > 0$ and $\alpha = \beta$ ).....	19
<i>Aldashev C.A., Kazez E.</i> Correctness of the mixed problem for one class of degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations.....	27
<i>Babich M.Yu., Butaev M.M., Tarasov A.A., Ivanov A.I., Malygin A.Yu., Sauanova K.T., Sagyndykova Sh.N.</i> Functions of distributions of amounts of uniforally distributed random values of times of processing the request of the infocommunication system.....	36
<i>Sadirmekova Zh.B., Sambetbayeva M.A., Tussupov J.A., Altynbekova Zh.T.</i> Building an information system to support scientific and educational activities based on the ontological model of the subject area.....	45
<i>Minglibayev M. Zh., Kosherbayeva A.B.</i> Equations of planetary systems motion.....	53
<i>Sarsembayeva A., Belisarova F., Odsuren M., Sarsembay A., Tutebayeva A., Orazymbet A., Abyshev M.</i> Definition of the reconnection rate of most powerful solar flares.....	61
<i>Serikbayev N.S., Nugmanova G.N., Meirmanova A.A.</i> Gauge equivalence between the two-component generalization of the (2+1)-dimensional Davey-Stewartson I equation and $\Gamma$ - spin system .....	68
<i>Aitzhanov N.M., Ongar B., Bissenbaeyev P.A., Baitenov E.S., Zhanibekuly A.</i> Assessment of energy efficiency and possibility of use in the networks of industrial enterprises voltage stabilizer with energy saving function.....	74
<i>Boshkayev K., Konysbayev T.K., Kurmanov E.B., Muccino M.</i> Dark matter properties in galaxy U5750.....	81
<i>Kairatkyzy D., Quevedo H. C.</i> Mass distribution of dark matter halo and scale evolution of early type galaxies.....	91

**Publication Ethics and Publication Malpractice**  
**in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, А. Ахметова*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 07.12.2020.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

6,3 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

## Уважаемые авторы научных журналов НАН РК!

Президиумом НАН РК принято решение, в целях повышения международного рейтинга академических изданий, объединить следующие 3 журнала, начиная с № 5 (сентябрь-октябрь), 2020 г., с высокорейтинговыми журналами НАН РК, входящими в международные базы Scopus, WoS и др.:

1. **«Известия НАН РК. Серия биологических и медицинских наук»** объединить с журналом **«Доклады НАН РК»**;
2. **«Известия НАН РК. Серия аграрных наук»** – **«Доклады НАН РК»**;
3. **«Известия НАН РК. Серия общественных и гуманитарных наук»** – с журналом **«Вестник НАН РК»**.

Статьи, которые публиковались в журналах **«Известия НАН РК. Серия биологических и медицинских наук»** и **«Известия НАН РК. Серия аграрных наук»**, впредь будут публиковаться в журнале **«Доклады НАН РК»**, а статьи, публикуемые в журнале **«Известия НАН РК. Серия общественных и гуманитарных наук»**, – в журнале **«Вестник НАН РК»**.

При подаче статей просим указывать название журнала и отрасль науки, согласно представленного перечня (см. ниже) в данном журнале:

I. Научный журнал **«Вестник НАН РК»** посвящен исследованиям фундаментальной науки (гуманитарные и естественные):

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Гуманитарные (экономика, юриспруденция, история и археология, политология и социология, философия, филология, педагогика и психология, литературоведение, искусствоведение)
2. Естественные (астрономия, физика, химия, биология, география и технические науки). Примеры технических наук: космонавтика, кораблестроение, машиностроение, системотехника, электротехника, электросвязь, радиоэлектроника, ядерная энергетика и т.д.

Адрес сайта **«Вестник НАН РК»** – <http://www.bulletin-science.kz/index.php/en/arhive>

II. Научный журнал **«Доклады НАН РК»** посвящен исследованиям в области получения наноматериалов, биотехнологии и экологии.

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Получение наноматериалов в области естественных наук, медицины и сельского хозяйства.
2. Биотехнология в земледелии, растениеводстве и зоотехнике.
3. Общая биология и биотехнология в медицине.
4. Экология.

Адрес сайта **«Доклады НАН РК»** – <http://reports-science.kz/index.php/en/archive>

Кроме того, в журналах **«Известия НАН РК. Серия физико-математическая»**, **«Известия НАН РК. Серия химии и технологий»** и **«Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук»** также указаны отрасли науки, по которым будут приниматься научные статьи для экспертизы и дальнейшего опубликования:

III. Научный журнал **«Известия НАН РК. Серия физико-математическая»** посвящен исследованиям в области математики, физики и информационной технологии.

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Математика.
2. Информатика.
3. Интеллектуальный анализ данных и распознавание образов.
4. Математическое моделирование социальных и экономических процессов.

5. Механика.
6. Механика машин и роботов.
7. Теория управления и космические исследования.
8. Физика.
9. Ядерная физика.
10. Теоретическая физика.
11. Астрономия.
12. Ионосфера.

Адрес сайта «**Известия НАН РК. Серия физико-математическая**» –

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

IV. Научный журнал «**Известия НАН РК. Серия химии и технологий**» посвящен исследованиям в области химии и технологий новых материалов.

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Органическая химия.
2. Неорганическая химия.
3. Высокомолекулярные соединения.
4. Физическая химия (катализ, электрохимия).
5. Технология новых материалов.
6. Технология органических веществ.
7. Технология неорганических веществ.
8. Технология химических удобрений.
9. Технология полимерных и строительных материалов и силикаты.
10. Технология пищевых продуктов.
11. Фармацевтическая химия.

Адрес сайта «**Известия НАН РК. Серия химии и технологий**» –

<http://chemistry-technology.kz/index.php/en/arhiv>

V. Научный журнал «**Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук**» посвящен исследованиям в области геологии и технических наук:

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Геология.
2. Региональная геология.
3. Петрология.
4. Геология нефти и газа.
5. Геология и генезис рудных месторождений.
6. Гидрогеология.
7. Горное дело и геомеханика.
8. Фундаментальные проблемы обогащения минерального сырья.
9. Инженерная геология.
10. Геофизика и сейсмология.
11. География.

Адрес сайта «**Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук**» –

<http://www.geolog-technical.kz/index.php/en/archive>