

И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

**ОБ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение оператора теплопроводности в пространстве с индефинитной метрикой.

Ключевые слова: оператор, метод, смешанная задача, уравнение, теплопроводность.

Тірек сөздер: оператор, әдіс, аралас есеп, тендеу, жылуөткізгіш.

Keywords: operator, method, mixed task, the equation of heat conduction.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть $\Omega \subset R^2$ область на плоскости ограниченный отрезками: $AB: x = 0, 0 \leq t \leq 1$; $BC: t = 1, 0 \leq x \leq 1$; $CD: x = 1, 0 \leq t \leq 1$; $DA: t = 0, 0 \leq x \leq 1$. Через $C^{1,2}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемых по x и один раз непрерывно дифференцируемых по t в области Ω . Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (1.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u|_{t=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Под регулярным решением задачи (1.1)-(1.3) будем понимать функцию $u \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1.1) и краевые условия (1.2)-(1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функцию $u \in L^2(\Omega)$ назовём сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.3), если существует последовательность функций $u_n \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющая краевым условиям (1.2)-(1.3) такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Краевая задача (1.1)-(1.3) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x) \in L^2(\Omega)$ и единственно.

Целью настоящей работы является доказательство сильной разрешимости смешанной задачи (1.1)-(1.3), а также разложение в ряд Фурье сильного решения этой задачи.

Отметим, что в другой постановке эта задача решена многими авторами [см. 1. стр.451], которые рассматривали задачу как дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$, в отличие от них мы рассматриваем задачу как оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

Нашей смешанной задаче (1.1)-(1.3) соответствует линейный оператор

$$Lu = u_t - u_{xx} \quad (2.1)$$

$$D(L) = \{u \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}); u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0\}. \quad (2.2)$$

Исследуем спектральные свойства этого оператора.

ЛЕММА 2.1. Для оператора L существует обратный оператор L^{-1} , который вполне непрерывен в пространстве $L^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив скалярно на $u(x,t)$ обе части уравнения

$$Lu = u_t - u_{xx} = f(x,t),$$

имеем

$$\int_0^1 u_t \cdot u dx - \int_0^1 u_{xx} \cdot u dx = \int_0^1 f(x, t) \cdot u(x, t) dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 u_{xx} \cdot u dx = \int_0^1 u \cdot du_x = u \cdot u_x |_0^1 - \int_0^1 u_x^2 dx = - \int_0^1 u_x^2 dx.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(x, t) dx + \int_0^1 u_x^2 dx = \int_0^1 f(x, t) \cdot u(x, t) dx,$$

поэтому, если $f(x, t) \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(x, t) dx \leq 0, & \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 u^2(x, t) dx \leq \int_0^1 u^2(x, 0) dx = 0, \Rightarrow \int_0^1 u^2(x, t) dx = 0, \\ & \Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 u^2(x, t) dx dt = 0, \Rightarrow u(x, t) = 0 \end{aligned}$$

почти всюду в Ω .

Тем самым существование обратного оператора доказано, теперь займемся его областью определения, насколько она широка.

Если $f(x, t) \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е. является финитной и бесконечно дифференцируемой функцией, то задача (1.1)-(1.3) имеет решение, которое имеет вид [см. 2, с. 215]

$$u(x, t) = \iint K(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \text{ (в области } \Omega) \quad (2.3)$$

где

$$K(x, t; \xi, \tau) = \theta(t - \tau) \cdot G(x, \xi; t - \tau), \quad (2.4)$$

$$G(x, \xi; t - \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2(t-\tau)} \cdot \sin n\pi x \cdot \sin n\pi \xi. \quad (2.5)$$

Ядро $K(x, t; \xi, \tau)$ интегрального оператора (2.3) принадлежит классу Гильберта-Шмидта, поэтому оператор (2.3) допускает продолжение на все пространство $L^2(\Omega)$, т.е. его замыкание определено на всем пространстве $L^2(\Omega)$ и является вполне непрерывным оператором.

ЛЕММА 2.2. Если оператор S определен формулой

$$Su(x, t) = u(x, 1 - t),$$

то оператор SL является симметрическим оператором в пространстве $L^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, t)$ и $v(x, t) \in D(L)$, тогда

$$\begin{aligned} (SLu, v) &= (Lu, Sv) = \iint_{\Omega} (u_t - u_{xx}) v(x, 1 - t) dx dt = \\ &= \int_0^1 dx \cdot \left[\int_0^1 (u_t - u_{xx}) v(x, 1 - t) dx dt \right] = \int_0^1 dx \left[\int_0^1 u_t v(x, 1 - t) dt - \int_0^1 u_{xx} v(x, 1 - t) dt \right] \\ &= \int_0^1 dx \left[uv(x, 1 - t) |_0^1 + \int_0^1 u(x, t) v_t(x, 1 - t) dt - \int_0^1 u_{xx} v(x, 1 - t) dt \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) v_t(x,1-t) dx dt - \int_0^1 dt \left[\int_0^1 v(x,1-t) du_x \right] = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) v_t(x,1-t) dx dt - \\ & - \int_0^1 dt \left[u_x v(x,1-t) \Big|_0^1 - \int_0^1 v_x(x,1-t) u_x(x,t) dx \right] = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) v_t(x,1-t) dx dt + \\ & + \int_0^1 dt \left[\int_0^1 v_x(x,1-t) du \right] = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) v_t(x,1-t) dx dt + \\ & + \int_0^1 dt \left[v_x(x,1-t) u \Big|_0^1 - \int_0^1 v_{xx}(x,1-t) u(x,t) dx \right] = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) v_t(x,1-t) dx dt - \\ & - \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) v_{xx}(x,1-t) dx dt = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) \cdot S[v_t - v_{xx}] dx dt = (u, SLv). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.3. Пусть T – плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда, если T допускает замыкание и обратим, то T^{-1} допускает замыкание и $(\overline{T})^{-1} = \overline{(T^{-1})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [см. 3, с. 32].

В силу этой леммы наш оператор L замыкаем, т.е. существует \overline{L} и это замыкание обратимо, т.е. существует $(\overline{L})^{-1}$, который является вполне непрерывным оператором в $L^2(\Omega)$. Из симметричности оператора SL следует симметричность его замыкания \overline{SL} . Очевидно, что имеет место формула $\overline{SL} = S\overline{L}$. Операторы S и \overline{L} обратимы в пространстве $L^2(\Omega)$, поэтому оператор \overline{SL} также обратим. Таким образом, оператор \overline{SL} симметрический и его область значений совпадает со всем пространством $L^2(\Omega)$ (в силу обратимости). Далее из включения $SL \subset (SL)^*$ следует включение $\overline{SL} \subset (\overline{SL})^* = (SL)^*$, $\Rightarrow D(\overline{SL}) \subseteq D(SL)^*$, поскольку область $D(\overline{SL})$ максимална, то $D(\overline{SL}) = D(SL)^*$. Из этих рассуждений следует, что оператор \overline{SL} самосопряжен. Тогда оператор $(\overline{SL})^{-1} = (\overline{L})^{-1}S^{-1} = (\overline{L})^{-1}S$ также самосопряжен и вполне непрерывен.

ЛЕММА 2.4. Если $Su(x,t) = u(x,1-t)$, то оператор \overline{SL} самосопряжен и обратим. Обратный оператор $(\overline{SL})^{-1}$ самосопряжен и вполне непрерывен в пространстве $L^2(\Omega)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

ТЕОРЕМА 3.1. Смешанная задача (1.1)-(1.3) сильно разрешима в пространстве $L^2(\Omega)$ и это сильное решение имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{m,n} \frac{(Sf, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x,t), \tag{3.1}$$

где $Sf(x,t) = f(x,1-t)$, а $u_{mn}(x,t)$ и λ_{mn} собственные функции и собственные значения спектральной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda Su, \tag{3.2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{3.3}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \tag{3.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя оператором S на обе части уравнения

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

имеем

$$SLu = Sf.$$

Из существования $(\overline{SL})^{-1}$ следует существование $(SL)^{-1}$, поэтому

$$u(x, t) = (SL)^{-1}Sf = (\overline{SL})^{-1}Sf.$$

По теореме Гильберта-Шмидта имеем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\overline{SL})^{-1}Sf = \sum_{m,n} ((\overline{SL})^{-1}Sf, u_{mn}) \cdot u_{mn} = \sum_{m,n} (Sf, (\overline{SL})^{-1}u_{mn}) = \\ &= \sum_{m,n} \frac{(Sf, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x, t), \end{aligned}$$

где $\overline{SL}u_{mn} = \lambda_{mn}u_{mn}$. Следовательно,

$$\overline{L}u_{mn} = \lambda_{mn}Su_{mn}, \Rightarrow \frac{\partial u_{mn}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{mn} = \lambda_{mn}Su_{mn}(x, t).$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
- 2 Тихонов А.Н., Самарский В.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
- 3 Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Ғылым, 1993. – 328 с.

REFERENCES

- 1 Mihlin S.G. *Kurs matematicheskoy fiziki*. M.: Nauka, 1968. 576 s.
- 2 Tihonov A.N., Samarskiy V.A. *Uraveniya matematicheskoy fiziki*. M.: Nauka, 1972. 736 s.
- 3 Kal'menov T.Sh. *Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa*. Shymkent: Fylym, 1993. 328 s.

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ЖЫЛУӨТКІЗГІШ ТЕНДЕУІ ҮШІН АРАЛАС ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте жылуөткізгіш операторының индефинитті метрикалы кеңістіктегі спектралды таралымы алынды.

Тірек сөздер: оператор, әдіс, аралас есеп, тендеу, жылуөткізгіш.

Summary

I. O. Orazov. A. Sh. Shaldanbayev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ABOUT OPERATOR METHOD OF SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

In the real work spectral decomposition of the operator of heat conductivity in space with an indefinite metrics is received.

Keywords: operator, method, mixed task, the equation of heat conduction.

Поступила 15.10.2013г.

И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Аннотация. Бұл еңбекте $Ay = y'(x) + q(x)y(1-x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$ операторының ұлғайтылған спектралді есебінің түпкі векторлар системасының $L^2(0,1)$ кеңістігінде толымды екені көрсетілген, мұндағы $q(x)$ – комплекс мәнді үзіксіз функция.

Ключевые слова: спектральные свойства, задача Коши, уравнение, аргумент.

Тірек сөздер: спектралды қасиеттер, Коши есебі, теңдеу, аргумент.

Keywords: spectral properties, the Cauchy problem, equation, argument.

Пусть $H = L^2(0,1)$ – гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_0 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

$$Ay = \frac{d}{dx} y + q(x)y(1-x), \quad D(A) = \{y \in C^1(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\} \quad (2)$$

оператор заданный в этом пространстве. Главная часть оператора A не имеет спектра, поэтому представляется целосообразным исследование спектральной задачи

$$\begin{cases} Ay = y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(1-x), & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

Полагая $z(x) = y(1-x)$, имеем $z'(x) = -y'(1-x)$, $y'(x) = -z'(1-x)$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\begin{cases} -z'(1-x) + q(x)z(x) = \lambda z(x), \\ z(1) = 0. \end{cases} \quad (5) \quad (6)$$

Сначала исследуем главную часть уравнения (5)

$$\begin{cases} -z'(1-x) = \lambda z(x), \\ z(1) = 0. \end{cases} \quad (7) \quad (8)$$

Продифференцировав уравнение (7) по x , получим уравнение Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} z''(1-x) = \lambda z'(x), & z''(x) = \lambda z'(1-x) = -\lambda^2 z(x), \\ -z''(x) = \lambda^2 z(x), \\ z(1) = 0. \end{cases} \quad (9) \quad (10)$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$z(x) = A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), имеем

$$A \cdot \cos \lambda + B \cdot \sin \lambda = 0 \quad (12)$$

Для нахождения коэффициентов A , B не хватает данных. Полагая $x = 1$ из (7)+(8), получим второе граничное условие

$$z'(0) = 0 \quad (13)$$

Теперь подставим (11) в (13):

$$z'(x) = -\lambda A \cdot \sin \lambda x + \lambda B \cdot \cos \lambda x, \quad z'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Таким образом, $B = 0$, коэффициент A – может принимать произвольное значение. Из уравнения (12) с учетом $B = 0$ найдем собственные значения:

$$A \cdot \cos \lambda = 0, \quad A \neq 0 \Rightarrow \cos \lambda = 0, \quad \lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно собственными функциями задачи (9)+(10) является

$$z_n(x) = A_n \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

Коэффициентов A_n найдем из условия нормировки.

$$1 = \|z_n(x)\|^2 = |A_n|^2 \int_0^1 \cos^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x dx = \frac{|A_n|^2}{2} \int_0^1 [1 + \cos(2n\pi + \pi)x] dx =$$

$$\frac{|A_n|^2}{2} \left[x + \frac{\sin(2n\pi + \pi)x}{2n\pi + \pi} \right]_0^1 = \frac{|A_n|^2}{2}, \Rightarrow A_n = \sqrt{2}.$$

Среди собственных функции (14) могут быть «лишние», т.е. такие, которые выражаются через линейные комбинации остальных. Заменяем, что

$$z_{-n}(x) = A_{-n} \cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x = A_{-n} \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)x = \frac{A_{-n}}{A_{n-1}} \cdot z_{n-1}(x).$$

Следовательно, можно ограничиться лишь неотрицательными индексами $n = 0, 1, 2, \dots$, отрицательные индексы ничего нового не дают. Поэтому собственными значениями и собственными функциями задачи (9)+(10)+(13) будут соответственно:

$$\lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$z_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Исследуем полученную систему (16) на полноту. Пусть для некоторой функции $f(x) \in L^2(0,1)$ имеет место равенства

$$\int_0^1 f(x) - z_n(x) dx = 0$$

т.е.

$$\int_0^1 f(x) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Заменяем n на $n-1$, получим

$$\int_0^1 f(x) \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)x dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

Сложив (17) и (18), имеем

$$\int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \cos n\pi x dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

Полагая $n = 0$ в (17), видим, что

$$\int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = 0.$$

Следовательно, равенство (19) имеет место при всех $(n = 0, 1, 2, \dots)$. В силу полноты системы функции $\{\cos n\pi x, n = 0, 1, 2, \dots\}$ в пространстве $L^2(0, 1)$ из (19) следует $f(x)\cos\frac{\pi x}{2} = 0$ почти всюду в $(0, 1)$, т.е. $f(x) = 0$ почти всюду в $(0, 1)$.

Среди собственных функции (16) могут быть лишние, поэтому проверим их, подставив в уравнение (7).

$$z'_n(x) = -\sqrt{2}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$

$$z'_n(1-x) = -\sqrt{2}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left[\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x)\right] = -\sqrt{2}\left[\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x - \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x\right] \cdot \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^n \sqrt{2}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x = -(-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) z_n(x), \Rightarrow -z'_n(1-x) = (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot z_n(x); \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$z_n(1) = \sqrt{2} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Нами доказана следующая лемма 1.

ЛЕММА 1. Спектральная задача

$$\begin{cases} -z'(1-x) = \lambda z(x), \\ z(1) = 0. \end{cases} \quad (7) \quad (8)$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_n = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (-1)^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

и соответствующих им собственных функции (векторов)

$$z_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0, 1)$.

Теперь вернемся к спектральной задаче (5)+(6)

$$Bz = -z'(1-x) + q(x)z(x), \quad D(B) = \{z \in C^1(0, 1) \cap C[0, 1], z(1) = 0\}$$

Пусть $B_0 z = -z'(1-x)$, $D(B_0) = \{z \in C^1(0, 1) \cap C[0, 1], z(1) = 0\}$, тогда оператор B_0 – самосопряжен в пространстве $L^2(0, 1)$. Этот факт следует из нижедоказуемой леммы.

ЛЕММА 2. Если собственные векторы линейного оператора A , соответствующие ненулевым собственным значениям, ортогональны и полны в пространстве H , то оператор A самосопряжен в этом пространстве, при условии, что $\text{Ker} A = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $\text{Ker} A = 0$ соответствие между $D(A)$ и $R(A)$ взаимнооднозначно. Из равенств

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad \lambda_n \neq 0$$

$$\text{имеем } \varphi_n = A^{-1} \lambda_n \varphi_n = \lambda_n A^{-1} \varphi_n, \quad A^{-1} \varphi_n = \frac{\varphi_n}{\lambda_n},$$

Пусть $z\{\varphi_n\}$ – линейная оболочка ортонормированных собственных векторов оператора A и φ_N, ψ_M произвольные элементы этой оболочки, тогда

$$(A^{-1}\varphi_N, \psi_M) = \left(A^{-1} \sum_1^N \alpha_i \varphi_i, \sum_1^M \beta_i \varphi_i \right) = \left(\sum_1^N \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \varphi_i, \sum_1^M \beta_i \varphi_i \right) = \sum_1^N \alpha_i \beta_i = (\varphi_N, A^{-1}\psi_M) = \left(\sum_1^N \alpha_i \varphi_i, \sum_1^M \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \varphi_i \right),$$

где $N \leq M$.

Следовательно, оператор A^{-1} определен на всюду плотном множестве и симметричен. Кроме того,

$$\|A^{-1}\varphi_N\|^2 = \sum_1^N \left| \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \right|^2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_1^N |\alpha_i|^2 = \frac{\|\varphi_N\|^2}{|\lambda_1|^2}, \quad \|A^{-1}\varphi_N\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi_N\|,$$

для любого элемента из линейной оболочки $z\{\varphi_n\}$. По теореме о продолжении оператор A^{-1} распространяется на все пространства H , поэтому самосопряжен, тогда A тоже самосопряжен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $\text{Ker}A = 0$ можно заменить условием «если оператор симметрический». Действительно, если это так и $Az = 0$, то $0 = (Az, \varphi_n) = (z, A\varphi_n) = \lambda_n(z, \varphi_n) \Rightarrow (z, \varphi_n) = 0$ для любого собственного вектора φ_n . В силу полноты $\{\varphi_n\}$ в H отсюда следует $z = 0$, т.е. $\text{Ker}A = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\lambda_n \rightarrow \infty$, то оператор A^{-1} вполне непрерывен.

$$A^{-1}f = \sum_1^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \cdot \varphi_n$$

Полагая $A_N = \sum_1^N \frac{(\varphi_n, f)}{\lambda_n} \cdot \varphi_n$, имеем

$$\|(A^{-1} - A_N)f\|^2 = \sum_{N+1}^{\infty} \left| \frac{f_n}{\lambda_n} \right|^2 \leq \frac{1}{|\lambda_{N+1}|^2} \|f\|^2 \Rightarrow \|A^{-1} - A_N\| \leq \frac{1}{|\lambda_{N+1}|} \rightarrow 0.$$

Покажем, что оператор B_0 – симметрический

$$(B_0 u, v) = \int_0^1 [-u'(1-x)] \cdot \overline{v(x)} dx = \int_0^1 \overline{v(x)} du(1-x) = \overline{v(x)} u(1-x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \overline{v}'(x) u(1-x) dx = \left. \begin{array}{l} 1-x=t \\ x=1-t \\ dx=-dt \end{array} \right| = - \int_0^1 \overline{v(1-t)}' u(t) dt = - \int_0^1 u(t) \overline{v(1-t)}' dt = (u, B_0 v).$$

Теперь продолжим исследование оператора B .

$$B = B_0 + Q,$$

где Q – оператор умножения на $q(x)$. При определенных условиях имеет место равенства.

$$B = B_0(I + B_0^{-1}Q) = (I + QB_0^{-1})B_0, \\ B^{-1} = [I + B_0^{-1}Q]^{-1} B_0^{-1} = (I + R) \cdot B_0^{-1}, \quad (17)$$

где

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (B_0^{-1}Q)^n$$

ЛЕММА 3.

(а) Оператор B_0^{-1} вполне непрерывен и самосопряжен;

(в) Для любого $p > 1$ имеет место неравенство $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} < \infty$, где λ_n^{-1} – собственные значения

оператора B_0^{-1} .

$$(г) \|A_0^{-1}\| \leq \frac{2}{\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше мы доказали, что оператор B_0 – симметричный, тогда в силу замечаний 1, 2 и формулы (15) оператор B_0^{-1} самосопряжен и вполне непрерывен. Следует отметить, что

$$B_0^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f, z_n)}{\lambda_n} \cdot z_n(x)$$

где $\lambda_n = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (-1)^n$, $z_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x$.

$$(в) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^p \left(n + \frac{1}{2}\right)^p} < +\infty;$$

$$(г) \|B_0^{-1} f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(f, z_n)}{\lambda_n} \right|^2 \leq \frac{1}{|\lambda_0|^2} \|f\|^2, \Rightarrow \|B_0^{-1}\| \leq \frac{2}{\pi}.$$

ЛЕММА 4. Если

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| < \frac{\pi}{2},$$

то существует оператор

$$[I + B_0^{-1}Q]^{-1} = I + R, \tag{18}$$

где оператор R – вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея место оценки

$$\|B_0^{-1}Qy\| \leq \|B_0^{-1}\| \cdot \|Qy\| \leq \frac{2}{\pi} \|Qy\| \leq \frac{2}{\pi} \max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| \cdot \|y\|.$$

Поэтому $\|B_0^{-1}Q\| \leq \frac{2}{\pi} \max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| < 1$, следовательно операторный ряд

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (B_0^{-1}Q)^m$$

сходится равномерный операторной норме. Поскольку операторы $(B_0^{-1}Q)^m$ – вполне непрерывны, то оператор

$$R = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (B_0^{-1}Q)^m$$

также вполне непрерывен.

ЛЕММА 5 [1]. Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H имеет вид $A = (I+R)S$, где S, R – компактные операторы, причем S – самосопряженный и его собственные значения $\lambda_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) с учетом кратностей удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^p < \infty \tag{19}$$

при некотором $p > 0$. Тогда оператор A – полный.

ТЕОРЕМА 1. Если $q(x)$ непрерывная функция удовлетворяющая условию

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| < \frac{\pi}{2}, \quad (20)$$

то оператор B

$$Bz = -z'(1-x) + q(x)z(x), \quad (21)$$

$$D(B) = \{z(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], z(1) = 0\} \quad (22)$$

является полным в пространстве $H = L^2(0,1)$.

Наш оператор B обратим, поэтому областью его значений является все пространства $H = L^2(0,1)$, поэтому имеет место теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Если $q(x)$ комплексная непрерывная функция удовлетворяющая условию,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| < \frac{\pi}{2}, \quad (23)$$

то система корневых векторов оператора,

$$B = -S \frac{d}{dx} + Q, \quad D(B) = \{z(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], z(1) = 0\} \quad (24)$$

где $Sz(x) = z(1-x)$, $Qz(x) = q(x)z(x)$, полна в пространстве $H = L^2(0,1)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая условию,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| < \frac{\pi}{2}, \quad (23)$$

то система ортонормированных собственных векторов оператора B ,

$$B = -S \frac{d}{dx} + Q, \quad D(B) = \{z(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], z(1) = 0\},$$

где $Sz(x) = z(1-x)$, $Qz(x) = q(x)z(x)$, образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q(x)$ вещественная функция, то оператор Q самосопряжен. В силу леммы 3 оператор

$$B_0 = -S \frac{d}{dx}, \quad D(B_0) = \{z(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], z(1) = 0\}$$

тоже самосопряжен. Тогда оператор $B = B_0 + Q$ будет также самосопряженным. Если имеет место (23), то существует обратный оператор B^{-1} , который является вполне непрерывным [см. 17]

$$B^{-1} = [I + B_0^{-1}Q]^{-1} = (I + R) \cdot B_0^{-1}$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы Гильберта-Шмидта.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $z(x)$ является собственной функцией для задачи (5)+(6), то функция $y(x) = z(1-x)$ является собственная для задачи (3)+(4).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Келдыш М.В. О полноте собственных функции некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. – 1971. – 26. – № 4. С. 15-41.
- 2 Треногин В.Л. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.

REFERENCES

- 1 Keldysh M.V. *O polnote sobstvennykh funktsii nekotorykh klassov nesamosoprjazhennykh linejnykh operatorov. UMN, 1971. №4, 15-41 (in Russ.).*
- 2 Trenogin V.L. *Funktsional'nyj analiz. –M.: Nauka, 1980(in Russ.).*

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

**АУЫТҚУШЫ АРГУМЕНТТІ БІР ТЕҢДЕУ ҮШІН
КОШИ ЕСЕБІНІҢ СПЕКТРАЛДЫ ҚАСИЕТТЕРІ**

Бұл еңбекте $Ay = y'(x) + q(x)y(1-x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$ операторының ұлғайтылған спектралды есебінің түпкі векторлар жүйесінің $L^2(0,1)$ кеңістігінде толымды екені көрсетілген, мұндағы $q(x)$ – комплекс мәнді үзіксіз функция

Тірек сөздер: спектралды қасиеттер, Коши есебі, теңдеу, аргумент.

Summary

I. O. Orazov. A. Sh. Shaldanbayev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

**SPECTRAL PROPERTIES OF THE CAUCHY PROBLEM
FOR ONE EQUATION WITH REJECT THE ARGUMENT**

In the real work completeness of system of root vectors of the operator is proved in the generalized statement, where complex continuous function.

Keywords: spectral properties, the Cauchy problem, equation, argument.

Поступила 15.10.2013г.

УДК 53.04

А. Е. ТОЛЕУХАНОВ¹, М. Б. ПАНФИЛОВ², А. КАЛТАЕВ¹

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан,

²Университет Лотарингии, г. Нанси)

**ДВУХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ
СОСТАВА УГЛЕВОДОРОДНОЙ СМЕСИ ПРИ ХРАНЕНИИ
В ПОДЗЕМНОМ ВОДОНОСНОМ РЕЗЕРВУАРЕ**

Аннотация. В работе исследован процесс образования метана при подземном хранении водорода с учетом взаимодействия бактерий, влияющих на состояние начальной смеси. Получена двухфазная модель хранения водорода с биотической реакцией, связанной с динамической системой уравнений популяций в водоносном резервуаре.

Ключевые слова: пористая среда, водород, бактерия, нейстон, хемотаксис, динамика популяций, осцилляция.

Кілт сөздер: кеуек орта, сутегі, бактерия, нейстон, хемотаксис, популяция динамикасы, осцилляция.

Keywords: porous media, hydrogen, bacteria, neuston, chemotaxis, population dynamics, oscillations.

ВВЕДЕНИЕ. Проблема подземного хранения водорода (ПХВ). На сегодняшний день одной из острых проблем современной мировой энергетики является накопление и аккумуляция полученного избыточного большого объема энергии. Одним из наиболее перспективных решений проблемы аккумуляции большого объема энергии считается так называемая водородная энергетика, в которой в качестве подходящих материалов для аккумуляции больших объемов энергии используется водород. Главным достоинством водорода как топлива является то, что его

удельная теплота сгорания втрое выше, чем у нефти, а при сгорании образуется экологически абсолютно безопасная вода.

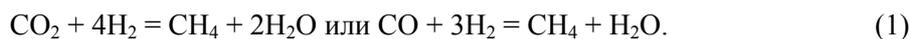
Таким образом, избыток энергии из ТЭС, ГЭС, АЭС можно использовать для получения водорода из воды. На сегодняшний день производство водорода и его распределение уже не представляют серьезных технических проблем. Однако при производстве водорода в большом объеме возникает проблема необходимости хранения больших объемов водорода. Одним из самых эффективных и недорогих способов хранения большого объема водорода является его закачка в геологические формации, такие как водоносные пласты, истощенные газовые месторождения или соляные каверны [1]. Несколько подземных хранилищ водорода имеется в Великобритании, в США, в России, в Германии, в Чехии и во Франции.

Весьма необычное поведение водорода при подземном хранении было обнаружено по данным наблюдений за составом смеси, добываемой из ПХВ (в ходе цикла «добыча», последующего за закачкой). Эти наблюдения выявили существование сильных осцилляций состава добываемого газа во времени и по пространству [2-3]. В частности, на хранилище Lobodice (Чехия) было обнаружено снижение во времени концентрации закачиваемых газов H_2 и CO_2 , но значительное увеличение концентрации CH_4 [2].

Исходная закачиваемая смесь содержала 55% H_2 , 20% $CO_2 + CO$ и 20% CH_4 . После нескольких месяцев закачки, хранения и начала цикла извлечения добываемый газ содержал 37% H_2 , 12% $CO_2 + CO$ и 40% CH_4 . Таким образом, речь идет не о долях процентов и случайных ошибках измерений, а об удвоении количества CH_4 в пласте и уменьшении в 2 раза количества $CO_2 + CO$. Характерный период изменения состава хранимого газа составил от 5 до 7 месяцев. Одновременно было обнаружено избыточное уменьшение давления в пласте на 15% по сравнению с расчетами материального баланса. Одной из возможных интерпретаций этого – утечка газа – была в итоге отвергнута.

Последующий изотопный анализ продукции из скважин [3] показал, что изотопный состав части добываемого CH_4 отличен от закачиваемого CH_4 . Речь идет, таким образом, о внутрипластовых генераторах CH_4 . Дальнейшие наблюдения выявили еще более нетривиальные процессы в ПХВ, такие как образование чередующихся в пространстве зон, предпочтительно насыщенных H_2 или CH_4 . Назовем этот эффект естественной внутрипластовой сепарацией химических компонентов.

В работах Smigai и Vuzek [2, 3] сделана попытка объяснить причины изменения качественного состава закачиваемой смеси. В них предложено, что образование метана в пласте протекает по следующим реакциям:



В ходе этих реакций наблюдается сокращение количества CO_2 и H_2 и одновременное увеличение количества CH_4 . Подобная реакция между H_2 и CO_2 может происходить в условиях ПХВ, для столь существенного изменения начального состава смеси требуются годы. Изменение концентрации смеси можно объяснить влиянием метаногенных бактерий, которые участвуют в реакциях (1) и являются ее катализатором. Присутствие метаногенных бактерий в пластовой воде ПХВ Lobodice было подтверждено измерениями [2, 3].

Механизм воздействия бактерий представляет собой процесс метаболизма, при котором бактерии поглощают углерод из CO_2 и электроны H_2 в качестве энергии. В результате многостадийных процессов окисления CO_2 в теле бактерии происходит образование метана, который в итоге и «выдыхается» [4].

Таким образом, процесс ПХВ представляет собой естественный химический реактор, поглощающий CO_2 и частично H_2 и удваивающий массу CH_4 . Ясно, что данная проблема имеет промышленное значение, затрагивая как энергетику, так и экологию. Экономическая эффективность такого процесса можно оценить только после проведения физического и математического моделирования всех возможных вариантов поведения ПХВ. Разработка таких моделей является основной целью данной работы.

Первая попытка исследования образования метана при подземном хранении водорода проведена в работе [5], в которой бактерия рассматривалась как однородная среда в однофазной газовой среде без учета присутствия воды. В качестве модели рассмотрена модель Моно роста популяции, но в результате исследований были обнаружены лишь мелкие быстро затухающие флуктуации концентраций метана в пласте, которые не объяснили многообразия наблюдаемых явлений.

В работе [6] рассматривается модель Тюринга, учитывающая существование различных структур колоний бактерий в зависимости от их численности.

В настоящей работе развивается новая математическая двухфазная модель многокомпонентных потоков с биотической реакцией, связанная с динамической системой уравнений популяций. Двухфазность течения приводит к дополнительной нелинейности, которая приводит к появлению нового нелинейного поведения популяции, что в свою очередь порождает необходимость рассмотрения новой формы бактерий, существующих в нейстон.

1. Модель хемотаксиса и нейстона в двухфазной жидкости. Рассматривается водоносный пласт, который содержит воду и хранимый газ, а также начальные популяции бактерий. В подземный водоносный пласт закачивается смесь H_2 в избытке с небольшим содержанием CO_2 , т.е. закачиваемый газ – двухкомпонентный, а газ в пласте состоит из трех компонентов H_2 , CO_2 и CH_4 . Кроме того, как было замечено в работах [2, 3], в результате хранения водорода в пласте происходит образование метана. Метаногенные бактерии детектирует питательные вещества, содержащиеся в газе, и двигаются к направлению газового контакта с водой, тем самым являясь катализатором процесса образования метана. В настоящей работе проведено исследование образования метана при подземном хранении водорода с учетом воздействия бактерий и нейстона.

Нейстон. Особенность движения бактерий в двухфазной жидкости состоит в том, что раздел области между водой и газом становится лучшим местом для жизни бактерий. **Нейстон** – это тонкий слой бактерий, живущих в воде одновременно использующих питательные вещества из газового контакта CO_2 и H_2 (рисунок 1).

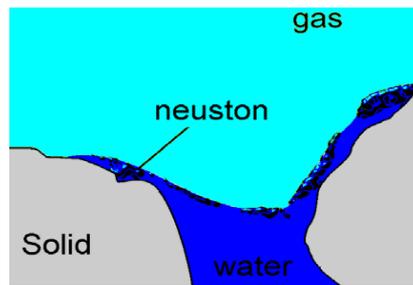


Рисунок 1 – Нейстон

Газовая фаза содержит слаборастворимые в воде питательные вещества. Бактерии, живущие в воде, перемещаются к питательным веществам, тем самым образуя на поверхности раздела тонкий слой – нейстон. Движение бактерий, живущих в воде, определяется хемотаксисом. **Хемотаксис** – это внутренний химический механизм, благодаря которому бактерии обладают способностью детектировать наличие питательных веществ на расстоянии и двигаться в этом направлении.

Математическая модель хемотаксиса в двухфазной жидкости. Поток бактерий q_{ch} осуществляется в направлении увеличения концентраций питательных веществ, в связи с чем закон для потока бактерии, вызванного хемотаксисом в двухфазной жидкости, представлен в виде

$$q_{ch} = -D_{ch}(C) \cdot S \cdot n \cdot grad C \quad (2)$$

где $D_{ch}(C)$ – коэффициент хемотаксиса, который имеет размерность $\left[\frac{M^2}{c} \right]$, S – насыщенность воды,

C – общая молярная доля питательных веществ, n – безразмерное количество бактерий в единица объема среды.

В начальном состоянии бактерии живут в воде, все питательные вещества присутствуют в газе и медленно диффундируют в воду. Следующие особенности присущи этой системе:

1. Движение потока бактерий вызывается градиентом от общей молярной концентрации питательных веществ C , $q_{ch} \sim -grad C$.
2. Поток бактерий пропорционально к числу бактерий, $q_{ch} \sim n$.
3. Поток бактерии прямо пропорционально к насыщенности воды, $q_{ch} \sim S$.
4. $D_{ch}(C)$ – коэффициент хемотаксиса должен быть убывающей функцией от C .

2. Общая модель динамики популяции. Рассмотрим следующую физическую двухфазную модель (газ и вода): в подземный водоносный пласт, содержащий воду и газ, закачивается двухкомпонентная смесь H_2 с небольшим содержанием CO_2 . Газовая фаза в пласте состоит из трех химических компонентов: H_2 , CO_2 и CH_4 , а жидкая фаза состоит из воды с низкими концентрациями CO_2 , H_2 и CH_4 .

Далее рассмотрим только цикл закачки как наименее тривиальное. Присутствующие в пласте метаногенные бактерии выступают в роли активатора химической реакции между H_2 - (1) и CO_2 - (2) с образованием небольшого количества H_2O - (4) и CH_4 - (3). В модели рассматривается два вида бактерий:

1) бактерии, присутствующие в воде как планктоны или биофильмы, которые прикреплены к стенам пор и покрыты водой;

2) бактерии, присутствующие в нейстоне;

Бактерии, живущие в воде, используют в качестве питательных веществ растворенные H_2 и CO_2 в воде. Вода является биологически необходимой средой обитания для бактерий, живущих в нейстоне и использующих в качестве питательных веществ CO_2 , H_2 из газовой фазы.

Пусть $n_w(x,t)$ и $n_{ns}(x,t)$ – число бактерий, находящихся в воде и в нейстоне в единице объема пористой среды. Принимая во внимание вышеупомянутые предположения, можно сформулировать следующие уравнения динамики популяции:

$$\frac{\partial n_{ns}(1-S)}{\partial t} = \eta_{ns}(1-S) \frac{c_g^{(2)} n_{ns}}{t_{e,ns}} - (1-S) \frac{n_{ns}}{t_d} + \text{div}(D_b(1-S) \text{grad} n_{ns}); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_w S}{\partial t} = & \eta_w S \frac{c_w^{(1)} c_w^{(2)} (n_w)^2}{t_{e,w}} - S \frac{n_w}{t_d} + \text{div}(D_b S \text{grad} n_w); \\ & - \text{div}(D_{ch}(C^{(1)}) S n_w \text{grad} C^{(1)}) \end{aligned} \quad (4)$$

где S – насыщенность воды, $t_{e,w}$ и $t_{e,ns}$ – характерные скорости роста популяции при малом количестве питательных веществ, t_d – характерное время вымирания, η – коэффициент пропорциональности между скоростью роста и поедания, D_b – коэффициент диффузии бактерий, $D_{ch}(C)$ – коэффициент хемотаксиса бактерий, $c_i^{(k)}$ – молярная доля химических компонентов k в фазе i , $C^{(k)}$ – общая молярная доля химических компонентов k в обе фазе.

Зависимость между $c_i^{(k)}$ и $C^{(k)}$ определяется в следующем виде:

$$C^{(k)} = \frac{\rho_w c_w^{(k)} S + \rho_g c_g^{(k)} (1-S)}{\rho_w S + \rho_g (1-S)}, \quad (5)$$

где ρ_i – молярная плотность в фазе i .

3. Уравнения баланса для химических компонентов. Исследование изменения состава водно-газовой смеси нескольких компонент приводит к рассмотрению системы уравнений аналогичного числа уравнений переноса. В случае неизменяемой реакции ситуация упрощается, так как кинетика реакции зависит только от реагентов и не зависит от реакции продуктов. Это достаточно, чтобы сформулировать уравнения переноса только для H_2 и CO_2 . Скорость реакции полностью контролируется бактериями и определяется скоростями поедания бактерии $\Phi_w S + \Phi_{ns} (1-S)$. В соответствии с формулой химической реакции (1) один моль потребляемых питательных веществ содержит 1/5 часть CO_2 и 4/5 часть H_2 . В результате модель переноса для CO_2 и H_2 имеет следующий вид:

$k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g c_g^{(k)} (1-S) + \rho_w c_w^{(k)} S) + \text{div}(\rho_g c_g^{(k)} V_g^{(k)} + \rho_w c_w^{(k)} V_w^{(k)}) = & \frac{1}{\Omega} G^{inj} c^{(k),inj} \\ - \frac{\phi \gamma^{(k)} (1-\theta) c_g^{(2)} n}{t_{e,ns} (1+a_{ns} c_g^{(2)})} - \frac{\phi \gamma^{(k)} c_w^{(1)} c_w^{(2)} \theta^2 S n^2}{t_{e,w} \left(S^2 + \frac{\theta^2 n^2}{n_{wm}^2} \right) (1+a_{w1} c_w^{(1)}) (1+a_{w2} c_w^{(2)})} & ; \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g (1-S) + \rho_w S) + \text{div}(\rho_g V_g + \rho_w V_w) = \frac{1}{\Omega} G^{inj}; \quad (6b)$$

$$V_g = -\lambda_g (\text{grad} P_g - \rho_g^m g), V_w = -\lambda_w (\text{grad} P_w - \rho_w^m g), \lambda_i = \frac{K k_i(S)}{\mu_i}; \quad (6c)$$

$$V_i^{(k)} = V_i + V_{iD}^{(k)}; V_{iD}^{(k)} = -\frac{\phi D_i^{(k)} S_i}{c_i^{(k)}} \text{grad} c_i^{(k)}, i = g, w \quad (6d)$$

$$P_w = P_g - P_c(S); \quad (6e)$$

$$c_g^{(3)} = 1 - c_g^{(1)} - c_g^{(2)} \quad (6f)$$

$$c_w^{(k)} = H^{(k)}(P_w) \cdot c_g^{(k)} \quad (6g)$$

где S – насыщенность воды, P – давление, ρ – молярная плотность, μ – динамическая вязкость, K – абсолютная проницаемость, ϕ – пористость, $k_k(S)$ – фазовая проницаемость, ρ^m – массовая плотность, $H^{(k)}(P_w)$ – коэффициент Генри, g – ускорение силы тяжести, $P_c(S)$ – капиллярное давление, G^{inj} – молярная скорость закачиваемого газа, Ω – общий объем хранилища, V_i – скорость Дарси, $V_i^{(k)}$ – скорость переноса компоненты k в фазе i , $V_{iD}^{(k)}$ – скорость диффузии компоненты k в фазе i , $c^{(k),inj}$ – концентрация компоненты k в закачиваемом газе, $\gamma^{(k)} = \begin{cases} 4/5, k = 1 \\ 1/5, k = 2 \end{cases}$.

4. Обобщенная модель Тюринга. В общем случае для подземного хранилища водорода, насыщенного водой, обобщением уравнений (4) и (6) получены дифференциальные уравнения для динамики метаногенных бактерий. Полученная модель принимает вид обобщенной модели Тюринга, в которой присутствует конвективный член $\text{div}(\rho_w c_w^{(k)} V_w^{(k)})$ и хемотаксис $-\text{div}(D_{ch}(C^{(1)}) S n_w \text{grad} C^{(1)})$ в отличие от оригинальной модели Тюринга:

$$\begin{cases} \frac{\partial c_w^{(H_2)}}{\partial t} = q_1 - \alpha_1 c_w^{(H_2)} c_w^{(CO_2)} N^2 + \varepsilon_1 \cdot \Delta_{x,y} \cdot c_w^{(H_2)} \\ \frac{\partial c_w^{(CO_2)}}{\partial t} = q_2 - \alpha_2 c_w^{(H_2)} c_w^{(CO_2)} N^2 + \varepsilon_2 \cdot \Delta_{x,y} \cdot c_w^{(CO_2)} \\ \frac{\partial N}{\partial t} = -\beta \cdot N + \alpha_3 \cdot c_w^{(H_2)} c_w^{(CO_2)} N^2 + D_b \cdot \Delta_{x,y} \cdot N - D_{ch} \cdot \nabla_{x,y} \cdot (\exp(-\lambda_{ch} c_w^{(H_2)}) \cdot N \cdot \nabla_{x,y} \cdot c_w^{(H_2)}) \end{cases} \quad (7)$$

где $\rho_k = (\rho_g (1-S) + \rho_w H^{(k)} S)$, $q_k = \frac{G^{inj} c^{(k),inj}}{\Omega \phi \rho_k}$, $\varepsilon_k = \frac{\rho_g D_g^{(k)} \phi (1-S) + \rho_w D_w^{(k)} H^{(k)} (1-S)}{\rho_k}$,

$$\alpha_1 = \frac{4 \cdot H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot S}{5 \cdot t_{e,w} \rho_1}, \alpha_2 = \frac{H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot S}{5 \cdot t_{e,w} \rho_2}, \alpha_3 = \frac{\eta_w H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot S}{t_{e,w}}, \beta = \frac{1}{t_d}$$

Рассматривается асимптотическая модель в виду того, что водород менее растворим в воде по сравнению с углекислым газом

$$\begin{cases} \frac{\partial c_w^{(H_2)}}{\partial t} = q - \alpha_1 c_w^{(H_2)} \cdot N^2 + \varepsilon_1 \cdot \Delta_{x,y} \cdot c_w^{(H_2)} \\ \frac{\partial N}{\partial t} = -\beta \cdot N + \alpha_3 \cdot c_w^{(H_2)} \cdot N^2 + D_b \cdot \Delta_{x,y} \cdot N - D_{ch} \cdot \nabla_{x,y} \cdot (\exp(-\lambda_{ch} c_w^{(H_2)}) \cdot N \cdot \nabla_{x,y} \cdot c_w^{(H_2)}) \end{cases} \quad (8)$$

с начальным и граничным условием:

$$N|_{t=0} = 1, c_w^{(H_2)}|_{t=0} = 1, \frac{\partial c_w^{(H_2)}}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial N}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Полученная модель (8) и (9) имеет предельный цикл, если пренебречь диффузионным членом и хемотаксисом. В [7] был получен критерий существования предельного цикла для случая $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta = 1$:

$$0,90032 < q < 1,0. \quad (10)$$

Предложенная модель (8)–(9) учитывает хемотаксис и диффузию бактерий и газа в пространстве и позволяет исследовать изменение концентрации водорода при подземном хранении водорода.

Дебит q в уравнении (8) подразумевает закачку водорода H_2 в пласт. Возмущение передается через малую окрестность начала координат. На границе поддерживается условие непроницаемости. В начальный момент времени колония бактерий распределена непрерывно во всем пласте, концентрация водорода H_2 постоянна.

В таблице 1 приведены данные, используемые в расчетах.

На рисунке 2 представлены результаты численного расчета эволюции концентрации водорода без учета хемотаксиса с расчетными данными из таблицы 1. Это означает, что развивается достаточно регулярные кольцевые волны с избытком и недостатком водорода в пространстве, которые чередуются между собой.

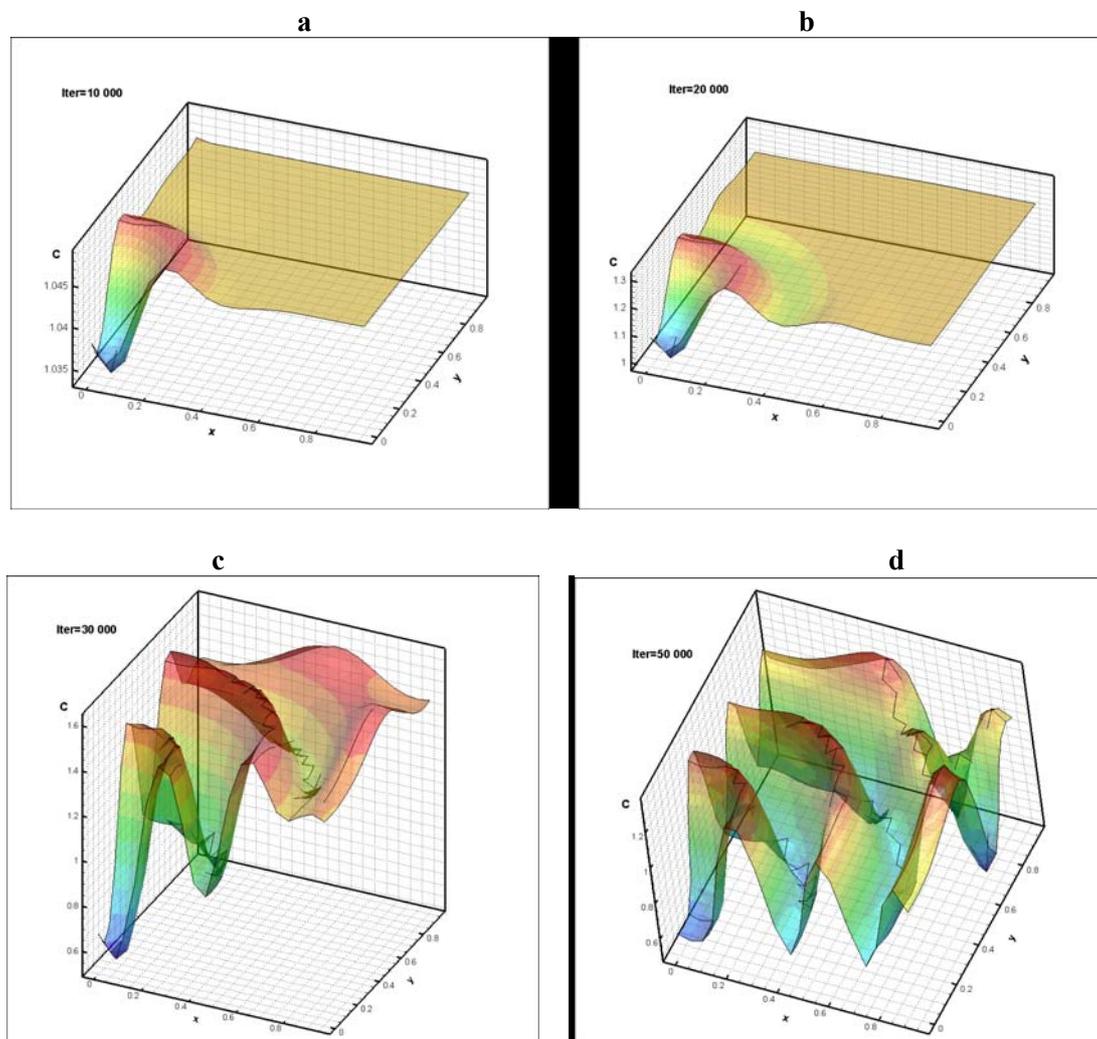


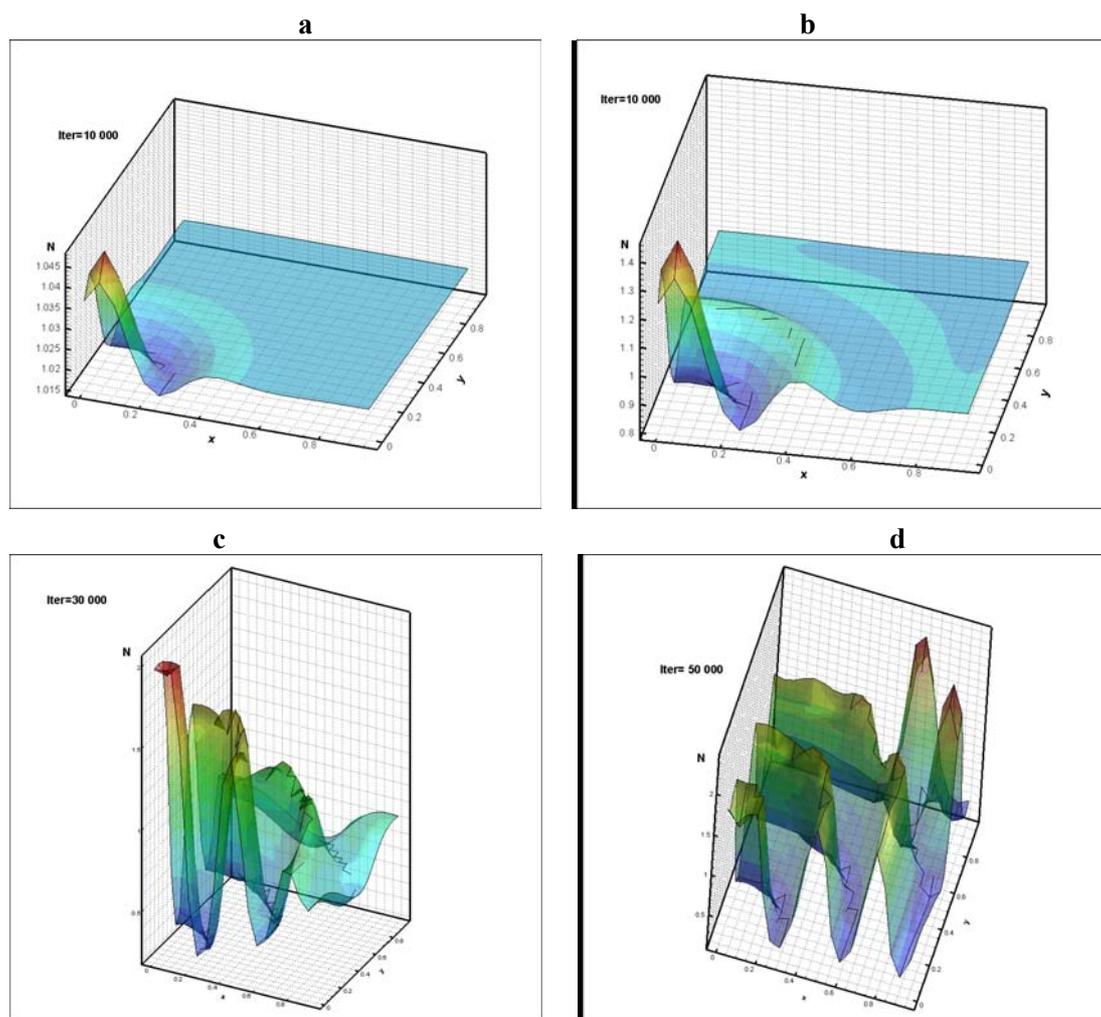
Рисунок 2 – Изменения концентрации водорода в пространстве при $Time = 0 \dots 200$ с учетом диффузий

На рисунке 3 a, b, c, d представлены изменения количества бактерий в пространстве для следующих итераций 10 000, 20 000, 30 000, 50 000. Результаты расчетов показывают на развитие достаточно регулярных кольцевых волн аналогично концентрациям водорода в пространстве.

Таблица 1 – Расчетные данные

Сетка	20*20
Число итерации	50 000
Временной шаг	0,004
q (на скважине)	0.95+0,01
q (на остальных точках поддерживается дебит)	0.95
$D_w^{(H_2)}$	0.01
D_b	0.001
D_{ch}	0.001
α_1	1
α_3	1
β	1
λ_{ch}	1

Чередование колец с избытком и недостатком бактерий означает, что в областях с высокой концентрацией бактерий реакция (1) протекает быстрее, в результате чего метаногенные бактерии выделяют метан.

Рисунок 3 – Изменения количество бактерий в пространстве при $Time = 0 \dots 200$ с учетом диффузий

На рисунке 4, 5 представлены результаты расчета концентрации водорода и количества бактерий соответственно с учетом хемотаксиса при $Time = 0 \dots 200$. Результаты численного расчета показывают, что хемотаксис приводит к потере симметрии то система (8) и (9) сохраняют регулярные кольцевые волны и теряют симметрию.

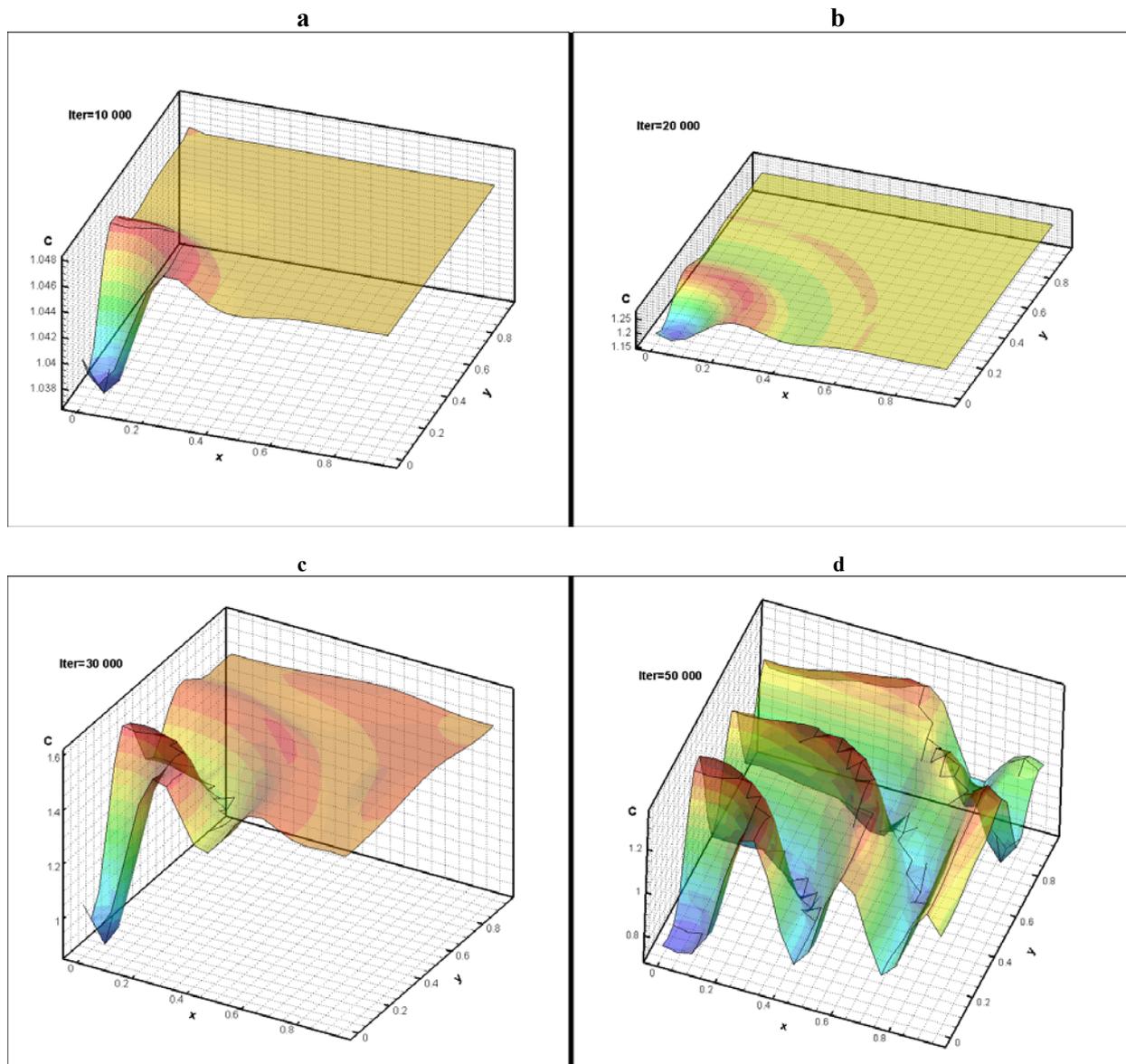


Рисунок 4 – Изменения концентрации водорода в пространстве при $Time = 0 \dots 200$ с учетом диффузий и хемотаксиса

В настоящей работе была проведена попытка качественного анализа влияния метаногенных бактерий на динамику образования метана при подземном хранении водорода в водоносных пластах. Возникновение незатухающих осцилляций во времени, асимптотически стремящееся к периодическим, означает, что в системе происходит самоорганизация новых структур в виде метана. Существенно, что эти структуры образуются лишь в достаточно узком диапазоне закачки H_2 согласно $0,90032 < q < 1,0$.

Следует отметить, что как в случае учета хемотаксиса, так и без его учета не наблюдалось затуханий колебаний в пространстве. В пределе получалась статическая замороженная картина пространственных волн.

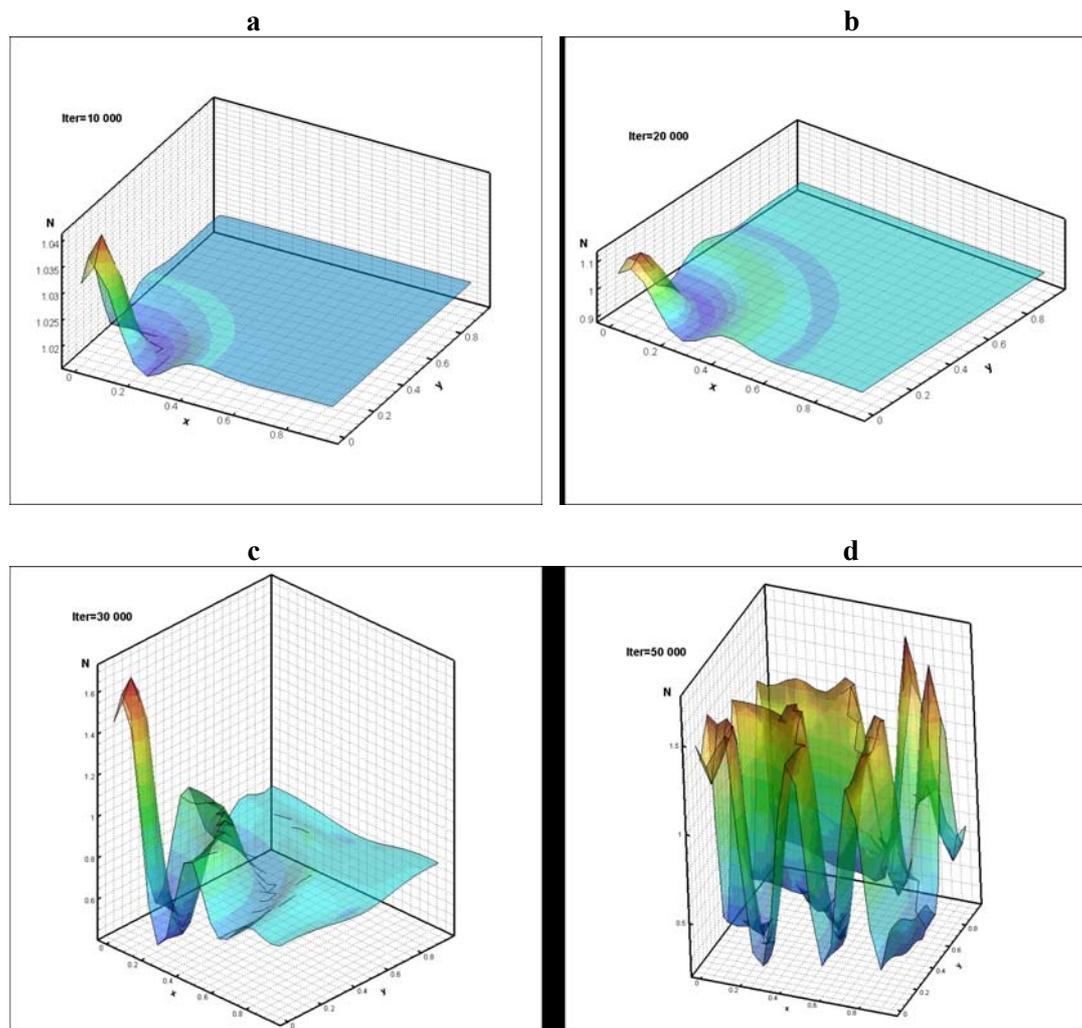


Рисунок 5 – Изменения количество бактерий в пространстве при $Time = 0 \dots 200$ с учетом диффузий и хемотаксиса

Заключение. Уравнения (3), (4) и (6) представляют собой связанную систему, которая описывает двухфазное хранение водорода с биотической реакцией, связанной с динамической системой уравнений популяций в водоносном резервуаре. Поведение подземного хранилища водорода очень сложное и чувствительное к кинетическим параметрам. Полученная концептуальная физическая и математическая модель процесса могут быть использованы для управления ПХВ и анализа образования метана в водоносном пласте.

REFERENCES

- 1 Bulatov G.G. Underground storage of hydrogen. Ph.D. Thesis, Moscow Gubkin Oil and Gas University, 1979 (in Russ.).
- 2 Smigai, P, Greksak, M., Kozankova, J., Buzek, F., Onderka, V., Wolf, I.: Methanogenic bacteria as a key factor involved in changes of town gas in an underground reservoir. FEMS Microbiol. Ecol. 73, 1990: P 221–224.
- 3 Buzek, F., Onderka, V., Vancura, P., Wolf, I.: Carbon isotope study of methane production in a town gas storage reservoir. Fuel 73(5), 1994: 747–752.
- 4 Gusev, M.V., Mineeva, L.A. (eds.): Microbiology. Moscow Lomonosov University, Moscow (1992) (in Russ.)
- 5 Panfilov, M., Gravier, G., Fillacier, S.: Underground storage of H₂ and H₂–CO₂–CH₄ mixtures. In: Proc. ECMOR-X: 10th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 4–7 September 2006 Amsterdam, the Netherlands, Ed. EAGE, 2006, paper A003.
- 6 Panfilov M. Underground storage of hydrogen: self-organisation and methane generation. Transport in Porous Media, 85, 2010: P 841 - 865.
- 7 Merkin, J.H, Needham, D.J, Scott, S.K.: On the creation, growth and extinction of oscillatory solutions for a simple pooled chemical reaction scheme. SIAM J. Appl. Math 47, 1040–1060 (1987)

Резюме

А. Е. Төлеуханов¹, М. Б. Панфилов², А. Қалтаев¹

(¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,
²Лотарингия университеті, Нанси қ.)

ЖЕР АСТЫ СУЫ БАР РЕЗЕРВУАРДА СУТЕГІН САҚТАУ КЕЗІНДЕГІ
КӨМІРСУ ҚОСПАСЫ ӨЗГЕРІСІНІҢ ЕКІ ФАЗАЛЫ ҮЛГІСІ

Бұл жұмыста сутегін жер астында суы бар резервуарда сақтау үдерісі қарастырылған. Онда бактериялардың бастапқы қоспаға әсері ескеріледі. Сонымен қатар жер асты суы бар резервуарда сутегін сақтаудың бактериялардың динамикасын ескере отырып екі фазалы үлгісі алынған.

Тірек сөздер: кеуек орта, сутегі, бактерия, нейстон, хемотаксис, популяция динамикасы, осцилляция.

Summary

A. E. Toleukhanov¹, M. B. Panfilov², A. Kaltayev¹

(¹Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan,
²Lorraine University, Nancy)

TWO-PHASE MODEL OF THE COMPOSITION
CHANGE OF HYDROCARBON MIXTURE IN UNDERGROUND HYDROGEN STORAGE

A hydrogen storage in aquifers or depleted gas reservoirs behaves as the natural chemical reactor due to high activity of the methanogenic bacteria which consume hydrogen as the source of energy. In the present paper we develop the new mathematical model of gas-water multicomponent flow with biotic reactions coupled with the system of equations of population dynamics.

Keywords: porous media, hydrogen, bacteria, neuston, chemotaxis, population dynamics, oscillations.

Поступила 15.10.2013г.

УДК 517.9

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ
ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В настоящей работе получены граничные условия вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля.

Ключевые слова: граничные условия, вольтерровы операторы, Штурм-Лиувилль.

Тірек сөздер: шектік шарттар, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Keywords: boundary conditions, voltaire's operators, Shturm-Liuwill.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(n)}(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной плоскости.

В работе [2] было установлено, что если оператор Штурма-Лиувилля вольтерров, то его граничные условия приводимы к виду

$$y(0) = ky(1), y'(0) = -ky'(1) \tag{3}$$

где k – некоторое комплексное число, т.е. $k \in C$. В связи с этим возникает следующая задача, а нельзя ли выразить постоянную k через миноры граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

т.е. через величины

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

Постановка этой задачи навеяна формулой (6), которая не была известна нам ранее.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

ЛЕММА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(n)}(x); x \in (0, 1) \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

обратим, то граничные условия (2) приводимы к виду

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) - (\Delta_{12} + \Delta_{32})y'(0) - \Delta_{13}y(1) - (\Delta_{14} + \Delta_{34})y'(1) = 0, \\ (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14})y(0) - (\Delta_{32} + \Delta_{42})y'(0) + (\Delta_{32} + \Delta_{34})y(1) - (\Delta_{24} + \Delta_{34})y'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}'$$

ЛЕММА 2. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ [1, с. 42] не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа [2, с. 31].

ЛЕММА 3. Если

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

где $a_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$ комплексные числа, то имеет место формула

$$\Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{32} - \Delta_{14}\Delta_{34} = 0, \tag{6}$$

которая является следствием леммы 1

ЛЕММА 4. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \Delta_{13} = 0, \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0. \tag{7}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(n)}(x); x \in (0, 1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

с двумя ($i = 1, 2$) линейно независимыми граничными условиями является вольтерровым, то граничные условия (2) приводимы к виду

$$y(0) = \frac{\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} y(1), \quad y'(0) = -\frac{\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} y'(1) \tag{8}$$

где

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i, j = 1, 2, 3, 4), \tag{5}$$

миноры граничной матрицы (4). При $\Delta_{14} = 0$ получим задачу Коши на левом конце отрезка $[0, 1]$, а при $\Delta_{12}^2 = \Delta_{14}^2$ получим задачу Коши на правом конце отрезка $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{42} = 0, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \quad \Delta_{34} \neq 0. \tag{7}$$

С учетом этих условий, граничное условие (2)' принимает следующий вид

$$\begin{cases} (\Delta_{12} + \Delta_{32})y'(0) + (\Delta_{14} + \Delta_{34})y'(1) = 0, \\ (\Delta_{12} + \Delta_{14})y(0) - \Delta_{32}y'(0) + (\Delta_{32} + \Delta_{34})y(1) - \Delta_{34}y'(1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Вычислим детерминант

$$\begin{vmatrix} \Delta_{12} + \Delta_{32} & \Delta_{14} + \Delta_{34} \\ \Delta_{32} & \Delta_{34} \end{vmatrix} \\ \Delta_{34}(\Delta_{12} + \Delta_{32}) - \Delta_{32}(\Delta_{14} + \Delta_{34}) = \Delta_{12} \times \Delta_{34} + \Delta_{32}\Delta_{34} - \Delta_{32}\Delta_{14} - \Delta_{32}\Delta_{34} = \\ = \Delta_{12}\Delta_{34} - \Delta_{14}\Delta_{32} = 0.$$

в силу алгебраического тождества(6).

Если $|\Delta_{32}| + |\Delta_{34}| \neq 0$, то существует комплексное число k такое, что

$$\Delta_{12} + \Delta_{32} = k\Delta_{32}, \quad \Delta_{14} + \Delta_{34} = k\Delta_{34}.$$

В силу линейной независимости краевых условий $k \neq 0$. Умножив вторую строку формулы (9) на k и прибавив полученное выражение к первой строке этой же формулы, получим

$$k(\Delta_{12} + \Delta_{14})y(0) + k(\Delta_{32} + \Delta_{34})y(1) = 0.$$

Поскольку $k \neq 0$, то можно разделить эту формулу на k , после чего мы имеем

$$(\Delta_{12} + \Delta_{14})y(0) + (\Delta_{32} + \Delta_{34})y(1) = 0.$$

Таким образом, граничные условия (9) примут вид

$$\begin{cases} (\Delta_{12} + \Delta_{32})y'(0) + (\Delta_{14} + \Delta_{34})y'(1) = 0, \\ (\Delta_{12} + \Delta_{14})y(0) + (\Delta_{32} + \Delta_{34})y(1) = 0. \end{cases}$$

или с учетом условия $\Delta_{32} = -\Delta_{14}$,

$$\begin{cases} (\Delta_{12} - \Delta_{32})y'(0) + (\Delta_{14} + \Delta_{34})y'(1) = 0, \\ (\Delta_{12} + \Delta_{14})y(0) + (\Delta_{32} - \Delta_{34})y(1) = 0. \end{cases} \quad (9)'$$

Если $\Delta_{12} = \Delta_{14}$, то из тождества (6) имеем

$\Delta_{14} \times \Delta_{32} - \Delta_{12}\Delta_{34} = 0, \rightarrow \Delta_{14}(\Delta_{32} - \Delta_{34}) = 0, \rightarrow \Delta_{14}(-\Delta_{14} - \Delta_{34}) = 0, \rightarrow \Delta_{14}(\Delta_{14} + \Delta_{34}) = 0, \Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34}) = 0,$
поскольку $\Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0$, то отсюда делаем вывод, что $\Delta_{14} = 0, \rightarrow \Delta_{12} = 0, \rightarrow \Delta_{34} \neq 0$. Тогда из (9)' имеем

$$\Delta_{34}y'(1) = 0, \Delta_{34} \times y(1) = 0 \quad \text{или} \quad y'(1) = 0, y(1) = 0.$$

Это есть задача Коши на правом конце интервала $[0,1]$.

Если $\Delta_{12} + \Delta_{14} = 0$, то из тождества (6) имеем

$\Delta_{14}\Delta_{32} - \Delta_{12} \times \Delta_{34} = 0, \rightarrow \Delta_{14}(\Delta_{32} + \Delta_{14}) = 0, \Delta_{32} = -\Delta_{14} = \Delta_{12}, \rightarrow \Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34}) = 0, \rightarrow \Delta_{14} = 0, \Delta_{12} = 0, \rightarrow \Delta_{34} \neq 0$.

Следовательно опять получим задачу Коши

$$y'(1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Пусть теперь $\Delta_{12} \neq \pm\Delta_{14}$, тогда

$$y'(0) = -\frac{\Delta_{34} + \Delta_{14}}{\Delta_{12} - \Delta_{14}}y'(1), \quad y(0) = -\frac{-\Delta_{34} - \Delta_{14}}{(\Delta_{12} + \Delta_{14})}y(1) \quad (10)$$

Принимая во внимание алгебраическое тождество(6), преобразуем коэффициенты граничного условия (10).

$$\frac{\Delta_{34} + \Delta_{14}}{\Delta_{12} - \Delta_{14}} = \frac{(\Delta_{34} + \Delta_{14})(\Delta_{12} + \Delta_{14})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14} \times \Delta_{34} + \Delta_{14} \times \Delta_{12} + \Delta_{14}^2}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} \\ = \frac{\Delta_{14}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{12}}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2};$$

Аналогично имеем

$$\frac{\Delta_{34} - \Delta_{14}}{\Delta_{12} + \Delta_{14}} = \frac{(\Delta_{34} - \Delta_{14})(\Delta_{12} - \Delta_{14})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{\Delta_{34}\Delta_{12} - \Delta_{34} \times \Delta_{14} - \Delta_{14}\Delta_{12} + \Delta_{14}^2}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{-\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2}.$$

Если $|\Delta_{32}| + |\Delta_{34}| = 0$, то $\Delta_{32} = \Delta_{34} = 0$, тогда граничные условия (9) примут вид

$$\Delta_{12} \times y'(0), \Delta_{12} \times y(0) = 0, \rightarrow y'(0) = 0, y(0) = 0.$$

Это есть задача Коши на левом конце отрезка $[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
 2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма- Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН ОК. Серия физ. мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

REFERENCES

- 1 Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. 176 s.
 2 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma- Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN OK. Serija fiz. mat. 2000. № 3. S. 29-34.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ВОЛЬТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте вольтерлі Штурма-Лиувилл операторының шекаралық шарттары қорытылған.

Тірек сөздер: шектік шарттар, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Summary

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

BOUNDARY CONDITIONS VOLTERRA STURM-LIOUVILLE

In the real work boundary conditions voltaerreova the operator of Storm Liouville are received.

Keywords: boundary conditions, voltaire's operators, Shturm-Liuwill.

Поступила 15.10.2013г.

УДК 517

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О ПОДОБИИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В настоящей работе доказано, что все вольтерровые краевые задачи Штурма-Лиувилля подобны задаче Коши.

Ключевые слова: подобие, вольтерровы операторы, Штурм-Лиувилль.

Тірек сөздер: ұқсастық, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Keywords: resemble, voltaire's operators, Shturm-Liuwill.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(n)}(x) = \lambda y(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями (2), это означает, что хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной плоскости.

В работе [1] было установлено, что если оператор Штурма-Лиувилля вольтерров, то его граничные условия эквивалентны граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1) \quad (5)$$

где k – некоторое комплексное число, т.е. $k \in C$.

Одной из классических вольтерровых задач является задача Коши

$$\begin{aligned} LZ = -z^2(x) = \mu z(x); \quad x \in (0, 1) \quad (6) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

В связи с этим возникает следующая задача.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Показать, что все вольтерровые краевые задачи Штурма-Лиувилля подобны задаче Коши.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля(1)-(2) являются квадратами корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \times \Delta_{24} = 0 \quad (8)$$

где Δ_{ij} находятся по формуле (3) [2, с. 35]. Эта функция принадлежит к классу целых функций экспоненциального типа [3, с. 42], для которых справедлива следующая лемма 1 [1, с. 31].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа.

ЛЕММА 2. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \quad \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0, \quad (9)$$

где $\Delta_{ij} = (i, j = 1, 2, 3, 4)$ находятся по формуле (3).

Достаточность условий (9) следует из формулы (8), а необходимость является следствием леммы 1.

ЛЕММА 4. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров, то существует комплексное число k , такое, что граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1), \quad k \in C \quad (10)$$

В работе [1] приведено подробное доказательство этой леммы.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров, то он подобен оператору Коши

$$\begin{aligned} CZ = -z^{1-\alpha}(x); \quad x \in (0, 1) \\ z(0) = 0, \quad z'(0) = 0. \end{aligned}$$

и оператор подобия имеет вид $z(x) = Ty(x) = y(x) - ky(1-x), k^2 \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4, граничные условия (2) принимают вид (10), т.е.

$$y(0) = ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1), \quad k \in C.$$

Полагая $z(x) = y(x) - ky(1-x)$, имеем $z'(x) = y'(x) + ky'(1-x)$, следовательно $z(0) = y(0) - ky(1) = 0, \quad z'(0) = y'(0) + ky'(1) = 0;$

Поэтому оператора подобия ищем в виде

$$z(x) = Ty(x) = y(x) - ky(1-x).$$

Найдем обратный оператор T^{-1} . Заменяя x на $1-x$ из последней формулы, имеем

$$z(1-x) = y(1-x) - ky(x).$$

Теперь составим систему уравнений

$$\begin{cases} y(x) - ky(1-x) = z(x), \\ -ky(x) + y(1-x) = z(1-x) \end{cases}$$

относительно неизвестной $y(x)$.

Решив эту систему уравнений методом Крамера, находим $y(x)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z(x) & -k \\ z(1-x) & 1 \end{vmatrix} = z(x) + kz(1-x),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & z(x) \\ -k & z(1-x) \end{vmatrix} = z(1-x) + kz(x).$$

$$y(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{z(x) + kz(1-x)}{1-k^2}, \quad y(1-x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{z(1-x) + kz(x)}{1-k^2};$$

Следовательно, $T^{-1} = \frac{I + kS}{1-k^2}$, где $Su(x) = u(1-x)$.

Далее

$$Ly = -y^{1*}(x); \quad x \in (0,1),$$

$$TLy(x) = -(I - kS)y^{1*}(x) = -y^{1*}(x) + ky^{1*}(1-x);$$

$$CTy(x) = -\frac{d^2}{dx^2}[y(x) - ky(1-x)] = -y^{(2)}(x) + ky^{(2)}(1-x),$$

где C – оператор Коши. Таким образом, имеет место формула

$$TL = CT, \Rightarrow L = T^{-1}CT$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН ОК. Серия физ. мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.
- 2 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 329 с.
- 3 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

REFERENCES

- 1 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoy zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN OK. Serija fiz. mat. 2000. № 3. S. 29-34.
- 2 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukova dumka, 1977. 329 s.
- 3 Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. 176 s.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ВОЛЬТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛІ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫ

Бұл еңбекте Штурм-Лиувиллдің барлық вольтерлі шекаралық есептерінің Коши есебіне ұқсас екені көрсетілген.

Тірек сөздер: ұқсастық, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Summary

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ON THE SIMILARITIES BETWEEN VOLTERRA STURM-LIOUVILLE

In the real work it is proved that all volterrov regional problems of Storm Liouville are similar to Cauchy's task.

Keywords: resemble, voltaire's operators, Shturm-Liouville.

Поступила 15.10.2013г.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

К. А. ҚАБЫЛБЕКОВ, П. А. САЙДАХМЕТОВ, Л. Е. БАЙДУЛЛАЕВА, Р. Т. АБДРАИМОВ

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

**ФОТОЭФФЕКТ, КОМПТОН -ЭФФЕКТИ ЗАҢДЫЛЫҚТАРЫН
ОҚИТУДА КОМПЬЮТЕРЛІК ҮЛГІЛЕРДІ ҚОЛДАНУДЫҢ
ӘДІСТЕМЕСІ, КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ
ЖҰМЫС АТҚАРУҒА АРНАЛҒАН БЛАНКІ ҮЛГІЛЕРІ**

Аннотация. Компьютерлік үлгілеудің фотоэффект, комптон-эффект әдістері келтірілген және компьютерлік зертханалық жұмыстың бланк үлгілері ұсынылған.

Тірек сөздер: әдістеме, фотоэффект, комптон-эффект, бланк үлгісі.

Ключевые слова: методика, фотоэффект, комптон-эффект, модель бланка.

Keywords: methodology, photoelectric, the compton-effect, model blanca.

Қазақстан Республикасының Президенті Н. Ә. Назарбаевтың 2011 жылғы қаңтардың 28-індегі Қазақстан халқына Жолдауында: – 2015 жылға қарай білім беру ұйымдарының 50 пайызы электронды оқытуды пайдаланып, 2020 жылға қарай оның саны 90 пайызға дейін артады. 2020 жылға қарай халықаралық стандарттар бойынша тәуелсіз ұлттық аккредитациялаудан өткен ЖОО-лар үлесі 30 пайызды құрайтын болады деген мақсатты алға тартты [1]. «Қазақстанды әлеуметтік модернизациялау: Жалпы Еңбек Қоғамға қарай жиырма қадам» бағдарламасына сәйкес Елбасының тапсырмасында: 2013–2014 оқу жылынан бастап жалпы орта білім беретін мектептердегі оқу үрдісінде интерактивті оқыту формасын қолдануды кеңейту қарастырылсын және онлайн оқытудың арнайы бағдарламасы ендірілуі керек деп атап көрсетілген. Қазақстан Республикасының Президенті – Елбасы Н. А. Назарбаев ««Қазақстан-2050 – стратегиясы» – қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты» атты Қазақстан халқына Жолдауында: Қазақстан 2050 жылы 30 дамыған мемлекеттер қатарына енуі керек деп атап көрсетті. Дамып келе жатқан елдер арасында мұндай қатарда болуы үшін бәсекелестік қатаң болады. Ұлт жаһандық экономикалық бәсекелестікке дайын болғанда ғана мұндай қатарда бола алады. Біз, аса маңызды мақсаттарымызды естен шығармай, мақсатты және шабытты еңбек етуіміз керек: қазіргі заманға сай нәтижелі білім мен денсаулық сақтау жүйесін құру, бәсекеге қабілетті дамыған мемлекет болу үшін біз сауаттылығы жоғары елге айналуымыз керек. Бізге оқыту әдістемелерін жаңғырту және өңірлік мектеп орталықтарын құра отырып, білім берудің онлайн-жүйелерін белсене дамыту керек болады. Біз қалайтындардың барлығы үшін қашықтан оқытуды және онлайн режимінде оқытуды қоса, отандық білім беру жүйесіне инновациялық әдістерді, шешімдерді және құралдарды қарқынды енгізуге тиіспіз [2].

Президент жолдауында келтірілген тапсырмаларды орындау үшін М. Әуезов атындағы Мемлекеттік университетінің «Физиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» кафедрасы биылғы оқу

жылында оқу үрдісіне «Білімдегі ақпараттық технологиялар» және «Физиканы оқытудағы ақпараттық технологиялар» курстарын енгізді. Курстың мақсаты: студент-болашақ физика мұғалімдерін оқу үрдісінде, өздерінің кәсіпшілік қызметінде және біліктілігін жоғарылатуында, оқу үрдісі мен сыныптан тыс жұмыстарды ұйымдастыруда болашағы зор білім беру технологияларын творчесволық және тиімді пайдалануға дағдыландыру.

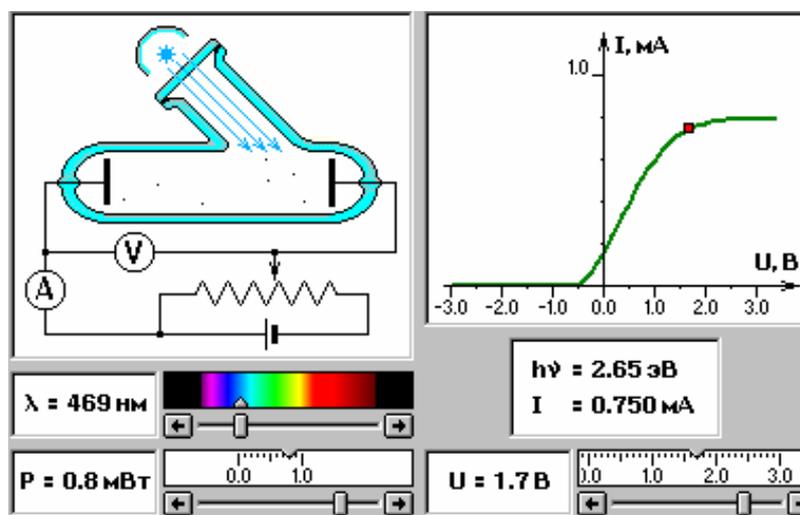
Оқу материалдары базасын жасауда студенттер мен магистранттар бесенді қатыстырылады. Авторлар құрастырған бірқатар демонстрациялық тәжірибелердің компьютерлік үлгілерін оқу үрдісінде пайдалану туралы біз бұрын жазғанбыз [3-12].

Бұл мақалада студенттерге, магистранттарға, мектеп мұғалімдеріне көмекші құрал ретінде оқушылардың [14] ресурсын пайдаланып компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруда қандай тапсырмалар беруге болатынын және оқушыларға алдын ала берілетін зертханалық жұмыстың бланкі үлгісін ұсынынамыз.

Фотоэффект. Фотоэффект құбылысының ашылуы физика ғылымының дамуында аса маңызды рөл атқарды. Кванттық физика саласы қарқынды дамып, көптеген құпиялар айқындалды.

Фотоэффект тақырыбын түсіндіру және тақырыпты бекітуде компьютерлік үлгі арқылы тәжірибе демонстрациялау, компьютермен тексеруге арналған есептерді шығаруды, тәжірибелік, зерттеулік, ізденістік тапсырмаларды оқушылардың өздері орындағаны тиімді.

Фотоэффект құбылысы туралы қысқаша мәліметтер (құбылыстың ашылу тарихы, физика дамуындағы рөлі, Эйнштейн гипотезасы мен формуласы, т.т.) берілгеннен кейін нақты тәжірибені компьютерлік үлгіде көрсету қажет (1-сурет): фототок шамасының анод пен катод арасындағы кернеуге тәуелділігін және фотоэлементке түсетін жарықтың толқын ұзындығын (энергиясын) өзгерте отырып бұл тәуелділікті зерттеу, фотоэффектінің қызыл шегін анықтау. Оқытушы жарық әсерінен электрондардың металдан шығуының қызыл шегі болатынын демонстрация нәтижесінде нақты көрсетуі қажет.



1-сурет

1. Компьютерлік зертханалық жұмысты орындауға алдына ала оқушыларға ұсынылатын бланкі үлгісі

Жұмыстың тақырыбы: Фотоэффект құбылысын зерттеу.

Жұмыстың мақсаты: фототоктың кернеуге тәуелділігін және фотоэлементке түскен жарықтың толқын ұзындығына байланысты осы тәуелділікті зерттеу, фотоэффектінің қызыл шегін анықтау, планк тұрақтысын анықтау.

Сынып..... Оқушының аты-жөні..... Есімі.....

1. Есептердің жауаптарын компьютермен тексеруге арналған есептер:

Алдымен есептерді қағазға жазып шығарып, соңынан алынған жауапты компьютерде тексеріңдер. Есептерді шығару барысын жазбаша дайындап зертханалық жұмыстың бланкісімен қоса тапсырыңдар.

1.1-есеп. Толқын ұзындығы 400 нм фотонның энергиясы қандай болады?

Жауабы.

1.2-есеп. Энергиясы 3,77 эВ фотонның толқын ұзындығы қандай болады ?

Жауабы.

1.3-есеп. Анод пен катод арасындағы кернеу $U = -1,1$ В болғанда фототок тоқтайды. Электрондардың максимал жылдамдығын анықтаңдар.

Жауабы.

1.4-есеп. Анод пен катод арасындағы кернеу $U = -1,1$ В болғанда фототок тоқтайды. Электронның шығу жұмысын анықта?

Жауабы.

2. Бірмәнді емес есептер.

2.1-есеп. Фотоэффект құбылысындағы электрондардың максимал жылдамдығын қалайша анықтауға болады?

Жауабы.

2.2-есеп. Фотоэффектінің қызыл шекарасын қалайша есептеуге болады?

Жауабы.

3. Творчестволық тапсырмалар. Мұндай тапсырма аясында оқушыларға өз бетінше фотоэффект құбылысына арналған бір немесе бірнеше есеп құрастыру және үйде немесе сыныпта орындауы ұсынылады. Содан кейін алған нәтижесін компьютерлік үлгіні пайдаланып тексеруі керек. Алғашқыда бұл есептер бұрын құрастырылып сабақта шешілген есептер типтесі болып, кейіннен үлгі мүмкіншілігіне орай жаңа типті болуы мүмкін. Мысалы 1.3 және 1.4 есептер типтес

4. Тәжірибелік тапсырмалар

4.1-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 400 нм және 500 нм монохромат жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін (жарық қуаттылығы 0,5 және 1,0 мВт) зерттеңдер. $I(U)$ графигін (4 қисық) тұрғызыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

4.2-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 450 нм және 622 нм жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін (жарық қуаттылығы 0,5 және 1,0 мВт) зерттеңдер. $I(U)$ графигін (4 қисық) тұрғызыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

4.3-тапсырма. 4.1 мен 4.2 тапсырмаларының нәтижелерін қорытындылаңдар.

Жауабы.

4.4-тапсырма. Фотоэлементке белгілі бір толқын ұзындықты монохромат жарықтың қуаттылығын өзгерте отырып фототоктың кернеуге тәуелдігін зерттеңдер. $I(U)$ графигін әр түрлі жарық қуаттылығына қарай тұрғызыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

5. Зерттеу тапсырмалары

5.1-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 380 нм монохромат жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін жарық қуаттылығын 0,1-ден 1,0 мВт аралығында өзгертіп зерттеңдер. $I(U)$ графигін жарық қуаттылығына қарай тұрғызыңдар. Жарық қуаттылығының қаныққан ток мәніне әсерін зерттеңдер. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

5.2-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 622 нм монохромат жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелдігін жарық қуаттылығын 0,1 ден 1,0 мВт аралығында өзгертіп зерттеңдер. $I(U)$ графигін жарық қуаттылығына қарай тұрғызыңдар. Жарық қуаттылығының қаныққан ток мәніне әсерін зерттеңдер. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

5.3-тапсырма. Фотоэлементке түсетін жарық қуаттылығы 1,0 Мвт жағдайында толқын ұзындығын 380-623 нм аралығында өзгертіп фототоктың кернеуге тәуелділігін зерттеңдер. $I(U)$ графигін тұрғызыңдар. Қанығу ток мәндері мен тежеу кернеулерін анықтаңдар. Жарық қуаттылығы мен қаныққан ток мәндерінің арасындағы байланысты орнатыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

6. Изденіс тасырмалары.

6.1-тапсырма. Компьютерлік үлгіні қолданып Планк тұрақтысын анықтаңдар.

Жауабы.

6.2-тапсырма. Компьютерлік үлгіні қолданып фотоэлементтен электронның шығу жұмысын анықтаңдар.

Жауабы.

6.3-тапсырма. Компьютерлік үлгіні қолданып фотоэлементтің қандай материалдан жасалғанын анықтаңдар.

7. Сапалық есептер.

7.1-есеп. Сілті металдардан жасалған фотоэлементтерде фотоэффект пайда болуы үшін қандай толқын ұзындықты жарық көздерін пайдалануға болады?

Жауабы.

7.2-есеп. Сілті металдардан жасалған фотоэлементтерде фотоэффект пайда болуы үшін қандай толқын ұзындықты жарық көздерін пайдалануға болады?

Жауабы.

7.3-есеп. Фотоэлементтерді техникада пайдалану мысалдарын келтіріңдер.

Жауабы.

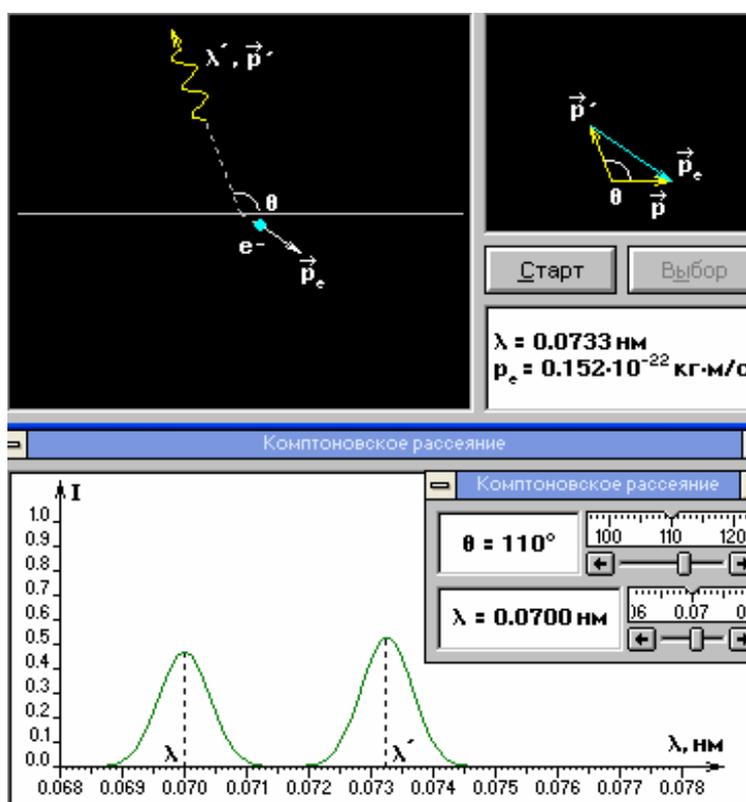
7.4-есеп. Фотоэлементтерді тұрмыста пайдалану мысалдарын келтіріңдер.

Жауабы.

Проблемалық, зерттеулік және ізденістік тапсырмалар оқушыларды физикаға қызығушылығын арттыруында маңызды және қосымша мотивация факторы болып табылады. Мұндай жағдайларда да компьютерлік үлгілерді қолдану ең қолайлы болатынын айта кету керек.

Ұсынылып отырған бланкі үлгісінде тапсырмалар саны әдейі көп берілген. Бұлардың барлығын кез келген оқушы орындай алмауы мүмкін. Дегенмен оқытушы үлгідегі тапсырмаларды әр оқушының шамасына қарап іріктеп бергені дұрыс немесе осы үлгіні пайдаланып басқа да тапсырмалар дайындай алады.

Комптон-эффект. Комптон эффектісі рентген сәулелерінің жеңіл атом құрамындағы электрондармен соқтығуы нәтижесінде оның толқын ұзындығының өзгеруі тәжірибе арқылы та-



2-сурет

ғайындалды (1923 ж.). Толқын ұзындығының өзгеруі $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$ сәулелердің ша-

шырау бұрышына тәуелділігі анықталып, рентген сәулесінің (фотондардың) толқындық табиғатымен қатар кванттық табиғаты болатыны тәжірибе жүзінде дәлелденді. Теория тұрғысынан фотон мен электронның серпімді соқтығысуын импульс және энергия сақталу заңдарына сәйкес қарастырып жоғарыда көрсетілген өрнекті қорытып шығару керек.

Яғни, фотонның импульсі мен энергиясы болатынын және электронмен соқтығысуы кәдімгі серпімді шариктердің соқтығысуындай болатынын айта келіп, компьютерлік үлгіні демонстрациялау қажет. Шашыраған фотондарды тіркеу үшін арнайы прибор қолданылатынын және ол толқын ұзындықтарына байланысты оның қарқындылығын көрсететінін айту керек. Тақырыпты бекіту үшін оқырмандарға өз бетінше бірнеше компьютерлік үлгіні қолданып есептер, тәжірибелер және зерттеулер жүргізу ұсынылады. Оқушыларға алдын ала дайындалған компьютерлік зертханалық жұмыс атқарудың бланкілері таратылады.

2. Компьютерлік зертханалық жұмысты орындауға алдына ала оқушыларға ұсынылатын бланкі үлгісі

Жұмыстың тақырыбы: Комптон эффект құбылысын зерттеу.

Жұмыстың мақсаты: рентген сәулесінің толқын ұзындығының электроннан шашырау бұрышына тәуелділігін зерттеу, Планк тұрақтысын анықтау.

Сынып..... Оқушының аты-жөні..... Есімі.....

1. Есептердің жауаптарын компьютермен тексеруге арналған есептер:

Алдымен есептерді қағазға жазып шығарып, соңынан алынған жауапты компьютерде тексеріңдер. Есептерді шығару барысын жазбаша дайындап зертханалық жұмыстың бланкісімен қоса тапсырыңдар.

1.1-есеп. Толқын ұзындығы 0,03 нм фотонның тыныштықтағы электронмен соқтығысып 30° бұрышпен шашырайды. Шашыраған фотонның толқын ұзындығын есепте.

Жауабы.

1.2-есеп. Толқын ұзындығы 0,03 нм фотонның тыныштықтағы электронмен соқтығысып 30° бұрышпен шашырайды. Оның толқын ұзындығы қалай өзгереді?

Жауабы.

1.3-есеп. Толқын ұзындығы 0,03 нм фотонның тыныштықтағы электронмен соқтығысып 30° бұрышпен шашырайды. Шашыраған электронның импульсін есепте.

Жауабы.

1.4-есеп. Толқын ұзындығы 0,1000 нм фотонның шашырағандағы толқын ұзындығы 0,1047 нм болуы үшін ол қандай бұрышпен шашырауы керек?

Жауабы.

1.5-есеп. Толқын ұзындығы 0,0800 нм фотон 90° бұрышпен шашырағандағы оның толқын ұзындығы қалай өзгереді?

2. Бірмәнді емес есептер.

2.1-есеп. Фотоэффект құбылысындағы электрондардың максимал жылдамдығын қалайша анықтауға болады?

Жауабы.

2.2-есеп. Фотоэффектінің қызыл шекарасын қалайша есептеуге болады?

Жауабы.

3. Творчестволық тапсырмалар. Мұндай тапсырма аясында оқушыларға өз бетінше фотоэффект құбылысына арналған бір немесе бірнеше есеп құрастыру және үйде немесе сыныпта орындауы ұсынылады. Содан кейін алған нәтижесін компьютерлік үлгіні пайдаланып тексеруі керек. Алғашқыда бұл есептер бұрын құрастырылып сабақта шешілген есептер типтесі болып, кейіннен үлгі мүмкіншілігіне орай жаңа типті болуы мүмкін. Мысалы 1.3 және 1.4 есептер типтес.

4. Тәжірибелік тапсырмалар

4.1-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 400 нм және 500 нм монохромат жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін (жарық қуаттылығы 0,5 және 1,0 мВт) зерттендер. I(U) графигін (4 қисық) тұрғызыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдандар.

Жауабы.

4.2-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 450 нм және 622 нм жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін (жарық қуаттылығы 0,5 және 1,0 мВт) зерттеңдер. $I(U)$ графигін (4 қисық) тұрғызыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

4.3-тапсырма. 4.1 мен 4.2 тапсырмаларының нәтижелерін қорытындылаңдар.

Жауабы.

4.4-тапсырма. Фотоэлементке белгілі бір толқын ұзындықты монохромат жарықтың қуаттылығын өзгерте отырып фототоктың кернеуге тәуелділігін зерттеңдер. $I(U)$ графигін әртүрлі жарық қуаттылығына қарай тұрғызыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

5. Зерттеу тапсырмалары

5.1-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 380 нм монохромат жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін жарық қуаттылығын 0,1-ден 1,0 мВт аралығында өзгертіп зерттеңдер. $I(U)$ графигін жарық қуаттылығына қарай тұрғызыңдар. Жарық қуаттылығының қаныққан ток мәніне әсерін зерттеңдер. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

5.2-тапсырма. Фотоэлементке толқын ұзындығы 622 нм монохромат жарық түскендегі фототоктың кернеуге тәуелділігін жарық қуаттылығын 0,1-ден 1,0 мВт аралығында өзгертіп зерттеңдер. $I(U)$ графигін жарық қуаттылығына қарай тұрғызыңдар. Жарық қуаттылығының қаныққан ток мәніне әсерін зерттеңдер. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

5.3-тапсырма. Фотоэлементке түсетін жарық қуаттылығы 1,0 Мвт жағдайында толқын ұзындығын 380-623 нм аралығында өзгертіп фототоктың кернеуге тәуелділігін зерттеңдер. $I(U)$ графигін тұрғызыңдар. Қанығу ток мәндері мен тежеу кернеулерін анықтаңдар. Жарық қуаттылығы мен қаныққан ток мәндерінің арасындағы байланысты орнатыңдар. Тәжірибе қорытындысын тұжырымдаңдар.

Жауабы.

6. Ізденіс тасырмалары.

6.1-тапсырма. Компьютерлік үлгіні қолданып Планк тұрақтысын анықтаңдар.

Жауабы.

6.2-тапсырма. Компьютерлік үлгіні қолданып фотоэлементтен электронның шығу жұмысын анықтаңдар.

Жауабы.

6.3-тапсырма. Компьютерлік үлгіні қолданып фотоэлементтің қандай материалдан жасалғанын анықтаңдар.

7. Сапалық есептер.

7.1-есеп. Сілті металдардан жасалған фотоэлементтерде фотоэффект пайда болуы үшін қандай толқын ұзындықты жарық көздерін пайдалануға болады?

Жауабы.

7.2-есеп. Сілті металдардан жасалған фотоэлементтерде фотоэффект пайда болуы үшін қандай толқын ұзындықты жарық көздерін пайдалануға болады?

Жауабы.

7.3-есеп. Фотоэлементтерді техникада пайдалану мысалдарын келтіріңдер.

Жауабы.

7.4-есеп. Фотоэлементтерді тұрмыста пайдалану мысалдарын келтіріңдер.

Жауабы.

ӘДЕБИЕТ

1 Назарбаев Н.Ә. Қазақстан халқына Жолдауы. www.bnews.kz. 28.01.2011 ж. Астана.

2 Назарбаев Н.Ә. «Қазақстан-2050 – стратегиясы» – қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты». Қазақстан халқына Жолдауы. www.bnews.kz. 14.12.2012ж. Астана.

3 Кабылбеков К.А., Түйебаев М.К., Турмамбеков Т.А., Иманбеков Д.А., Сайдахметов П.А., Компьютерные модели опытов и демонстраций по курсу физики «Электричество. Часть – 1» и их использование в учебном процессе // Высшая школа Казахстана. – Алматы, 2007. – № 3. – С. 14-19.

4 Кабылбеков К.А., Туйебаев М.К., Турмамбеков Т.А., Иманбеков Д.А., Сайдахметов П.А. Компьютерные модели опытов и демонстраций по разделу «Механика» курса физики и их использование в учебном процессе «Ұлт тағдыры». – Алматы, 2007. – С. 128-132.

5 Кабылбеков К.А., Турмамбеков Т.А., Бердиева М.А., Сайдахметов П.А., Иманбеков Д.А., Омашова Г.Ш. Компьютерные модели опытов и демонстраций по снятию вольт-амперной характеристики диода и петли гистерезиса ферромагнетика и их использование в учебном процессе // Труды международной научно-практич. конф. «Современные проблемы подготовки пед. кадров и перспективы развития естественных наук-2». – Шымкент, 2008. – С. 226-233.

6 Кабылбеков К.А. Компьютерные модели физических явлений (механика). – Свид-во о госрегистрации прав на объект авторского права № 685 от 29.04.2011.

7 Кабылбеков К.А. Компьютерные модели физических явлений (электричество). – Свид-во о госрегистрации прав на объект авторского права № 725 от 10.05.2011.

8 Кабылбеков К.А. Компьютерные модели физических явлений (магнетизм). – Свид-во о госрегистрации прав на объект авторского права. № 686 от 29.04.2011.

9 Кабылбеков К.А., Байжанова А.Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений // Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. – Томск, 2011. – С. 210-215.

10 Кабылбеков К.А., Иманбеков Д.А., Арысбаева А.С. Мультимедиа насыщение образовательных ресурсов динамическими компьютерными моделями // Труды международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-11: Казахстан на пути к обществу знаний: инновационные направления науки, образования и культуры», посвященной 115-летию юбилею Мухтара Ауэзова. – 2012. – С. 48-53.

11 Кабылбеков К.А., Сайдахметов П.А., Баубекова Г., Арысбаева А.С. Использование ИНТЕРНЕТ-ресурсов в преподавании физики. Сообщение 1. Использование возможности программы «Начала электроники» на практических занятиях // Труды международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-11: Казахстан на пути к обществу знаний: инновационные направления науки, образования и культуры», посвященной 115-летию юбилею Мухтара Ауэзова. – 2012. – С. 53-57.

12 Кабылбеков К.А., Серкебаев С.К., Арысбаева А.С., Баубекова Г. Использование ИНТЕРНЕТ-ресурсов в преподавании физики. Сообщение 2. Использование возможности «Начала электроники» на практических занятиях // Труды международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-11: Казахстан на пути к обществу знаний: инновационные направления науки, образования и культуры», посвященной 115-летию юбилею Мухтара Ауэзова. – 2012. – С. 57-60.

13. <http://www.elektronika.newmail.ru>. Начало электроники.

14. <http://www.physikon.ru>. «ФИЗИКОН» компаниясының сайты.

REFERENCES

1 Nazarbaev N.Ә. Қазақстан халқына Zholdaуy. www.bnews.kz. 28.01.2011 zh. Astana.

2 Nazarbaev N.Ә. ««Kazakhstan-2050 – strategijasy» – kalypaskan memlekettiң zhaңa saјasi baryty». Қазақстан халқына Zholdaуy. www.bnews.kz. 14.12.2012zh. Astana.

3 Kabylbekov K.A., Tujebaev M.K., Turmambekov T.A., Imanbekov D.A., Sajdahmetov P.A., Komp'juternye modeli opytov i demonstracij po kursu fiziki «Jelektrichestvo. Chast' – 1» i ih ispol'zovanie v uchebnom processe. Vysshaja shkola Kazahstana. Almaty, 2007. № 3. С. 14-19.

4 Kabylbekov K.A., Tujebaev M.K., Turmambekov T.A., Imanbekov D.A., Sajdahmetov P.A. Komp'juternye modeli opytov i demonstracij po razdelu «Mehanika» kursa fiziki i ih ispol'zovanie v uchebnom processe «Ұлт тағдыры». Almaty, 2007. S. 128-132.

5 Kabylbekov K.A., Turmambekov T.A., Berdieva M.A., Saidahmetov P.A., Imanbekov D.A., Omashova G.Sh. Komp'juternye modeli opytov i demonstracij po snjatiju vol't-ampernoј harakteristiki dioda i petli gistereзisa ferromagnetika i ih ispol'zovanie v uchebnom processe. Trudy mezhdunarodnoј nauchno-praktich. konf. «Sovremennye problemy podgotovki ped. kadrov i perspektivy razvitija estestvennyh nauk-2». Shymkent, 2008. S. 226-233.

6 Kabylbekov K.A. Komp'juternye modeli fizicheskikh javlenij (mehanika). Svid-vo o gosregistracii prav na ob#ekt avtorskogo prava № 685 ot 29.04.2011.

7 Kabylbekov K.A. Komp'juternye modeli fizicheskikh javlenij (jelektrichestvo). Svid-vo o gosregistracii prav na ob#ekt avtorskogo prava № 725 ot 10.05.2011.

8 Kabylbekov K.A. Komp'juternye modeli fizicheskikh javlenij (magnetizm). Svid-vo o gosregistracii prav na ob#ekt avtorskogo prava. № 686 ot 29.04.2011.

9 Kabylbekov K.A., Bajzhanova A. Ispol'zovanie mul'timedijnyh vozmozhnostej komp'juternyh sistem dlja rasshirenija demonstracionnyh resursov nekotoryh fizicheskikh javlenij. Trudy Vserossiјskoj nauchno-prakt. konf. s mezhdunar. uchastiem. Tomsk, 2011. S. 210-215.

10 Kabylbekov K.A., Imanbekov D.A., Arysbaeva A.S. Mul'timedijanasyshhenie obrazovatel'nyh resursov dinamicheskimi komp'juternymi modeljami. Trudy mezhdunarodnoј nauchno-prakticheskој konferencii «Auezovskie chtenija-11: Kazahstan na puti k obshhestvu znaniј: innovacionnye napravlenija nauki, obrazovanija i kul'tury», posvjashhennoј 115-letnemu jubileju Muhtara Aujezova. 2012. S. 48-53.

11 Kabylbekov K.A., Saidahmetov P.A., Baubekova G., Arysbaeva A.S. Ispol'zovanie INTERNET-resursov v prepodavanii fiziki. Soobshhenie 1. Ispol'zovanie vozmozhnosti programmy «Nachala jelektroniki» na prakticheskikh zanjatijah. Trudy mezhdunarodnoј nauchno-prakticheskој konferencii «Auezovskie chtenija-11: Kazahstan na puti k obshhestvu znaniј: innovacionnye napravlenija nauki, obrazovanija i kul'tury», posvjashhennoј 115-letnemu jubileju Muhtara Aujezova. 2012. S. 53-57.

12 Kabylbekov K.A., Serkebaev S.K., Arysbaeva A.C., Baubekova G. Ispol'zovanie INTERNET-resursov v prepodavanii fiziki. Soobshhenie 2. Ispol'zovanie vozmozhnosti «Nachala jelektroniki» na prakticheskikh zanjatijah. Trudy mezhdunarodnoј

nauchno-prakticheskoy konferencii «Auezovskie chteniya-11: Kazahstan na puti k obshhestvu znaniy: innovacionnye napravleniya nauki, obrazovaniya i kul'tury», posvjashhennoj 115-letnemu jubileju Muhtara Auezova. 2012. S. 57-60.

13. <http://www.elektronika.newmail.ru>. Nachalo jelektroniki.

14. <http://www.physikon.ru>. «FIZIKON» kompanijasypuñ sajty.

Резюме

К. А. Кабылбеков, П. А. Саудахметов, Л. Е. Байдуллаева, Р. Т. Абдраимов

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ФОТОЭФФЕКТА, КОМПТОН-ЭФФЕКТА, МОДЕЛЬ БЛАНКА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Приводится методика использования компьютерных моделей фотоэффекта, комптон-эффекта и предлагается модель бланка компьютерной лабораторной работы.

Тірек сөздер: әдістеме, фотоэффект, комптон-эффект, бланк үлгісі.

Summary

K. A. Kabylbekov, P. A. Saidahmetov, L. Ye. Baidullayeva, R. T. Abdraimov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

METHOD OF THE USE OF COMPUTER MODELS FOR THE STUDY OF THE LAWS OF THE PHOTOELECTRIC EFFECT, COMPTON EFFECT, THE MODEL FORM FOR MAKING COMPUTER LABORATORY WORKS

The technique of using computer models of the photoelectric effect, Compton effect and a model of the blank of the computer lab is proposed.

Keywords: methodology, photoelectric, the compton-effect, model blanca.

Поступила 15.10.2013г.

УДК 517.9

И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

КРИТЕРИЙ S-САМОСОПРЯЖЕННОСТИ НЕОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе установлен критерий S самосопряженности необратимого оператора Штурма-Лиувилля.

Ключевые слова: критерий S, самосопряженность, необратимый оператор.

Тірек сөздер: S критерийі, жалкылык, қайтымсыз оператор.

Keywords: criterion S, self conjugacy, irreversible operator.

1. Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(2)}(x); x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми краевыми условиями, где a_{ij} ($i = 1,2; j = 1,2,3,4$) – произвольные комплексные постоянные.