

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**SERIES**

**OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL**

**6 (292)**

**ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2013 ж.  
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2013 г.  
NOVEMBER – DECEMBER 2013**

**1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963**

**ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR**

**АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK**

Бас редактор  
ҚР ҰҒА академигі  
**Б. Т. Жұмағұлов**

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кәлменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, академик **А. Гаджиев** (Әзірбайжан), академик **А. Пашаев** (Әзірбайжан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Главный редактор  
академик НАН РК  
**Б. Т. Жумагулов**

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темирбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, академик **А. Гаджиев** (Азербайджан), академик **А. Пашаев** (Азербайджан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief  
academician of the NAS of the RK  
**B. T. Zhumagulov**

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, academician **A. Gadzhiev** (Azerbaijan), academician **A. Pashaev** (Azerbaijan), academician **I. Tiginaynu** (Moldova), academician **I. N. Vishnevskiyi** (Ukraine), academician **A. M. Kovalov** (Ukraine), academician **A. A. Mikhalevich** (Belarus), doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 3000 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18 www.akademiyanauk.kz  
Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 539.17

О. ИМАМБЕКОВ, Ф. БЕЛИСАРОВА, Б. БАЙМУРЗИНОВА, П. ПИРМАНОВА

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГЛАУБЕРОВСКОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ УПРУГОГО $\pi^0$ р-РАССЕЯНИЯ

**Аннотация.** В работе найдены значения параметров Глауберовской амплитуды для упругого  $\pi^0$ р-рассеяния в диапазоне энергии налетающего мезона от 50 до 1100 Мэв. Необходимые для такого анализа значения дифференциальных сечений упругого  $\pi^+$ р- и  $\pi^-$ р-рассеяния взяты из электронной базы экспериментальных данных CNS DAC Services (SAID program). Расчеты сечений с найденными значениями параметров показывает, что оно удовлетворительно описывается вплоть до 60°.

**Ключевые слова:** упругое рассеяние, Глауберовская амплитуда.

**Тірек сөздер:** серпімді шашырау, Глаубер амплитудасы.

**Keywords:** elastic scattering, amplitude Glauber.

В последнее время на различных экспериментах при промежуточных энергиях интенсивно исследуется образование так называемого «дипротона», т.е. двухпротонной пары  $\{pp\}_s$  в  $^1S_0$  состоянии относительного движения. В частности, на спектрометре ANKE в COSY-Julich (Германия) исследованы реакции  $pd \rightarrow \{pp\}_s n$ ,  $pp \rightarrow \{pp\}_s \pi^0$ ,  $pp \rightarrow \{pp\}_s \gamma$  [1,2] и т.д. Интерес к таким процессам связан по нескольким причинам. Во-первых, это простейший неупругий процесс на малонуклонных системах, который может дать ценные сведения о динамике нуклон-нуклонных взаимодействий. Во-вторых, ограничение в конечном состоянии только одной парциальной волной (S-волной) значительно упрощает ее теоретическое рассмотрение по сравнению с другими реакциями такого типа, например,  $pp \rightarrow d\pi^+$ . Заметим однако, что для реакции  $pp \rightarrow d\pi^+$  в настоящее время имеются многочисленные экспериментальные данные [3], включая спиновые наблюдаемые, измеренные в широкой области энергий. Эти данные используются для тестирования различных теоретических моделей, описывающих эту реакцию в районе энергий налетающего протона 1 ГэВ [4]. В третьих, хотя, например, квазибинарная реакция  $pp \rightarrow \{pp\}_s \pi^0$  кинематически очень похожа на реакцию  $pp \rightarrow d\pi^+$ , но динамически они существенно отличаются друг от друга. Дело в том, что квантовые числа дипротонного состояния ( $J^\pi=0^+$ ,  $I=1$ ,  $S=0$ ,  $L=0$ ) отличаются от соответствующих квантовых чисел дейтрона ( $J^\pi=0^+$ ,  $I=0$ ,  $S=1$ ,  $L=0,2$ ). В связи с этим матричные элементы перехода для этих двух реакций также будут существенно различными. Поэтому сведения, получаемые из теоретического анализа этих двух реакций, не перекрывают друг друга, а, наоборот, взаимно друг друга дополняют. Все эти факты указывают на необходимость более тщательного экспериментального и теоретического исследования таких процессов.

В работе [2] экспериментально исследована реакция  $pp \rightarrow \{pp\}_s \pi^0$ . Измерены дифференциальное поперечное сечение процесса при семи значениях энергии налетающего протона  $T_p$ , от 0.51 до 1.97 ГэВ. А также при четырех энергиях налетающего протона 0.625, 1.1, 1.4 и 1.97 ГэВ измерено угловое распределение дипротона в пределах углов  $\cos^2\theta_{\{pp\}}$  от 1.00 до 0.85. Энергетическая зависимость сечения имеет четко выраженный максимум в районе 0.6–0.8 ГэВ. Происхождение этого максимума, скорее всего, связано с возбуждением  $\Delta(1232)$  изобары в промежуточном состоянии. Угловые зависимости сечения при энергиях 1.1 и 1.4 ГэВ имеют аномалию – они растут с ростом угла рассеяния дипротона.

Теоретический анализ данной реакции ранее проводились в работах [5, 6]. В работах [5] анализ проводился на основе модели однопионного обмена (рисунок 1а), а в работе [6] для анализа была использована так называемая box-модель (рисунок 1б), явно учитывающая возбуждение  $\Delta(1232)$  изобары в промежуточном состоянии. Эти модели дают качественные описания энергетической зависимости сечений. Для их количественного описания, а также для описания аномального поведения угловой зависимости, видимо, надо учесть другие механизмы и в первую очередь перерасcеяние во входном (ISI – initial state interaction) и выходном (FSI – final state interaction) каналах (рисунок 1в). По оценкам анализа других аналогичных процессов учет ISI и FSI приводит к уменьшению абсолютной величины сечений до 30%, а также меняет характер угловой зависимости.

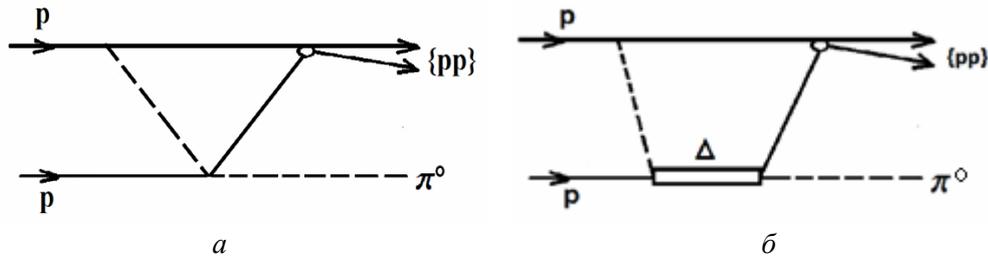


Рисунок 1 – Механизмы реакции  $pp \rightarrow \{pp\}, \pi^0$ : а – механизм однопионного обмена; б – box-модель, явно учитывающая возбуждение  $\Delta(1232)$  изобары в промежуточном состоянии

В связи с этим возникает важная задача, связанная с корректным учетом ISI и FSI. Их можно учесть в рамках дифракционной теории Глаубера-Ситенко [7]. Так как в этом случае перерасcеяния как во входном, так и выходном каналах происходят преимущественно под малыми углами и с небольшой передачей импульса, применение теории Глаубера-Ситенко является оправданной. Однако здесь возникает другая проблема, связанная со значениями параметров глауберовской элементарной амплитуды. Глауберовское сечение достаточно сильно зависит от значений этих параметров, поэтому правильное определение их значений является очень важным. Именно этой задаче посвящена данная работа.

Как известно, в теории Глаубера-Ситенко [7] элементарная амплитуда интересующего нас пион-протонного рассеяния параметризуется в следующем виде

$$f_{\pi p}(q) = \frac{\sigma_{tot} k_{\pi p}^{cm}}{4\pi} (i + \alpha) \cdot e^{-\frac{\beta}{2} q^2}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{tot}$  – полное сечение,  $k_{\pi p}^{cm}$  – относительный импульс в системе центра масс ( $\pi+p$ ),  $i$  – мнимая единица,  $q$  – переданный импульс. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из наилучшего согласия с экспериментом. При параметризации амплитуды в виде (1) ее связь с дифференциальным сечением следующая:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pi p}(q)|^2. \quad (2)$$

Обычно на экспериментах измеряют сечение рассеяния заряженных пионов на протонах. Однако, зная сечение рассеяния положительно и отрицательно заряженных пионов  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ , а также зарядово-обменных процессов  $\sigma^{exch}$  из изотопических соотношений возможно определить сечение рассеяния нейтрального пи мезона  $\sigma^0$ . Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}^0 &= \frac{1}{2}(\sigma_{tot}^+ + \sigma_{tot}^-), \\ \sigma^0 &= \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^- - \sigma^{exch}) \end{aligned} \quad (3)$$

На эксперименте измеряют сечение в лабораторной системе в зависимости от кинетической энергии налетающего мезона  $T_\pi$ . Тогда относительный импульс  $k_{\pi p}^{cm}$  определяется следующим образом

$$k_{\pi p}^{cm} = \frac{[S_{\pi p} - (m_\pi - m_p)^2] \cdot [S_{\pi p} - (m_\pi + m_p)^2]}{4S_{\pi p}}, \quad (4)$$

где инвариантная масса

$$S_{\pi p} = m_{\pi}^2 + m_p^2 + 2(T_{\pi} + m_{\pi})m_p. \quad (5)$$

Переданный импульс определяется следующим образом

$$q = \sqrt{2k_{\pi}^2(1 - \cos\theta)}, \quad (6)$$

где  $\theta$  угол рассеяния мезона.

Результаты данной работы приведены на рисунках 2, 3 и в таблице 1. На рисунке 2 приведены зависимости полного сечения упругого  $\pi^+p$ -,  $\pi^-p$ - и  $\pi^0p$ -рассеяния. Здесь сечения для заряженных пионов взяты из базы экспериментальных данных CNS DAC Services (SAID program) [8], а сечение  $\pi^0p$ -рассеяния рассчитаны нами. Угловая зависимость и значения найденной нами параметров  $\alpha$  и  $\beta$  глауберовской элементарной амплитуды приведены в таблице 1.

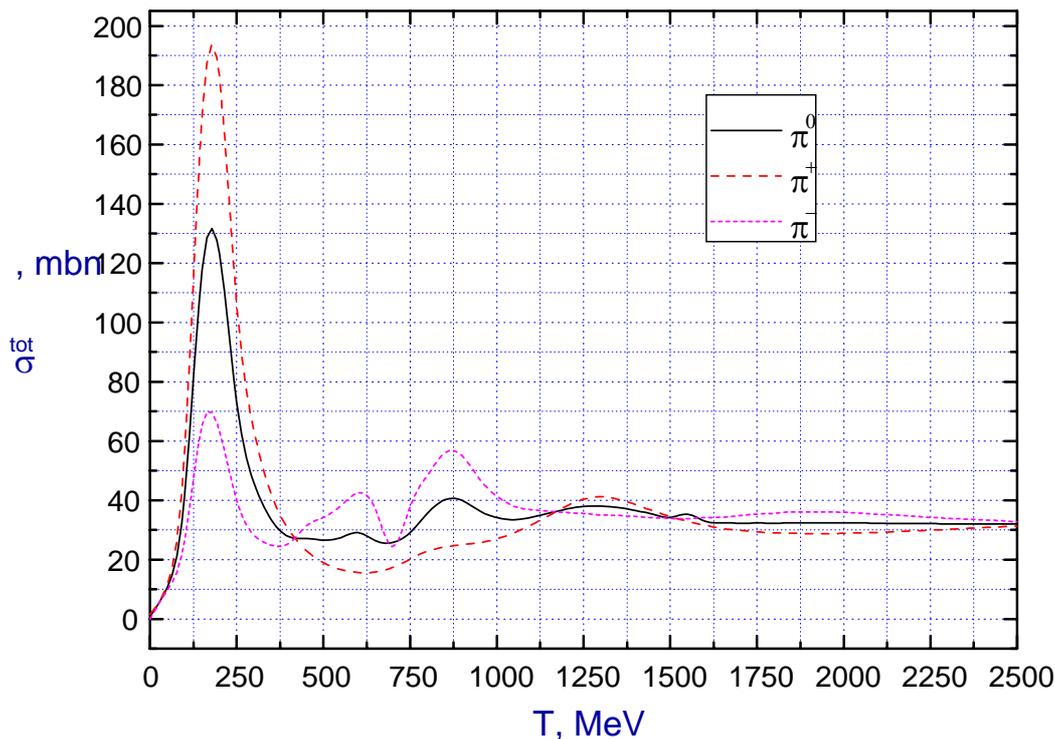


Рисунок 2 – Зависимости полного сечения  $\pi^+p$ -,  $\pi^-p$ - и  $\pi^0p$ -рассеяния от кинетической энергии налетающего мезона

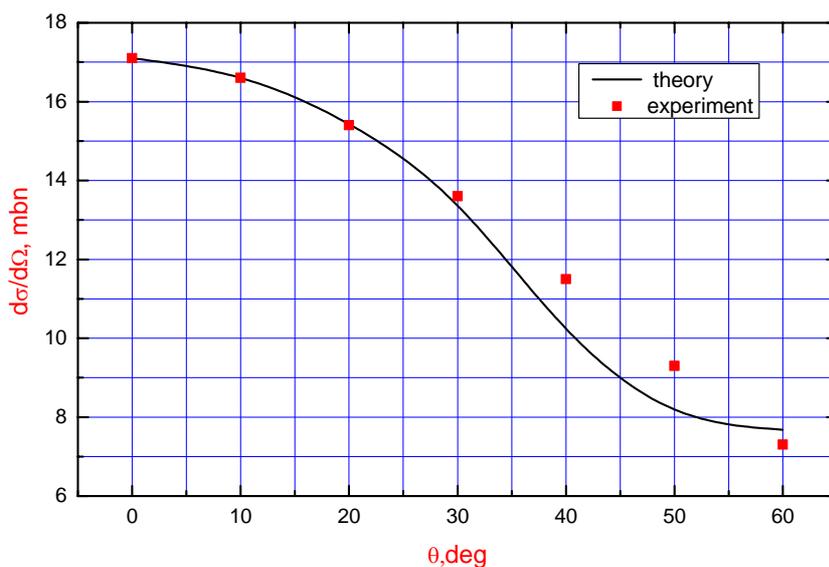


Рисунок 3 – Угловая зависимость сечений упругого  $\pi^0p$ -рассеяния при кинетической энергии налетающего мезона 200 МэВ

Таблица 1 – Угловое распределение и значение параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для глауберовской параметризации упругого  $\pi^0$ -рассеяния в зависимости от кинетической энергии налетающего мезона

$T_\pi$ , GeV	$\sigma$ , Мбн							$\alpha$	$\beta$ , GeV <sup>-2</sup>
	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°		
0.05	–	17.45	1.10	0.66	0.31	0.34	0.25	–	
0.10	2.12	1.98	2.12	1.94	1.68	1.43	1.33	11.43	50
0.15	14.70	11.72	17.05	15.48	13.41	12.00	11.20	6.52	48.9
0.20	17.13	16.60	15.43	13.36	10.24	8.19	7.68	4.759	9.50
0.25	12.20	11.87	10.10	8.80	7.46	5.93	5.50	5.205	7.00
0.30	–	8.55	6.84	5.69	4.46	3.77	2.93	–	–
0.35	4.07	3.96	3.80	3.20	2.81	2.45	2.32	4.386	4.18
0.40	4.38	4.29	3.80	2.45	2.05	2.20	1.78	4.670	4.40
0.45	2.59	2.40	2.30	2.15	2.14	2.21	1.62	3.097	3.00
0.50	2.30	2.30	2.13	2.16	2.42	1.77	1.58	2.571	1.60
0.55	2.93	2.76	2.83	2.59	2.44	2.28	1.80	2.500	0.70
0.60	3.54	3.76	3.50	3.04	2.58	2.90	1.51	2.300	1.08
0.65	–	4.30	2.87	2.17	1.77	1.38	1.09	–	–
0.70	–	3.66	3.79	3.30	2.25	1.60	1.16	–	–
0.75	4.61	4.19	3.27	2.13	1.81	1.30	0.71	4.670	3.70
0.80	6.21	7.12	5.14	3.54	1.99	1.37	1.31	3.097	1.80
0.85	8.20	7.52	6.34	4.44	2.95	1.16	0.72	2.571	2.50
0.90	10.66	9.41	5.59	5.02	2.79	1.50	0.69	2.500	4.00
0.95	8.02	7.64	5.90	4.70	2.64	1.59	0.82	2.300	1.70
1.00	7.24	7.27	6.07	4.42	2.80	1.05	0.76	4.670	1.45
1.05	–	7.5	4.44	3.68	2.38	1.36	0.51	–	–
1.10	7.51	7.44	6.32	4.20	2.28	0.81	0.58	1.146	1.00

Они определены для каждой энергии из наилучшего описания углового распределения вплоть до 60°. В качестве примера на рисунке 3 приведено угловое распределение для энергии 200 МэВ. Найденные здесь параметры в дальнейшем будут использованы при анализе  $pp \rightarrow \{pp\}, \pi^0$  и других реакций с участием пионов и протонов.

*Данная работа выполнена при поддержке грантов 1125/ГФ и 1067/ГФ.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Dymov S., Komarov V., Imambekov O. et al. // Phys. Rev. C81, 2010, 044001; Komarov V., Azaryan T., Chiladze D. et al. // Phys. Rev. Lett. 101, 2008. 102501.
- 2 Kurbatov V., Buscher M., Dymov S. et al. // Phys. Lett. B661, 2008. P. 22.
- 3 Arndt R.A., Strakovsky I.I., Workman R.L. et al. // Phys. Rev. C48, 1993. P.1926.
- 4 Hanhart C. // Phys. Rep. – 2004. – Vol. 397. – P. 115.
- 5 Имамбеков О. // Вестник КазНУ. Сер. физ. – 2010. – № 4. – С. 23; Uzikov Yu.N., Uzikov Yu.N.
- 6 Imambekov O. // Proceedings of the International Baldin Seminar on High Energy Physics Problem, Sept., 2011, Dubna.
- 7 Glauber R.G. // Lect. Theor. Phys. New York – London: Interscience, 1959. – Vol. 1. – P. 315; Глаубер Р. // УФН. – 1971. – Т. 103, вып. 4. – С. 641; Ситенко А.Г. // ФЭЧАЯ. – 1973. – Т. 4, вып. 2. – С. 546.
- 8 CNS DAC Services [Электронный ресурс] <http://gwdac.phys.gwu.edu> Режим доступа свободный.

#### REFERENCES

- 1 Dymov S., Komarov V., Imambekov O. et al. Phys. Rev. C81, 2010, 044001; Komarov V., Azaryan T., Chiladze D. et al. Phys. Rev. Lett. 101, 2008, 102501.
- 2 Kurbatov V., Buscher M., Dymov S. et al. Phys. Lett. B661, 2008. P. 22.
- 3 Arndt R.A., Strakovsky I.I., Workman R.L. et al. Phys. Rev. C48, 1993. P. 1926.
- 4 Hanhart C. Phys. Rep. 2004. Vol. 397. P. 115.

- 5 Imambekov O. Vestnik KazNU. Ser. fiz. 2010. №4. S. 23; Uzikov Yu.N., Uzikov Yu.N. (in Russ.).  
6 Imambekov O. Proceedings of the International Baldin Seminar on High Energy Physics Problem, Sept., 2011, Dubna.  
7 Glauber R.G. Lect. Theor. Phys. New York – London: Interscience. 1959. Vol. 1. P. 315; Glauber R. UFN. 1971. T. 103. Вып. 4. S. 641; Sitenko A.G. FJeChAJa. 1973. T. 4, вып. 2. S. 546.  
8 CNS DAC Services. <http://gwdac.phys.gwu.edu> Rezhim dostupa svobodnyj.

### Резюме

*О. Имамбеков, Ф. Белисарова, Б. Баймұрзинова, П. Пирманова*

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

### СЕРПІМДІ $\pi^0$ p-ШАШЫРАУЫ ҮШІН ГЛАУБЕР АМПЛИТУДАСЫНЫҢ ПАРАМЕТРЛЕРІН АНЫҚТАУ

Бұл жұмыста ұшып келе жатқан мезон энергиясының 50-ден 1100 Мэв-қа дейінгі аралығында Глаубер амплитудасы параметрлерінің мәндері анықталған. Мұндай сараптау үшін қажетті  $\pi^+$ p- және  $\pi^-$ p-шашырауларының дифференциальдық қималарының мәндері CNS DAC Services (SAID program) электрондық деректер көзінен алынған. Осылай анықталған параметр мәндерімен есептелген қима  $60^\circ$ -қа дейін қанағаттанарлықтай дәрежеде сипатталады.

**Тірек сөздер:** серпімді шашырау, Глаубер амплитудасы.

### Summary

*O. Imambekov, F. Belisarova, B. Baimurzinova, P. Pirmanova*

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

### DETERMINATION OF THE GLAUBER MAGNITUDE PARAMETERS FOR THE $\pi^0$ p-ELASTIC SCATTERING

In the paper found the value of the parameters for the Glauber amplitude  $\pi^0$ p-elastic scattering in the energy range of the incident meson from 50 to 1100 MeV. Necessary for such an analysis of differential cross section for elastic  $\pi^+$ p- and  $\pi^-$ p-scattering are taken from the electronic database of experimental data CNS DAC Services (SAID program). Calculations cross section of the found values of the parameters shows that it is satisfactorily described by up to  $60^\circ$ .

**Keywords:** elastic scattering, amplitude Glauber.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 523.985

*А. Т. САРСЕМБАЕВА, А. Т. САРСЕМБАЙ*

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

## МОЩНЫЕ СОЛНЕЧНЫЕ ВСПЫШКИ КЛАССА X 14 МАЯ 2013 Г.

**Аннотация.** В этой статье нами проведены статистические исследования вспышек, зарегистрированных 14 мая 2013 г. Мы определили несколько физических величин вспышек и оценили скорость пересоединения солнечных вспышек. Для определения физических параметров мы использовали снимки, полученные с инструмента AIA на борту спутника SDO на длинах волн  $131 \text{ \AA}$ ,  $174 \text{ \AA}$ ,  $193 \text{ \AA}$ ,  $211 \text{ \AA}$ ,  $335 \text{ \AA}$ ,  $1600 \text{ \AA}$ ,  $1700 \text{ \AA}$ ,  $4500 \text{ \AA}$ , SXT – снимки, HMI Magnetogram, SOLIS Chromospheric Magnetogram, GOES XRT-данные.

**Ключевые слова:** солнечные вспышки, альфвеновская скорость, скорость пересоединения.

**Тірек сөздер:** күн жарқылы, альфвен жылдамдығы, қайта ұштасу жылдамдығы.

**Keywords:** solar flares, Alfven waves, reconnection rate.

**Введение.** Солнечные вспышки – наиболее мощные нестационарные взрывообразные проявления солнечной активности. Модели возникновения и развития солнечной вспышки, которая адекватно описывает причины ее возникновения и происходящие в ней процессы, до сих пор не существует. Общие соображения сводятся к следующему. Солнечная вспышка возникает как следствие быстрого выделения энергии в некоторой области солнечной атмосферы. В настоящее время считается, что эта энергия накапливается и хранится в форме магнитной энергии токовых систем, образующихся в солнечной атмосфере в результате конвективного переноса плазмы. Первичное энерговыделение, являющееся началом вспышки, связано с разрывом токовых систем в результате токовых неустойчивостей или воздействия соседних систем, например, при вторжении нового потока вещества, несущего магнитное поле в уже развитую плазменно-магнитную конфигурацию. Разрыв/взаимодействие токовых систем приводит к нагреву, движениям плазмы в магнитных структурах и возникновению сильных электрических полей. Часть магнитной энергии конвертируется в энергию ускоренных этими полями частиц – электронов, протонов и более тяжелых ядер [4].

Магнитное пересоединение играет важную роль в процессе энерговыделения солнечной вспышки. Скорость пересоединения является важной величиной, поскольку она определяет критическое ограничение в модели пересоединения [1]. Она определяется как  $M_A \equiv \frac{V_{in}}{V_A}$ , где  $V_{in}$  – скорость втекания пересоединения, а  $V_A$  – Альфвеновская скорость. Это дает нормализованное значение потока пересоединения в единицу времени. В стационарной модели пересоединения Свита и Паркера [3] скорость пересоединения  $M_A = (\text{Re}_m)^{-1/2}$ , где  $\text{Re}_m = (V_A L / \eta)$  – магнитное число Рейнольдса, определяемое скоростью Альфвена,  $\eta$  – магнитная диффузия, полученная из сопротивления Спитзера  $\eta \sim 10^4 \left(\frac{T}{10^6 \text{ K}}\right)^{-3/2} \text{ cm}^2 \text{ c}^{-1}$ .

### Анализ данных

Мониторинг солнечных вспышек в режиме реального времени осуществляет Геостационарный эксплуатационный спутник наблюдения за окружающей средой GOES. Данные о потоках электронов, протонов и рентгеновского излучения ведут спутники слежения GOES 11, GOES 13 и GOES 15 [2].

14 мая 2013 г. на Солнце была зарегистрирована серия мощных вспышек класса X. Вспышка произошла в 00:00 UT. Вспышка была зафиксирована в активной области 11748, продолжительность – 4800 с. Всего в этой области Солнца произошло 3 вспышки. На рисунке 1 приведены снимки, полученные на борту спутника GHN в диапазонах XRT.

Для определения длины петель мы использовали SXT – снимки. Из SXT – данных мы получили значения для длины петель.

На рисунке 2 представлен общий поток рентгеновского излучения и электрона, который был зарегистрирован 14 мая 2013 г.

Величину энергии, выделяющейся при вспышке  $E_{flare}$ , можно объяснить магнитной энергией, запасенной в солнечной атмосфере [1]:

$$E_{flare} \sim E_{mag} = \frac{B_{cor}^2}{8\pi} L^3, \quad (1)$$

где  $L$  – характерный размер вспышки,  $B_{cor}$  – характерная плотность магнитного потока в короне, а коэффициент энерговыделения определяется следующим выражением:

$$\left| \frac{dE_{mag}}{dt} \right| \sim 2 \frac{B_{cor}^2}{4\pi} V_{in} L^2, \quad (2)$$

где  $V_{in}$  – скорость втекания плазмы. Таким образом, время, необходимое для втекания энергии, которая обеспечивает вспышку необходимой энергией, оценивается как шкала времени вспышки:

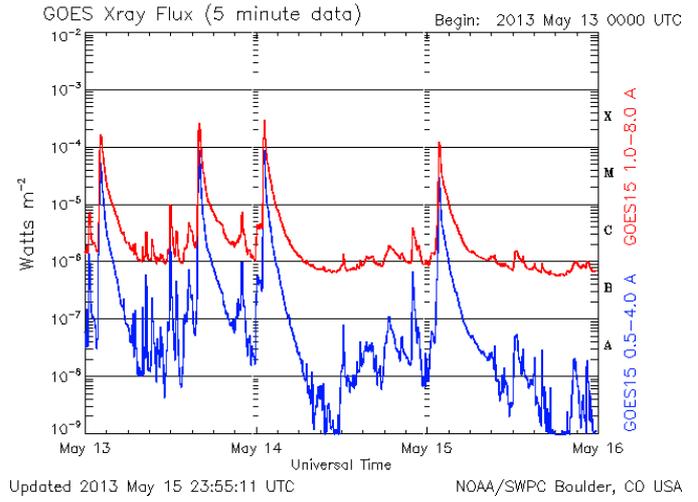
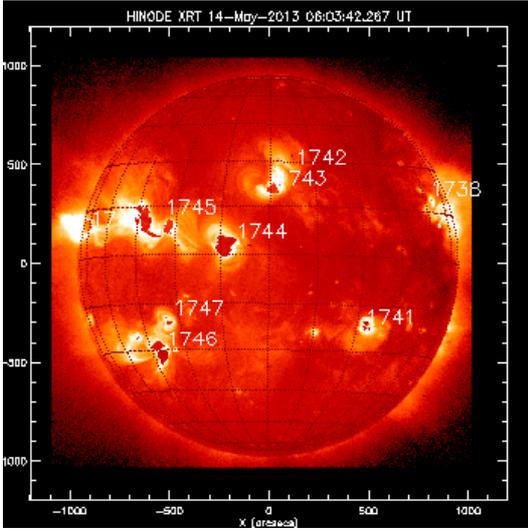


Рисунок 1 – Активная область 11748 в диапазонах XRT и общий поток протона, полученный в GOES 13 и GOES 15 [7]

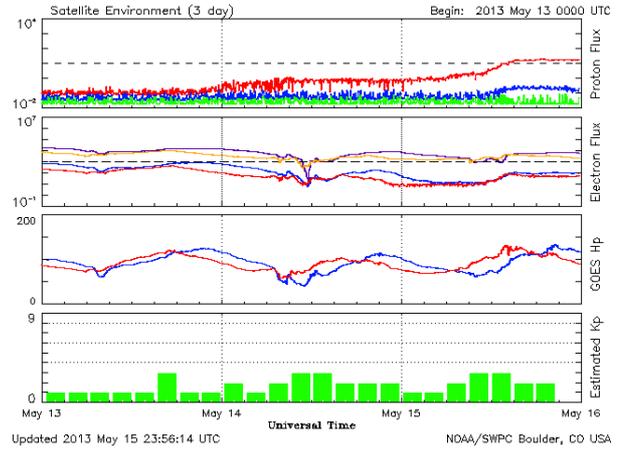
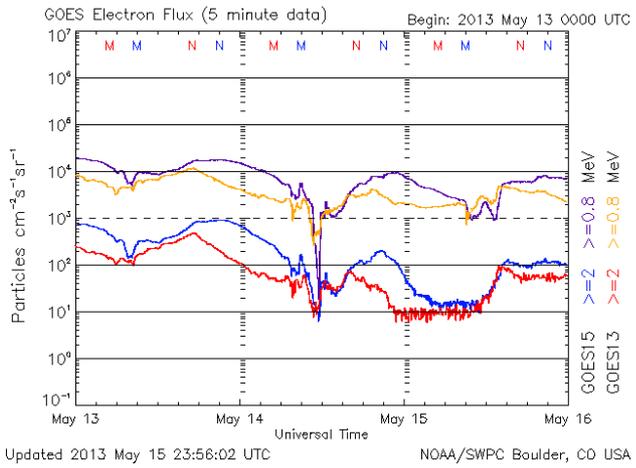


Рисунок 2 – Общий поток электрона и рентгеновского излучения Солнца, полученный в GOES 13 и GOES 15 [7]

$$\tau_{flare} \sim E_{flare} \left( \frac{dE_{mag}}{dt} \right)^{-1} \sim \frac{L}{4V_{in}}. \quad (3)$$

Используя эту шкалу времени, мы можем оценить скорость втекания  $V_{in}$  как

$$V_{in} \sim \frac{L}{4\tau_{flare}}. \quad (4)$$

Чтобы вычислить скорость пересоединения в безразмерной форме  $M_A \equiv \frac{V_{in}}{V_A}$ , мы должны оценить Альфвеновскую скорость в области втекания:  $V_A = \frac{B_{cor}}{(4\pi\rho)^{1/2}}$ . Таким образом, мы можем измерить плотность короны  $\rho$ , пространственный масштаб вспышки  $L$ , плотность магнитного потока в короне  $B_{cor}$ , и шкалу времени солнечных вспышек  $\tau_{flare}$ . Исходя из этого мы можем вычислить скорость втекания  $V_{in}$ , Альфвеновскую скорость  $V_A$  и скорость пересоединения  $M_A$  [5].

Результаты

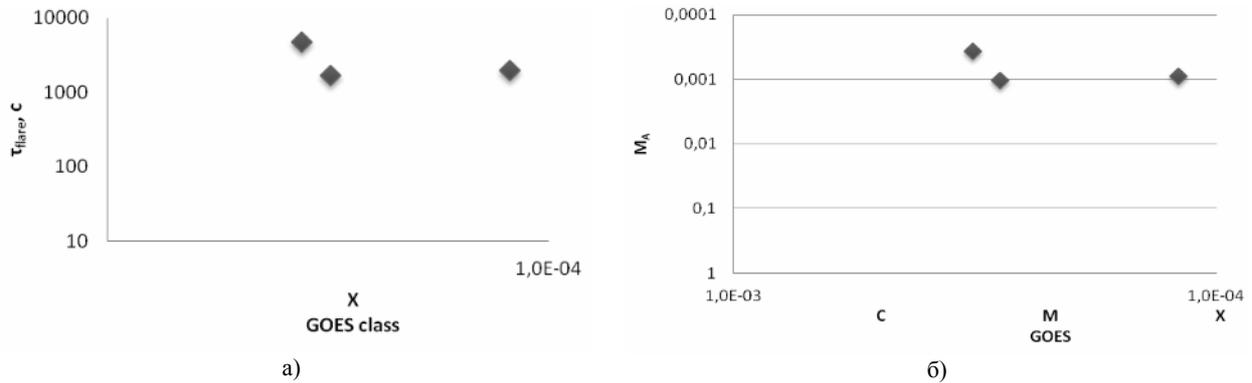


Рисунок 3 – а) соотношение шкалы времени  $\tau_{flare}$  от GOES класс;  
 б) зависимость скорости пересоединения от класса вспышек GOES

Физические параметры солнечных вспышек

Активная область	GOES класс	$\tau(c)$	$V_{in}(cm \cdot c^{-1})$	$V_A(cm \cdot c^{-1})$	$M_A$	$E_{flare} / \tau$ ( $эрг \cdot c^{-1}$ )	$ dE_{mag} / dt $ ( $эрг \cdot c^{-1}$ )
11748	X2.8	1680	$1,4 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^9$	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$1,47 \cdot 10^{30}$	$9,8 \cdot 10^{29}$
11748	X3.2	4800	$5,2 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^9$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{29}$	$3,4 \cdot 10^{29}$
11748	X1.2	1980	$1,26 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^9$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{30}$	$8,3 \cdot 10^{29}$

**Заключение.** Сравнивая наши результаты с результатами Изабе [6], мы нашли, что в наших исследованиях скорость втекания  $V_{in}$  систематически меньше. Так как мы вычислили  $V_{in}$  как  $L / (4\tau_{flare})$ , полученный  $V_{in}$  в наших исследованиях является средним значением импульсной фазы вспышек. С другой стороны, Изабе вычислил  $V_{in}$ , используя максимальное значение коэффициента освобождения энергии в импульсной фазе вспышек. Таким образом, вычисленная нами скорость втекания  $V_{in}$  не может отражать стационарность скорости магнитного пересоединения в процессе пересоединения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Nagashima K. Statistical study of the reconnection rate in solar flares observed with Yohkoh SXT // *ApJ*, 647, 654, 2006.
- 2 Sarsembayeva A.T. Definition of reconnection rate of solar flares registered in 2011-2012 years // *Adv. Studies Theor. Phys.* – 2012. – Vol. 6, N 28. – P. 1405-1408.
- 3 Petschek H.E. // *The Physics of Solar Flares* / Ed. W. N. Hess (Washington: NASA), 425, 1964.
- 4 Кочаров Г.Е. Ядерные реакции на Солнце. – М.: Знание, 1976. – 64 с.
- 5 Sarsembayeva A.T., Sarsembay A.T. 11 April 2013 solar flare: Magnetohydrodynamic processes // *Известия НАН РК. Сер. физ.-мат.* – 2013. – № 3.
- 6 Isobe H., Takasaki H., Shibata K. // *ApJ*, 2005, 632, 1184.
7. <http://www.SolarMonitor.org>.

REFERENCES

- 1 Nagashima K. Statistical study of the reconnection rate in solar flares observed with Yohkoh SXT, *ApJ*, 647, 654, 2006.
- 2 Sarsembayeva A.T. Definition of reconnection rate of solar flares registered in 2011-2012 years. *Adv. Studies Theor. Phys.*, Vol.6, 2012, no.28, 1405-1408.
- 3 Petschek H.E. In *The Physics of Solar Flares*, ed. W. N. Hess. Washington: NASA, 425, 1964.
- 4 Kocharov G.E. *Jadernye reakcii na Solnce*. M.: Znanie, 1976, 64 s. (in Russ.)
- 5 Sarsembayeva A.T., Sarsembay A.T. 11 April 2013 solar flare: Magnetohydrodynamic processes. *Izvestija NAN RK, serija fiziko-matematicheskaja*. №3 (maj-ijun'), 2013.
- 6 Isobe H., Takasaki H., Shibata K. 2005, *ApJ*, 632, 1184.
7. <http://www.SolarMonitor.org>.

## Резюме

А. Т. Сәрсембаева, А. Т. Сәрсембай

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

## 2013 ЖЫЛДЫҢ 14 МАМЫРЫНДАҒЫ X КЛАСЫНДАҒЫ ҚУАТТЫ КҮН ЖАРҚЫЛЫ

Осы мақалада 2013 жылдың 14 мамырында тіркелген күн жарқылдарының статистикалық зерттеулері жүргізілді. Біз күн жарқылдарының физикалық мәндері мен қайта ұштасу жылдамдығын бағаладық. Физикалық параметрді анықтау үшін SDO жер серігінің бортында AIA аспабында  $131 \text{ \AA}, 174 \text{ \AA}, 193 \text{ \AA}, 211 \text{ \AA}, 335 \text{ \AA}, 1600 \text{ \AA}, 1700 \text{ \AA}, 4500 \text{ \AA}$  толқын ұзындығында алынған және SXT суреті, HMI Magnetogram, SOLIS Chromospheric Magnetogram, GOES XRT-деректері пайдаланылды.

**Тірек сөздер:** күн жарқылы, альфвен жылдамдығы, қайта ұштасу жылдамдығы.

## Summary

А. Т. Sarsembayeva, А. Т. Sarsembay

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

## POWERFUL SOLAR FLARE OF CLASS X 14 MAY 2013

In this paper, we performed statistical studies of solar flares registered in May 14, 2013. We have identified several physical quantities of solar flares and estimated reconnection rate of solar flares. To determine the physical parameters we used images taken with the AIA instrument on board SDO satellite at wavelengths  $131 \text{ \AA}, 174 \text{ \AA}, 193 \text{ \AA}, 211 \text{ \AA}, 335 \text{ \AA}, 1600 \text{ \AA}, 1700 \text{ \AA}, 4500 \text{ \AA}$  SXT-pictures, HMI Magnetogram, SOLIS Chromospheric Magnetogram, GOES XRT-data.

**Keywords:** solar flares, Alfven waves, reconnection rate.

Поступила 15.10.2013г.

УДК 517. 968

А. АСАНОВ, Ж. О. ТОЛУБАЕВ

(Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Бишкек, Кыргызстан,  
СГЭИ БатГУ, Сулюкта, Кыргызстан  
e-mail: avyt.asanov @ mail. ru, [tolubaiev69@mail.ru](mailto:tolubaiev69@mail.ru))

## О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЪЕСА К ПРОСТРАНСТВУ $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$

**Аннотация.** В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия принадлежности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода в пространстве  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ .

**Ключевые слова:** производная по возрастающей функции, непрерывная матричная функция, вектор-функция, пространство  $n \times n$ -мерных непрерывных матричных функций.

**Тірек сөздер:** үдеуші функцияның туындысы, үздіксіз матрицалық функция, вектор-функция,  $n \times n$ -өлшемді үздіксіз матрицалық функция.

**Keywords:** derivative with respect to an increasing function, the continuous matrix function, the vector function, dimensional space of continuous matrix functions.

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x(\tau)dg(\tau) = f(t), \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

где интеграл является интегралом Стильтьеса,  $K(t, \tau) - n \times n$  мерная симметричная непрерывная матричная функция, т.е.  $K^T(t, \tau) = K(t, \tau)$ ,  $G = \{(t, \tau) \in R^2 : t_0 \leq \tau \leq t < \infty\}$ ,  $f(x)$  – заданная непрерывная  $n$ -мерная векторная функция,  $g(t)$  – заданная строго возрастающая непрерывная функция на  $[t_0, \infty)$ ,  $x(t)$  – искомая  $n$ -мерная векторная функция.

Вопросы единственности, ограниченности и принадлежности решения к пространству квадратично-суммируемых вектор-функций для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразований уравнений исследованы в работах [1-2, 4-8].

Здесь методом неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия принадлежности решений систем уравнений (1) в пространстве  $L_{n,g}^2[t_0, \infty)$ .

Введем обозначения:  $C_n[t; \infty)$  – пространство  $n$ -мерных непрерывных вектор функций с элементами из  $C[a, b]$  и  $C_{nn}(G)$  – пространство  $n \times n$ -мерных матричных функций с элементами из  $C(G)$ .

Для любых  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$  определим скалярные произведения  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , норма  $K(t, \tau) - n \times n$  мерной симметричной матричной функции определяется

следующим равенством  $\|K(t, \tau)\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |K_{ij}(t, \tau)|$ , а норма  $n$ -мерных векторных функций

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  определяется следующим равенством  $\|x(t)\| = \sum_{i=1}^n |x_i(t)|$ . Через  $L_{n,g}^2[t_0, \infty)$  обозначим пространство всех  $n$ -мерных вектор-функций  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , удовлетворяющих условию

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(t)\|^2 dg(t) < \infty. \quad (2)$$

Ниже приведем определение и теорему из [3], которые будем использовать в данной работе. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на интервале  $(a, b)$ . Будем предполагать, что функция  $g(x)$  – строго возрастающая непрерывная функция на интервале  $(a, b)$ . Возьмем точку  $x \in (a, b)$ . Зададим  $x$  приращение  $\Delta x \neq 0$ , тогда функции  $f(x)$  и  $g(x)$  получают приращения  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  и  $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$

**Определение.** Производной по  $g(x)$  функции  $f(x)$  в точке  $x \in (a, b)$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta f(x)$  к приращению функции  $\Delta g(x)$  при стремлении приращения аргумента  $\Delta x$  к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{g(x)}(x) = \frac{df(x)}{dg(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)}$$

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция на сегменте  $[a; b]$  и

$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t), \quad x \in [a; b],$$

тогда

$$F'_{g(x)}(x) = \left( \int_a^x f(t) dg(t) \right)'_{g(x)} = f(x), \quad x \in [a; b],$$

где

$$F'_{g(x)}(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(a + \Delta x) - F(a)}{g(a + \Delta x) - g(a)}, \quad F'_{g(x)}(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{F(b + \Delta x) - F(b)}{g(b + \Delta x) - g(b)}.$$

**Доказательство.** По определению производной по  $g(x)$  имеем

$$F'_{g(x)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( f(x) \int_x^{x+\Delta x} dg(t) - \int_x^{x+\Delta x} (f(x) - f(t)) dg(t) \right) / [g(x + \Delta x) - g(x)] = f(x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \psi(x, \Delta x),$$

где

$$\psi(x, \Delta x) = \left( \int_x^{x+\Delta x} (f(x) - f(t)) dg(t) \right) / [g(x + \Delta x) - g(x)].$$

Отсюда, учитывая, что  $g(x)$  – возрастающая функция на  $[a; b]$ , получим

$$|\psi(x, \Delta x)| \leq \left[ \omega_{f(x)}(\Delta x) \left( \int_x^{x+\Delta x} dg(t) \right) \right] / [g(x + \Delta x) - g(x)] = \omega_{f(x)}(\Delta x),$$

где  $\omega_{f(x)}(|\Delta x|)$  – модуль непрерывности функции  $f(x)$ , т.е.

$$\omega_{f(x)}(\delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(x) - f(t)|.$$

Известно, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{f(x)}(\delta) = 0$ . Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\psi(x, \Delta x)| \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \omega_{f(x)}(|\Delta x|) = 0.$$

Аналогично доказываются другие случаи.

Следовательно,  $F'_{g(x)}(x) = f(x)$ . Теорема 1 доказана.

**ЗАДАЧА.** В данной работе рассматриваются и исследуются методом преобразований уравнений, достаточные условия принадлежности к пространству  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$  решения систем линейного интегрального уравнения (1) типа Вольтерра-Стильтьеса.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть для систем линейного интегрального уравнения (1) выполняются следующие условия:

$$1) \|K'_{g(t)}(t, s)\|, \|K'_{g(s)}(t, s)\|, \|K''_{g(t)g(s)}(t, s)\| \in C(G),$$

$$\text{где } K'_{g(t)}(t, s) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t) - K(t, s)}{g(t + \Delta t) - g(t)}, \quad K'_{g(s)}(t, s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{K(t, s + \Delta s) - K(t, s)}{g(s + \Delta s) - g(s)},$$

2) для любого  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^n$  справедливы следующие неравенства:

$$a) \langle K(t, t_0)u, u \rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle K'_{g(t)}(t, t_0)u, u \rangle \leq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \infty);$$

$$b) \langle K'_{g(\tau)}(t, \tau)u, u \rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle K''_{g(t)g(\tau)}(t, \tau)u, u \rangle \leq 0 \quad \text{при} \quad (t, \tau) \in G$$

Тогда для любого  $x(t) \in L^2_{n,g}[t_0, \infty)$  справедливо

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x(\tau), x(s) \rangle dg(\tau) dg(s) &= \frac{1}{2} \langle K(t, t_0)z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K_{g(s)}(s, t_0)z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(\tau)}(t, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s), \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$z(s, \tau) = \int_{\tau}^s x(\tau) dg(\tau). \quad (4)$$

**Доказательство.** В силу теоремы 1 из (5) имеем

$$z'_{g(\tau)}(s, \tau) = -x(\tau), \quad (5)$$

и

$$z'_{g(s)}(s, \tau) = x(s). \quad (6)$$

Для упрощения двойного интеграла в уравнении (3), применяем следующие равенства и формулы нахождения производных скалярного произведения функций  $\langle u(t), v(t) \rangle' = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$ , тогда

$$\frac{\partial}{\partial g(\tau)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle = \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle + \langle K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau), x(s) \rangle, \quad (s, \tau) \in G,$$

где  $z(s, \tau)$  определяется по формуле (4).

Из последнего равенства следует, что

$$\langle K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau), x(s) \rangle = \frac{\partial}{\partial g(\tau)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle - \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle. \quad (7)$$

Далее, учитывая  $K^T(t, \tau) = K(t, \tau)$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g(s)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial g(s)} [K(s, \tau)z(s, \tau)], z(s, \tau) \right\rangle + \left\langle K(s, \tau)z(s, \tau), \frac{\partial}{\partial g(s)} z(s, \tau) \right\rangle = \\ &= \langle K'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle + \langle K(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau), z(s, \tau) \rangle + \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle = \\ &= \langle K'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle + 2 \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle, \end{aligned}$$

Отсюда, получим

$$\langle K(s, \tau)z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g(s)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle - \frac{1}{2} \langle K'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle, \quad (s, \tau) \in G \quad (8)$$

Интегрируя (7) по  $\tau \in (t_0, s)$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau) &= \int_{t_0}^s \frac{\partial}{\partial g(\tau)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau) - \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau) = \\ &= \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle \Big|_{t_0}^s - \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau) = -\langle K(s, t_0)z(s, t_0), x(s) \rangle - \\ &- \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau), \quad s \in [t_0, \infty). \end{aligned}$$

В силу (5), из последнего равенства следует, что

$$\int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x(\tau), x(s) \rangle dg(\tau) = \langle K(s, t_0)z(s, t_0), x(s) \rangle + \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau), \quad s \in [t_0, \infty)$$

Отсюда, интегрируя последнее равенство от  $t_0$  до  $t$ , получим

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x(\tau), x(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle K(s, t_0)z(s, t_0), x(s) \rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x(s) \rangle dg(\tau) dg(s) \quad (9)$$

Применяя формулы (6), (8) и обобщенную формулу Дирихле [3] к двойному интегралу в (9) и метод интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x(\tau), x(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle K(s, t_0)z(s, t_0), z'_{g(s)}(s, t_0) \rangle dg(s) + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dg(s)} \langle K(s, t_0)z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0)z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\
 & = \frac{1}{2} \langle K(t, t_0)z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0)z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{d}{dg(s)} \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\
 & = \frac{1}{2} \langle K(t, t_0)z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0)z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{d}{dg(s)} \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(s) dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\
 & = \frac{1}{2} \langle K(t, t_0)z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0)z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(\tau)}(t, \tau)z(t, \tau), z(t, \tau) \rangle dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s)
 \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и  $f(t) \in L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ , то система линейных интегральных уравнений (1) имеет единственное решение  $x(t)$  в пространстве  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$  и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(t)\|^2 dg(t) \leq \int_{t_0}^{\infty} \|f(t)\|^2 dg(t)$$

*Доказательство.* Из теоремы 2 имеем

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(s)\|^2 dg(s) \leq \int_{t_0}^{\infty} |\langle f(s), x(s) \rangle| dg(s),$$

Применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов к последнему интегралу в правой части неравенства, получим

$$\left( \int_{t_0}^t \|x(s)\|^2 dg(s) \right) \leq \left( \int_{t_0}^t \|f(s)\|^2 dg(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_0}^t \|x(s)\|^2 dg(s) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда имеем  $\int_{t_0}^{\infty} \|x(t)\|^2 dg(t) \leq \int_{t_0}^{\infty} \|f(t)\|^2 dg(t)$ . Теорема 3 доказана.

*Пример.* Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса

$$(1) \text{ при } n=2, t_0=0, g(t)=\sqrt{t} \text{ и } K(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{11} & \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{12} \\ \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{12} & \frac{\alpha_{22}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{22} \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{11} & \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{12} \\ \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{12} & \frac{\alpha_{22}\sqrt{s}}{\sqrt{t+1}} + \beta_{22} \end{pmatrix} x(s) dg(s) = f(t), \quad t \geq t_0 \quad (10)$$

где  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$  – произвольные постоянные,  $\alpha_{12} = \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}, \alpha_{11} \geq 0, \alpha_{22} \geq 0,$

$\beta_{12} = \sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}, \beta_{11} \geq 0, \beta_{22} \geq 0$ . Тогда выполняются все условия теоремы 3. Поэтому решение данной системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса (10) принадлежит пространству  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ .

Проверим выполнение условий теоремы:

$$K(t,0) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \quad K'_{g(t)}(t,s) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}\sqrt{s}}{(\sqrt{t+1})^2} & -\frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{(\sqrt{t+1})^2} \\ -\frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{(\sqrt{t+1})^2} & -\frac{\alpha_{22}\sqrt{s}}{(\sqrt{t+1})^2} \end{pmatrix}, \quad K'_{g(t)}(t,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K'_{g(s)}(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t+1}} & \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}} \\ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}} & \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t+1}} \end{pmatrix}, \quad K''_{g(t)g(s)}(t,s) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}}{(\sqrt{t+1})^2} & -\frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} \\ -\frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} & -\frac{\alpha_{22}}{(\sqrt{t+1})^2} \end{pmatrix}$$

1.  $\|K'_{g(t)}(t,s)\|, \|K'_{g(s)}(t,s)\|, \|K''_{g(t)g(s)}(t,\tau)\| \in C(G)$ .

2. Для любого  $u = (u_1, u_2) \in R^2$  :

$$a) \langle K(t,0)u, u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, x(t) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \beta_{11}u_1 + \beta_{12}u_2 \\ \beta_{12}u_1 + \beta_{22}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \beta_{11}u_1^2 +$$

$$+ \beta_{12}u_1u_2 + \beta_{12}u_1u_2 + \beta_{22}u_2^2 = (\sqrt{\beta_{11}}u_1 + \sqrt{\beta_{22}}u_2)^2 \geq 0, \text{ нпу } \beta_{12} = \sqrt{\beta_{11}\beta_{22}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle K(t,0)u, u \rangle \geq 0 \text{ нпу } t \in [t_0, \infty);$$

$$\langle K'_{g(t)}(t,0)u, u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 = 0 \Rightarrow \langle K'_{g(t)}(t,0)u, u \rangle = 0$$

нпу  $t \in [t_0, \infty)$ ;

$$b) \langle K'_{g(s)}(t,s)u, u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t+1}} & \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}} \\ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}} & \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t+1}}u_1 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}}u_2 \\ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}}u_1 + \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t+1}}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t+1}}u_1^2 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}}u_1u_2 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t+1}}u_1u_2 + \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t+1}}u_2^2 = \frac{1}{\sqrt{t+1}}(\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t+1}}(\sqrt{\alpha_{11}}u_1 + \sqrt{\alpha_{22}}u_2)^2 \geq 0, \text{ нпу } \alpha_{12} = \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}} \Rightarrow \langle K'_{g(s)}(t,s)u, u \rangle \geq 0 \text{ нпу } t \in [t_0, \infty);$$

$$\begin{aligned}
\langle K''_{g(t)g(s)}(t, s)u, u \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}}{(\sqrt{t+1})^2} - \frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} \\ \frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} - \frac{\alpha_{22}}{(\sqrt{t+1})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u \right\rangle = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}}{(\sqrt{t+1})^2} u_1 - \frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} u_2 \\ -\frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} u_1 - \frac{\alpha_{22}}{(\sqrt{t+1})^2} u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{\alpha_{11}}{(\sqrt{t+1})^2} u_1^2 - \frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} u_1 u_2 - \frac{\alpha_{12}}{(\sqrt{t+1})^2} u_1 u_2 - \\
&- \frac{\alpha_{22}}{(\sqrt{t+1})^2} u_2^2 = -\frac{1}{(\sqrt{t+1})^2} (\alpha_{11} u_1^2 + 2\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{22} u_2^2) = -\frac{1}{(\sqrt{t+1})^2} (\sqrt{\alpha_{11}} u_1 + \sqrt{\alpha_{22}} u_2)^2 \geq 0, \\
&\text{при } \alpha_{12} = \sqrt{\alpha_{11} \alpha_{22}} \Rightarrow \langle K''_{g(t)g(s)}(t, s)u, u \rangle \geq 0 \text{ при } t \in [t_0, \infty);
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Веды Ю.А., Искандаров С. Об единственности решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода на полуоси // Известие АН Киргизской ССР. – Вып. № 5. – Фрунзе: Илим, 1986. – С.14-18.
- 2 Асанов А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1985. – Вып.18. – С.17-20.
- 3 Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. // Табигый илимдер журналы. Кыргызско-турецкий университети Манаса. – Бишкек, 2001. – С. 18-64.
- 4 Искандаров С. Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Известие АН Киргизской ССР. – Вып. №3. – Фрунзе: Илим, 1978. – С. 30-33.
- 5 Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 185-192.
- 6 Винокуров В.Р. Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтера // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 10. – С. 1732-1744.
- 7 Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Математический анализ. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. – С. 103-107.
- 8 Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтера // Математический анализ. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971. – С. 63-71.
- 9 Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтера-Стилтьеса // Табигый илимдер журналы Кыргызско-турецкий университет «Манаса». – Бишкек, 2003. – С. 65-78.

## REFERENCES

- 1 Ved' Ju.A., Iskandarov S. Ob edinstvennosti reshenija sistemy linejnyh integral'nyh uravnenij tipa Vol'terra pervogo roda na poluosi. Izvestie AN Kirgizskoj SSR, Vyp №5, Frunze, Ilim, 1986. P.14-18. (in Russ.)
- 2 Asanov A. Ob odnom klasse sistem linejnyh integral'nyh uravnenij Vol'terra pervogo roda na poluosi. Issledovanija po integro-differencial'nym uravnenijam v Kirgizii. Frunze, Ilim, 1985. Vyp.18. P.17-20. (in Russ.)
- 3 Asanov A. Proizvodnaja funkci po vozrastajushhej funkci. Tabigyj ilimder zhurnaly. Kyrgyzsko-tureckij universiteti Manasa - Bishkek, 2001. P.18-64. (in Russ.)
- 4 Iskandarov S. Ob odnom priznake ogranichennosti reshenij linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka tipa Vol'terra. Izvestie AN Kirgizskoj SSR, Vyp №3, Frunze: Ilim, 1978. P.30-33. (in Russ.)
- 5 Iskandarov S. Ob ogranichennosti reshenij linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij pervogo porjadka tipa Vol'terra, nerazreshennyh otноситel'no proizvodnoj. Issledovanija po integro-differencial'nym uravnenijam v Kirgizii. Frunze, Ilim, 1980. Vyp.13. P.185-192. (in Russ.)
- 6 Vinokurov V.R. Asimptoticheskie povedenie reshenij odnogo klassa integro-differencial'nyh uravnenij Vol'terra. Differencial'nye uravnenija. Tom 3 №10, 1967. P.1732-1744. (in Russ.)
- 7 Caljuk Z.B. Zamechanie po povodu metoda Ljapunova dlja integro-differencial'nyh uravnenij. Matematicheskij analiz. Kazan', Izdatel'stvo Kazanskogo un-ta, 1978. P.103-107. (in Russ.)
- 8 Caljuk Z.B., Shamsutdinov M.M. Ob ogranichennosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh uravnenij Vol'tera. Matematicheskij analiz. Kazan', Izdatel'stvo Kazanskogo un-ta, 1971. P.63-71. (in Russ.)
- 9 Asanov A. Sistema integral'nyh uravnenij Vol'tera-Stil'tesa. Tabigyj ilimder zhurnaly Kyrgyzsko-tureckij universitet «Manasa», Bishkek: 2003. P.65-78. (in Russ.)

**Резюме**

*А. Асанов, Ж. О. Толубаев*

(«Манас» атындағы Қырғыз-Түрік университеті, Бішкек, Қырғызстан)

ВОЛЬТЕРР-СТИЛЬТЪЕС СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫ ТЕҢДЕУІ  
ЖҮЙЕСІ ШЕШІМІНІҢ  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$  КЕҢІСТІГІНЕ ҚАТЫСТЫҒЫ

Бұл жұмыста үдеуші функцияның туындысы және теріс емес квадратты пішіннің әдісімен 2-ші ретті Вольтерр-Стильтъес сызықты интегралды теңдеуі жүйесі шешімінің  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$  кеңістігіне қатысты түсінігі негізінде шарттар қойылды.

**Тірек сөздер:** үдеуші функцияның туындысы, үздіксіз матрицалық функция, вектор-функция,  $n \times n$ -өлшемді үздіксіз матрицалық функция.

**Summary**

*A. Asanov, J. O. Tolubaev*

("Manas" Kyrgyz-Turkish university, Bishkek, Kyrgyzstan)

ABOUT BELONGING SOLVING SYSTEMS OF LINEAR VOLITERRA-STILITIESA  
INTEGRAL EQUATIONS TO THE SPACE  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$

In this work on base of the notion derived on increasing functions and method неотрицательных square-law forms are installed sufficient conditions accessories decisions of the systems of the linear integral equations Voliterra-Stilitiesa second sort in space  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ .

**Keywords:** derivative with respect to an increasing function, the continuous matrix function, the vector function, dimensional space of continuous matrix functions.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 530.142

К. БАКТЫБАЕВ<sup>1</sup>, А. ДАЛЕЛХАНКЫЗЫ<sup>1</sup>, Л. ПРОЧНИАК<sup>2</sup> М.К. БАКТЫБАЕВ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан,

<sup>2</sup>Варшавский университет, Варшава, Польша,

<sup>3</sup>Институт ядерной физики НЯЦ РК, Алматы, Республика Казахстан)

## ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР И МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭФФЕКТИВНОГО ЯДЕРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В НУКЛОН-НУКЛОННОМ КАНАЛЕ

**Аннотация.** В работе проведены исследования свойств эффективного ядерного взаимодействия, что является продолжением прежних работ, проведенных в Петербургском ИЯФ. Они основаны на привлечении более широкого экспериментального материала о структуре уровней и характера расщепления конфигураций для ядер в районе Pb. Расчеты проведены с одночастичными функциями потенциала Вудса-Саксона в рамках метода RPA.

**Ключевые слова:** атомное ядро, спектры, нуклонное взаимодействие, матричные элементы.

**Тірек сөздер:** атом ядросы, спектрлер, нуклондар әсерлесуі, матрицалық элементтер.

**Keywords:** atomic nucleus, the spectra interaction nucleon, matrix elements.

1. В современных ядерных расчетах возникает необходимость вычисления среднего значения операторов эффективного ядерного взаимодействия нуклонов, движущихся в усредненном самосогласованном поле. Вопрос определения остаточного взаимодействия нуклонов является достаточно сложным и до настоящего момента не решен до конца. Одно время казалось, что методы квантовой теории многих тел с использованием так называемых реалистических затравочных сил позволят определить перенормированное взаимодействие в ядре. Однако количественные расчеты различных ядерных характеристик, особенно связанные с основным состоянием, проведенные с использованием этого метода, не увенчались заметным успехом. Параллельно развивались методы определения эффективного взаимодействия, основанные на широком использовании различных экспериментальных данных, но и в этом направлении до сих пор нет однозначных представлений о виде эффективного остаточного взаимодействия и характере его изменения по всем ядрам с ростом атомного веса по периодической системе. Поэтому в такой ситуации очень важно по новому рассмотреть этот вопрос теоретического вычисления матричных элементов физических операторов в соответствии с данными и особенностями спектров, которые наиболее чувствительны к тем или иным компонентам сил взаимодействия [1].

Проведенные исследования свойств эффективного ядерного взаимодействия в данной работе, как продолжение прежних работ, проведенных в Петербургском ИЯФ [1-5], основаны на привлечении более широкого экспериментального материала о структуре уровней и характера расщепления конфигураций для ядер в районе Pb. Расчеты проведены с одночастичными функциями потенциала Вудса-Саксона в рамках метода RPA. Для упрощения численных вычислений использовано первое приближение необходимого парного взаимодействия, найденное в результате минимизации функционала  $\chi^2$  в диагональном приближении. Приведены подробные рабочие формулы для вычисления матричных элементов в канале нуклон-нуклонного произвольного парного взаимодействия. Эти формулы максимально конкретизированы и доведены до простых выражений для Вигнеровских, спин-спиновых и тензорных сил с учетом перезарядки нуклонов и кулоновского взаимодействия.

Все формулы получены как в представлении полного изоспина пары частиц, так и в нейтрон-протонном представлении, в котором используется  $jj$ -схема связи.

**2. Остаточное взаимодействие в представлении базисных функций Хартри-Фока.** Пусть  $|0\rangle$  – основное состояние ядра с заполненными подболочками, определенное в приближении Хартри-Фока. Индексами  $I = 1, 3, 5, \dots$  будем в этом разделе обозначать состояния с энергиями выше уровня Ферми ( $\varepsilon_i > \varepsilon_F$ ). Индексы  $i' = 2, 4, 6, \dots$  нумеруют состояния с  $\varepsilon_i < \varepsilon_F$ . В приближении Хартри-Фока  $a_i|0\rangle = a_{i'}^+|0\rangle = 0$ . Обозначая греческими буквами Хартри-Фоковские состояния, включающие в себя как свободные так и занятые уровни, получаем выражение для полного оператора Гамильтона в представлении вторичного квантования, где в качестве базиса использованы самосогласованные хартри-фоковские орбитали:

$$\widehat{H} = E_0 + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} N(a_{\alpha}^+ a_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \delta\gamma \rangle N(a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\gamma} a_{\delta}). \quad (1)$$

Здесь  $E_0$  – энергия основного состояния в методе Хартри-Фока, знак  $N(\dots)$  означает нормальное произведение операторов,  $a_{\alpha}^+$  и  $a_{\alpha}$  – операторы рождения и уничтожения частиц, соответственно. Используя (1), можно показать, что матричный элемент от гамильтониана  $\widehat{H}$ , вычисленный между состояниями  $a_1^+ a_2^+ |0\rangle$  и  $a_3^+ a_4^+ |0\rangle$ , типа частица-дырка оказывается следующим:

$$\langle 0 | a_2^+ a_1^+ \widehat{H} a_3^+ a_4^+ | 0 \rangle = [E_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] \delta_{13} \delta_{24} + (\langle 41 | V | 32 \rangle - \langle 41 | V | 23 \rangle). \quad (2)$$

В канале частица-частица матричный элемент от  $\widehat{H}$  между состояниями  $a_1^+ a_3^+ |0\rangle$  и  $a_5^+ a_7^+ |0\rangle$  равен следующей величине:

$$\langle 0 | a_3 a_1 \widehat{H} a_5^+ a_7^+ | 0 \rangle = [E_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] (\delta_{15} \delta_{37} - \delta_{17} \delta_{35}) + (\langle 13 | V | 57 \rangle - \langle 13 | V | 75 \rangle). \quad (3)$$

Матричный элемент между состояниями  $a_2 a_4 |0\rangle$  и  $a_6 a_8 |0\rangle$  типа дырка-дырка оказывается равным:

$$\langle 0 | a_4^+ a_2^+ \widehat{H} a_6 a_8 | 0 \rangle = [E_0 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)] (\delta_{26} \delta_{48} - \delta_{28} \delta_{46}) + (\langle 24 | V | 68 \rangle - \langle 24 | V | 86 \rangle). \quad (4)$$

В формулах (2)–(4)  $V$  – то же самое взаимодействие, на котором строились хартри-фоковские функции и определить одночастичные хартри-фоковские энергии  $\varepsilon_{\alpha}$  (строго говоря, в качестве  $V$  следует подставлять  $G$  – матрицу, полученную согласно процедуре Хартри-Фока-Бракнера). На практике в качестве  $V$  обычно берут некоторое феноменологическое взаимодействие, определяемое по совокупности описания экспериментальных данных, вместо  $\varepsilon_{\alpha}$  – экспериментальные одночастичные энергии, а вместо функций Хартри-Фока – одночастичные функции некоторой потенциальной ямы, воспроизводящей одночастичный спектр. Следует иметь в виду, что при этом нарушается следует правильно выбирать вид среднего поля.

**3. Эффективное взаимодействие в координатном представлении.** Эффективное взаимодействие состоит из ядерной части  $V_N$  и кулоновской добавки  $V_C$ , действующей между протонами, т.е.

$$V(12) = V_N(12) + V_C(12). \quad (5)$$

Функция  $V_N$  – скаляр в координатной, спиновом и изоспиновом пространствах:

$$V_N(12) = V^0(12) + V^1(12) (\vec{\tau}(1) \cdot \vec{\tau}(2)). \quad (6)$$

Если не учитывать зависящие от скорости силы, то в общем случае ядерное взаимодействие может быть записано в следующем виде:

$$V^0 = V(r) + V_{\sigma}(r) (\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)) + V_T S_{12}, \quad (7)$$

$$V^1 = V_{\tau}(r) + V_{\tau\sigma}(r) (\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)) + V_T S_{12}.$$

Здесь

$$S_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}(2) \cdot \vec{r})}{r^2} - (\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)) \quad (8)$$

тензорный оператор,  $\sigma_i$  – матрицы Паули,  $\tau_i$  – изотопическая матрица,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  и  $r = |\vec{r}|$ .

Кулоновское взаимодействие между частицами 1 и 2 можно записать в виде

$$V_C(12) = \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - t_z(1) \right) \left( \frac{1}{2} - t_z(2) \right); \quad \vec{t} = \frac{\vec{r}}{2}. \quad (9)$$

Собственные значения оператора  $t_z$  равны  $+1/2$  для нейтрона и  $-1/2$  для протона.

Взаимодействие (9) в пространстве изоспина представляет собой сумму трех членов, являющихся, соответственно, скалярным вектором и тензором второго ранга. Действительно, взаимодействие (9) можно представить в виде

$$V_C(12) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{e^2}{r} [T^1 \times T^1]_0^0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{r} T_0^1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e^2}{r} [T^1 \times T^1]_0^2 \quad (10)$$

Здесь

$$[T^1 \times T^1]_\gamma^c = \sum_{\alpha\beta} C_{1\alpha 1\beta}^{c\gamma} T_\alpha^1 T_\beta^1, \quad (11)$$

$\vec{T} = \vec{t}(1) + \vec{t}(2)$  – полный изоспин двух нуклонов,  $T_\alpha^1$  – циклические компоненты вектора полного изоспина, а  $C_{1\alpha 1\beta}^{c\gamma}$  – коэффициенты Клебша-Гордана.

#### 4. Матричные элементы взаимодействия в канале частица-частица.

4.1. **Общие выражения.** Волновая функция пары частиц с полным угловым моментом  $J$  и изоспином пары  $T$  имеет следующий вид:

$$|j_1 j_3 JM; TT_z\rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{13}}} \sum_{m_1 m_3 t_1 t_3} C_{j_1 m_1 j_3 m_3}^{JM} C_{\frac{1}{2} t_1 \frac{1}{2} t_3}^{TT_z} a_{j_1 m_1 t_1}^+ a_{j_3 m_3 t_3}^+ |0\rangle \quad (12)$$

Из формул (3), (12), (10) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha \langle j_1 j_3 JM; TT_z | V_N + V_c | j_5 j_7 JM; T' T'_z \rangle_\alpha &= \frac{\delta_{TT'} \delta_{T_z T'_z}}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \times \\ &\times \left[ \langle j_1 j_3 J; TT_z | V_N + V_c | j_5 j_7 J; TT_z \rangle + (-1)^{j_5 + j_7 + J + T} \langle j_1 j_3 J; TT_z | V_N + V_c | j_7 j_5 J; TT_z \rangle \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\delta_{ik} = \delta_{n_i n_k} \delta_{l_i l_k} \delta_{j_i j_k}$ . Поскольку, как видно из формулы (10), оператор кулоновского взаимодействия между парой частиц строится из компонент вектора полного изоспина  $\vec{T}$ , матричные элементы в канале частица-частица диагональны по изоспину и его проекции.

Для состояний с  $T = 0$  и с  $T = 1$  матричные элементы (13) оказываются следующими:

$$\begin{aligned} &\alpha \langle j_1 j_3 JM; T = 0 T_z = 0 | V_N + V_c | j_5 j_7 JM; T = 0 T_z = 0 \rangle_\alpha = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \times \left[ \langle j_1 j_3 J | V^0 - 3V^1 | j_5 j_7 J \rangle + (-1)^{j_5 + j_7 + J + 1} \langle j_1 j_3 J | -V^0 + 3V^1 | j_5 j_7 J \rangle \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\alpha \langle j_1 j_3 JM; T = 1 T_z | V_N + V_c | j_5 j_7 JM; T = 1 T_z \rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \times \\ &\times \left[ \left\langle j_1 j_3 J \left| V^0 + V^1 + \frac{e^2}{2r} T_z (T_z - 1) \right| j_5 j_7 J \right\rangle + (-1)^{j_5 + j_7 + J + 1} \left\langle j_1 j_3 J \left| V^0 + V^1 + \frac{e^2}{2r} T_z (T_z - 1) \right| j_7 j_5 J \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

В средних и тяжелых ядрах часто удобнее делать расчеты не в представлении полного изотопического спина, а в нейтрон-протонном представлении. Волновая функция пары частиц в нейтрон-протонном представлении следующим образом выражается через функцию (12):

$$\begin{aligned} |j_1 t_{z_1}, j_3 t_{z_3}; JM\rangle_\alpha &= \sqrt{\frac{1 + \delta n_1 n_3 \delta l_1 l_3 \delta j_1 j_3}{1 + \delta n_1 n_3 \delta l_1 l_3 \delta j_1 j_3 \delta t_{z_1} t_{z_3}}} \sum_T C^{TT_z}{}_{1/2 t_{z_1} 1/2 t_{z_3}} |j_1 j_3 JM; TT_z\rangle_\alpha = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{13}}} \sum_{m_1 m_2} C^{JM}{}_{j_1 m_1 j_3 m_2} a_{j_1 m_1}^+ t_{z_1} a_{j_3 m_2}^+ t_{z_3} |0\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

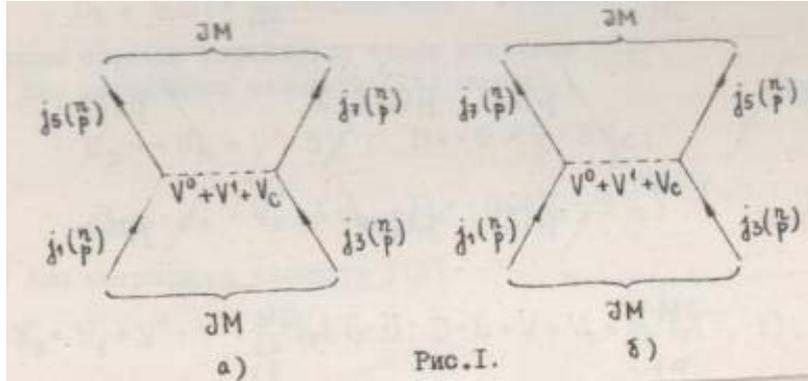
В этом представлении  $\delta_{ik} = \delta n_i n_k \delta l_i l_k \delta j_i j_k \delta t_{z_i} \delta t_{z_k}$ .

При этом возникают следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \left\langle j_1 t_{z_1} = \pm \frac{1}{2}, j_3 t_{z_3} = \pm \frac{1}{2}; JM | V_N + V_c | j_5 t_{z_5} = \pm \frac{1}{2}, j_7 t_{z_7} = \pm \frac{1}{2}; JM \right\rangle_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \times \\ &\times \left[ \left\langle j_1 j_3 J | V^0 + V^1 + \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - t_{z_1} \right) \left( \frac{1}{2} - t_{z_3} \right) | j_5 j_7 J \right\rangle + (-1)^{j_5 + j_7 + J + 1} \times \right. \\ &\left. \times \left\langle j_1 j_3 J | V^0 + V^1 + \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - t_{z_1} \right) \left( \frac{1}{2} - t_{z_3} \right) | j_7 j_5 J \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Этот матричный элемент совпадает с матричным элементом (15), где  $T_z = t_{z_1} + t_{z_3}$ .

Первому слагаемому выражения (17) соответствует график вида рис. 1а, а второму – график на рисунке 1б.



Матричные элементы (17) входят, в частности, в задачу о спектрах ядер «магическое  $\pm 2n$ », либо «магическое  $\pm 2p$ ».

Для частиц разного сорта парный матричный элемент оказывается следующим:

$$\begin{aligned} \left\langle j_1 t_{z_1} = \pm \frac{1}{2}, j_3 t_{z_3} = \mp \frac{1}{2}; JM | V_N + V_c | j_5 t_{z_5} = \pm \frac{1}{2}, j_7 t_{z_7} = \mp \frac{1}{2}; JM \right\rangle_\alpha &= \\ = \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \left[ \left\langle j_1 j_3 J | V^0 - V^1 | j_5 j_7 J \right\rangle + (-1)^{j_5 + j_7 + J + 1} \left\langle j_1 j_3 J | 2V^1 | j_7 j_5 J \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Первому и второму слагаемому соответствуют графики на рисунках 2а и 2б, соответственно.

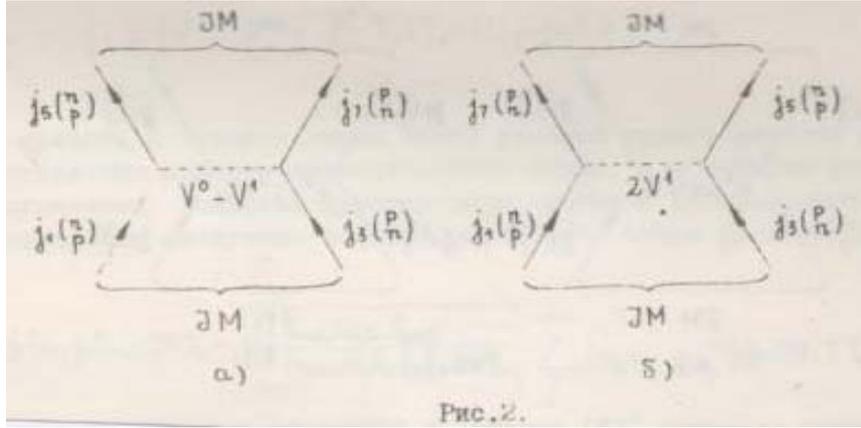


Рис. 2.

Из формулы (14), (15), (17) и (18) видно, что матричный элемент взаимодействия в канале частица-частица может быть представлен в виде суммы двух членов –  $M_D$  и  $M_E$ , где

$$M_D = \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \langle j_1 j_3 J | V_D | j_5 j_7 J \rangle = M_D(1357, J, V_D) \quad (19)$$

представляет собой прямой, а

$$M_E = (-1)^{j_5 + j_7 + J + 1} \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{13})(1 + \delta_{57})}} \langle j_1 j_3 J | V_E | j_7 j_5 J \rangle = M_E(1357, J, V_E) \quad (20)$$

обменный член взаимодействия, где

$$V_D = D(r) + D_\delta(r) (\vec{\delta}(1) \cdot \vec{\delta}(2)) + D_T(r) S_{12}$$

и

$$V_E = G(r) + G_\delta(r) (\vec{\delta}(1) \cdot \vec{\delta}(2)) + G_T(r) S_{12} \quad (20a)$$

следующим образом выражаются через исходные силы.

а) для матричного элемента (14) имеем:

$$V_D = -V_E = V^0 - 3V^1; \quad D = -G = V - 3V_\tau; \quad (21)$$

$$D_\delta = -G_\delta = V_\delta - 3V_{\tau\delta}; \quad D_T = -G_T = V_T - 3V_{\tau T};$$

б) для матричного элемента (15) –

$$V_D = V_E = V^0 + V^1 + \frac{e^2}{2r} T_z (T_z - 1); \quad D = G = V + V_\tau + \frac{e^2}{2r} T_z (T_z - 1); \quad (22)$$

$$D_\delta = G_\delta = V_\delta + V_{\tau\delta}; \quad D_T = G_T = V_T + V_{\tau T};$$

в) для матричного элемента (17) –

$$V_D = V_E = V^0 + V^1 + \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - t_{z_1} \right) \left( \frac{1}{2} - t_{z_3} \right);$$

$$D = G = V + V_\tau + \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - t_{z_1} \right) \left( \frac{1}{2} - t_{z_3} \right); \quad (23)$$

$$D_\delta = G_\delta = V_\delta + V_{\tau\delta}; \quad D_T = G_T = V_T + V_{\tau T};$$

г) наконец, для матричного элемента (18) получается, что

$$V_D = V^0 - V^1; \quad D = V - V_\tau;$$

$$D_\delta = V_\delta - V_{\tau\delta}; \quad D_T = V_T - V_{\tau T};$$

$$V_E = 2V^1; \quad G = 2V_\tau;$$

$$G_\delta = 2V_{\tau\delta}; \quad G_T = 2V_{\tau T}. \quad (24)$$

**4.2. Выражения для парных матричных элементов.** Из формул (19) и (20) видно, что взаимодействие в канале частица-частица выражается через парные матричные элементы от различных комбинаций исходных компонент сил (формулы (21) – (24)). Поэтому для вычисления матричных элементов этого взаимодействия необходимо иметь выражения для парных матричных элементов от различных типов сил. Эти выражения приводятся ниже. Они получаются в результате тензорного разложения взаимодействий вида  $U(r)$  (сюда, в частности, относятся и кулоновские силы),  $U(r)(\vec{\delta}(1) \cdot \vec{\delta}(2))$  и  $U(r)S_{12}$  по неприводимым тензорным операторам [5, 6]:

$$\begin{aligned} & \langle n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2; J | U(r) | n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4; J \rangle = \\ & = \sum_k (2k+1) R^k (1234, V) (-1)^{j_1+j_4-J} \langle l_1 j_1 \| T^k \| l_3 j_3 \rangle \langle l_2 j_2 \| T^k \| l_4 j_4 \rangle W [j_1 j_2 j_3 j_4; Jk], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \langle n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2; J | U(r) (\vec{\delta}(1) \vec{\delta}(2)) | n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4; J \rangle = \\ & = \sum_{kk'} (2k+1) R^k (1234, U) (-1)^{j_1+j_4-J+k+k'+1} \langle l_1 j_1 \| T^{(k)k'} \| l_3 j_3 \rangle \langle l_2 j_2 \| T^{(k)k'} \| l_4 j_4 \rangle W [j_1 j_2 j_3 j_4; Jk'], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \langle n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2; J | U(r) S_{12} | n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4; J \rangle = \\ & = \sqrt{6} \sum_{k_1 k_2} i^{k_1+k_2} (2k_1+1)(2k_2+1) C_{k_1 0 k_2 0}^{20} W [k_1 k_2 1; k_2] \times \\ & \times R^{k_1 k_2, 2} (1234, V) (-1)^{j_1+j_4-J} \times \langle l_1 j_1 \| T^{(k_1)k} \| l_3 j_3 \rangle \langle l_2 j_2 \| T^{(k_2)k} \| l_4 j_4 \rangle W [j_1 j_2 j_3 j_4; Jk]. \end{aligned} \quad (27)$$

Иногда вместо спин-спиновых сил используют синглетные силы  $U(r)\pi_s$ , где  $\pi_s$  – оператор синглетного проектирования;

$(\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)) = 1 - 4\pi_s$ . Для этих сил справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \langle n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2; J | U(r) \pi_s | n_3 l_3 j_3, n_4 l_4 j_4; J \rangle = \\ & \frac{1}{2} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)} W [l_1 \frac{1}{2} J \cdot j_2; j_1 l_2] \times \\ & \times W [l_3 \frac{1}{2} J j_4; j_3 l_4] \sum_k (2k+1) R^k (1234, V) (-1)^{l_1+l_4-J} \times \\ & \times \langle l_1 \| T^k \| l_3 \rangle \langle l_2 \| T^k \| l_4 \rangle W [l_1 l_2 l_3 l_4; Jk]. \end{aligned} \quad (28)$$

В формулах (25)–(28)  $W [abcd; ef]$  – коэффициенты Рака,

$$T_q^k = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} Y_{kq}, \quad Y_{kq}^* = (-1)^q Y_{k-q}, \quad (29)$$

$$T_q^{(k_1)k} = \sum_{\nu\mu} C_{k_1 \nu 1 \mu}^{kq} T_\nu^{k_1} \delta_\mu^1, \quad (30)$$

$$\langle l_1 \| T^k \| l_3 \rangle = (-1)^k \sqrt{2b_1+1} C_{l_1 0 k 0}^{k_3 0} = \sqrt{2l_3+1} C_{l_3 0 k 0}^{l_1 0}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \langle l_1 j_1 \| T^k \| l_3 j_3 \rangle = (-1)^k \sqrt{(2l_1+1)(2j_1+1)(2j_3+1)} \times \\ & \times W [l_1 \frac{1}{2} k j_3; j_1 l_3] C_{l_1 0 k 0}^{l_3 0} = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{l_1+l_3+k}] (-1)^k \sqrt{2j_1+1} C_{j_1 \frac{1}{2} k 0}^{j_3 \frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \langle l_1 j_1 \| T^{(k)k'} \| l_3 j_3 \rangle &= (-1)^k \sqrt{6(2l_1+1)(2k'+1)(2j_1+1)(2j_3+1)} \begin{Bmatrix} l_1 & 1/2 & j_1 \\ l_3 & 1/2 & j_3 \\ k & 1 & k' \end{Bmatrix} C_{l_1 0 k 0}^{l_3 0} = \\ &= (-1)^{j_1+j_3} \frac{[1+(-1)^{l_1+l_3+k}]}{2} \sqrt{\frac{2(2j_1+1)(2j_3+1)}{2k'+1}} \times \\ &\times \left[ (-1)^{l_3+k+1} C_{k 0 1 1}^{k' 1} C_{j_1 1/2 j_3 1/2}^{k' 1} + \frac{(-1)^{j_3-1/2+k'}}{\sqrt{2}} C_{k 0 1 0}^{k' 0} C_{j_1 1/2 j_3 -1/2}^{k' 0} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix}$  – 9j-символ. Формулу (33) можно записать так:

$$\begin{aligned} \langle l_1 j_1 \| T^{(k+\nu)k} \| l_3 j_3 \rangle &= \frac{1}{2} [1+(-1)^{l_1+l_3+k+\nu}] (-1)^k \sqrt{\frac{2j_1+1}{2k+2\nu+1}} C_{j_1 1/2 k 0}^{j_3 1/2} \times \\ &\times \left\{ (-1)^{j_3+l_3+1/2} \frac{\left[ (j_3+1/2) + (-1)^{j_1+j_3+k} (j_1+1/2) \right]}{\sqrt{k(k+1)}} \sqrt{\frac{2k-\nu+1}{2^{|\nu|}} + \nu} \sqrt{\frac{2k+\nu+1}{2}} \right\}, \quad \nu=0, \pm 1 \end{aligned} \quad (33a)$$

В формулах (25)–(28) фигурируют радиальные интегралы  $R^k(1234;V) \equiv R^{k,k;0}(1234;V)$  от центральных и  $R^{k_1 k_2;2}(1234;V)$  от тензорных сил. Они определяются следующими выражениями [5, 6]:

$$\begin{aligned} R^{k_1, k_2; \chi}(1234;V) &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty R_{n_1 l_1 j_1}(r_1) R_{n_2 l_2 j_2}(r_2) V^{k_1, k_2; \chi}(r_1, r_2) R_{n_3 l_3 j_3}(r_1) R_{n_4 l_4 j_4}(r_2) r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $R_{nlj}$  – радиальной частью волновой функции, а  $V^{k_1, k_2; \chi}(r_1, r_2)$  определяется видом функции  $U(r)$ :

$$V^{k_1 k_2; \chi}(r_1, r_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty j_{k_1}(pr_1) j_{k_2}(pr_2) j_\chi(pr) V(r) r^2 dr p^2 dp, \quad (35)$$

где  $j_k(x)$  – сферическая функция Бесселя.

Для центральных сил последняя формула упрощается, а именно

$$V^{k, k; 0}(r_1, r_2) \equiv V^k(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} V(r) P_k(\cos \nu_{12}) d \cos \nu_{12}, \quad (36)$$

где  $P_k(x)$  – полином Лежандра, а  $\nu_{12}$  – угол между векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ .

**5. Определение параметров эффективного взаимодействия для ядер в области свинца.** В этом разделе мы проведем предварительное определение эффективного остаточного взаимодействия для ядер в районе свинца, используя метод наименьших квадратов.

Полагаем, что взаимодействие имеет вид:

$$\begin{aligned} V^0 &= \left[ V + V_\sigma (\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)) + V_\tau (\vec{\tau}(1) \cdot \vec{\tau}(2)) + V_{\tau\sigma} (\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2)) (\vec{\tau}_1(1) \vec{\tau}(2)) + \right. \\ &\left. + V_{T S_{12}} + V_{\tau T} S_{12} (\vec{\tau}(1) \cdot \vec{\tau}(2)) \right] e^{-r^2/r_0^2} + \frac{e^2}{r} \left( \frac{1}{2} - t_{z_1} \right) \left( \frac{1}{2} - t_{z_2} \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Подгонка параметров  $V$ ,  $V_\sigma$ ,  $V_\tau$ ,  $V_{\tau\sigma}$ ,  $V_T$  и  $V_{\tau T}$ , а также  $r_0$  производилась из сравнения теоретических и экспериментальных значений матричных элементов (17), (18). Экспериментальные значения матричных элементов извлекались из величин энергий связи и энергий отрыва нуклонов и спектров около свинцовых ядер с использованием диагонального приближения. Для подгонки отбирались только те уровни, двухквартичная природа которых не вызывает сомнений, причем критерием квартичности являлись величины спектроскопических факторов в реакциях однонуклонного срыва либо подхвата. Включенные в процедуру подгонки состояния приведены в таблице 1.

В качестве базисных мы использовали функции потенциала Вудса-Саксона. Параметры потенциала Вудса-Саксона выбирались по методу наименьших квадратов. Экспериментальные и теоретические значения энергий уровней вблизи границы Ферми приведены в таблице 2.

Для определения параметров остаточных сил при заданном радиусе взаимодействия  $r_0$  проводилась минимизация функционала

$$\chi_1^2 = \sum_{i,J}^N \frac{[M_{\text{экс}}^J(i) - M_{\text{теор}}^J(i, r_0, V, V_\sigma, \dots, V_{\tau T})]^2}{\Delta_{iJ}^2}. \quad (76)$$

Здесь  $i$  означает номер мультиплета,  $J$  – спин состояния в  $i$ -м мультиплете,  $\Delta_{iJ}$  – дисперсия  $i$ ,  $J$ -й точки,  $N$  – общее число экспериментальных точек. Во всех расчетах мы предполагали, что дисперсия  $\Delta_{iJ}$  однородна и равна среднестатистическому значению  $\Delta = 1$  МэВ.

Таблица 1

Ядро	Мультиплет	Спин	Значения матричных элементов, МэВ			
			$M^J(\text{экс})$	$M_1^J(\text{теор})$	$M_2^J(\text{теор})$	$M_3^J(\text{теор})$
$^{210}_{84}\text{Po}_{126}$ [13-15]	$1h_{9/2}1h_{9/2}$	$0^+$	-1,526	-1,306	-	-
		$2^+$	-0,304	-0,358	-0,219	-0,205
		$4^+$	-0,033	-0,214	-0,128	-0,103
		$6^+$	0,023	-0,171	-0,100	-0,066
		$8^+$	0,103	-0,152	-0,087	-0,043
	$1h_{9/2}2f_{7/2}$	$8^+$	-0,186	-0,356	-0,212	-0,189
		$1^+$	-0,092	0,132	0,043	-0,045
		$6^+$	-0,018	-0,184	-0,105	-0,063
		$4^+$	0,034	-0,189	-0,106	-0,040
		$3^+$	0,046	0,042	0,011	-0,027
		$5^+$	0,069	0,040	0,013	-0,025
		$7^+$	0,095	0,037	0,012	-0,024
	$1h_{9/2}1i_{13/2}$	$11^-$	-0,227	-0,464	-0,287	-0,360
		$9^-$	-0,042	-0,185	-0,113	-0,118
		$7^-$	-0,024	-0,163	-0,096	-0,071
$5^-$		-0,024	-0,193	-0,112	-0,053	
$8^-$		0,103	0,040	0,013	-0,015	
$10^-$		0,143	0,049	0,019	-0,012	
$^{210}_{82}\text{Pb}_{128}$ [19, 20, 22]	$2g_{9/2}2g_{9/2}$	$0^+$	-1,250	-0,713	-	-
		$2^+$	-0,455	-0,220	-0,136	-0,136
		$4^+$	-0,159	-0,128	-0,078	-0,071
		$6^+$	-0,056	-0,102	-0,061	-0,047
		$8^+$	0,023	-0,099	-0,058	-0,035
$^{206}_{82}\text{Pb}_{124}$ [21, 22]	$3p_{1/2}^{-1} 3p_{1/2}^{-1}$	$0^+$	-0,650	-0,713	-	-
		$2^+$	-0,417	-0,291	-0,172	-0,145
	$3p_{1/2}^{-1} 2f_{5/2}^{-1}$	$3^+$	0,118	-0,062	-0,042	-0,031
		$2^+$	-0,076	-0,361	-0,222	-0,253
	$3p_{1/2}^{-1} 3p_{3/2}^{-1}$	$1^+$	0,170	0,058	0,017	-0,023
		$7^-$	-0,083	-0,125	-0,076	-0,071
	$3p_{1/2}^{-1} 1i_{13/2}^{-1}$	$6^-$	0,105	-0,030	-0,021	-0,013

Матричные элементы двухквасичастичных состояний в районе свинца. В случае ядра  $^{210}\text{Po}$  приведена только ядерная часть матричного элемента, с вычетом кулоновского взаимодействия. Матричные элементы  $M_1$  (теор) и  $M_2$  (теор) вычислены при  $r_0 = 1,8$  ф и соответствуют функционалам  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  таблица 3. Матричные элементы  $M_3$  (теор) вычислены также при  $r_0 = 1,8$  ф, но без учета тензорных сил ( $V_T = V_{\tau T} = 0$ ). При этом значения параметров центральных сил  $V = -12,25$ ,  $V_\tau = 6,87$ ,  $V_\sigma = 1,37$  и  $V_{\tau\sigma} = 2,22$  МэВ находились из минимизации соответствующего функционала  $\chi_2^2$ , значение которого в минимуме оказалось  $\chi_2^2 = 1,56$ .

Одночастичные уровни вблизи  $^{208}\text{Pb}$ . Нейтронное состояние  $1j_{15/2}$  сильно смешано и поэтому исключалось из процедуры оптимизации одночастичного потенциала. Энергии даны в МэВ.

Таблица 2

Нейтроны			Протоны		
$nlj$	$\mathcal{E}_{\text{экс}}$	$\mathcal{E}_{\text{теор}}$	$nlj$	$\mathcal{E}_{\text{экс}}$	$\mathcal{E}_{\text{теор}}$
$3d_{3/2}$	-1,40	-1,39	$3p_{3/2}$	-0,66	-0,61
$2g_{7/2}$	-1,44	-1,46	$2f_{5/2}$	-0,96	-0,74
$4S_{1/2}$	-1,90	-1,85	$1i_{13/2}$	-2,17	-2,08
$3d_{5/2}$	-2,37	-2,42	$2f_{7/2}$	-2,88	-3,18
$1j_{15/2}$	-2,51	---	$1h_{9/2}$	-3,77	-3,89
$1i_{11/2}$	-3,16	-3,16	$3S_{1/2}$	-8,04	-7,83
$2g_{9/2}$	-3,94	-3,92	$2d_{3/2}$	-8,39	-8,29
$3p_{1/2}$	-7,38	-7,16	$1h_{11/2}$	-9,38	-9,27
$2f_{5/2}$	-7,95	-7,95	$2d_{5/2}$	-10,11	-10,04
$3p_{3/2}$	-8,27	-8,09	$1g_{7/2}$	-11,52	-11,55
$1i_{13/2}$	-9,01	-8,79			
$2f_{7/2}$	-9,72	-10,29			
$1h_{9/2}$	-10,85	-10,88			

Из сравнения различных наборов силовых параметров, приведенных в таблице 5, видно, что параметры центральных сил по величине и знаку определены в настоящее время довольно однозначно. Что касается тензорных сил, то здесь ситуация существенно сложнее. Во-первых, как явствует из изложенного, параметры тензорных сил определяются с большой погрешностью. Во-вторых, определенные в настоящей работе параметры  $V_T$  и  $V_{\tau T}$  не согласуются с параметрами работы [4] и с результатами работ [2, 3]. В работе [2] пренебрежении зарядовым обменом из спектров ядер  $^{210}\text{Bi}$  и  $^{206}\text{Tl}$  выбрано  $np$ -взаимодействие вида

$$V_{np} = \left( -21.5 - 2.5(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}) - 4S_{12} \right) \exp\left( -r^2 / r_0^2 \right), \quad r_0 = 2 \text{ ф.}$$

параметр тензорных сил определялся из расщепления нижних уровней  $0^-$  и  $1^-$ , принадлежащих одной конфигурации. Именно эта величина, как показано в [2, 3], наиболее чувствительна к величине тензорных сил. В то же время из процедуры подгонки по методу наименьших квадратов с привлечением данных по многим ядрам следует, что если пренебречь перезарядкой, то  $np$ -взаимодействие оказывается

Таблица 5 – Эффективные силы, используемые в структурных расчетах разными авторами. Радиальная зависимость сил имеет Гауссовскую форму

$r_0(\phi)$	$V$	$V_\tau$	$V_\delta$	$V_{\sigma\sigma}$	$V_T$	$V_{\tau T}$	Ссылка	Область ядер
–	$-3V_0$	$V_0$	$V_0$	$V_0$	0	0	Силы серебра [32]	$A \sim 16$
1,7	-5,1	8,6	4,8	4,8	0	0	[33]	$A \sim 16$
1,7	-0,5	11,5	5,5	3,5	0	0	[34]	$A \sim 208$
1,8	-35	3,0	1,0	3,5	-4,0	4,0	[4]	$A \sim 208$
1,8	-12	6,3	1,7	4,0	0	0	[35]	$A \sim 208$
1,7	-6,25	5,75	0,75	5,75	0	0	[10]	$A \sim 40$
1,7	-8,6	7,9	1,0	7,9	0	0	[36]	$A \sim 208$
1,8	-16	4	$\sim 0$	3	-1	-4	Наст. работа	

следующим:

$$V_{np} \approx (V - V_\tau) + (V_\sigma - V_{\sigma\sigma})(\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(i)) + (V_T - V_{\tau T})S_{12} \approx \approx (-20 - 3(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}) + 3S_{12}) \exp\left(-r^2/r_0^2\right), r_0 = 1,8\phi.$$

Видно, что параметры центральных сил, определенные в настоящей работе и в работе [2], согласуются друг с другом, в то время как результаты по тензорным силам различаются. Следует отметить, что, как мы видели выше, небольшое изменение параметров тензорных сил по сравнению с оптимальными, полученными из процедуры минимизации  $\chi^2$  значениями, приводит к возрастанию функционала всего на несколько процентов. Поэтому, если принять в качестве истинного значение  $V_T - V_{\tau T} - 4$  МэВ, как это следует из работы [2], где эта величина определялась по «критическим» данным, и считать, что параметры центральных сил мы определили достаточно надежно и поэтому не изменять их, то величина  $\chi^2$  возрастет весьма незначительно. Однако, при этом  $V_T$  и  $V_{\tau T}$  порознь еще не определены. Чтобы это сделать, нужно, например, определить величину  $V_T + V_{\tau T}$ , которая сильно влияет на отщепление состояний  $0^+$  в ядрах с двумя нуклонами, либо дырками одного сорта сверх остова. Такие состояния, однако, наиболее чувствительны к корреляциям, и поэтому определить  $V_T + V_{\tau T}$  из диагонального приближения затруднительно.

В заключение отметим, что параметры взаимодействия будут уточнены при полном расчете (в рамках метода RPA) различных характеристик около свинцовых ядер, который проводится в настоящее время. Результаты его будут опубликованы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Слив Л.А. // В сб. «Проблемы современной ядерной физики». М.: Наука, 1971. – С. 188.
- 2 Бактыбаев К.Б., Банд И.М., Слив Л.А., Харитонов Ю.И. // ЯФ, 6, 270, 1967.
- 3 Банд И.М., Гуман В.Н., Слив Л.А., Харитонов Ю.И. // ЯФ, 8, III8, 1968.
- 4 Искаков В.И., Кожамкулов Т.А., Слив Л.А. // Изв. АН СССР. Сер. Физ. – Т. XXXVI, 2157, 1972.
- 5 Искаков В.И., Харитонов Ю.И. Препринет ЛИЯФ-47, Л-д, 1973.
- 6 Искаков В.И., Харитонов Ю.И. Препринет ЛИЯФ-154, Л-д, 1975.
- 7 Pandya S.P. // Phys. Rev., 103, 256 (1956).
- 8 Gillet V. Proceedings of the International School of physics «Enrico Fermi», course 36, Varenna (1966).
- 9 Horie H., Sasaki K. // Progr. Theor. Phys., 28,475 (1961).

#### REFERENCES

- 1 Sliv L.A. V sb. «Problemy sovremennoj jadernoj fiziki». M.: Nauka, 1971. S. 188.
- 2 Baktybaev K.B., Band I.M., Sliv L.A., Haritonov Ju.I. JaF, b, 270, 1967.
- 3 Band I.M., Guman V.N., Sliv L.A., Haritonov Ju.I. JaF, 8, III8, 1968.
- 4 Iskakov V.I., Kozhamkulov T.A., Sliv L.A. Izv. AN SSSR, ser. Fiz., t. XXXVI, 2157, 1972.
- 5 Iskakov V.I., Haritonov Ju.I. Preprint LIJaF-47, L-d, 1973.
- 6 Iskakov V.I., Haritonov Ju.I. Preprint LIJaF-154, L-d, 1975.
- 7 Pandya S.P. Phys.Rev., 103,256 (1956).
- 8 Gillet V. Proceedings of the International School of physics «Enrico Fermi», course 36, Varenna (1966).
- 9 Horie H., Sasaki K. Progr. Theor. Phys., 28,475 (1961).

Резюме

Қ. Бақтыбаев<sup>1</sup>, А. Дәлелханқызы<sup>1</sup>, Л. Прочниак<sup>2</sup>, М.Қ. Бақтыбаев<sup>3</sup>

(<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,

<sup>2</sup>Варшава университеті, Варшава, Польша,

<sup>3</sup>ҚР Ядролық физика институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

НУКЛОН-НУКЛОНДЫҚ КАНАЛДАРДЫҢ ТИІМДІ ЯДРОЛЫҚ ӘСЕРЛЕСУІНІҢ  
ЯДРОЛЫҚ АТОМ ЖӘНЕ МАТРИЦАЛЫҚ ЭЛЕМЕНТІНІҢ ҚОЗҒАН КҮЙІ

Жұмыста тиімді ядролық әсерлесу қасиеттері зерттелген. Жұмыс Петербург ЯИФ-інде жасалған жұмыстардың жалғасы. Мұнда, Pb ядросы маңындағы деңгейлер құрылысы мен конфигурациялық құрылыс сипаттамалары негізге алынады. Есептеуді Вудса-Саксон әлеуетіндегі бір бөлшектік функциялардың RPA әдісі бойынша жүргізілген.

**Тірек сөздер:** атом ядросы, спектрлер, нуклондар әсерлесуі, матрицалық элементтер.

Summary

*K. Baktybaev<sup>1</sup>, A. Dalelkhankyzy<sup>1</sup>, L. Prochniak<sup>2</sup>, M.K. Baktybaev<sup>3</sup>*

(<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan,

<sup>2</sup>Warsaw university, Warsaw, Poland Republic,

<sup>3</sup>Institute of nuclear physics KR, Almaty, Republic of Kazakhstan)

THE RAISED CONDITIONS OF NUCLEAR KERNELS AND MATRIX ELEMENTS  
OF EFFECTIVE NUCLEAR INTERACTION IN A NUCLEON - THE NUCLEON CHANNEL

In this paper we studied the properties of the effective nuclear interaction, which is a continuation of previous work carried out at the St. Petersburg Institute of Nuclear Physics. They are based on attracting a wider experimental data on the structure and nature of the splitting of the levels of configurations for the nuclei in the Pb. The calculations were performed with the single-particle Woods-Saxon potential in the framework of the RPA.

**Keywords:** atomic nucleus, the spectra interaction nucleon, matrix elements.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 533.9.01

Т. С. РАМАЗАНОВ<sup>1</sup>, С. К. КОДАНОВА<sup>1</sup>, Н. Х. БАСТЫКОВА<sup>1</sup>, С. А. МАЙОРОВ<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан  
<sup>2</sup>Институт общей физики РАН, Москва, Россия)

## О ДРЕЙФЕ ЭЛЕКТРОНОВ ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Аннотация.** В работе приведены результаты расчетов характеристик дрейфа электронов в постоянном пространственно неоднородном периодическом электрическом поле. Показано, что в типичных условиях экспериментов с газоразрядной плазмой при пониженном давлении газа влияние неоднородностей поля на скорость дрейфа и среднюю энергию электронов незначительно. Но интенсивности процессов возбуждения, ионизации, пространственное распределение плазмы сильно зависят как от величины неоднородностей (дисперсии), так и от характера изменения поля. Показано, что неоднородность электрического поля в положительном столбе газового разряда приводит к максвеллизации функции распределения электронов по энергии.

**Ключевые слова:** дрейф электронов, газовый разряд.

**Тірек сөздер:** электрондардың дрейфі, газтекес разряд.

**Keywords:** electron drift, gas discharge.

При рассмотрении различных задач, связанных с дрейфом электронов в газоразрядной плазме, часто полагается, что скорость дрейфа и все характеристики дрейфа в каждой точке пространства (средняя энергия, коэффициенты диффузии, ионизационный и энергетический коэффициенты Таунсенда) зависят только от напряженности электрического поля и плотности газа (или от приведенного поля  $E/N$ ) в данной точке. Однако многие явления в физике газоразрядной плазмы обусловлены эффектом нелокальности, когда характеристики электронной компоненты в данной точке зависят от параметров электронного газа в других точках [1, 2].

В настоящей работе рассмотрен дрейф электронов в электрическом поле, которое представляет собой периодические возмущения степенного характера:

$$E(x) = E_0 \{x/L\}^n / (n+1), \quad (1)$$

Здесь  $L$  – период,  $\{x\}$  – дробная часть числа  $x$ ,  $\{x\} = x - [x]$ ,  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

При дрейфе электроны приобретают энергию за счет джоулева нагрева  $Q_{EW} = eEW$ ,  $e$  – заряд электрона,  $E$  – напряженность электрического поля,  $W$  – скорость дрейфа. Приобретаемая энергия теряется в упругих столкновениях с атомами, затрачивается на возбуждение атомных уровней и ионизацию:  $Q_{EW} = Q_{ea} + Q_{ex} + Q_{ion}$ . При ионизации электронным ударом налетающий на атом электрон теряет энергию, равную сумме энергии ионизации и кинетической энергии второго электрона. После акта ионизации его энергия полагается равной:  $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - I - \varepsilon_2'$ . Положим, что энергия первого электрона с равной вероятностью принимает все возможные значения, а энергия второго электрона определяется из закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= (\varepsilon_1 - I)R, \\ \varepsilon_2' &= (\varepsilon_1 - I)(1 - R), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $0 < R < 1$  – случайное число.

Рассмотрим дрейф электронов в неоне, для которого была выполнена детальная табуляция различных дрейфовых характеристик [3]. При значениях приведенной напряженности электрического поля  $E/N > 0,1$  Тд средняя кинетическая энергия электрона значительно превышает энергию (температуру) атомов, а при  $E/N < 2$  Тд дрейф электрона в неоне определяется только упругими столкновениями с атомами.

Расчеты под номерами 1–12 в таблице №1 упорядочены по мере возрастания пространственной неоднородности периодического поля. В таблице 1 приведены результаты расчетов методом Монте-Карло [1] характеристик дрейфа электрона в неоне при температуре 298 К, приведенной средней напряженности электрического поля  $E/N = 10$  Тд : скорость дрейфа  $W$ , средняя энергия  $\langle \varepsilon \rangle$ , доля энерговклада, пошедшая на возбуждение  $100\% Q_{ex} / Q_{EW}$  и ионизацию,  $100\% Q_{ion} / Q_{EW}$ . В качестве меры неоднородности приведена дисперсия  $\delta^2$ , нормированная на величину среднего поля:

$$\delta^2 = \frac{\langle E^2(x) \rangle - \langle E(x) \rangle^2}{\langle E^2(x) \rangle} . \quad (3)$$

Все расчеты, кроме №4, выполнены для неоднородности поля степенного характера (1). В расчете №4 постоянное поле имело синусоидальное возмущение (1) с амплитудой, равной среднему полю:  $\alpha = 1$ . Вычислялись самые различные характеристики дрейфа. За ось  $x$  выбрано направление дрейфа, т.е. при отрицательном среднем поле скорость дрейфа положительна. Для демонстрации влияния характера и величины пространственных неоднородностей периодического поля, в таблице приведены лишь некоторые из них: скорость дрейфа  $W = \int_0^\infty u f(\varepsilon) d\varepsilon$ , средняя энергия

электронов  $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon$  и процентные доли энерговклада, расходуемые электроном на возбуждение  $Q_{excitation} / Q_{EW}$  и ионизацию  $Q_{ion} / Q_{EW}$ . Величина  $Q_{ion} / Q_{EW}$  является ионизационным коэффициентом Таунсенда, нормированным на потенциал ионизации и соответствует доле ионизационных потерь в энерговкладе. Приведенные в таблице данные дают достаточно полную картину о качественных характеристиках дрейфа электронов в электрическом поле.

На рисунке 1 представлены распределения электронов по кинетической энергии из расчета № 1 таблицы (однородное поле). Для сравнения, приведены также распределения Максвелла и Дрювестейна с такой же средней энергией электронов, и функция распределения электронов по трубопроводной модели. Видно, что ни распределение Максвелла, ни Дрювестейна не дают сколь-

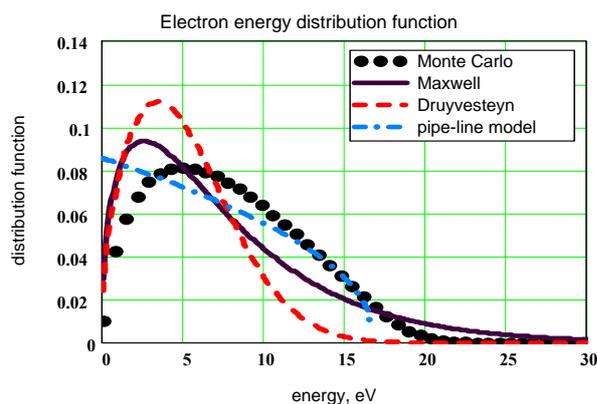


Рисунок 1 – Функция распределения электронов по энергии при дрейфе в однородном электрическом поле ( $E/N = 13.5$  Тд, неон). Жирные точки – результат моделирования методом Монте Карло, для сравнения также приведены ФРЭЭ Максвелла (сплошная кривая), Дрювестейна (штрихованная кривая) и трубопроводное распределение (штрих-пунктирная кривая)

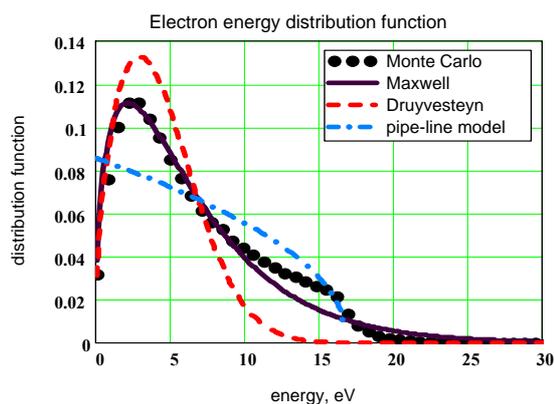


Рисунок 2 – Функция распределения электронов по энергии при дрейфе в однородном электрическом поле ( $E/N = 13.5$  Тд, неон). Жирные точки – результат моделирования методом Монте Карло, для сравнения также приведены ФРЭЭ Максвелла (сплошная кривая), Дрювестейна (штрихованная кривая) и трубопроводное распределение (штрих-пунктирная кривая)

нибудь даже качественного согласия с результатами расчета. Пожалуй, наилучшее совпадение между расчетом и теорией дает трубопроводное приближение, но область его применимости весьма ограничена. Следует также отметить, что помимо хорошо известного факта сильного влияния неупругих процессов возбуждения и ионизации на хвост функции распределения, имеется весьма значительное влияние неупругих процессов на функцию распределение электронов в области субтепловых энергий. Распределение электронов в области  $\varepsilon \ll T_e$  сильно отличается от распределений Максвелла и Дрювестейна, что связано с наличием у электрона при его рождении довольно значительной кинетической энергии. При акте возбуждения электрон имеет энергию  $\langle \varepsilon - E_1 \rangle = 2 \div 4$  эВ, а при акте ионизации  $\langle \varepsilon - I \rangle / 2 = 2 \div 3$  эВ.

На рисунке 2 представлены результаты расчета 11 из таблицы: дрейф происходит в направлении возрастания модуля поля при высокой его неоднородности ( $n = 5$ ). Как и на рисунка 1, приведены также распределения Максвелла и Дрювестейна с такой же средней энергией электронов, и функция распределения электронов по трубопроводной модели. Видно, что влияние неоднородности фактически привело к максвеллизации распределения в области энергий электрона  $\varepsilon \leq 2 \langle \varepsilon \rangle$ .

На рисунке 3 представлены результаты расчетов, в которых дрейф происходит в направлении возрастания модуля поля при различных значениях показателя степени неоднородности. Этот рисунок демонстрирует влияние степени неоднородности поля на ФРЭЭ.

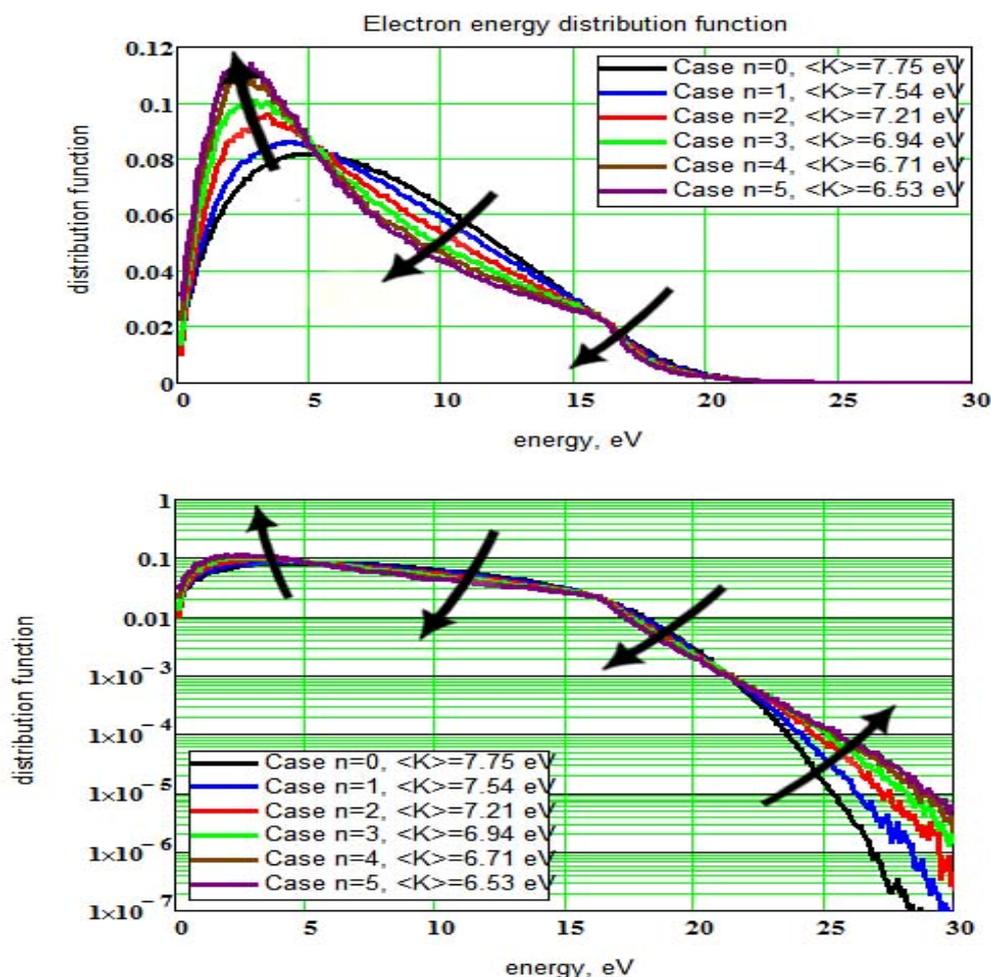


Рисунок 3 – Функции распределения электронов по энергии при дрейфе в периодическом электрическом поле ( $E/N = 10$  Тд, неон, период поля 4 см, напряженность поля 4 В/см). Разные кривые соответствуют различным значениям показателя степени неоднородности поля. Стрелки указывают направление изменения функций при увеличении флуктуаций поля

Характеристики дрейфа электронов в неоне при температуре 298 К, приведенной средней напряженности электрического поля  $E/N = 10$  Тд

№	Neon, 298K, $E_1=16$ eV, $I=20.5$ eV, $E/N=10$ Td, $E=4$ V/cm, $L=4$ cm						
	$eE_0 /  e $ V/cm	n	$\delta^2$	W, km/s	$\langle \varepsilon \rangle$ , eV	$Q_{ex} / Q_{EW}$ , %	$Q_{ion} / Q_{EW}$ , %
1	4	0	0	19.7	7.75	79.3	1.7
2	4	1	1/3	19.4	7.54	78.6	2.8
3	-4	1	1/3	-19.3	7.58	79.4	2.4
4	4	-	1/2	18.8	7.29	78.2	3.4
5	4	2	9/5	18.7	7.21	77.9	4.3
6	-4	2	9/5	-18.8	7.31	79.1	3.5
7	4	3	16/7	18.3	6.94	77.1	5.8
8	-4	3	16/7	-18.4	7.08	79.2	4.3
9	4	4	25/9	17.9	6.71	76.6	6.9
10	-4	4	25/9	-17.8	6.89	78.9	5.0
11	4	5	36/11	17.5	6.53	76.3	7.8
12	-4	5	36/11	-17.6	6.73	78.4	6.0

Проведено сравнение функций распределения электронов по энергии с распределениями Максвелла, Дрювестейна, а также с приближением неограниченного стока (трубопроводная модель) [2]. Из анализа результатов расчетов следует, что:

- даже значительные пространственные флуктуации поля не приводят к большому изменению средних характеристик дрейфа скорости дрейфа и средней энергии;
- наибольшее влияние увеличение дисперсии поля оказывает на скорость ионизации, имеет место значительное увеличение частоты ионизации и доли энергии, идущей на ионизацию;
- пространственная неоднородность поля может приводить к максвеллизации электронов в условиях тлеющего таунсендовского разряда, что составляет предмет давно известного и широко обсуждаемого парадокса Ленгмюра [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Голятина Р.И., Майоров С.А. // Прикладная физика. – 2011. – № 5. – С. 22.
- 2 Цендин Л. // УФН. – 2010. – № 4. – С. 948.
- 3 Maiorov S.A. // Brief rep. on phys.LPI. – 2009. – N 37. – С. 12-17.
- 4 Maiorov S.A., Golyatina R.I., Kodanova S.K., Ramazanov T.S. // Brief rep. on phys. LPI. –2012. – № 39. – С. 67-73

#### REFERENCES

- 1 Golyatina R.I., Maiorov S.A., *Applied Physics*, **2011**, 5, 22. (in Russ.).
- 2 Cendin L., *UFN*, **2010**, 133, 948. (in Russ.).
- 3 Maiorov S. A., *Brief rep.on phys.LPI*, **2009**, 37,12-17. (in Eng.).
- 4 Maiorov S. A., Golyatina R. I., Kodanova S. K., Ramazanov T. S., *Brief rep.on phys.LPI*, **2012**,39, 67-73 (in Eng.).

#### Резюме

*Т. С. Рамазанов<sup>1</sup>, С. К. Қоданова<sup>1</sup>, Н. Х. Бастықова<sup>1</sup>, С. А. Майоров<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>ЭТФҒЗИ, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,  
<sup>2</sup>РАФ Жалпы физика институты, Мәскеу, Ресей)

#### ГАЗРАЗЯДТЫ ПЛАЗМАНЫҢ КЕҢІСТІКТІК БІРТЕКТІ ЕМЕС ПЕРИОДТЫ ЭЛЕКТР ӨРІСІНДЕ ЭЛЕКТРОНДАРДЫҢ ДРЕЙФІ ТУРАЛЫ

Тұрақты кеңістіктік біртекті емес электр өрісінде электрондардың дрейфтік қасиеттері зерттелді. Аз қысымда газразрядты плазмадағы эксперимент шарттарына біртекті емес өрістің дрейфтік жылдамдығына

және орташа электрон энергиясына әсері аз. Бірақ козу және иондалу процестеріне, кеңістіктік плазманың таралуына өрістің біртекті еместілігі және өзгеруі тәуелді. Газ разрядтың оң бағанында электр өрісінің біртекті еместігі электрондардың энергия бойынша таралу функциясын Максвелл таралуына әкелетіндігі көрсетілді.

**Тірек сөздер:** электрондардың дрейфі, газтекес разряд.

### Summary

*T. S. Ramazanov<sup>1</sup>, S. K. Kodanova<sup>1</sup>, N. Kh. Bastykova<sup>1</sup>, S. A. Maiorov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>IETP, Kazakh National University al-Farabi, Almaty, Republic of Kazakhstan,

<sup>2</sup>General Physics Institute Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia~

### ON THE ELECTRON DRIFT GAS-DISCHARGE PLASMA IN A SPATIALLY INHOMOGENEOUS PERIODIC ELECTRIC FIELD

The paper presents the results of calculations of the characteristics of electron drift in a constant periodic spatially inhomogeneous electric field. It has been shown, that in typical experiments with gas plasma at a reduced gas pressure the influence of field inhomogeneities on the drift velocity and the average energy of the electrons is negligible. But the intensity of the excitation, ionization, and spatial distribution of plasma are strongly dependent both on the value of inhomogeneity (dispersion) and the nature of the changes in the field. It has been shown, that inhomogeneity of the electric field in the positive column of a gas discharge results in a Maxwe The paper presents the results of calculations of the characteristics of electron drift in a constant periodic spatially inhomogeneous electric field.

**Keywords:** electron drift, gas discharge.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 533.93

*С. К. КОДАНОВА, Т. С. РАМАЗАНОВ, М. К. ИСАНОВА*

(НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

### КУЛОНОВСКИЙ ЛОГАРИФМ И ТОРМОЗНАЯ СПОСОБНОСТЬ ИОНОВ В ЧАСТИЧНО-ИОНИЗОВАННОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

**Аннотация.** В этой работе исследована тормозная способность тяжелых частиц в частично ионизированной водородной плотной плазме, используя эффективные потенциалы взаимодействия частиц. Выполнены вычисления потерь энергии ионов в плазме в зависимости от степени ионизации для различных значений начальной температуры и плазменной плотности. Кроме того, было сделано сравнение с экспериментальными и теоретическими результатами других авторов по тормозной способности иона.

**Ключевые слова:** тормозная способность, кулоновский логарифм, угол рассеяния, эффективный потенциал.

**Тірек сөздер:** тежегіштік қабілет, кулон логарифмы, шашырау бұрышы, тиімділі әлеует.

**Keywords:** stopping power, Coulomb logarithm, scattering angle, effective potential.

**Введение.** Исследование энергетических потерь заряженных частиц в веществе и, в частности, в плазме имеет большое значение для физики плазмы, а также для задач инерциального термоядерного синтеза [1-3]. Действительно, прохождение заряженных частиц через вещество мишени сопровождается разнообразными процессами взаимодействия с элементарными частицами, атомами. Характер и результаты этих взаимодействий зависят от типа энергии потока заряженных частиц, а также типа, состояния, плотности, состава и размера мишеней. Поэтому моделирование тяжелых многозарядных ионов для инерциального термоядерного синтеза требует как качественного, так и количественного описания процессов взаимодействия тяжелых частиц с веществом в широком диапазоне параметров плотностей и температур. Особый интерес представляет

определение торможения ионов для частично-ионизованной плазмы, поскольку экспериментальное исследование наталкивается на определенные трудности, связанные с плотностью свободных электронов плазмы [4, 5].

В данной работе мы рассматриваем частично-ионизованную водородную плазму: температура плазмы  $T = 10^4 \div 10^6 \text{ K}$ ; плотность плазмы  $n = n_e + n_i + n_a = 10^{20} \div 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , где  $n_e, n_i, n_a$  – плотность электронов, ионов и атомов, соответственно. Используются следующие безразмерные параметры: параметр связи  $\Gamma = Z_\alpha Z_\beta e^2 / a k_B T$ , где  $Z_\alpha e, Z_\beta e$  – электрические заряды частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $a = (3/4\pi n)^{1/3}$  – среднее межчастичное расстояние между заряженными частицами,  $r_D = (k_B T / (4\pi e^2 \sum_j n_j Z_j^2))^{1/2}$  – радиус Дебая,  $r_s = a/a_B$  – параметр плотности,  $\lambda_{\alpha\beta} = \hbar / \sqrt{2\pi m_{\alpha\beta} k_B T}$  – тепловая длина волны де Бройля,  $m_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$  – приведенная масса частиц сорта  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $\eta = \frac{|Z_b| e^2}{\hbar v_p}$  – параметр, разделяющий области применимости классической

и квантовой формул для кулоновского логарифма.

**Тормозная способность и кулоновский логарифм.** Известно, что тормозная способность – некоторый параметр характеризующий скорость потери средней энергии для быстро движущихся электронов или ионов плазмы. Приближение парных столкновений пригодно для описания тормозной способности в невырожденной квазинейтральной умеренно-плотной плазме [6]. Для пробной частицы, подвергнутой  $N$  парным столкновениям и перемещенной на расстояние  $\delta l$  ее полная потеря энергии есть:

$$\delta E = \sum_{i=1}^N \Delta E_i, \quad (1)$$

где  $\Delta E_i$  – потеря энергии при  $i$ -том столкновении. Тормозная способность  $S$  определяется как  $\int_0^{\delta l} S dl = \delta E$ . При увеличении числа  $N$  столкновений имеем  $\int_0^{\delta l} S dl = S \cdot \delta l$ ;  $S = \frac{\delta E}{\delta l}$ . Потеря энергии в результате соударения пробной частицы и частицами плазмы есть:

$$\Delta E = 4 \left( \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta} \right) \cdot E_c \cdot \sin^2 \left( \frac{\theta_c}{2} \right). \quad (2)$$

Здесь  $E_c = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} v^2$  – энергия центра масс;  $v$  – относительная скорость пробной частицы;  $\theta_c$  – угол рассеяния центра масс. Для удобства значение потери энергии пробной частицы в одном парном соударении обозначим как  $\Delta E$ . Следовательно, тормозная способность [6, 7]:

$$S = 8\pi n \left( \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta} \right) \cdot E_c \cdot b_\perp^2 \cdot \lambda. \quad (3)$$

Здесь  $b_\perp = \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{2E_c}$ ;  $\lambda$  – кулоновский логарифм.

В данной работе кулоновский логарифм определяется с помощью угла рассеяния центра масс при парном кулоновском столкновении [6, 7]:

$$\lambda = \frac{1}{b_\perp^2} \int_0^\infty \sin^2 \left( \frac{\theta_c}{2} \right) b db. \quad (4)$$

Угол рассеяния центра масс определяется как [6]:

$$\theta_c = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left( 1 - \frac{\Phi(r)}{E_c} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{-1/2}, \quad (5)$$

где  $\Phi(r)$  – потенциал взаимодействия и  $r_0$  – расстояние максимального сближения, при этом обращается в нуль знаменатель подынтегрального выражения:

$$1 - \frac{\Phi(r_0)}{E_c} - \frac{b^2}{r_0^2} = 0. \quad (6)$$

При расчете кулоновского логарифма был использован эффективный потенциал для электронного взаимодействия [8], учитывающий эффект экранировки на больших расстояниях и квантово-механические эффекты дифракции и симметрии – на малых:

$$\Phi_{\alpha\beta}(r) = \frac{Z_\alpha Z_\beta}{\sqrt{1 - 4\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^2/r_D^2}} \left( \frac{e^{-Br}}{r} - \frac{e^{-Ar}}{r} \right), \quad (7)$$

где  $A^2 = \frac{1}{2\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^2/r_D^2} \right)$ ,  $B^2 = \frac{1}{2\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^2/r_D^2} \right)$ .

При исследовании свойств частично-ионизованной плазмы необходимо также принимать во внимание взаимодействие между заряженными и нейтральными частицами. В качестве взаимодействия заряд-атом используется экранированный потенциал, полученный методом линейного диэлектрического отклика [9]:

$$\Phi(r) = \frac{e^2 \alpha_p}{2r^4 \sqrt{1 - 4\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^2/r_D^2}} \left( e^{-Br} (1 + Br) - e^{-Ar} (1 + Ar) \right), \quad (8)$$

где  $\alpha_p$  – поляризуемость атома, для водородной плазмы  $\alpha_p = 4.5a_B^3$ .

При начальном давлении плазмы в мишени плотность свободных электронов плазмы определена с помощью уравнения Саха с учетом снижения потенциала ионизации атомов, возникающего вследствие учета взаимодействия частиц [10]:

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = n_0 \tilde{\lambda}^3 \exp \left[ \frac{I - \Delta I}{k_B T} \right], \quad (9)$$

где  $I = 13,6 \text{ eV}$  - потенциал ионизации водорода,  $\Delta I$  - снижения потенциала ионизации.

### Результаты расчетов и обсуждение

На рисунке 1 приведено поведение угла рассеяния центра масс в зависимости от прицельного параметра для различных скоростей пробной частицы. Видно, что при малых энергиях налетающей частицы угол рассеяния резко увеличивается при уменьшении прицельного параметра, а также при высоких энергиях налетающей частицы угол рассеяния при центральном (лобовом) столкновении может быть меньше  $180^\circ$ . Это может быть объяснено повышением влияния квантово-механических эффектов дифракции с увеличением скорости налетающей частицы (длина волны де Бройля становится одного порядка как среднее межчастичное расстояние) (рисунок 2). Таким образом, возможная дифракция налетающей частицы при малом прицельном параметре связана с конечным значением эффективного потенциала взаимодействия при малых средних расстояниях между частицами.

Значение кулоновского логарифма наиболее точно определено с использованием псевдопотенциала, учитывающего эффект экранировки на больших расстояниях и квантово-механические эффекты дифракции и симметрии – на малых (рисунки 3 и 4).

На следующих рисунках видно, что чем выше степень ионизации, тем больше значения кулоновского логарифма. Изменение плотности свободных электронов плазмы приводит к изменению кулоновского логарифма, а это в свою очередь приводит к увеличению тормозной способности плазмы.

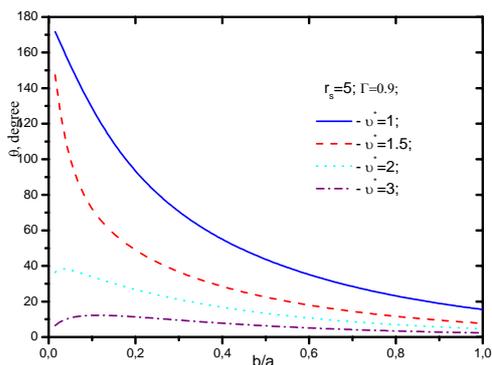


Рисунок 1 – Угол рассеяния центра масс в зависимости от прицельного параметра для различных значений скоростей ионов  $v^* = v_p / v_{th}$

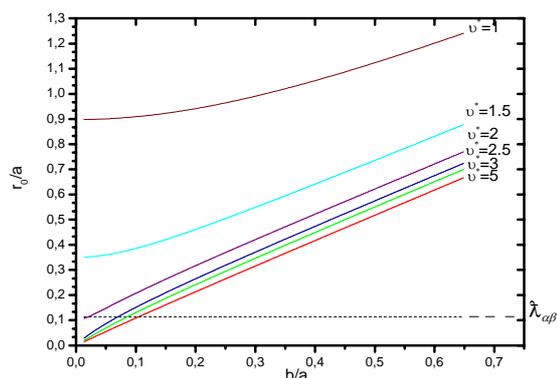


Рисунок 2 – Расстояние максимального сближения в зависимости от прицельного параметра для различных значений скоростей ионов  $v^* = v_p / v_{th}$

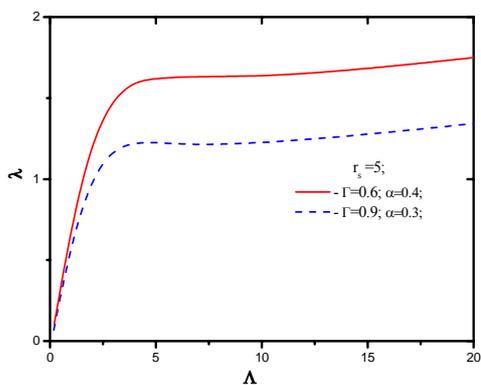


Рисунок 3 – Значение кулоновского логарифма для различных значений степени ионизации  $\alpha$  при  $r_s = 5$

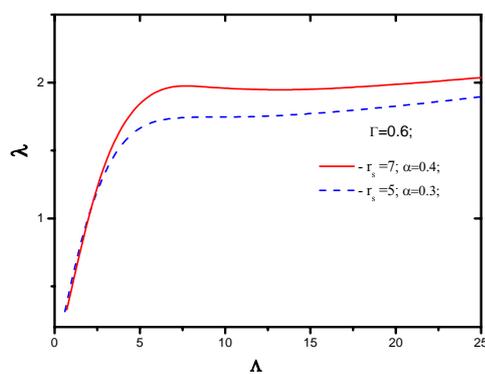


Рисунок 4 – Значение кулоновского логарифма для различных значений степени ионизации  $\alpha$  при  $\Gamma = 0,6$

На основе данных по кулоновскому логарифму вычислена тормозная способность ионов в частично ионизированной плазме. На рисунке 5 и 6 показаны торможения ионов в частично ионизированной плазме для различной степени ионизации при  $\Gamma = 0,9$  и  $r_s = 5$ . Тормозная способность тяжелых частиц увеличивается с увеличением степени ионизации, что связано с увеличением концентрации свободных электронов рассеивающих центров в системе. Чем больше степень ионизации, соответственно больше торможение частиц.

Значение кулоновского логарифма наиболее точно определено с использованием псевдопотенциала, учитывающего эффект экранировки на больших расстояниях и квантово-механические эффекты дифракции и симметрии – на малых. На основе данных по кулоновскому логарифму вычислена тормозная способность ионов в частичной ионизированной плазме.

На рисунке 7 и 8 сравнены значения кулоновского логарифма и тормозной способности ионов на основе эффективного потенциала, потенциала Дойча, на основе потенциала Дебая-Хюккеля и Кулона.

На рисунке 7 показано, что кулоновский логарифм на основе потенциалов, которые учитывают эффекты дифракции почти в два раза меньше, чем кулоновский логарифм полученного на основе потенциалов Кулона и Дебая. Соответственно, тормозная способность ионов на основе эффективного потенциала меньше, чем соответствующие значения для потенциалов Кулона, Дебая Дойча за счет ослабления взаимодействия из-за экранирования (рисунок 8).

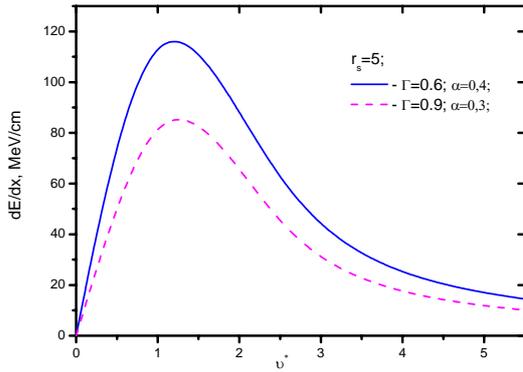


Рисунок 5 – Тормозная способность ионов в зависимости от скоростей налетающей частицы для различных значений степени ионизации  $\alpha$  при  $r_s = 5$

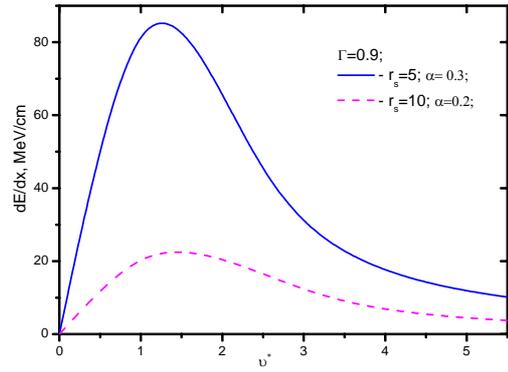


Рисунок 6 – Тормозная способность ионов в зависимости от скоростей налетающей частицы для различных значений степени ионизации  $\alpha$  при  $\Gamma = 0,9$

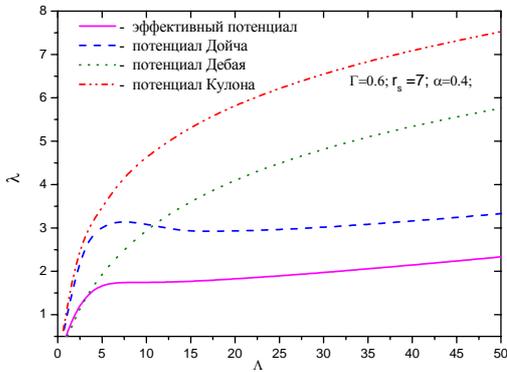


Рисунок 7 – Кулоновский логарифм для различных потенциалов взаимодействия при  $r_s = 5$ ;  $\Gamma = 0,6$

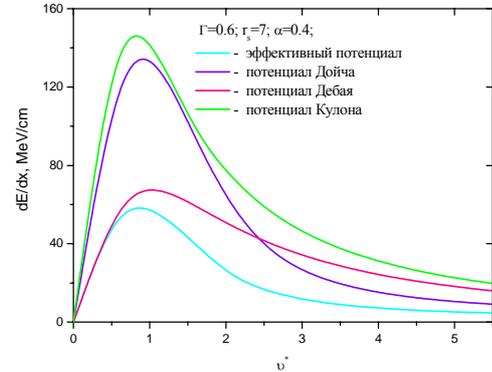


Рисунок 8 – Тормозная способность ионов для различных потенциалов взаимодействия при  $r_s = 5$ ;  $\Gamma = 0,6$

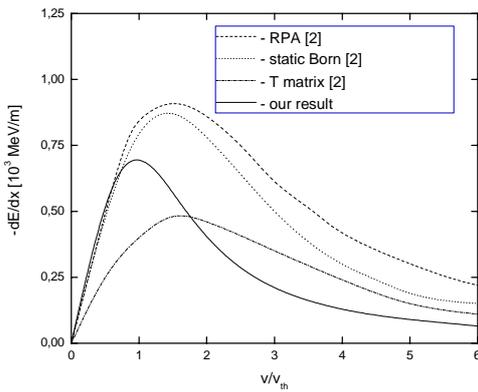


Рисунок 9 – Тормозная способность ионов с зарядовым числом  $Z_{eff} = 5$  в полностью ионизованной плазме с плотностью частиц  $n = 1,1 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$  и температурой  $T = 1,6 \cdot 10^5 \text{ K}$  в зависимости от скорости налетающей частицы

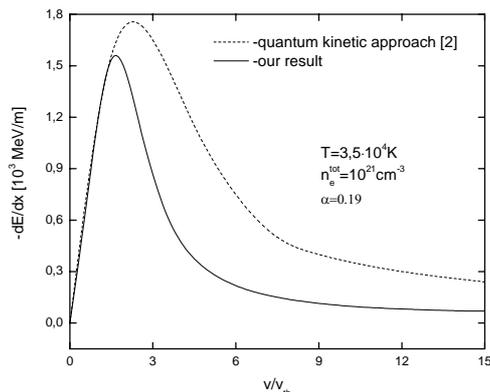


Рисунок 10 – Тормозная способность ионов  $Z_{eff} = 5$  в частично-ионизованной плазме с плотностью частиц  $n = 10^{21} \text{ cm}^{-3}$  и температурой  $T = 3,5 \cdot 10^4 \text{ K}$  в зависимости от скорости налетающей частицы

А также проводится сравнение полученных расчетных данных торможения ионов в полностью ионизованной и частично ионизованной плазме с теоретическими результатами других авторов [11]. Результаты, полученные на основе эффективного потенциала, представлены сплошной кривой (рисунки 9 и 10). Показано, что при малых скоростях наши результаты хорошо согласуются с данными RPA и статического борновского приближения, а с увеличением скорости налетающей частицы быстро уменьшается в отличие от остальных приближений. Если мишень – частично ионизованная плазма, то тормозная способность зависит не только от свободных частиц плазмы, но и от связанных состояний. Рисунок 10 показывает полную тормозную способность ионов в частично ионизованной водородной плазме как функция скорости налетающей частицы при заданных параметрах плазмы и степени ионизации.

**Заключение.** Таким образом, в настоящей работе:

1. Проведен расчет кулоновского логарифма, для которого был использован эффективный потенциал для электрон-ионного взаимодействия.
2. На основе данных по кулоновскому логарифму вычислена тормозная способность ионов в частично ионизованной плазме.
3. Проведено сравнение полученных расчетных данных тормозной способности с результатами на основе кинетического уравнения Больцмана, которые учитывают трехчастичные корреляции.
4. Проведено сравнение полученных данных торможения ионов в полностью ионизованной и частично ионизованной плазме с теоретическими результатами других авторов.

#### REFERENCES

- 1 Zwicknagel G., Toepffer G., Reinhard P.-G. Laser and Particle Beams. 1995. Vol. 13, N 2. P. 311. (In Eng.)
- 2 Gericke D.O., Schlages M. Phys. Rev. 1999. Vol. 60, N 1. P. 904. (In Eng.)
- 3 Young F.G., Mosher D., Stephanakis S.J. et al. Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 549. (In Eng.)
- 4 Belyaev G.E., Basko M.M. et al. Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, N 3. P. 2701. (In Eng.)
- 5 Golubev A., Basko M., Fertman A. et al. Phys. Rev. E. 1998. 57 p. 3363. (In Eng.)
- 6 Ordonez C.A., Molina M.I. Phys. Plasmas. 1994. Vol. 1. P. 2515. (In Eng.)
- 7 Ramazanov T.S., Kodanova S.K. Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8. P. 5049. (In Eng.)
- 8 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N. Phys. Plasmas. 2002. Vol. 9. P. 3758. (In Eng.)
- 9 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Omarbakiyeva Yu.A. Phys. Plasmas. 2005. Vol. 9. P. 092702. (In Eng.)
- 10 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Gabdullin M.T. J. Phys. A: Math. Gen. 2006. 39. (In Eng.)
- 11 Gericke D.O. Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. P. 036406. (In Eng.)

#### Резюме

*С. К. Қоданова, Т. С. Рамазанов, М. К. Исанова*

#### ЖАРТЫЛАЙ ИОНДАЛҒАН СУТЕГІ ПЛАЗМАСЫНДА КУЛОНДЫҚ ЛОГАРИФМ ЖӘНЕ ИОНДАРДЫҢ ТЕЖЕГІШТІК ҚАБІЛЕТІ

Бұл жұмыста бөлшектердің өзара әсерлесуінің тиімді әлеуетін пайдалана отырып, жартылай иондалған сутекті тығыз плазмада ауыр бөлшектердің тежегіштік қабілеті зерттелді. Бастапқы температура мен плазмалық тығыздықтың әртүрлі мәндеріне арналған иондалу дәрежесіне байланысты плазмадағы иондардың энергия жоғалту есептеулері орындалды. Бұдан басқа, ионның тежегіштік қабілеті бойынша басқа авторлардың эксперименттік және теориялық нәтижелерінің есептеу мәліметтерімен салыстыру жүргізілді.

**Тірек сөздер:** тежегіштік қабілет, кулон логарифмы, шашырау бұрышы, тиімділі әлеует.

#### Summary

*S. K. Kodanova, T. S. Ramazanov, M. K. Issanova*

#### COULOMB LOGARITHM AND STOPPING POWER OF IONS IN A PARTIALLY IONIZED HYDROGEN PLASMA

In this work investigated the stopping power of heavy particles in a partially ionized hydrogen dense plasma using the effective potentials of particles interaction. Calculations of ions energy losses in the plasma in dependence on ionization degree for different values of the initial temperature and plasma density were carried out. Also, a comparison of the calculated data on ion stopping power with experimental and theoretical results of other authors was done.

**Keywords:** stopping power, Coulomb logarithm, scattering angle, effective potential.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 621.315.592-022.532

Г. К. МУСАБЕК<sup>1</sup>, Е. Т. ТАУРБАЕВ<sup>1</sup>, В. Ю. ТИМОШЕНКО<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан,  
<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

## ФОРМИРОВАНИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОКОМПОЗИТНЫХ ОПТИМИЗИРУЮЩИХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ КРЕМНИЕВЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Аннотация.** В настоящей работе представлено описание новой методики получения нанокompозитных покрытий на основе нанокристаллов кремния, а также результаты исследований их люминесцентных свойств. Нанокристаллы кремния, входящие в состав нового нанокompозитного материала, были получены из пленок пористого кремния, формируемых стандартным электрохимическим травлением поверхности пластины монокристаллического кремния. В качестве полимерной матрицы использован полиметилакрилат. Показано, что новые нанокompозитные покрытия обладают эффективной и стабильной фотолюминесценцией в оптическом диапазоне 550–950 нм. Экспериментально подтверждена возможность использования нового нанокompозита в качестве конвертеров УФ излучения как способ повышения эффективности и расширения спектральных характеристик кремниевых кристаллических солнечных элементов за счет эффекта переизлучения в нанокристаллах кремния. Вольт-амперные характеристики кремниевых солнечных элементов с покрытием из исследуемого нанокompозита были измерены в условиях темноты и при освещении тремя различными источниками монохроматического излучения с длинами волн 364 нм (УФ), 514 нм (зеленый) и 633 нм (красный). При освещении УФ, излучением наблюдается заметный рост фототока СЭ с покрытием, что указывает на увеличение вклада УФ фотонов в фототок.

**Ключевые слова:** нанокompозит, нанокристаллы кремния, конвертер УФ излучения, наноструктуры, пористый кремний, солнечный элемент.

**Тірек сөздер:** нанокompозит, кремний нанокристалдары, ультра күлгін сәулелерінің конвертері, нанокұрылымдар, кеуекті кремний, күн элементі.

**Keywords:** nanocomposite, silicon nanocrystals, down converter, nanostructures, porous silicon, solar cells.

**Введение.** В коротковолновой части спектра кристаллический кремний имеет высокий коэффициент поглощения [1], поэтому для кремниевых солнечных элементов существует проблема поверхностной рекомбинации носителей заряда [2]. Таким образом, при большой глубине залегания р-п перехода лишь малое количество электрон – дырочных пар, сгенерированных коротковолновыми фотонами могут дойти до него и разделиться, следовательно, их вклад в фототок будет незначительным. В настоящей работе в качестве способа повышения эффективности и расширения спектральных характеристик солнечных элементов предлагается использование явления переизлучения [3] в наноструктурированных кремниевых слоях и нанокompозитах, полученных из пористого кремния (ПК). Под переизлучением понимается конвертация энергии падающего коротковолнового (как правило, УФ) излучения в видимый диапазон спектра, который поглощается на глубине залегания р-п перехода. Переизлучение возможно благодаря наличию у ПК фотолюминесценции (ФЛ) [4, 5] с максимумом на длинах волн 600–700 нм, вызываемой УФ излучением. Таким образом, в слое ПК происходит конвертация коротковолнового излучения в видимую часть спектра, за счет чего фотоны этого спектрального диапазона преобразуются в фототок значительно эффективнее. На рисунке 1 приведена иллюстрация механизма переизлучения в слое ПК.



Рисунок 1 – Механизм переизлучения в слое пористого кремния

### Методика эксперимента

Для получения нанокристаллов кремния сначала были получены слои ПК с пористостью около 67–70% путем электрохимического травления монокристаллических подложек КДБ [6, 7], с пространственной кристаллографической ориентацией (100) и удельным сопротивлением 1–10 Ом·см. Пленки ПК были получены путем электрохимического травления при плотности тока травления  $50 \text{ мА/см}^2$  в течение 60 минут в стандартном электролите, состоящем из смеси  $\text{HF}:\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  в соотношении 1:2. После окончания процесса травления полученные пленки промывались в деионизованной дистиллированной воде и механически снимались с подложек. Как известно, люминесценция ПК не достаточно стабильна, и при хранении на воздухе происходит окисление поверхности кристаллитов кремния, которое ведет к ее деградации [8, 9]. Для защиты поверхности нанокристаллитов кремния от процесса окисления порошок был погружен в специальную матрицу, в которой окисление не возможно. В качестве такой защитной матрицы был использован 1-октадецен  $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$ , обладающий свойством пассивации поверхности кремния. Процесс приготовления суспензии заключался в помоле порошка из пленок ПК в небольшом количестве 1-октадецена в автоматической мельнице Pulverisette 7 фирмы Fritsch. Концентрация нанокристаллов в суспензии составила 43 г/л. Однако во избежание окисления и потери свойства переизлучения в нанокристаллах кремния после испарения 1-октадецена суспензия смешивалась с жидким полимерным соединением – полиметилакрилат. Получаемая в результате пленка представляет собой люминесцирующий нанокомпозит. Полученные нанокомпозитные покрытия были нанесены на поверхность промышленных кремниевых солнечных элементов (СЭ).

Измерения спектров ФЛ проводились при комнатной температуре на установке, собранной на базе монохроматора фирмы Solar II и CCD камеры Hamamatsu. Фотолюминесценция возбуждалась непрерывным аргоновым лазером с длиной волны 364 нм. Средняя мощность излучения лазера составляла 23 мВт. Измерения вольт-амперных характеристик СЭ проводились при условиях освещения 3 источниками монохроматического излучения, работающими на длинах волн: 364 нм, 554 нм и 663 нм.

### Результаты и обсуждение

С целью исследования явления переизлучения были измерены и проанализированы спектры ФЛ слоев пористого кремния и нанокомпозитных пленок на его основе. На рисунке 2 показаны спектры ФЛ нанопорошка из пленок ПК и суспензии с нанокристаллами кремния в среде 1-октадецена. Молекулы 1-октадецена, покрывая нанокристаллы кремния, образуют на их поверхности прочные углеродные связи, которые препятствуют проникновению кислорода в структуру. Таким образом, в образующейся суспензии атомы кислорода не приближаются к атомам кремния, и процесс окисления не происходит. Как видно из рисунка, у порошка с наночастицами наблюдается интенсивная видимая ФЛ, сравнимая с ФЛ слоя ПК. Максимум ФЛ для нанопорошка наблюдается

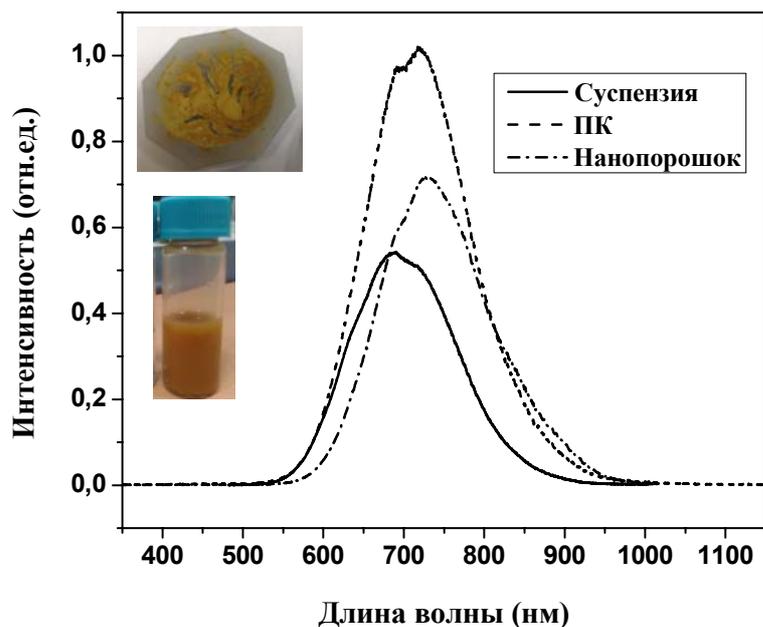


Рисунок 2 – Спектр фотолюминесценции пленки ПК, нанопорошка, полученного из пленок ПК и суспензии нанокристаллов кремния в среде 1-октадецен

на длине волны 730 нм, для суспензии с нанокристаллами при 710 нм, ширина спектров ФЛ составляет 200 нм и 195 нм соответственно. Интенсивность ФЛ суспензии почти в 2 раза ниже, чем у пленки ПК, что предположительно связано с полной пассивацией поверхности нанокристаллитов кремния Si-H связями. Спектры ФЛ суспензий не деградируют со временем, что в свою очередь полностью подтверждает справедливость идеи о защите поверхности нанокристаллитов кремния от воздействия кислорода в 1-октадецене.

На рисунке 3 приведены спектры ФЛ нанокомпозитных пленок, представляющих собой систему нанокристаллов кремния в полимерной матрице, до облучения УФ излучением, после облу-

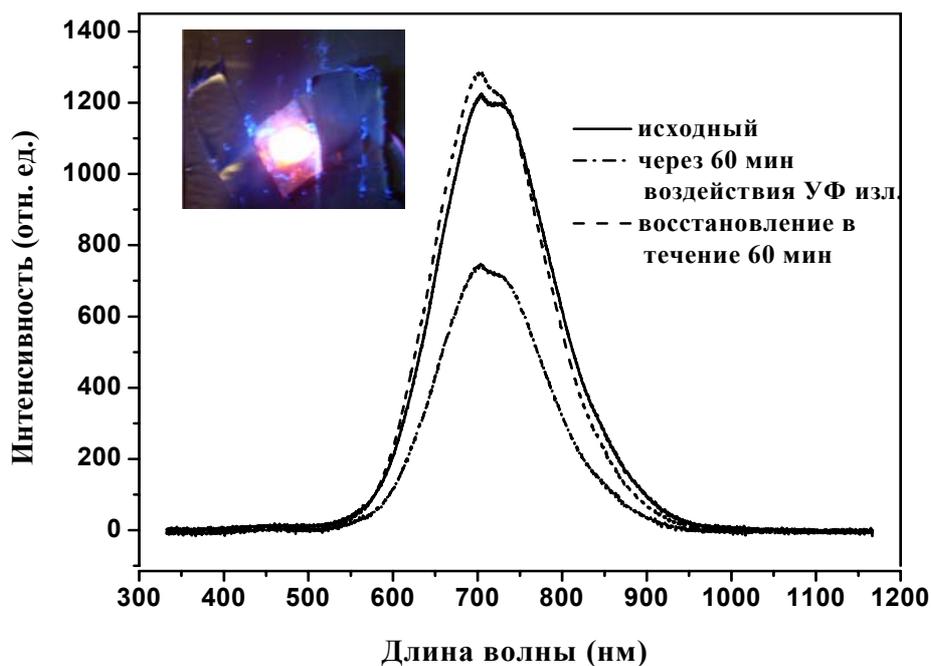


Рисунок 3 – Спектры ФЛ нанокомпозитной пленки, до облучения УФ излучением, после облучения в течение 60 минут, и после восстановления в полной темноте в течение 60 минут

чения в течение 60 минут и после выдерживания в полной темноте также в течение часа. Из рисунка видно, что наноккомпозит обладает стабильно и эффективной ФЛ в диапазоне 550–950 нм, которая несколько деградирует после длительного воздействия жесткого УФ излучения, но со временем восстанавливается практически до исходного положения. Данный факт позволяет предположить возможность длительного использования таких покрытий в структуре кремниевых солнечных элементов.

Поскольку вышеприведенные результаты свидетельствовали в пользу возможности применения наноккомпозитных пленок в качестве оптимизирующего покрытия, был создан и протестирован ряд образцов кремниевых СЭ с композитными пленками, нанесенными на их поверхность. На рисунке 4 приведены ВАХ до и после нанесения наноккомпозитного покрытия. Как и предполагалось, заметный рост фототока СЭ с покрытием наблюдается при освещении УФ, излучением. Значение фототока возрастает на 10 % по сравнению с исходными фотоэлектрическими параметрами. Это свидетельствует о вкладе переизлучения, повышающего эффективность преобразования УФ излучения.

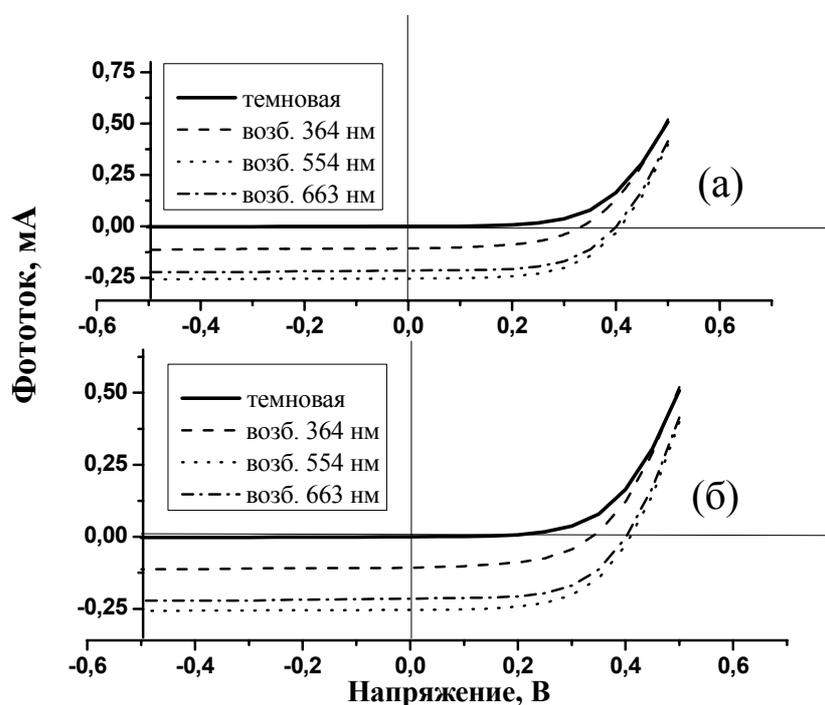


Рисунок 4 – Вольт-амперные характеристики исходного кремниевого СЭ (а) и СЭ, покрытого композитной пленкой с кремниевыми нанокристаллами (б)

**Заключение.** Предложена новая методика получения наноккомпозитных покрытий, представляющих собой нанокристаллы кремния в полимерной матрице. Показано, что такие наноккомпозитные покрытия обладают эффективной и стабильной ФЛ в оптическом диапазоне 550–950 нм, что указывает на возможность их использования для повышения чувствительности кремниевых кристаллических солнечных элементов. Разработанная методика получения наноккомпозитов является недорогой, простой и эффективной по сравнению с существующими на сегодня технологиями создания оптимизирующих покрытий. Использование таких наноккомпозитных покрытий в качестве конвертеров УФ излучения позволяет повысить вклад фотонов УФ области в среднем на 10% по сравнению с исходными характеристиками.

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Тауц Я. Оптические свойства полупроводников в видимой и УФ областях спектр // УФН. – 1968. – Т. 94, №3. – С. 501-534.

2 Aberle A.G. Surface passivation of crystalline silicon solar cells: a review // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. – 2000. – Vol. 8, N 5. – P. 473-487.

- 3 Bisi O., Ossicini S., Pavese L. Porous silicon: a quantum sponge structure for silicon based optoelectronics // *Surface Science Reports*. – 2000. – Vol. 38, N 1. – P. 1-126.
- 4 Collins S.D., Canham L.T., Calcott P.D. The structural and luminescence properties of porous silicon // *J. Appl. Phys.* – 1997. – Vol. 82, N 3. – P. 909-966.
- 5 Halimaouillan A., Canham L.T. (Ed.) *Properties of Porous Silicon* // IEE INSPEC. – London: The Institution of Electrical Engineers, 1997. – 12 p.
- 6 Smith R.L., Collins S.D. Porous silicon formation mechanisms // *J. Appl. Phys.* – 1992. – Vol. 71, N 8. – P. 1-22.
- 7 Lehmann V., Goesele U. Porous silicon formation: A quantum wire effect // *Appl. Phys. Lett.* – 1991. – Vol. 58. – P. 856-858.
- 8 Calcott P.D. The mechanism of light emission from porous silicon: where are we 7 years on? // *Materials Science and Engineering: B*. – 1998. – Vol. 51, N 1. – P. 132-140.
- 9 Головань Л.А., Тимошенко В.Ю., Кашкаров П.К. Оптические свойства нанокompозитов на основе пористых систем. // *УФН*. – 2007. – Т. 177, № 6. – С. 619-638.

#### REFERENCES

- 1 Tatz Ya. *UFN*. **1968**, 94, 3, 501-534 (in Russ.).
- 2 Aberle A. G. *Progress in Photovoltaics: Research and Applications*. **2000**, 8, 5, 473-487.
- 3 Bisi O., Ossicini S., Pavese L. *Surface Science Reports*. **2000**, 38, 1, 1-126.
- 4 Calcott P.D. *Materials Science and Engineering: B*. **1998**, 51, 1, 132-140.
- 5 Collins S.D., Canham L.T., Calcott P.D. *J. Appl. Phys.* **1997**, 82, 3, 909-966.
- 6 Halimaouillan A., Canham L.T. (Ed.) *IEE INSPEC*, **1997**, 12 p.
- 7 Lehmann V., Goesele U. *Appl. Phys. Lett.* **1991**, 58, 856-858.
- 8 Smith R.L., Collins S.D. *J. Appl. Phys.* **1992**, 71, 8, 1-22.
- 9 Golovan L.A., Timoshenko V.Yu., Kashkarov P.K. *UFN*. **2007**, 177, 6, 619-638 (in Russ.).

#### Резюме

Г. К. Мұсабек<sup>1</sup>, Е. Т. Тәуірбаев<sup>1</sup>, В. Ю. Тимошенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,  
<sup>2</sup>М. В. Ломоносов атындағы Мәскеу Мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей)

#### КРЕМНИЙЛІК КҮН ЭЛЕМЕНТТЕРІ ҮШІН ОҢТАЙЛЫ НАНОКОМПОЗИТТИ ҚАПТАУЛАРДЫ ЖАСАУ ӘДІСІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ОПТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Ұсынылған жұмыста кремний нанокристалдарына негізделген нанокompозитті қаптауларды жасап шығудың жаңа технологиясы, сонымен қатар олардың люминесцентті қасиеттерін зерттеу нәтижелері келтірілген. Жаңа нанокompозитті материалдың құрамына енетін кремний нанокристалдары монокристалды кремний пластинасының бетін стандартты электрохимиялық өңдеу әдісімен алынатын кеуекті кремний үлбіршектерінен алынған. Полимерлік матрица болып полиметилакрилат пайдаланылған. Жаңа нанокompозитті қаптауларға тиімді және тұрақты 550–950 нм потикалық аймағында бақыланатын фотолюминесценция қасиеті тән екендігі көрсетілген. Кремнийлік күн элементтерінің тиімділігі мен спектрлік сипаттамаларын арттыру мақсатында аталған нанокompозитті материалды ультра күлгін сәулелерінің конвертері ретінде қолдану мүмкіншілігінің зор екендігі тәжірибе жүзінде көрсетілген. Зерттелінген нанокompозитпен қапталған кремнийлік күн элементтерінің вольт-амперлік сипаттамалары қараңғыда және келесі үш түрлі монохроматты сәулемен: 364 нм (ультра күлгін), 554 нм (жасыл) және 663 нм (қызыл) жарықтандыру жағдайларында түсірілген. Ультра күлгін жарық көзімен жарықтандырған кезде осы оптикалық аймағы фотондарының фототокқа қосатын үлесінің ұлғаюын көрсететін күн элементі фототогінің өсуі бақыланады.

**Тірек сөздер:** нанокompозит, кремний нанокристалдары, ультра күлгін сәулелерінің конвертері, нанокұрылымдар, кеуекті кремний, күн элементі.

#### Summary

G. K. Mussabek<sup>1</sup>, Ye. T. Taurbayev<sup>1</sup>, V. Yu. Timoshenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,  
<sup>2</sup>M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia~

#### FORMATION AND OPTICAL PROPERTIES OF OPTIMISING NANOCOMPOSIT COATINGS FOR SILICON SOLAR CELLS

This paper describes a new method for obtaining nanocomposite coatings based on silicon nanocrystals, as well as the results of studies of their fluorescent properties. Silicon nanocrystals included in the new nanocomposite material was prepared from porous silicon films formed by standard electrochemical etching of crystalline silicon

wafer surface. Polymethacrylate was used as a polymer matrix. It is shown that the new nanocomposite coatings have effective and stable photoluminescence in the optical range of 550–950 nm. Experimentally confirmed the possibility of using the new nanocomposite as down-converters of UV radiation, as a way to improve and enhance the spectral characteristics of crystalline silicon solar cells, due to the effect of re-radiation in silicon nanocrystals. The current-voltage characteristics of the silicon solar cell coated with nanocomposite were measured in the dark and under illumination with three different sources of monochromatic light working at 364 nm (UV), 514 nm (green) and 633 nm (red) wavelengths. When illuminated by UV radiation a marked increase in the photocurrent is observed for coated SC. That increase in photocurrent indicates the increase in the contribution of UV photons in the photocurrent.

**Keywords:** nanocomposite, silicon nanocrystals, down converter, nanostructures, porous silicon, solar cells.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 539.17

Э. Г. БООС, Т. Х. САДЫКОВ

(Физико-технический институт, Алматы, Республика Казахстан)

## ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ И СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

**Аннотация.** В работе дается краткий обзор актуальных проблем физики высоких и сверхвысоких энергий, изучаемых в земных условиях до энергии  $10^{17}$  эВ на ускорителях и в космических лучах при более высоких энергиях. Освещаются основные вопросы, исследуемые в Физико-техническом институте в Казахстане.

**Ключевые слова:** энергия, ускорители, космические лучи, элементарные частицы, неупругие взаимодействия.

**Түйін сөздер:** энергия, үдеткіштер, ғарыш сәулелері, элементар бөлшектер, серпімсіз әсерлесулер.

**Keywords:** energy, accelerators, cosmic rays, elementary particles, inelastic interactions.

Нерешёнными проблемами физики высоких энергий остаются фундаментальные вопросы, на которые до сих пор нет ответа: какова иерархия возникающих фундаментальных частиц с фиксированными массами (электроны, нуклоны, мезоны и их возбуждённые состояния)? Как ведёт себя материя при экстремально высоких энергиях и на экстремально малых расстояниях? Каковы фазовые переходы материи на стадии эволюции ранней Вселенной? Какова структура тёмной материи Вселенной? Как образуются чёрные дыры? Как Вселенная обогащалась тяжёлыми элементами? Каков механизм множественного рождения мезонов при энергиях, достижимых на ускорителях, в процессах, сопровождающихся малыми поперечными импульсами (так называемая мягкая адронизация), которые составляют основу ( $\approx 80\%$ ) неупругих адрон-нуклонных взаимодействий.

Актуальность проведения исследований в области энергий, достижимых в земных условиях на ускорителях-коллайдерах (до энергий  $\sim 10^{17}$  эВ), определяется необходимостью выяснения структуры материи на микроскопическом уровне ( $< 10^{-16}$  см), в то время как бурно развивающиеся исследования в космических лучах при сверхвысоких энергиях ( $> 10^{17}$  эВ) охватывают широкий круг проблем развития Вселенной на масштабах до миллиона световых лет. Мировая тенденция свидетельствует, что научные исследования по физике частиц высоких энергий и космических лучей в настоящее время тесно переплетены.

Взаимодействие ускоренных в земных условиях частиц исследуются в Казахстане в Физико-техническом институте (ФТИ) Алматы с конца пятидесятых годов прошлого столетия.

В основном изучалось образование ядерноактивных частиц – мезонов в неупругих соударениях протонов, антипротонов, пи-мезонов и ядер с нуклонами и ядрами, ускоренных в ОИЯИ г. Дубна (9 ГэВ), а затем в ИФВЭ г. Серпухова (70 ГэВ). Основными детекторами были стопки толстослойных ядерных эмульсий, водородные пузырьковые камеры «Людмила» (ОИЯИ – Дубна) и «Мирабель» (ИФВЭ – Серпухов).

Были получены новые данные об асимметрии разлёта протонов, динамике образования нуклонных и мезонных резонансов, эффекте «лидирования» вторичных мезонов в пион-ядерных соударениях, обнаружении полного развала ядер и др.

Вступление (1994 год) в международное сотрудничество с Научным центром DESY (немецкий электронный синхротрон, Гамбург, Германия) позволило изучать внутреннюю структуру протона в глубоко неупругих электрон-протонных взаимодействиях при эффективной энергии 300 ГэВ в системе центра масс, что эквивалентно энергии  $10^{13}$  эВ в лабораторной системе координат. Вся

информация о ядерных соударениях, полученная с применением калориметрического детектора ZEUS, в оцифрованном виде накапливалась на внешних накопителях.

Учитывая удалённость лаборатории высоких энергий ФТИ от DESY, в 1995 году была построена при финансовой поддержке грантами ИНТАС и НАТО первая в Казахстане линия спутниковой связи между DESY (Гамбург) и ФТИ (Алматы) через российский спутник. В последние годы организована передача цифровой информации через оптический кабель, предоставленный фирмой КазРена, первоначально созданной на базе спутниковой связи DESY-ФТИ. В настоящее время в ФТИ накоплено 300 миллионов взаимодействий, которые в пересчёте на расходы по сооружению и эксплуатации электрон-протонного коллайдера HERA в DESY составляют многие миллионы долларов США.

В предстоящий период предполагается дальнейшее исследование образования связанных чармированных состояний частиц с использованием разрабатываемых в лаборатории оригинальных кластерных методов.

К числу уже полученных фундаментальных результатов с участием казахстанских физиков можно отнести: выяснение кварк-глюонной структуры протонов на размерах до  $10^{-16}$  см; определение структурной функции партонных при различных переданных четырёх импульсах; изучение структуры странных чармированных D-мезонов и механизма их образования; изучение массивных кварковых «ароматов»; изучение распределения по коллективной переменной «сферисити» (сферичности) в антипротон-протонной аннигиляции. Это позволило установить сильное отличие от аналогичного распределения в неаннигиляционных антипротон-протонных взаимодействиях, что подтверждает предсказания кварк-партоновой модели [1].

Полученные в этой области результаты играют важную роль в уточнении квантовой хромодинамики, установлении «конфайнмента» кварков, установлении механизма адронизации s- и b-кварков, а также ряда других важных особенностей, весьма существенных для прогнозирования дальнейших экспериментов на Большом Адронном Коллайдере (БАК) в Европейском центре по ядерным исследованиям (CERN) [2].

Значимость полученных результатов признана мировой научной общественностью, а по цитируемости публикаций в сотрудничестве с DESY в зарубежных престижных физических журналах коллектив физиков ФТИ вышел на первое место в Республике Казахстан.

В Казахстане с начала 50-х годов проводятся исследования в области физики космических лучей. Высокогорная научная станция космических лучей была организована на высоте 3340 метров над уровнем моря на перевале Джусалы–Кезень в 1958 году. Практически одновременно на той же площадке стала строиться Тянь-Шанская высокогорная научная станция (ТШВНС) Физического института им. П.Н.Лебедева АН СССР (ФИАН, сейчас – ФИРАН). В 1910 году был создан научный консорциум «Евразийский высокогорный научный центр космических лучей» при ФТИ (Казахстан) и ФИРАН (Россия) [3].

Научные исследования космического излучения в настоящее время интенсивно проводятся во многих странах мира (США, Россия, Япония, Германия, Китай, Австралия, Казахстан и другие), что обусловлено несколькими факторами: в начале третьего тысячелетия физики подошли к пределу достижимых на ускорителях энергий заряженных частиц и вынуждены обратить внимание на космические лучи сверхвысоких энергий; последние годы в экспериментах с космическим излучением в области энергий больше 100 эВ, наблюдаются необычные и необъясненные явления; сравнительная дешевизна экспериментов в космике, связанная с наличием естественного пучка частиц экстремально высоких энергий, падающего на Землю из Галактического и Метагалактического пространства.

Большую информацию предоставляет научно-исследовательский комплекс, функционирующий на Высокогорной станции Казахстана. Согласно экспериментальным данным, полученным на наших установках и установках из разных стран при энергии  $E > 10^{15}$  эВ, наблюдаются явления, не вписывающиеся в рамки Стандартной модели взаимодействия. К ним относятся: появление событий с так называемым «Гало»; обнаружение «двухструйных» семейств гамма-квантов (бинокуляры); эффект «выстроенности» в семействах гамма-квантов; регистрация длиннопробежных частиц; эффект «запаздывания», проявляющийся в возникновении второго фронта частиц в ШАЛ [4]; наличие экспериментально обнаруженного и до сих пор адекватно необъясненного нарушения (или «излома») энергетического спектра космических лучей в первичной энергии  $E < 3 \cdot 10^9$  эВ. Таким

образом, в настоящее время в космических лучах сверхвысоких энергий имеется целый ряд нерешенных проблем, что требует от коллективов многих стран создания новых и увеличение площадей старых установок, нацеленных на изучение характеристик взаимодействий частиц космического излучения в области сверхвысоких энергий.

Весьма актуальным представляется работы по прикладным проблемам. На станции проводится регулярный мониторинг космической погоды. Изучение солнечных космических лучей также приобретает огромное социально-экономическое значение, так как повседневная практика показывает, что жизнедеятельность людей тесно связана с воздействием таких факторов, как солнечные вспышки и магнитные бури, приводящие к росту травматизма населения, а также к нарушению работы электронной аппаратуры.

Весьма важным вопросом является исследование грозовых явлений. Как известно, молнии играют важную роль в физике атмосферы. Грозовые облака и электрические разряды в них являются источником электрических полей, которые проникают даже на высоты ионосферы. Электромагнитное поле молнии бывает чрезвычайно сильным и способно воздействовать на сотни километров от области разряда. С появлением новых технологий и коммуникационных систем обнаруживаются новые аспекты влияния грозовых явлений на практическую деятельность человека. Самолеты, космические аппараты, средства связи и обработки информации снабжены микроэлектроникой. Повреждения им могут нанести не только прямые удары молнии, но и удаленные разряды. Поэтому стала серьезной проблема защиты средств коммуникаций от грозовых разрядов. Однако до сих пор неясны не только механизмы передачи энергии в грозовом облаке, но и физические процессы, протекающие в нем. Экспериментальные данные, полученные на самолетах, аэростатах и искусственных спутниках, показали существование интенсивных потоков рентгеновского и гамма-излучений, генетически связанных с космическими лучами и процессами образования молний, включая гигантские электрические разряды между облаками и ионосферой. Находящиеся на станции комплексы «ATHLET» и «Гроза» успешно работают в этом направлении.

Чрезвычайно важна и проблема прогнозирования землетрясений на основе новой идеи – использование генерации мощных акустических сигналов при взаимодействии с сейсмически активной средой проникающих излучений (мюоны и нейтрино), идущих в составе широкого атмосферного ливня, возникающего при взаимодействии в атмосфере космических частиц сверхвысоких энергий. Мюонный луч, как луч света, как бы освещает пласты Земли на глубину до нескольких десятков километров и в зависимости от состояния сейсмической активности среда генерирует высокочастотные акустические сигналы. По амплитуде акустических сигналов, после выделения определенных частот, устанавливается уровень сейсмичности. Используя геометрию размещения акустических датчиков в скважине и скорости распространения сигналов в земле, возникает возможность диагностировать сейсмическую среду с уникальным пространственным разрешением в десятки метров. При этом космический «ускоритель» постоянно и совершенно бесплатно поставляет нам космические частицы для создания мюонных лучей в разных точках исследуемой области геологического разлома.

*Работа казахстанских физиков регламентирована постановлениями и указаниями Президента республики Н. А. Назарбаева от 01.02.2006 и 30.03.2006 и государственными программами.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Такибаев Ж.С., Боос Э.Г. Неупругие взаимодействия нуклонов при высоких энергиях. – Алма-Ата: Изд-во Наука КазССР, 1974.
2. ZEUS-collaboration – Boos E.G., Pokrovsky N.S., Zhautykov B.O. et all. Inclusive-jet Photoproduction at HERA and determination of  $\alpha_s$ . // Nucl. Phys. – В 864. – 2012. – P. 1-37.
3. Sadykov T.Kh., Amurin I.V., Antonova V.P., ... . Modern state of the ATHLET setup at the Tien-Shan. International Journal of Modern Physics A. – 2005. – Vol. 20, N 29. – S. 6778-6780.
4. Sadykov T, at all // Journal of Physics: Conference Series 409 (2013) 012127 doi:10.1088/1742-6596/409/1/012127.

#### REFERENCES

- 1 Takibaev Zh.S., Boos E.G. Neuprugie vzaimodeystviya nuklonov pri visokih energiayah. Alma-Ata: Iz-vo Nauka KazSSR, 1974.
- 2 ZEUS-collaboration – Boos E.G., Pokrovsky N.S., Zhautykov B.O. et all. Inclusive-jet Photoproduction at HERA and determination of  $\alpha_s$ . Nucl. Phys. B 864. 2012. P. 1-37.

3 Sadykov T.Kh., Amurin I.V., Antonova V.P., ... . Modern state of the ATHLET setup at the Tien-Shan.International Journal of Modern Physics A, V. 20, № 29, 2005. С 6778-6780.

4 Sadykov T. at all Journal of Physics: Conference Series 409 (2013) 012127 doi:10.1088/1742-6596/409/1/012127.

## Резюме

*Э. Г. Боос, Т. Х. Садықов*

(Физико-техникалық институт, Алматы, Қазақстан Республикасы)

### ЖОҒАРЫ ЖӘНЕ АСА ЖОҒАРЫ ЭНЕРГИЯЛАР ФИЗИКАСЫ МӘСЕЛЕЛЕРІ

Микроәлемнің ғаламдық мәселелері және онымен байланысты әлем дамуының өзекті мәселелері қарастырылады. Элементарлық бөлшектің және макроәлем серпінділігі мәселесінің негізгі шешілмеген сұрақтары берілді.

**Түйін сөздер:** энергия, үдеткіштер, ғарыш сәулелері, элементар бөлшектер, серпімсіз әсерлесулер.

Институт ғалымдары халықаралық қатынастар шегінде іргелі және қолданбалы есептерде жоғары және аса жоғары энергия облысында үдеткіштерде және космостық сәулелерде алынған қысқа нәтижелердің шолуы беріледі.

Авторлар:

1. Э. Г. Боос Академик ҒҰА ҚР, профессор, ф.м.-ғ.д. ТОО «Физико-техникалық институтта» жұмыс атқарады. Жоғары энергия физика лабораториясының меңгерушісі.

Академик Э. Г. Боос ғылыми мүддесі энергиялары үдеткіштерге жақын адрон және электрондардың серпімсіз әрекеттесуіне және қайтара сәулелендіру кезінде ғарыш сәулелер бөлшектерінің энергиясын бағалауына байланысты.

2. Т. Х. Садықов. Профессор, ф.м.-ғ.д ТОО «Физика-техникалық институтта» жұмыс атқарады. Ғарыш сәулелері лабораториясының меңгерушісі.

3. Т. Х. Садықов тым жоғары энергиялы ғарыш сәулелері затпен әрекеттесуін фундаменталдық және қолданбалы зерттеулермен айналысады. Зерттеулер теңіз деңгейінен 3340 м биіктікте жүргізіледі.

## Summary

*E. G. Boos, T. Kh. Sadykov*

(Institute of physics and technology, Almaty, Republic of Kazakhstan)

### THE PROBLEM OF HIGH AND ULTRAHIGH ENERGY

Mention global problems of microcosm and related questions of the universe. Lists the main unresolved questions of particle physics and the problem of the dynamics of the macrocosm.

**Keywords:** energy, accelerators, cosmic rays, elementary particles, inelastic interactions.

Provides a brief overview the results obtained by the scientists of the Institute in the framework of international cooperation in the field of fundamental and applied problems of high and ultra-high-energy accelerators and cosmic rays.

Authors:

1. E.G. Boos. Academician of the NAS, Professor, Dr. in the LP "Physical-Technical Institute." Head of the Laboratory for High Energy Physics.

Research interests of academician of NAS E.G. Boos are connected with the study of the mechanism inelastic interactions of hadrons and electrons at energies attainable with accelerators and evaluation of energy cosmic ray particles on the secondary radio emissions.

2. T.Kh. Sadykov. Professor, Dr. in the LP "Physical-Technical Institute." Head of the Laboratory of cosmic rays.

3. Sadykov T.Kh. engaged in fundamental and applied research of particle interactions of ultrahigh-energy cosmic rays with matter at high altitude station, located at an altitude of 3340 meters above sea level.

*Поступила 15.10.2013г.*

И. К. БЕЙСЕМБЕТОВ, К. Х. НУСУПОВ, Н. Б. БЕЙСЕНХАНОВ, С. К. ЖАРИКОВ,  
Б. К. КЕНЖАЛИЕВ, Т. К. АХМЕТОВ, Б. Ж. СЕИТОВ

(Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Республика Казахстан)

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АТОМОВ УГЛЕРОДА В КРЕМНИИ ПОСЛЕ ВЫСОКОДОЗОВОЙ ИМПЛАНТАЦИИ ИОНОВ $C^+$ В Si

**Аннотация.** В работе осуществлен синтез однородных пленок карбида кремния методом многократной ионной имплантации. С этой целью проведена высокодозовая имплантация ионов углерода с энергиями 40, 20, 10, 5 и 3 кэВ в монокристаллические пластины кремния. Выполнено сравнение расчетного профиля распределения атомов углерода в кремнии с экспериментальными профилями, полученными методом Оже-электронной спектроскопии. Показано, что синтезирован однородный слой  $SiC_{0,7}$ , концентрация углерода в котором в процессе высокотемпературного отжига существенно не изменилась. Наблюдается окисление поверхности слоя. Значительный избыток атомов кислорода над стехиометрическим составом диоксида кремния ( $SiO_2$ ) после отжига свидетельствует о насыщении приповерхностного слоя атомами кислорода. Результаты могут быть использованы в нано- и микроэлектронике, а также при синтезе твердых, жаростойких и абразивных материалов, используемых в промышленности. Установлено, что деформация прямоугольного Оже профиля распределения атомов C в Si, проявляющаяся в утончении переходной области «SiC пленка – подложка Si», увеличении концентрации углерода у поверхности и в максимумах распределения углерода для отдельных энергий ионов (40, 20 кэВ), а также уменьшении концентрации углерода между этими максимумами, обусловлены эффектами распыления поверхности и изменением состава слоя при высокодозовой имплантации углерода в кремний.

**Ключевые слова:** карбид кремния, ионная имплантация, структура, кристаллизация.

**Тірек сөздер:** кремний карбиді, иондық имплантация, құрылым, кристалдану.

**Keywords:** silicon carbide, ion implantation, structure, crystallization.

**Введение.** Широкая запрещенная зона карбида кремния ( $E_g = 2.3\text{--}3.5$  эВ в зависимости от политипа), его высокая теплопроводность, химическая и радиационная стойкость, высокая температура плавления и высокая твердость (4-е место после алмаза) [1] стали основой для широкого применения как в микроэлектронике [2], так и в качестве жаростойких и абразивных материалов, используемых для конструкций передней стенки термоядерных реакторов, в покрытиях корпуса космических кораблей типа «Спейс Шаттл» [3], при изготовлении буров и нарезных дисков из SiC и т.д. Полевые транзисторы, диоды и другие электронные приборы на основе SiC обладают рядом преимуществ, среди которых – возможность работы при температурах до  $600^\circ\text{C}$ , высокие быстродействие и радиационная стойкость [4, 5]. Способность карбида кремния к окислению с образованием  $SiO_2$  может найти применение в устройствах, изготовленных на подложке Si (мощные МОП-транзисторы и др.).

Перспективным методом создания слоев SiC на кремнии, хорошо совместимым с кремниевой приборной технологией, является метод ионно-лучевого синтеза – имплантация ионов углерода  $C^+$  в кремниевую подложку, позволяющий с малым уровнем загрязнений создавать слои SiC на заданной глубине [6–9]. Кристаллические пленки  $\beta$ -SiC высокого качества на  $SiO_2$  могут быть получены многократной имплантацией ионов C в Si и селективным окислением верхнего слоя Si [10]. Формирование этим методом наноструктурированных систем, содержащих включения нанокристаллов и кластеров Si, SiC и C в  $SiO_2$ , обеспечивает за счет размерных эффектов люминесценцию во всей видимой области спектра [11].

В данной работе исследуются характеристики пленок  $SiC_{0,7}$ , синтезированных методом ионной имплантации. Рассмотрено влияние распыления и изменения состава поверхности при высокодозовой имплантации на распределение атомов C в Si.

### Эксперимент

Имплантация углерода была произведена в монокристаллические пластины Si ориентации (100) размером  $7 \times 7 \times 0,3$  мм<sup>3</sup> и удельным сопротивлением 4–5 Ом·см [12, 13]. Для предотвращения разогрева образца ( $20\text{--}25^\circ\text{C}$ ) плотность ионного тока не превышала 3 мкА/см<sup>2</sup>.

Для получения однородных слоев  $\text{SiC}_{0,7}$  ( $N_C/N_{\text{Si}} = 0,7$ ) с прямоугольным профилем распределения атомов C в Si имплантация ионов углерода различных энергий и доз в кремний была осуществлена последовательно в порядке, как указано в таблице 1. Отжиг образцов был выполнен при температуре  $1250^\circ\text{C}$  в течение 30 мин в атмосфере Ar с незначительным содержанием  $\text{O}_2$ . Состав слоев измерен методом Оже-электронной спектроскопии: диаметр падающего пучка 1 мкм, энергия 10 кэВ, угол падения  $45^\circ$ , диаметр сканируемой области 300 мкм, вакуум  $1,33 \cdot 10^{-8}$  Па, угол падения  $\text{Ar}^+$  пучка  $45^\circ$ .

Таблица 1 – Величины энергии  $E$ , дозы  $D$ , проективного пробега  $R_p(E)$  среднеквадратичного отклонения  $\Delta R_p(E)$  ионов  $^{12}\text{C}^+$  в Si, использованных для формирования слоев  $\text{SiC}_{0,7}$

$E$ , кэВ	40	20	10	5	3	
$D(\text{SiC}_{0,7})$ , $10^{17}$ $\text{cm}^{-2}$	2,80	0,96	0,495	0,165	0,115	
Профиль $N_C(\text{Gibbons})$ [14]	$R_p(E)$ , нм	93,0	47,0	24,0	12,3	7,5
	$\Delta R_p(E)$ , нм	34,0	21,0	13,0	7,0	4,3

### Результаты

Методом Оже-электронной спектроскопии определен в процентном соотношении элементный состав приповерхностного слоя кремния после имплантации ионов углерода (а) с энергиями и дозами согласно таблице 1 и отжига при температуре  $1250^\circ\text{C}$  в течение 30 мин (б) (рисунок 1).

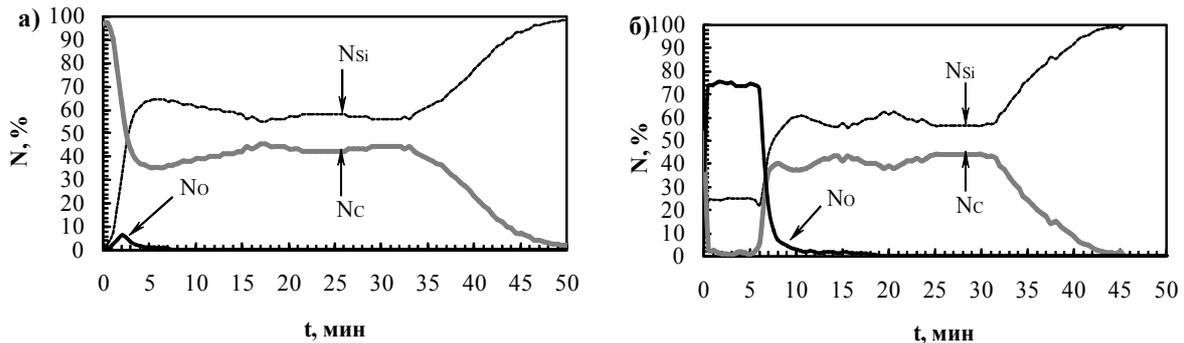


Рисунок 1 – Элементный состав приповерхностного слоя кремния после имплантации ионов углерода (а) (таблица 1) и отжига при температуре  $1250^\circ\text{C}$  в течение 30 мин (б), определенный методом Оже-электронной спектроскопии в зависимости от времени травления пучком ионов аргона

На рисунке 2 представлен расчетный профиль  $N_C(\text{Gibbons})$  распределения атомов углерода по глубине кремния для значений энергий и доз ионов согласно таблице 1, который является суммой гауссовых распределений, построенных с использованием величин  $R_p(E)$  и  $\Delta R_p(E)$  [14] (LSS) в соответствии с выражением:

$$N(x) = \frac{D}{\Delta R_p (2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2}\right], \quad (1)$$

где  $x$  – расстояние от поверхности (таблица 2). При этом сконструированный профиль распределения внедренных атомов оказался по форме близок к прямоугольному с широким переходным слоем «пленка-подложка».

Распределение величин  $N_C/N_{\text{Si}}$  построено, исходя из допущения, что концентрация атомов Si после имплантации существенным образом не меняется по глубине и приблизительно равна концентрации в монокристалле кремния, то есть  $N_{\text{Si}} = 5 \cdot 10^{22}$   $\text{cm}^{-3}$ . Действительно, концентрация атомов кремния в монокристалле карбида кремния не отличается существенно и равна  $4,83 \cdot 10^{22}$   $\text{cm}^{-3}$ . Это допущение имеет важное значение при высокодозовой имплантации ионов  $^{12}\text{C}^+$  в Si и основано на факте, что объем алмазоподобной элементарной ячейки карбида кремния (SiC) приблизительно в два раза меньше объема элементарной ячейки (Si) и высокодозовая имплантация углерода не

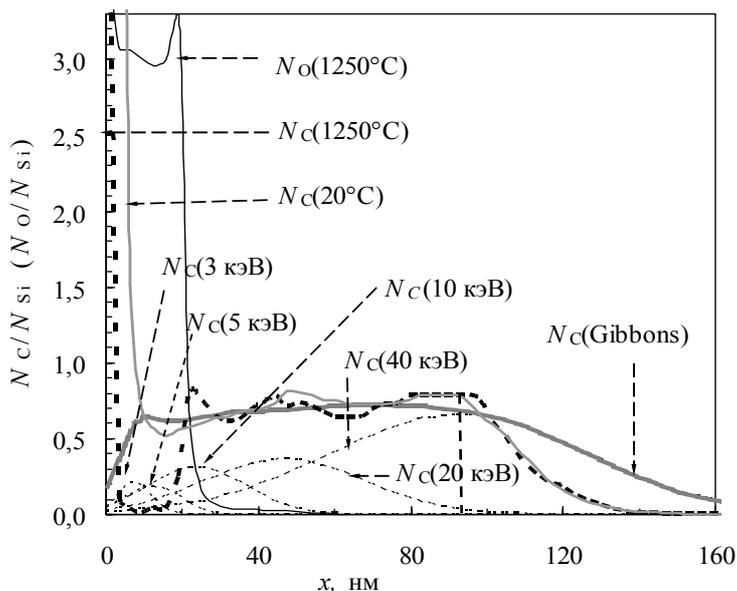


Рисунок 2 – Профиль распределения  $^{12}\text{C}$  в Si (слой  $\text{SiC}_{0,7}$ ), полученный методом ионной имплантации (таблица 1):  $N_{\text{C}}(\text{Gibbons}) = N_{\text{C}}(40 \text{ кэВ}) + N_{\text{C}}(20 \text{ кэВ}) + N_{\text{C}}(10 \text{ кэВ}) + N_{\text{C}}(5 \text{ кэВ}) + N_{\text{C}}(3 \text{ кэВ})$  – расчетный профиль, построенный в соответствии с [16],  $N_{\text{C}}(20^\circ\text{C})$ ,  $N_{\text{C}}(1250^\circ\text{C})$  и  $N_{\text{O}}(1250^\circ\text{C})$  – Оже профили атомов углерода и кислорода, соответственно, в слое после имплантации ( $20^\circ\text{C}$ ) и отжига при  $T = 1250^\circ\text{C}$  в течение 30 минут

сопровождается существенными процессами набухания слоя. Разумеется, допущение справедливо только при условии  $N_{\text{C}} < N_{\text{Si}}$ . Действительно, большинство стандартных методов моделирования ионной имплантации сформулировано в приближении низких доз легирования [15, 16]. По мнению [17], такой подход не учитывает целого ряда эффектов, проявляющихся при высокодозовой ионной имплантации и связанных с процессом накопления имплантированной примеси, каскадного перемешивания, распыления и набухания мишени.

Здесь же приведены экспериментальные кривые  $N_{\text{C}}/N_{\text{Si}}$  и  $N_{\text{O}}/N_{\text{Si}}$  [рисунок 2, кривые  $N_{\text{C}}(20^\circ\text{C})$ ,  $N_{\text{C}}(1250^\circ\text{C})$  и  $N_{\text{O}}(1250^\circ\text{C})$ ], полученные методом Оже-электронной спектроскопии, показывающие отношение концентраций атомов С и О к Si по глубине образца после имплантации ( $20^\circ\text{C}$ ) и отжига при  $1250^\circ\text{C}$  в течение 30 мин в атмосфере Ar.

Однако в результате послойного элементного анализа методом Оже-электронной спектроскопии обычно получают зависимость процентного соотношения количества атомов элементов от времени травления поверхности пучком ионов Ar. Трансформация этой зависимости в распределение атомов по глубине представляет собой отдельную задачу. В данном случае при построении экспериментальных зависимостей распределения атомов по глубине сделано предположение, что переходный слой «пленка-подложка» для расчетного и экспериментальных профилей начинается приблизительно на одинаковой глубине [ $R_p(40 \text{ кэВ}) = 93 \text{ нм}$ ]. Кроме того, распределения по глубине построены исходя из условия, что количество атомов С в Si после имплантации, а, следовательно, интегралы и площади под кривыми  $N_{\text{C}}(\text{Gibbons})$  и  $N_{\text{C}}(20^\circ\text{C})$ , в первом приближении должны совпадать (таблица 2). На этом этапе эффекты распыления поверхности не учитываются.

Как выяснилось, суммарные площади под этими кривыми, определенные как  $\Sigma(N_{\text{C}}/N_{\text{Si}}) \cdot \Delta x$  (где  $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 3,17105 \text{ нм}$  – толщина  $i$ -го слоя, а  $N_{\text{C}}/N_{\text{Si}}$  – отношение концентраций в середине  $i$ -го слоя), оказались равны  $S_{\text{G}} = S_{20^\circ\text{C}} = 89,8 \text{ ед.}$  (или 100%) (таблица 2), а после отжига при  $1250^\circ\text{C}$ :  $S_{1250^\circ\text{C}} = 71,3 \text{ ед.}$  (или 79,4%) в связи с появлением слоя оксида кремния. При этом равенство  $S_{\text{G}} = S_{20^\circ\text{C}}$  не соблюдается, если  $\Delta x \neq 3,17105 \text{ нм}$ .

В тонком приповерхностном слое величина  $N_{\text{C}}/N_{\text{Si}} \geq 1$  и достигает величин 5,2 и 48 (таблица 2). Однако увеличение  $N_{\text{C}}/N_{\text{Si}}$  происходит не из-за соответствующего роста концентрации атомов углерода, а вследствие уменьшения концентрации атомов кремния и существенного нарушения условия  $N_{\text{кремний}} = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Действительно, в этой области процентное содержание атомов Si существенно меняется по глубине (от 0 до 62% в пределах 0-4 мин травления ионами Ar) (рисунок 1a) и

Таблица 2 – Величины  $k = N_C/N_{Si}$  по глубине кремния, имплантированного ионами углерода с энергиями 40, 20, 10, 5 и 3 кэВ ( $N_C(x) = [D/(\Delta R_p \sqrt{2\pi})] \cdot \exp[-(x - R_p)^2 / 2\Delta R_p^2]$ ) и величины элементарных площадей  $S_i$ , пропорциональных количеству атомов углерода в слоях  $i$  толщиной 3,17 нм

E, кэВ	40	20	10	5	3	$N_C/N_{Si} = [N_C(40 \text{ кэВ}) + N_C(20 \text{ кэВ}) + N_C(10 \text{ кэВ}) + N_C(5 \text{ кэВ}) + N_C(3 \text{ кэВ})] / (5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3})$			Площадь элемента под кривой профиля $S_i = \Delta x \cdot (k_i + k_{i+1}) / 2$ , где $k = N_C/N_{Si} \leq 2,3$ $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 3,17105$		
						расчетн. Gibbons	экспер. 20°C	экспер. 1250°C	$S_{Gibbons}$	$S_{20^\circ C}$	$S_{1250^\circ C}$
Rp, нм	93	47	24	12,3	7,5						
$\Delta R_p$ , нм	34	21	13	7	4,3						
D, $10^{17} \text{ см}^{-2}$	2,80	0,96	0,50	0,165	0,115	4,54	4,54	4,54	4,54	4,54	4,54
x, нм	k = Nc/Nsi								$S_{Gibbons}$	$S_{20^\circ C}$	$S_{1250^\circ C}$
0,0	0,016	0,030	0,056	0,040	0,047	0,188	48,000	5,200	0,861	7,293	3,812
3,2	0,020	0,041	0,085	0,080	0,129	0,355	11,100	0,104	1,420	6,046	0,230
6,3	0,026	0,056	0,122	0,131	0,206	0,540	1,513	0,041	1,865	3,464	0,078
9,5	0,032	0,074	0,165	0,174	0,191	0,636	0,672	0,008	2,019	1,971	0,089
12,7	0,040	0,096	0,210	0,188	0,103	0,637	0,571	0,048	1,996	1,722	0,133
15,9	0,050	0,121	0,252	0,165	0,032	0,621	0,515	0,036	1,970	1,703	0,453
19,0	0,062	0,150	0,285	0,119	0,006	0,621	0,559	0,250	1,985	1,806	1,681
22,2	0,075	0,182	0,304	0,069	0,001	0,631	0,580	0,810	2,020	1,884	2,481
25,4	0,091	0,215	0,305	0,033	0,000	0,644	0,608	0,755	2,064	1,977	2,236
28,5	0,109	0,248	0,289	0,013	0,000	0,658	0,639	0,655	2,107	2,026	2,017
31,7	0,129	0,280	0,257	0,004	0,000	0,671	0,639	0,617	2,139	2,079	1,982
34,9	0,152	0,309	0,216	0,001	0,000	0,678	0,672	0,633	2,158	2,167	2,096
38,1	0,178	0,333	0,171	0,000	0,000	0,682	0,695	0,689	2,168	2,213	2,261
41,2	0,206	0,351	0,128	0,000	0,000	0,685	0,701	0,737	2,177	2,283	2,407
44,4	0,237	0,362	0,090	0,000	0,000	0,688	0,739	0,781	2,190	2,469	2,359
47,6	0,269	0,365	0,059	0,000	0,000	0,693	0,818	0,707	2,208	2,569	2,289
50,7	0,303	0,359	0,037	0,000	0,000	0,699	0,802	0,737	2,229	2,518	2,289
53,9	0,339	0,346	0,022	0,000	0,000	0,707	0,786	0,707	2,251	2,442	2,196
57,1	0,376	0,325	0,012	0,000	0,000	0,713	0,754	0,678	2,270	2,391	2,088
60,2	0,413	0,299	0,006	0,000	0,000	0,718	0,754	0,639	2,283	2,343	2,026
63,4	0,450	0,269	0,003	0,000	0,000	0,722	0,724	0,639	2,292	2,296	2,026
66,6	0,486	0,236	0,001	0,000	0,000	0,723	0,724	0,639	2,294	2,296	2,115
69,8	0,520	0,203	0,001	0,000	0,000	0,724	0,724	0,695	2,293	2,296	2,250
72,9	0,552	0,170	0,000	0,000	0,000	0,722	0,724	0,724	2,288	2,320	2,296
76,1	0,581	0,140	0,000	0,000	0,000	0,720	0,739	0,724	2,280	2,367	2,394
79,3	0,606	0,112	0,000	0,000	0,000	0,718	0,754	0,786	2,270	2,442	2,492
82,4	0,626	0,088	0,000	0,000	0,000	0,714	0,786	0,786	2,256	2,492	2,492
85,6	0,642	0,067	0,000	0,000	0,000	0,709	0,786	0,786	2,238	2,492	2,492
88,8	0,652	0,050	0,000	0,000	0,000	0,702	0,786	0,786	2,213	2,492	2,492
92,0	0,657	0,037	0,000	0,000	0,000	0,694	0,786	0,786	2,181	2,418	2,492
95,1	0,656	0,026	0,000	0,000	0,000	0,682	0,739	0,786	2,140	2,207	2,442
98,3	0,649	0,018	0,000	0,000	0,000	0,668	0,653	0,754	2,088	1,974	2,167
101,5	0,637	0,013	0,000	0,000	0,000	0,650	0,592	0,613	2,026	1,774	1,788
104,6	0,620	0,008	0,000	0,000	0,000	0,628	0,527	0,515	1,952	1,532	1,463
107,8	0,598	0,006	0,000	0,000	0,000	0,603	0,439	0,408	1,868	1,259	1,148
111,0	0,571	0,004	0,000	0,000	0,000	0,575	0,355	0,316	1,773	1,010	0,897
114,2	0,541	0,002	0,000	0,000	0,000	0,544	0,282	0,250	1,671	0,772	0,721
117,3	0,509	0,001	0,000	0,000	0,000	0,510	0,205	0,205	1,561	0,566	0,604
120,5	0,474	0,001	0,000	0,000	0,000	0,475	0,152	0,176	1,447	0,417	0,474
123,7	0,437	0,000	0,000	0,000	0,000	0,438	0,111	0,123	1,330	0,304	0,331
126,8	0,400	0,000	0,000	0,000	0,000	0,401	0,081	0,086	1,212	0,220	0,228

130,0	0,363	0,000	0,000	0,000	0,000	0,363	0,058	0,058	1,095	0,159	0,146
133,2	0,327	0,000	0,000	0,000	0,000	0,327	0,042	0,034	0,980	0,108	0,086
136,4	0,291	0,000	0,000	0,000	0,000	0,291	0,026	0,020	0,871	0,073	0,048
139,5	0,258	0,000	0,000	0,000	0,000	0,258	0,020	0,010	0,767	0,055	0,024
142,7	0,226	0,000	0,000	0,000	0,000	0,226	0,015	0,005	0,669	0,040	0,008
145,9	0,196	0,000	0,000	0,000	0,000	0,196	0,010	0,000	0,579	0,025	0,000
149,0	0,169	0,000	0,000	0,000	0,000	0,169	0,006	0,000	0,497	0,016	0,000
152,2	0,144	0,000	0,000	0,000	0,000	0,144	0,004	0,000	0,422	0,010	0,000
155,4	0,122	0,000	0,000	0,000	0,000	0,122	0,002	0,000	0,356	0,003	0,000
158,6	0,102	0,000	0,000	0,000	0,000	0,102	0,000	0,000	0,297	0,000	0,000
161,7	0,085	0,000	0,000	0,000	0,000	0,085	0,000	0,000	0,246	0,000	0,000
164,9	0,070	0,000	0,000	0,000	0,000	0,070	0,000	0,000	0,202	0,000	0,000
168,1	0,057	0,000	0,000	0,000	0,000	0,057	0,000	0,000	0,165	0,000	0,000
171,2	0,047	0,000	0,000	0,000	0,000	0,047	0,000	0,000	0,133	0,000	0,000
174,4	0,037	0,000	0,000	0,000	0,000	0,037	0,000	0,000	0,106	0,000	0,000
177,6	0,030	0,000	0,000	0,000	0,000	0,030	0,000	0,000	0,084	0,000	0,000
180,7	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,024	0,000	0,000	0,066	0,000	0,000
183,9	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,018	0,000	0,000	0,052	0,000	0,000
187,1	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,014	0,000	0,000	0,040	0,000	0,000
190,3	0,011	0,000	0,000	0,000	0,000	0,011	0,000	0,000	0,031	0,000	0,000
193,4	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,008	0,000	0,000	0,023	0,000	0,000
196,6	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,006	0,000	0,000	0,018	0,000	0,000
199,8	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005	0,000	0,000	0,013	0,000	0,000
202,9	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,000	0,000	0,010	0,000	0,000
206,1	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,000	0,000	0,007	0,000	0,000
209,3	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000	0,005	0,000	0,000
212,5	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,004	0,000	0,000
215,6	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,003	0,000	0,000
218,8	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000
222,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000
Итого ( $\Sigma S_{(0-222 \text{ нм})}$ ), ед.:									89,80	89,80	71,32
Итого ( $\Sigma S_{(0-222 \text{ нм})}$ ), %:									100,0 0	100,00	79,42
Итого ( $\Sigma S_{(22,2-222 \text{ нм})}$ ), ед.:									77,68	65,80	64,85
Итого ( $\Sigma S_{(22,2-222 \text{ нм})}$ ), %:									86,51	73,27	72,21

его концентрация много меньше, чем  $5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ . Кривая профиля  $N_C/N_{Si}$  в этой области не отражает распределение атомов углерода. Слой по составу преимущественно состоит из атомов углерода и  $N_C/N_{Si} \sim 48$ , но его концентрация не более чем в 2,3 раза ( $N_{\text{графит}} = 11,6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ) превосходит концентрацию атомов углерода в карбиде кремния. Поэтому при оценке количества атомов углерода в тонкой приповерхностной области, где  $N_C > N_{Si}$ , было сделано допущение, что  $N_C/N_{Si}$  не превышает 2,3 ( $N_{\text{графит}} = 11,6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и  $N_{\text{кремний}} = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ).

Площади под кривыми профиля для участка  $x > 22,2 \text{ нм}$  оказались оценочно  $S_G = 77,7 \text{ ед}$ ,  $S_{20^\circ\text{C}} = 65,8 \text{ ед}$  и  $S_{1250^\circ\text{C}} = 64,8 \text{ ед}$ , или 86,5%, 73,3% и 72,2%, соответственно (таблица 2). Эти величины до и после отжига для  $x > 22,2 \text{ нм}$  почти равны, но меньше расчетной, так как существенная часть атомов углерода после имплантации оказалась сконцентрированной возле поверхности ( $0 < x < 8 \text{ нм}$ ), при этом после отжига произошла десорбция углерода из слоя  $0 < x < 22,2 \text{ нм}$  с формированием оксида кремния.

В итоге можно заключить, что синтезирован однородный слой  $\text{SiC}_{0,7}$ , концентрация углерода в котором в процессе высокотемпературного отжига не изменяется. Наблюдается окисление поверхности слоя. В первом приближении около 20,6% углерода в процессе отжига при температуре

1250°C в течение 30 мин десорбировало из слоя. Средние значения концентрации углерода и кислорода составили:  $N_C/N_{Si} = 0,7$  в интервале  $22,2 < x < 110$  нм и  $N_O/N_{Si} \approx 3,0$  в поверхностном слое  $0 < x < 22,2$  нм. Значительный избыток атомов кислорода над стехиометрическим составом диоксида кремния ( $SiO_2$ ) свидетельствует о насыщении приповерхностного слоя атомами кислорода после отжига. При этом наблюдается проникновение атомов кислорода до 45 нм вглубь слоя. Граница «пленка SiC – подложка Si» в эксперименте оказалась более резкой, чем ожидалось.

На рисунке 2 видно, что имеются некоторые различия между формой экспериментальных и расчетной кривых профиля распределения углерода. Распределение  $N_C$ (Gibbons) построено без учета эффекта распыления и изменения состава слоя при высокодозовой имплантации. Учет эффекта распыления поверхности при высокодозовой имплантации ионов углерода (40 кэВ,  $2,8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ ) предполагает смещение профиля вглубь слоя с ростом дозы, то есть к некоторому расширению профиля и, как следствие, к уменьшению концентрации углерода в пике распределения по сравнению с расчетным значением, поскольку площадь под кривой профиля должна остаться неизменной. Однако изменение состава подложки во время имплантации от монокристаллического Si до смеси атомов C и Si предполагает появление значительного количества Si–C- и C–C-связей, двойных Si=C-, C=C- и тройных связей, которые являются более сильными, чем Si–Si-связи, а также появление прочных углеродных и углеродно-кремниевых кластеров. Это приводит к уменьшению величин  $R_p(E)$  и  $\Delta R_p(E)$  во время имплантации.

Уменьшение  $R_p(E)$  снижает влияние эффекта распыления поверхности на положение максимума распределения атомов углерода, который должен остаться почти на прежней глубине. А уменьшение  $\Delta R_p(E)$  должно вызвать рост концентрации углерода в максимуме пика и более резкое его снижение в направлениях вглубь и к поверхности слоя. Это вызовет уменьшение глубины залегания перехода «пленка SiC – подложка Si», который становится более резким с ростом дозы, а также появления впадины между максимумами 40 и 20 кэВ и, возможно, между 20 и 10 кэВ. Действительно, на рисунке 2 [кривые  $N_C(20^\circ\text{C})$  и  $N_C(1250^\circ\text{C})$ ] для слоя  $SiC_{0,7}$  наблюдаются впадины на глубине 60–75 нм, которые могут быть вызваны этими эффектами.

Распыление поверхности при имплантации ионов углерода с энергиями 10, 5 и 3 кэВ должно привести к увеличению концентрации углерода у поверхности за счет сдвига максимумов распределения  $N_C(3 \text{ кэВ})$  и  $N_C(5 \text{ кэВ})$  в направлении максимума  $N_C(10 \text{ кэВ})$ . В результате этого наблюдается значительный рост концентрации углерода у поверхности.

Можно провести приблизительную оценку толщины слоя, подвергшегося распылению. Как видно из таблицы 2, в случае расчетного профиля величина  $x = R_p + \Delta R_p$  для ионов с энергией 40 кэВ составляет  $93 + 34 = 127$  нм, которой соответствует относительная концентрация углерода  $N_C/N_{Si} = 0,40$ . В случае Оже-профилей до и после отжига величина  $N_C/N_{Si} = 0,40$  соответствует глубине  $x \approx 109$  нм. Так как переходный слой «пленка-подложка» для расчетного и экспериментальных профилей начинается на одинаковой глубине  $R_p(40 \text{ кэВ}) = 93$  нм, то уменьшение глубины залегания должно произойти вследствие уменьшения  $\Delta R_p$  с 34 до 16 нм ( $93 + 16 = 109$  нм).

Мы предполагаем, что уменьшение толщины слоя вследствие распыления было сравнимо с уменьшением величины  $R_p$  вследствие изменения состава слоя. Можно произвести оценку величины толщины слоя, подвергшегося распылению.

Как известно [18, с. 113], основным параметром, характеризующим процесс распыления, является коэффициент распыления  $K$  – число атомов, выбиваемых одним падающим ионом. Толщина  $h$  (м) распыленного слоя материала мишени равна  $h = DK/N_0$ , где  $D$  – доза ионов ( $\text{м}^{-2}$ ),  $N_0$  – концентрация атомов в мишени ( $\text{м}^{-3}$ ).

Согласно модели, описывающей механизм катодного распыления [19, с. 20-21], коэффициент распыления для изотропных мишеней определяется выражением:

$$K = \frac{2K_0 \cdot N \cdot \sigma}{F \cdot E_s} \cdot \frac{\sqrt{E/E_m}}{(1 + E/E_m)}. \quad (2)$$

Здесь  $E$  – энергия бомбардирующих мишень ионов;  $N$  – концентрация атомов мишени, которую можно рассчитать по формуле

$$N = \frac{\rho}{M} N_A, \quad (3)$$

где  $\rho$  и  $M$  – плотность и молярная масса материала мишени, соответственно;  $N_A$  – число Авогадро.

Коэффициент  $K_0$  зависит от заряда ядра бомбардирующих ионов  $z_1$  и атомов мишени  $z_2$  и периодически изменяются с изменением  $z_2$  [19]:

при  $3 \leq z_2 \leq 16$

$$K_0 = 1,3 \cdot 10^{-10} \cdot z_2^{1/2} \left( 1 + 0,25 \cdot \cos \left( \frac{2\pi z_2}{8} \right) \right) - 4,65 \cdot 10^{-12} (z_1 - 18) \text{ см}, \quad (4)$$

при  $z_2 \geq 19$

$$K_0 = 1,3 \cdot 10^{-10} \cdot z_2^{1/2} \left( 1 + 0,25 \cdot \cos \left( \frac{2\pi(z_2 + 2)}{18} \right) \right) - 4,65 \cdot 10^{-12} (z_1 - 18) \text{ см}. \quad (5)$$

Сечение экранирования  $\sigma = \pi a^2$ , где  $a$  – радиус экранирования, рассчитываемый по формуле [19]:

$$a = \frac{4,7 \cdot 10^{-9}}{\left( z_1^{2/3} + z_2^{2/3} \right)^{1/2}} \text{ см}. \quad (6)$$

Нормирующий коэффициент энергии  $F$  определяется по формуле [19]:

$$F = \frac{6,9 \cdot 10^6 \cdot a \cdot M_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot (M_1 + M_2)} \text{ эВ}^{-1}, \quad (7)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – молярные массы бомбардирующих ионов и атомов мишени соответственно.  $E_m$  – это энергия, соответствующая максимуму в зависимости  $K(E)$ . Она связана с нормирующим коэффициентом энергии  $F$  соотношением  $E_m = 0,3/F$ . Энергия сублимации  $E_s$  для кремния равна 3,91 [19].

Результаты вычислений величин, представленных в выражениях (2)–(7), приведены в таблице 3. Величины коэффициентов распыления в таблице 3 получены для случая имплантации ионов углерода в кремний и не учитывают изменения состава пленки.

Таблица 3 – К расчету коэффициента  $K$  распыления кремния ионами углерода с энергиями 40, 20, 10, 5 и 3 кэВ в соответствии с выражением (2)

E	40000	20000	10000	5000	3000
$N_{Si}$	$4,996 \cdot 10^{22}$				
$Z_1$	6	6	6	6	6
$Z_2$	14	14	14	14	14
$K_0$	$5,422 \cdot 10^{-10}$				
$\rho_2$	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33
$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23}$				
$M_1$	12,011	12,011	12,011	12,011	12,011
$M_2$	28,086	28,086	28,086	28,086	28,086
$A$	$1,557 \cdot 10^{-9}$				
$\Sigma$	$7,617 \cdot 10^{-18}$				
$F$	$8,961 \cdot 10^{-5}$				
$E_m$	3347,81	3347,81	3347,81	3347,81	3347,81
$E_s$	3,91	3,91	3,91	3,91	3,91
$E/E_m$	11,948	5,974	2,987	1,494	0,896
$K$	0,314	0,413	0,511	0,577	0,588
$D$	$2,8 \cdot 10^{17}$	$0,96 \cdot 10^{17}$	$0,495 \cdot 10^{17}$	$0,165 \cdot 10^{17}$	$0,115 \cdot 10^{17}$
$h, \text{ нм}$	17,63	7,93	5,06	1,91	1,35
$\Sigma h, \text{ нм}$	33,88				

Таким образом, распыление кремния ионами углерода с энергиями и дозами согласно таблице 1 приводит к уменьшению толщины имплантированного слоя на 33,9 нм. Однако изменение состава слоя при высокодозовой имплантации и появление значительного количества Si–C- и C–C- связей, двойных Si=C-, C=C- и тройных связей, которые являются более сильными, чем Si–Si-связи, а также появление прочных углеродных и углеродно-кремниевых кластеров приведет к уменьшению коэффициента распыления и толщины распыленного слоя. При этом также происходит уменьшение толщины всего имплантированного слоя за счет уменьшения величин  $R_p$  и  $\Delta R_p$ . Таким образом, предполагается существенное уменьшение толщины слоя. Принципиальное отличие от имплантации других типов ионов, например, азота [17], заключается в отсутствии распухания слоя, приводящего к компенсации уменьшения толщины слоя за счет уменьшения величин  $R_p$  и  $\Delta R_p$ , вызванного увеличением плотности имплантируемой подложки. Все это предполагает продолжение исследований с применением современных программ расчета (TRIM, SRIM и др.), позволяющих решать задачи распыления неоднородных по составу и многослойных мишеней, а также программ, предназначенных для расчета профилей распределения при высокодозовой ионной имплантации.

Кроме того, формирование резкого перехода «пленка SiC – подложка Si» в случае высокодозовой имплантации ионов углерода в кремний позволяет предположить, что можно провести измерения толщины и плотности пленки методом рентгеновской рефлектометрии. Этот метод используется для осажденных пленок с очень резким переходом «пленка-подложка» и для ионно-имплантированных слоев обычно не применяется. Поэтому будут продолжены исследования имплантированного слоя методом рентгеновской рефлектометрии.

**Заключение.** Синтезирован однородный слой SiC<sub>0,7</sub>, концентрация углерода в котором в процессе высокотемпературного отжига существенно не изменяется. Наблюдается окисление поверхности слоя. Средние значения концентрации углерода и кислорода составили:  $N_C/N_{Si} = 0,7$  в интервале  $22,2 < x < 110$  нм и  $N_O/N_{Si} \approx 3,0$  в поверхностном слое  $0 < x < 22,2$  нм. Значительный избыток атомов кислорода над стехиометрическим составом диоксида кремния (SiO<sub>2</sub>) свидетельствует о насыщении приповерхностного слоя атомами кислорода после отжига. В первом приближении около 20,6% атомов углерода в процессе отжига при температуре 1250°C в течение 30 мин десорбировало из слоя. При этом наблюдается проникновение атомов кислорода до 45 нм вглубь слоя. Граница «пленка SiC – подложка Si» в эксперименте оказалась более резкой, чем ожидалось.

Показано, что деформация прямоугольного Оже профиля распределения атомов C в Si по сравнению с расчетным профилем, проявляющаяся в утончении переходной области «SiC пленка – подложка Si», увеличении концентрации углерода у поверхности и в областях между максимумами распределения углерода для отдельных энергий ионов (40, 20 кэВ), обусловлена эффектами распыления поверхности и изменением состава слоя при высокодозовой имплантации углерода в кремний. Вычислены коэффициенты распыления  $K$  подложки Si ионами C<sup>+</sup> с энергиями 40, 20, 10, 5 и 3 кэВ, которые составили:  $K_{40} = 0,314$ ,  $K_{20} = 0,413$ ,  $K_{10} = 0,511$ ,  $K_5 = 0,577$  и  $K_3 = 0,588$ . Толщина распыленного слоя кремния для использованных в работе доз ионов составила 33,9 нм. Предположено уменьшение толщины имплантированного и распыленного слоев вследствие увеличения плотности и изменения состава слоя.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Liao F., Girshick S.L., Mook W.M., Gerberich W.W., Zachariah M.R. Superhard nanocrystalline silicon carbide films // Appl. Phys. Lett. – 2005. – Vol. 86. – P. 171913-171915.
- 2 Афанасьев А.В., Ильин В.А., Корляков А.В., Лебедев А.О., Лучинин В.В., Таиров Ю.М. Карбид кремния. Вклад СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Признание и перспективы // В кн. Физика и Технология микро- и наносистем / Под редакцией В. В. Лучинина и В. В. Малиновского. – СПб.: Изд. "Русская коллекция", 2011. – С. 50-86.
- 3 Oguri K., Sekigawa T. Heat resistant material and hot structure member both space shuttle, space shuttle, and method for producing heat resistant material for space shuttle // United State Patent. – Sep.16, 2004. – Pub. № US 2004/0180242 A1.
- 4 Yan H., Wang B., Song X.M., Tan L.W., Zhang S.J., Chen G.H., Wong S.P., Kwok R.W.M., Leo W.M.L. Study on SiC layers synthesized with carbon ion beam at low substrate temperature // Diamond and related materials. – 2000. – Vol. 9. – P. 1795-1798.
- 5 Chen D., Wong S.P., Yang Sh., Mo D. Composition, structure and optical properties of SiC buried layer formed by high dose carbon implantation into Si using metal vapor vacuum arc ion source // Thin Solid Films. – 2003. – Vol. 426. – P. 1-7.
- 6 Liangdeng Y., Intarasiri S., Kamwanna T., Singkarat S. Ion beam synthesis and modification of silicon carbide // In book: Ion beam applications in surface and bulk modification of insulators. – Austria, Vienna: IAEA-TECDOC-1607. – 2008. – P. 63-92.

- 7 Lindner J.K.N. High-dose carbon implantations into silicon: fundamental studies for new technological tricks // *Appl. Phys. A.* – 2003. – Vol. 77. – P. 27-38.
- 8 Borders J.A., Picraux S.T., Beezhold W. Formation of SiC in silicon by ion implantation // *Appl. Phys. Lett.* – 1971. – Vol. 18. – 11. – P. 509-511.
- 9 Bayazitov R.M., Haibullin I.B., Batalov R.I., Nurutdinov R.M., Antonova L.Kh., Aksenov V.P., Mikhailova G.N. Structure and photoluminescent properties of SiC layers on Si, synthesized by pulsed ion-beam treatment // *Nucl. Instrum. and Meth. in Phys. Res. B.* – 2003. – Vol. 206. – P. 984-988.
- 10 Serre C., Romano-Rodríguez A., Pérez-Rodríguez A., Morante J. R., Fonseca L., Acero M.C., Kögler R. and Skorupa W.  $\beta$ -SiC on SiO<sub>2</sub> formed by ion implantation and bonding for micromechanics applications // *Sensors and Actuators A (Physical)*. – 1999. – 74. – № 1-3. – P. 169-173.
- 11 Tetelbaum D.I., Mikhaylov A.N., Belov A.I., Vasiliev V.K., Kovalev A.I., Wainshtein D.L., Golan Y., Osherov A. Luminescence and structure of nanosized inclusions formed in SiO<sub>2</sub> layers under double implantation of silicon and carbon ions // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* – 2009. – Vol. 3, N 5. – P. 702-708.
- 12 Nussupov K. Kh. and Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si // In book: *Silicon Carbide – Materials, Processing and Applications in Electronic Devices / Moumita Mukherjee (Ed.)*. – Chapter 4. – Rijeka, Croatia: *InTech*. – 2011. – P. 69-114.
- 13 Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers // *Journal of Materials Science: Materials in Electronics.* – 2008. – 19. – P. 254-262.
- 14 Gibbons J.F., Johnson W.S., Mylroie S.W. *Projected Range Statistics: Semiconductors and Related Materials.* – 2nd Ed. – Stroudsburg, Penn: Dowden, Hutchinson and Ross, Inc. – 1975.
- 15 Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U. *The Stopping and Range of Ions in Solids.* – New York: Pergamon Press, 1985.
- 16 Burenkov A.F., Komarov F.F., Kumakhov M.A., Temkin M.M. *Tables of Ion Implantation Spatial Distributions.* – New York; London; Paris: Gordon and Breach, 1986.
- 17 Комаров А.Ф. Моделирование процесса двухпучковой высокодозной ионной имплантации в твердотельные мишени // *Журнал технической физики.* – 2001. – Т. 71, вып. 11. – С. 119-123.
- 18 Данилина Т.И., Кагадей В.А. *Технология СБИС.* – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2007. – 287 с.
- 19 Смирнов В.И. *Физико-химические основы технологии электронных средств.* – Ульяновск: УЛГТУ, 2006. – 22 с.

#### REFERENCES

- 1 Liao F., Girshick S.L., Mook W.M., Gerberich W.W., Zachariah M.R. Superhard nanocrystalline silicon carbide films. *Appl. Phys. Lett.* **2005**. Vol. 86. P. 171913.
- 2 Afanas'ev A.V., Il'in V.A., Korlyakov A.V., Lebedev A.O., Luchinin V.V., Tairov Yu.M. Karbid kremniya. Vklad SPbGETU «LETI». Priznanie i perspektivy. V kn.: *Fizika i tekhnologiya mikro- i nanosistem. Pod redakciei Luchinina V.V. i Malinovskogo V.V. Sankt-Peterburg: Izd. "Russkaya kolleksiya". 2011. S. 50–86.* (in Russ.).
- 3 Oguri K., Sekigawa T. Heat resistant material and hot structure member both space shuttle, space shuttle, and method for producing heat resistant material for space shuttle. *United State Patent. Sep.16, 2004. Pub. № US 2004/0180242 A1.*
- 4 Yan H., Wang B., Song X.M., Tan L.W., Zhang S.J., Chen G.H., Wong S.P., Kwok R.W.M., Leo W.M.L. Study on SiC layers synthesized with carbon ion beam at low substrate temperature. *Diamond and related materials.* **2000**. V. 9. P. 1795–1798.
- 5 Chen D., Wong S.P., Yang Sh., Mo D. Composition, structure and optical properties of SiC buried layer formed by high dose carbon implantation into Si using metal vapor vacuum arc ion source. *Thin Solid Films.* **2003**. V. 426. P.1–7.
- 6 Liangdeng Y., Intarasiri S., Kamwanna T., Singkarat S. Ion beam synthesis and modification of silicon carbide. In book: *Ion beam applications in surface and bulk modification of insulators. Austria, Vienna: IAEA-TECDOC-1607. 2008. P. 63–92.*
- 7 Lindner J.K.N. High-dose carbon implantations into silicon: fundamental studies for new technological tricks. *Appl.Phys. A.* **2003**. Vol. 77. P. 27-38.
- 8 Borders J.A., Picraux S.T., Beezhold W. Formation of SiC in silicon by ion implantation. *Appl.Phys.Lett.* **1971**. V. 18. 11. P. 509–511.
- 9 Bayazitov R.M., Haibullin I.B., Batalov R.I., Nurutdinov R.M., Antonova L.Kh., Aksenov V.P., Mikhailova G.N. Structure and photoluminescent properties of SiC layers on Si, synthesized by pulsed ion-beam treatment. *Nucl. Instrum. and Meth. in Phys. Res. B.* **2003**. V. 206. P. 984–988.
- 10 Serre C., Romano-Rodríguez A., Pérez-Rodríguez A., Morante J. R., Fonseca L., Acero M.C., Kögler R. and Skorupa W.  $\beta$ -SiC on SiO<sub>2</sub> formed by ion implantation and bonding for micromechanics applications. *Sensors and Actuators A (Physical)*. **1999**. 74. №1–3. P.169–173.
- 11 Tetelbaum D.I., Mikhaylov A.N., Belov A.I., Vasiliev V.K., Kovalev A.I., Wainshtein D.L., Golan Y., Osherov A. Luminescence and structure of nanosized inclusions formed in SiO<sub>2</sub> layers under double implantation of silicon and carbon ions. *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* **2009**. V. 3. № 5. P. 702–708.
- 12 Nussupov K. Kh. and Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si. In book: *Silicon Carbide - Materials, Processing and Applications in Electronic Devices. Moumita Mukherjee (Ed.). Chapter 4. Rijeka, Croatia: InTech. 2011. P. 69-114.*
- 13 Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics.* **2008**. 19. P. 254–262.
- 14 Gibbons J. F., Johnson W.S., and Mylroie S.W. *Projected Range Statistics: Semiconductors and Related Materials. 2nd Ed. Stroudsburg, Penn: Dowden, Hutchinson and Ross, Inc. 1975.*
- 15 Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U. *The Stopping and Range of Ions in Solids. New York: Pergamon Press. 1985.*

16 Burenkov A.F., Komarov F.F., Kumakhov M.A., Temkin M.M. Tables of Ion Implantation Spatial Distributions. *New York; London; Paris: Gordon and Breach. 1986.*

17 Komarov A.F. Modelirovanie processa dvukhpuchkovoi vysokodoznoi ionnoi implantacii v tverdotelnye misheni. *Zhurnal tehnikeskoj fiziki. 2001. T.71, vyp.11. S. 119-123.* (in Russ.).

18 Danilina T.I., Kagadey V.A. Tehnologiya SBIS. *Tomsk: Tomskii gosudarstvennyi universitet sistem radioupravleniya i elektroniki. 2007. 287 s.* (in Russ.).

19 Smirnov V.I. Fiziko-khimicheskie osnovy tehnologii elektronnykh sredstv. *Ul'yanovsk: UIGTU. 2006. 22 s.* (in Russ.).

### Резюме

*И. Қ. Бейсембетов, К. Х. Нұсіпов, Н. Б. Бейсенханов, С. Қ. Жарықов,  
Б. К. Кенжалиев, Т. К. Ахметов, Б. Ж. Сейітов*

(Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

### C<sup>+</sup> ИОНДАРЫН Si-ГЕ ЖОҒАРЫ МӨЛШЕРДЕ ИМПЛАНТАЦИЯЛАУДАН КЕЙІНГІ КӨМІРТЕГІ АТОМДАРЫНЫҢ КРЕМНИЙДЕ ТАРАЛУЫ

Жұмыста, көп дүркін иондық имплантациялау әдісі арқылы кремний карбидінің біртекті пленкаларын синтездеу жүзеге асырылған. Осы мақсатта энергиялары 40, 20, 10, 5, 3 кэВ көміртегі иондарын монокристалды кремний пластиналарына жоғары мөлшерде имплантациялау жүргізілген. Көміртегі атомдарының кремнийде таралуының есептелген және Оже – электрондық спектроскопия әдісімен алынған эксперименталдық профилдері салыстырылған. Жоғары температуралы күйдіру процесінде көміртегі концентрациясы өзгеріссіз қалатын біртекті SiC<sub>0.7</sub> қабаты синтезделгені көрсетілген. Қабат бетінің тотығуы байқалады. Күйдіруден кейін, кремний костотығының (SiO<sub>2</sub>) стехиометриялық құрамының үстінде оттегі атомдарының айтарлықтай көбеюі беттік қабаттың оттегі атомдарымен қаныққандығын көрсетеді. Зерттеу нәтижелерін нано- және микроэлектроникада, сонымен қатар өндірісте қолданылатын ыстыққа төзімді, қатты және кесуге арналған материалдарды синтездеуде қолдануға болады. «SiC қабыршақ – Si матрица» өтпелі аймағының жіңішкеруінен, иондардың жекелеген энергиялары үшін (40, 20 кэВ) көміртегінің таралуының максимумдарында және қабыршақ бетінде көміртегі концентрациясының артуынан, сонымен қатар осы максимумдар арасында көміртегі концентрациясының азаюынан көрінетін C атомдарының Si де таралуының Оже профилінің деформациясы байқалады. Бұл деформация, қабыршақ бетінің тозандану әсерлерінен және көміртегінің кремнийге жоғары мөлшерде имплантациялау кезінде қабат құрамының өзгеруінен болады.

**Тірек сөздер:** кремний карбиді, иондық имплантация, құрылым, кристалдану.

### Summary

*I. K. Beisembetov, K. Kh. Nussupov, N. B. Beisenkhanov, S. K. Zharikov,  
B. K. Kenzhaliev, T. K. Akhmetov, B.Zh. Seitov*

(Kazakh-British Technical University, Almaty, Republic of Kazakhstan)

### THE DISTRIBUTION OF CARBON ATOMS IN SILICON AFTER HIGH DOSE IMPLANTATION OF C<sup>+</sup> IONS INTO Si

In this paper, the synthesis of homogeneous films of silicon carbide was carried out by multiple ion implantation. For this purpose, the high dose implantation of carbon ions with energies of 40, 20, 10, 5 and 3 keV into monocrystalline silicon wafers was made. The calculated profile of the distribution of carbon atoms in silicon was compared with the same experimental profiles obtained by Auger electron spectroscopy. It was shown that a uniform layer SiC<sub>0.7</sub> was synthesized, wherein the carbon concentration during high temperature annealing was not significantly changed. The oxidation of the surface layer was observed. Considerable excess of oxygen atoms above stoichiometric composition of silicon dioxide (SiO<sub>2</sub>) after annealing indicates a saturation of the surface layer by oxygen atoms. Results may be used in nano- and microelectronics, and in the synthesis of solid, heat-resistant and abrasive materials used in the industry. It is established that the deformation of the rectangular Auger profile of the C atom distribution in Si, which is manifested both in the refinement of the transition region «SiC film - Si substrate» and, in the increase of the carbon concentration both at the surface and at the peaks of carbon distribution for single-energy ions (40, 20 keV), as well as in the decrease of the carbon concentration between these peaks, are caused by the effects of sputtering of the surface and changes in the composition of the layer during high dose carbon implantation into silicon.

**Keywords:** silicon carbide, ion implantation, structure, crystallization.

*Поступила 30.09.2013 г.*

Ю. В. КОЗАЧЕНКО<sup>1</sup>, А. А. ПАШКО<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,  
<sup>2</sup>Европейский университет, Киев, Украина)

## ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОДЕЛЕЙ СУБГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

**Аннотация.** Построены субгауссовские модели для гауссовских случайных процессов, представимых в виде стохастических интегралов. При реальном моделировании не удается получить гауссовские случайные величины, а получаются строго субгауссовские случайные величины. Полученные модели аппроксимируют случайные процессы с заданной точностью и надежностью в нормах пространств Орлича. Изучается скорость сходимости моделей гауссовских случайных процессов.

**Ключевые слова:** модель, скорость сходимости, субгауссовские величины, гауссовские процессы, точность моделирования.

**Тірек сөздер:** үлгі, шығу жылдамдығы, субгаусс шамалары, гаусс үдерістері, үлгілеудің дәлдігі.

**Keywords:** model, rate of convergence, subGaussian variables, Gaussian processes, simulation accuracy.

**Основные определения.** Пусть  $(T, \rho)$  – некоторое метрическое пространство,  $X = \{X(t), t \in T\}$  – случайный процесс, который можно представить в виде

$$X(t) = \sum_{r=1}^N \int_0^{\infty} f_r(t, u) d\xi_r(u),$$

где  $\{\xi_r(u)\}$  субгауссовские случайные процессы [1-2].

Пусть  $(T, \Sigma, \mu)$ ,  $\mu(T) < \infty$  – некоторое измеримое пространство,  $L_U(T)$  – пространство Орлича, порожденное  $C$ -функцией  $U = \{U(x), x \in R\}$ .

**Определение 1.** Пространством Орлича, порожденным функцией  $U(x)$ , называется семейство функций  $\{f(t), t \in T\}$ , таких, что для всех функций  $f(x)$  существует константа  $r$ , такая что

$$\int_T U\left(\frac{f(t)}{r}\right) d\mu(t) < \infty.$$

Пространство  $L_U(T)$  есть банаховим относительно нормы Люксембурга

$$\|f\|_{L_U} = \inf \left\{ r > 0 : \int_T U\left(\frac{f(t)}{r}\right) d\mu(t) \leq 1 \right\}.$$

В качестве  $U(x)$  можно рассмотреть, например, функцию  $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$ ,  $\alpha \geq 1$  [3-4].

**Определение 2.** Семья функций  $f = \{f(t, u), t \in T, u > 0\}$  принадлежит классу  $D_U(c)$ , если все функции  $f_u = \{f(t, u), t \in T\}$  принадлежат пространству Орлича  $L_U(T)$  и существует монотонно неубывающая функция  $c(u) > 0$ ,  $u \geq 0$  такая что для функций  $f(u, \cdot)$  выполняется неравенство

$$\|f(u, \cdot)\|_{L_U} \leq c(u) \|f(u, \cdot)\|_{L_2}.$$

Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – стандартное вероятностное пространство.

**Определение 3.** Случайная величина  $\xi$  называется субгауссовской, если  $E\xi = 0$  и существует такое  $a \geq 0$ , что о для всех  $\lambda \in R^1$  имеет место оценка

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\}.$$

Пространство субгауссових величин  $Sub(\Omega)$  является банаховим относительно нормы [5]

$$\tau(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \left[ \frac{2 \ln E \exp\{\lambda \xi\}}{\lambda^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Оценки скорости сходимости.** Обозначим

$$X_{\Lambda}(t) = \sum_{r=1}^N \int_{\Lambda}^{\infty} f_r(t, u) d\xi_r(u),$$

$$X_a^b(t) = \sum_{r=1}^N \int_a^b f_r(t, u) d\xi_r(u),$$

$$R_a^b(t, \varphi) = \sum_{r=1}^N \int_a^b \varphi(u) f_r(t, u) d\xi_r(u),$$

где  $\varphi = \{\varphi(u), u \geq 0\}$  – некоторая непрерывная слева монотонно неубывающая функция такая, что  $\varphi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$ . Пусть  $\xi_r = \{\xi_r(u), u \geq 0\}, r = 1, \dots, N$  регулярные совместно строго субгауссовские случайные процессы.

**Лемма 1.** Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  регулярный строго субгауссовский случайный процесс из класса  $D_U(c)$ . Тогда для любых  $0 \leq d \leq a < b < \infty$  и  $0 \leq s < 1$  имеет место

$$E \exp\left\{ \frac{s \|X_a^b(t)\|_{L_U}^2}{2(V_a^b(d))^2} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}},$$

где

$$\begin{aligned} V_a^b(d) = & \frac{\left( E \|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} c(a)}{\varphi(a)} + \frac{\left( E \|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} c(b)}{\varphi(b)} + \\ & + \int_a^b c(u) \left( E \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\left( -\frac{1}{\varphi(u)} \right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Поскольку имеет место равенство

$$X_a^b(t) = \frac{R_d^b(t, \varphi)}{\varphi(b)} - \frac{R_d^a(t, \varphi)}{\varphi(a)} + \int_a^b R_d^u(t, \varphi) d\left( -\frac{1}{\varphi(u)} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|X_a^b(t)\|_{L_U} &= \frac{\|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_U}}{\varphi(b)} + \frac{\|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_U}}{\varphi(a)} + \int_a^b \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_U} d\left( -\frac{1}{\varphi(u)} \right) \leq \\ &\leq \frac{c(b) \|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}}{\varphi(b)} + \frac{c(a) \|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2}}{\varphi(a)} + \int_a^b c(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2} d\left( -\frac{1}{\varphi(u)} \right) \end{aligned}$$

Пусть  $W(a, b) > 0, \delta(a) > 0, \delta(b) > 0, \delta(a, b) > 0$  – некоторые числа и  $\delta(a) + \delta(b) + \delta(a, b) = 1$ . По неравенству Гельдера имеем соотношение

$$\begin{aligned}
 E \exp \left\{ \frac{\|X_a^b(t)\|_{L_U}^2}{W^2(a,b)} \right\} &\leq E \exp \left\{ \frac{1}{W^2(a,b)} \left( \frac{\delta(b)c(b)}{\delta(b)\varphi(b)} \|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2} + \frac{\delta(a)c(a)}{\delta(a)\varphi(a)} \|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\delta(a,b)}{\delta(a,b)} \int_a^b c(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) \right)^2 \right\} \leq \\
 &\leq \left( E \exp \left\{ \left( \frac{c(b) \|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(b)\varphi(b)W(a,b)} \right)^2 \right\} \right)^{\delta(b)} \left( E \exp \left\{ \left( \frac{c(a) \|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(a)\varphi(a)W(a,b)} \right)^2 \right\} \right)^{\delta(a)} \times \\
 &\left( E \exp \left\{ \left( \int_a^b \frac{c(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) \right)^2 \right\} \right)^{\delta(a,b)}
 \end{aligned}$$

Обозначим  $k(u) = \frac{c(u)}{\delta(a,b)W(a,b)}$ . Пусть  $p(u) > 0$  такая функция, что  $\int_a^b p(u) d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) = 1$ .

Тогда из неравенства Коши следует, что

$$E \exp \left\{ \left( \int_a^b \frac{c(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) \right)^2 \right\} \leq \exp \left\{ \int_a^b \ln \left( E \exp \left\{ \left( \frac{k(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}}{p(u)} \right)^2 \right\} \right) p(u) d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) \right\}.$$

Положим при  $0 < s < 1$

$$\begin{aligned}
 \delta(a,b) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s} W(a,b)} \int_a^b c(u) \left( E \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right), \\
 p(u) &= \frac{\sqrt{2}c(u) \left( E \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s} \delta(a,b)W(a,b)}.
 \end{aligned}$$

Ясно, что при таком выборе  $\int_a^b p(u) d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) = 1$  и имеем

$$E \exp \left\{ \left( \frac{k(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}}{p(u)} \right)^2 \right\} = E \exp \left\{ \frac{s \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2}{2E \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Далее имеем

$$E \exp \left\{ \left( \int_a^b \frac{c(u) \|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) \right)^2 \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Положим

$$\delta(a) = \frac{\sqrt{2}c(a) \left( E \|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s} \varphi(a)W(a,b)},$$

$$\delta(b) = \frac{\sqrt{2}c(b)\left(E\|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\varphi(b)W(a, b)}, \quad W(a, b) = \sqrt{\frac{2}{s}}V_a^b(d).$$

Тогда имеет место

$$E \exp\left\{\left(\frac{c(b)\|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(b)\varphi(b)W(a, b)}\right)^2\right\} = E \exp\left\{\frac{s\|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}^2}{2E\|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}^2}\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Аналогично

$$E \exp\left\{\left(\frac{c(a)\|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2}}{\delta(a)\varphi(a)W(a, b)}\right)^2\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда для любых  $\varepsilon > 0$  и  $0 \leq s < 1$  имеет место неравенство

$$P\left\{\|X_a^b(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}} \exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\},$$

где  $V_a^b(d)$  задано в лемме 1.

*Доказательство.* Утверждение следует из леммы 1 и неравенства Чебышева

$$P\left\{\|X_a^b(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \leq E \exp\left\{\frac{s\|X_a^b(t)\|_{L_U}^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\} \exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.** Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  регулярный строго субгауссовский случайный процесс из класса  $D_U(c)$ . Если для некоторой монотонно неубывающей функции  $\varphi = \{\varphi(u), u \geq 0\}$  такой, что  $\varphi(u) > 0$  при  $u \geq 0$  и  $\varphi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$  существует такое  $d \geq 0$ , что выполняются условия

$$\int_d^\infty c(u)\left(E\|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right) < \infty,$$

$$\frac{\left(E\|R_d^b(t, \varphi)\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} c(b)}{\varphi(b)} \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow \infty,$$

тогда случайный процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$  с вероятностью 1 принадлежит пространству  $L_U(T)$  и для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $0 \leq s < 1$ ,  $a \geq d$  имеет место неравенство

$$P\left\{\|X_a(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}} \exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a(d))^2}\right\},$$

где

$$V_a(d) = \frac{\left(E\|R_d^a(t, \varphi)\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} c(a)}{\varphi(a)} + \int_a^\infty c(u)\left(E\|R_d^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

**Доказательство.** Если выполняются условия теоремы, то при  $a \rightarrow \infty$  и  $b \rightarrow \infty$   $V_a^b(d) \rightarrow 0$ . И из леммы 2 следует, что  $\|X_a(t)\|_{L_u} \rightarrow 0$  по вероятности. Тогда существуют последовательности  $a_n < b_n$ , что  $\|X_{a_n}^{b_n}(t)\|_{L_u} \rightarrow 0$  при  $a_n \rightarrow \infty$  с вероятностью 1, то есть  $X$  с вероятностью единица принадлежит пространству  $L_U(T)$ . Оценка следует из леммы 2 и леммы Фату.

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для всех  $\varepsilon > V_a(d)$  и  $a \geq d$  имеет место неравенство

$$P\left\{\|X_a^b(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\varepsilon}{V_a(d)} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2(V_a(d))^2}\right\}.$$

Оценка следует из теоремы 1, если правую часть минимизировать по  $s$ .

Если положить  $a = d$ , то

$$V_a(a) = \int_a^\infty c(u) \left( E \|R_a^u(t, \varphi)\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

**Моделирование случайных процессов.** Полученные оценки используются для построения моделей, приближающих случайные процессы с заданной точностью и надежностью в норме пространств Орлича. Аналогичные оценки для гауссовских процессов, представимых в виде рядов, получены в [3, 4].

**Определение 4.** Пусть  $\Lambda > 0$ ,  $D_\Lambda$  – некоторое разбиение интервала  $[0, \Lambda]$ ,  $D_\Lambda: 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = \Lambda$ . Случайный процесс  $X_{n,\Lambda} = \{X_n(t, \Lambda), t \in T\}$ , где

$$X_n(t, \Lambda) = \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} f_r(t, u_i) (\xi_r(u_{i+1}) - \xi_r(u_i))$$

называется аппроксимационной моделью (А-моделью) процесса  $X$ .

То есть, А – модель процесса  $X$  можно получить следующим образом: необходимо смоделировать сумму  $X_n(t, \Lambda) = \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} f_r(t, u_i) \zeta_{r,i}$ , где  $\{\zeta_{r,i}, r = 1, 2, \dots, N, i = 0, 1, \dots, n-1\}$  семья строго субгауссових случайных величин с известной ковариационной матрицей  $C = \|E \zeta_{r,i} \zeta_{p,j}\|$ .

Пусть заданы два числа  $\delta > 0$  и  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Определение 5.** Будем говорить, что модель  $X_n(t, \Lambda)$  приближает процесс  $X(t)$  с надежностью  $1 - \alpha$  и точностью  $\delta$  в норме пространства  $D_U(c)$ , если выполняется неравенство  $P\{\|X(t) - X_n(t, \Lambda)\| > \delta\} \leq \alpha$ .

Полученные в работе оценки  $P\{\|X(t) - X_n(t, \Lambda)\| > \delta\} \leq W_n(\delta, D_\Lambda)$ , где  $W_n(\delta, D_\Lambda)$ ,  $\delta > 0$  – монотонно неубывающая по  $n$  и  $\delta$  функция, используются для нахождения параметров модели. Число  $n$  и разбиение  $D_\Lambda$  определяется как минимальные, для которых выполняется  $W_n(\delta, D_\Lambda) \leq \alpha$ .

Рассмотренные модели использовались при испытаниях технических систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Пашко А.А. Об оценке распределения супремума субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1992. – Вып. 46. – С. 124-132.
- 2 Пашко А.А. Равномерная сходимость субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и ее применение. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 793-798.
- 3 Козаченко Ю.В., Пашко А.А. Точность моделирования случайных процессов в нормах пространств Орлича. I // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1998. – Вып. 58. – С. 75-90.

4 Козаченко Ю.В., Пашко А.А. Точность моделирования случайных процессов в нормах пространств Орлича. II // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1998. – Вып. 59. – С. 45-60.

5 Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев: ТВиМС, 1998.

#### REFERENCES

1 Pashko A.A. An estimate of the distribution of the supremum of sub Gaussian integrals. Theor. Probability and Math. Statist. 1992. 46. P. 124-132 (in Russ).

2 Pashko A.A. Uniform convergence subGaussian integrals. Theor. Probability and Applications. 1998. T. 43, N 4. P. 793-798 (in Russ).

3 Kozachenko Yu.V., Pashko A.A. Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. I. Theor. Probability and Math. Statist. 1998. 58. P. 45-60 (in Ukr).

4 Kozachenko Yu.V., Pashko A.A. Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. II. Theor. Probability and Math. Statist. 1998. 59. P. 75-90 (in Ukr).

5 Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. Kiev: ТВиМС, 1998; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

#### Резюме

*Ю. В. Козаченко<sup>1</sup>, А. А. Пашко<sup>2</sup>*

(<sup>1</sup>Тарас Шевченко атындағы Киев ұлттық университеті, Киев, Украина,

<sup>2</sup>Европа университеті, Киев, Украина)

#### ОРЛИЧ КЕҢІСТІГІНДЕГІ СУБГАУСС КЕЗДЕЙСОҚ ҮДЕРІС ҮЛГІЛЕРІНІҢ ШЫҒУ ЖЫЛДАМДЫҒЫН БАҒАЛАУ

Стохастикалық интеграл түрінде суреттелетін гаусс кездейсоқ үдерістері үшін субгаусс үлгісі құрылған. Нақты үлгілеу кезінде гаустық кездейсоқ шаманы алу мүмкін емес, тек дәлме-дәл субгаустық кездейсоқ шама алынады. Алынған үлгілер кездейсоқ үдерістерді берілген дәлділік пен дәйектілік мөлшерде Орлич кеңістігінде аппроксимирлейді. Гаусс кездейсоқ үдерістер үлгілерінің шығу жылдамдығы зерттеледі.

**Тірек сөздер:** үлгі, шығу жылдамдығы, субгаусс шамалары, гаусс үдерістері, үлгілеудің дәлдігі.

#### Summary

*Yu. V. Kozachenko<sup>1</sup>, A. A. Pashko<sup>2</sup>*

(<sup>1</sup>T. Shevchenko university, Kyiv, Ukraine,

<sup>2</sup>European university, Kyiv, Ukraine)

#### ESTIMATES FOR THE RATE OF CONVERGENCE OF MODELS SUBGAUSSIAN RANDOM PROCESSES IN ORLICZ SPACES

In this work subgaussian model for Gaussian random processes can be represented as stochastic integrals. In a real simulation can not get a Gaussian random variables, and obtained a strictly subgaussian random variables. The resulting model is approximated by random processes with given accuracy and reliability in the norms of Orlicz spaces. We study the rate of convergence of Gaussian models of stochastic processes.

**Keywords:** model, rate of convergence, subGaussian variables, Gaussian processes, simulation accuracy.

*Поступила 15.10.2013г.*

В. Н. УКРАИНЕЦ<sup>1</sup>, С. Р. ГИРНИС<sup>1</sup>, М. М. АХМЕТЖАНОВА<sup>2</sup><sup>1</sup>Павлодарского государственного университета им. С. Торайгырова, Павлодар, Республика Казахстан,<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

## ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ЗЕМНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ДВИЖУЩЕЙСЯ В ТОННЕЛЕ СКРУЧИВАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

**Аннотация.** На основе математического моделирования исследуется воздействие на земную поверхность равномерно движущейся в круговом тоннеле скручивающей нагрузки (подобное воздействие может возникнуть при неравенстве динамических нагрузок, передаваемых на каждый из рельсов, уложенных в тоннеле цилиндрической формы). Анализ результатов расчётов проводится на основании представленных в работе графиков компонент напряженно-деформированного состояния земной поверхности.

**Ключевые слова:** тоннель, подвижная нагрузка, напряженно-деформированное состояние.

**Тірек сөздер:** тоннель, жылжымалы жүктеме, кернеу-деформациялық күйі.

**Keywords:** tunnel, moving load, the stress-strain state.

**1. Постановка и решение задачи.** Для исследований используется модельный подход: тоннель представляется как бесконечная круговая цилиндрическая полость радиусом  $R$ , расположенная в упругом, однородном и изотропном полупространстве с параметрами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотностью  $\rho$ . Пусть в декартовой системе координат ось  $z$  совпадает с осью полости, параллельной свободной от нагрузок плоской границе полупространства, а ось  $x$  перпендикулярна к этой границе:  $x \leq h$ , где  $h$  – расстояние от оси полости до границы полупространства (земной поверхности).

В направлении оси  $z$  по поверхности полости движется с постоянной скоростью  $c$  скручивающая нагрузка  $P$ :

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = P, \quad \sigma_{r\eta}|_{r=R} = 0, \quad (1)$$

где  $r, \theta, \eta = z - ct$  – подвижная цилиндрическая система координат;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений в среде,  $j = r, \theta, \eta$ .

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при  $x = h$ :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (2)$$

Движение полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости в подвижной системе координат:

$$\left( \frac{1}{M_p^2} - \frac{1}{M_s^2} \right) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{M_s^2} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор смещения упругой среды;  $M_p = c/c_p$ ,  $M_s = c/c_s$  – числа Маха,  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в среде,  $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ ,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Вектор смещения упругой среды выражается через потенциалы Ламе [1]:

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot}[\varphi_2 \mathbf{e}_\eta + \text{rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta)], \quad (4)$$

где  $\mathbf{e}_\eta$  – орт оси  $\eta$ .

Из (3) и (4) следует, что потенциалы  $\varphi_j$  удовлетворяют видоизменённым волновым уравнениям:

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь  $M_1 = M_p$ ,  $M_2 = M_3 = M_s$ .

Для решения задачи вначале можно рассмотреть действие на поверхность полости подвижной скручивающей нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты и изменяющуюся вдоль оси  $\eta$  синусоидально:

$$P(\theta, \eta) = p(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (6)$$

Так как рассматривается установившийся процесс, потенциалы  $\phi_j$  также представимы в виде (6):

$$\phi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta)e^{i\xi\eta}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует:

$$\nabla_2^2 \Phi_j - m_j^2 \xi^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где  $\nabla_2^2$  – двумерный оператор Лапласа,  $m_j^2 = 1 - M_j^2$ ,  $m_1 \equiv m_p$ ,  $m_2 = m_3 \equiv m_s$ .

Выразив компоненты НДС среды через потенциалы Ламе с учётом (7), можно получить выражения для компонент перемещений  $u_l^*$  и напряжений  $\sigma_{lm}^*$  от синусоидальной нагрузки в декартовой ( $l=x, y, \eta$ ,  $m=x, y, \eta$ ) и цилиндрической ( $l=r, \theta, \eta$ ,  $m=r, \theta, \eta$ ) системах координат как функции от  $\Phi_j$ .

Если ввести ограничение на скорость движения нагрузки, принимая её меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полости среде (что соответствует скорости движения внутритоннельного транспорта), то тогда  $M_s < 1$  ( $m_2 = m_3 = m_s > 0$ ) и решения уравнений (8) можно представить через суперпозиции поверхностных цилиндрических  $\Phi_j^{(1)}$  и плоских  $\Phi_j^{(2)}$  волн

$$\Phi_j = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \quad (9)$$

где

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta}, \quad \Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta.$$

Здесь  $K_n(k_j r)$  – функции Макдональда,  $k_j = |m_j \xi|$ ;  $g_j(\xi, \zeta)$ ,  $a_{nj}$  – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в статье [2], представление потенциалов в форме (9) приводит к следующим выражениям для  $\Phi_j$  в декартовой системе координат:

$$\Phi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (10)$$

где

$$f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}, \quad \Phi_{nj} = \left( \frac{\zeta + f_j}{k_j} \right)^n, \quad j = 1, 2, 3.$$

Функции  $g_j(\xi, \zeta)$  выражаются через коэффициенты  $a_{nj}$  из граничных условий (2), переписанных для  $\sigma_{xy}^*$  с учётом (10). Для этого следует выделить коэффициенты при  $e^{iy\zeta}$  и приравнять, в силу произвольности  $y$ , их нулю. Тогда:

$$g_j(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk}. \quad (11)$$

Здесь  $\Delta_* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}$ ,  $\alpha = M_p \xi$ ,  $\beta = M_s \xi$ ,  $\rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2$ , вид алгебраических дополнений  $\Delta_{jk}^*$  определён в [2]. Там же показано, что определитель Рэлея  $\Delta_*(\rho_*)$  не обращается в ноль на действительной оси, если  $M_R < 1$ , или  $c < c_R$ . Здесь  $M_R = c/c_R$  –

число Маха,  $c_R$  – скорость поверхностной волны Рэлея ( $c_R < c_s$ ) в данной среде. В этом случае для вычислений интегралов (10) можно воспользоваться одним из численных методов интегрирования, предварительно определив коэффициенты  $a_{nj}$ .

Для дорэлеевской скорости движения нагрузки соотношения (10) переписутся в виде

$$\Phi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta^*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk} \right] e^{iy\zeta} d\zeta.$$

Если воспользоваться разложением  $e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$ , то можно представить (9),

используя соотношения (11), в цилиндрической системе координат для  $c < c_R$ :

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta},$$

где

$$b_{nj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mk} A_{nj}^{mk},$$

$$A_{nj}^{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta^*} \Phi_{mk} \Phi_{nj} e^{-h(f_k+f_j)} d\zeta.$$

Коэффициенты  $a_{nj}$  находятся из переписанных для  $\sigma_{rj}^*$  с учётом (6) граничных условий (1). При приравнении коэффициентов рядов Фурье-Бесселя при  $e^{in\theta}$ , получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить реакцию полупространства на движущуюся синусоидальную скручивающую нагрузку. Причём, как показывают исследования, определитель данной системы может обращаться в ноль только при  $c \geq c_R$ .

Зная решение задачи для синусоидальной нагрузки, реакцию полупространства на движущуюся с дорэлеевской скоростью аperiodическую (локальную) скручивающую нагрузку характерного для транспортных средств типа  $P(\theta, \eta) = p(\theta)p(\eta)$  можно получить при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС среды в виде интегралов Фурье

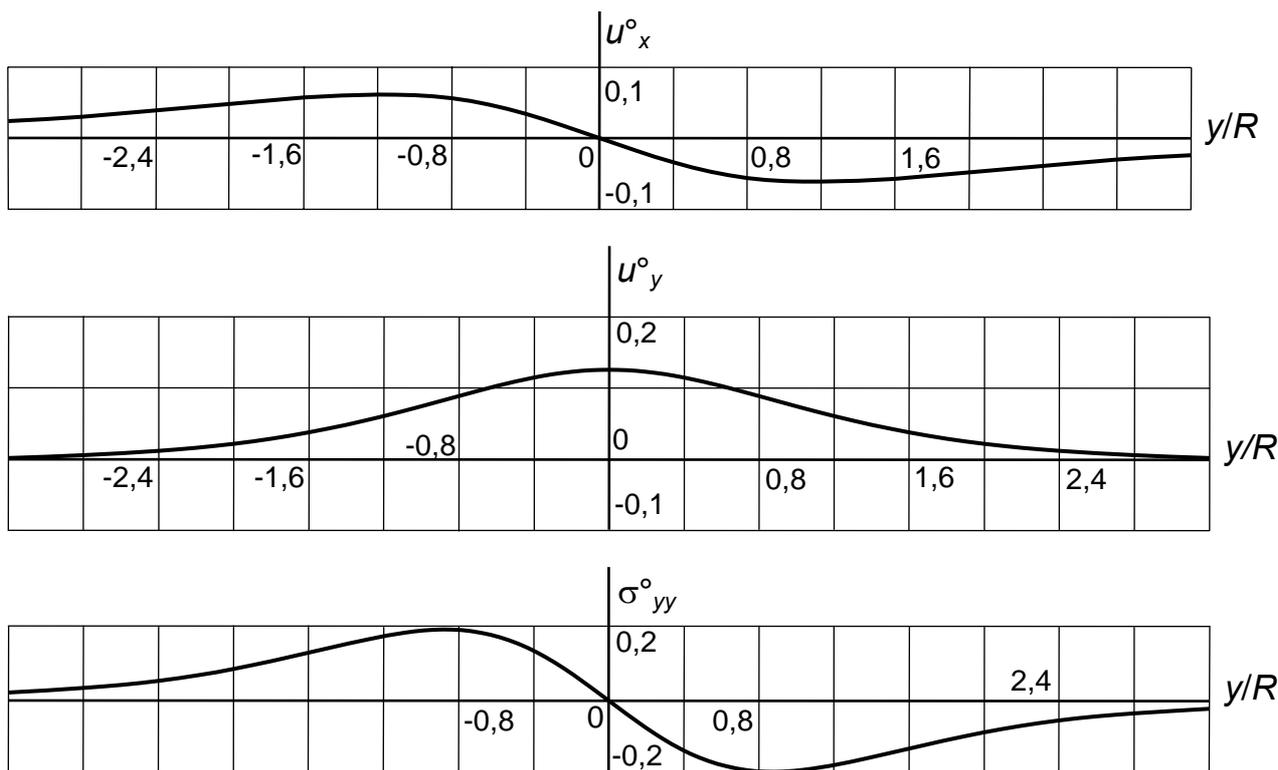
$$P(\theta, \eta) = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, \quad p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta;$$

$$u_l(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_l^*(\xi) p^*(\xi) d\xi, \quad \sigma_{lm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lm}^*(\xi) p^*(\xi) d\xi.$$

Окончательное решение будет зависеть от конкретного вида движущейся скручивающей нагрузки.

**2. Анализ результатов расчёта.** Для количественной оценки динамического воздействия на земную поверхность скручивающей подвижной нагрузки исследуется круговой цилиндрический тоннель радиусом  $R=1\text{ м}$  и глубиной заложения  $h=2R$  в массиве алевролита ( $\lambda = 1,688 \cdot 10^3$  МПа,  $\mu = 2,532 \cdot 10^3$  МПа,  $\rho = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $s_P = 1643,4$  м/с,  $c_S = 1006,4$  м/с,  $c_R = 917$  м/с). Осесимметричная скручивающая нагрузка, приложенная в интервале  $|\eta| \leq 0,2R$ , движется по поверхности тоннеля с постоянной скоростью  $c=100\text{ м/с}$ . Интенсивность нагрузки подбиралась таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения равнялась сосредоточенной кольцевой скручивающей нагрузке интенсивностью  $P^\circ$ .

Результат воздействия нагрузки на земную поверхность показан на рисунке, где в координатной плоскости  $xu$  приведены кривые изменения перемещений  $u_x^\circ = u_x \mu / P^\circ$  (м),  $u_y^\circ = u_y \mu / P^\circ$  (м) и нормальных напряжений  $\sigma_{yy}^\circ = \sigma_{yy} / P^\circ$ .

Изменения компонент НДС земной поверхности в плоскости  $xy$ 

Как следует из анализа поведения кривых, экстремальные прогибы  $u_x$  земной поверхности и экстремальные нормальные напряжения  $\sigma_{yy}$  имеют место при  $|y| \approx 0,8R$ , а максимальное горизонтальное смещение  $u_y$  – при  $y=0$  ( $u_x$  и  $\sigma_{yy}$  здесь равны нулю). С увеличением  $|y|$  перемещения и напряжения быстро затухают, и при  $|y| \approx 3R$  динамическое воздействие нагрузки на земную поверхность практически неощутимо.

*Работа выполнена при поддержке гранта 0898/ГФ2, 0112РК02221 МОН РК.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 2 Украинец В.Н. Реакция упругого полупространства на бегущую вдоль оси периодическую нагрузку // Математический журнал. – 2005. – № 3. – С. 96-102.

#### REFERENCES

- 1 Novackij V. Theory of elasticity. M.: Mir, 1975. 96. 102 s. (in Russ.)
- 2 Ukrainets V.N. The elastic half-space reaction at periodic load running along the axis. Mathematical Journal. 2005. № 3. S. 96-102.

#### Резюме

*В. Н. Украинец<sup>1</sup>, С. Р. Гирнис<sup>1</sup>, М. М. Ахметжанова<sup>2</sup>*

<sup>(1)</sup>С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар, Қазақстан Республикасы,  
<sup>(2)</sup>ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы қ.)

#### ТОННЕЛЬ ІШІНДЕГІ ЖЫЛЖЫМАЛЫ БҰРАЛУ ЖҮКТЕМЕНІҢ ЖЕР БЕТІНЕ ӘСЕРІ

Шеңбер тоннельдің ішінде бір қалыпты жылжымалы бұрау жүктемесінің жер бетіне әсері математикалық үлгілеу негізінде зерттелді (сондай әрекеті цилиндрлік пішін тоннельде орналасқан әр рельске келетін

динамикалық жүктеме теңсіздік болғанда пайда болуы мүмкін). Есеп нәтижелері жер бетінің кернеу-деформациялық күйінің компоненттер графиктері негізінде талданған.

**Тірек сөздер:** тоннель, жылжымалы жүктеме, кернеу-деформациялық күйі.

### Summary

*V. N. Ukrainets<sup>1</sup>, S. R. Girnis<sup>1</sup>, M. M. Ahmetzanova<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Pavlodar state university of S. Toraigyrov, Pavlodar, Republic of Kazakhstan,

<sup>2</sup>Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty)

### IMPACT ON THE TERRESTRIAL SURFACE OF TWISTING LOADING MOVING IN THE TUNNEL

On the basis of mathematical modeling impact on a terrestrial surface of twisting loading evenly moving in a circular tunnel (similar influence can arise at an inequality of the dynamic loadings transferred to each of rails, laid in a tunnel of a cylindrical form) is investigated. The analysis of results of calculations is carried out on the basis of the schedules presented in work a component intense the deformed condition of a terrestrial surface.

**Keywords:** tunnel, running load, critical velocities, tense-deformed condition.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 539.3:622.24

*А. К. КУДАЙБЕРГЕНОВ, АСХ. К. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Л. А. ХАДЖИЕВА*

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЖАТО-СКРУЧЕННОЙ БУРОВОЙ ШТАНГИ

**Аннотация.** Исследуется динамика буровых штанг, применяемых для бурения нефтяных и газовых скважин. Рассмотрен случай вращающейся буровой штанги, подверженной действию осевой нагрузки и крутящего момента. Предложена численная модель сжато-скрученной буровой штанги. При решении использован метод, основанный на понижении порядка дифференциальных уравнений в частных производных с помощью введения новых переменных. Изучено влияние параметров штанги на амплитуду ее поперечных колебаний.

**Ключевые слова:** буровая штанга, динамическая модель, поперечные колебания, явная схема.

**Тірек сөздер:** бұрғылау қарнағы, серпінді үлгі, көлденең ауытқулар, айқын сызба.

**Keywords:** boring bar, dynamic model, cross fluctuations, explicit scheme.

Известно, что эффективность работы буровых машин во многом зависит от несущей способности буровых штанг. При увеличении длины буровая штанга становится гибкой и неспособной передавать усилия на долото, необходимые для разрушения горных пород. Потеря прямолинейной формы оси штанги может привести к колебательным процессам. В связи с этим изучение устойчивости, прочности и колебаний буровых штанг имеет как научный, так и практический интерес.

Целью работы является исследование динамической модели поперечных колебаний сжато-скрученной буровой штанги неглубинного бурения с распределенными параметрами и ее численная дискретизация.

Рассматривается вращательное движение буровой штанги под действием сжимающего продольного усилия  $N(t)$  и крутящего момента  $M(t)$ . Исследуются ее поперечные колебания. Колебания полагаются малыми. Вращающаяся сжато-скрученная буровая штанга рассматривается как одномерный стержень длиной  $l$ , динамическая модель которого представлена как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ M(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x,t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + K_1 v &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ M(x,t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + K_1 u &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $K_1 = \frac{\gamma F \omega^2}{g}$ ;  $\gamma = \rho \cdot g$  – удельный вес материала штанги;  $\rho$  – плотность материала;  $F$  – площадь поперечного сечения буровой штанги;  $g$  – скорость свободного падения;  $EJ_u, EJ_v$  – жесткость штанги относительно осей  $y, z$ ;  $u, v$  – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости  $xOy, xOz$ ;  $\omega$  – частота вращения.

Система (1) задает динамическое состояние изогнутой оси буровой штанги. В основе модели лежит гипотеза плоских сечений [1]. Предполагаем, что поперечные сечения стержня при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к его деформированной оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, являются пренебрежимо малыми. Растяжением оси стержня пренебрегаем.

Рассматривая шарнирное опирание штанги по концам, задаются краевые условия:

$$\begin{aligned} u(x,t) = v(x,t) = 0 \quad (x = 0, x = l) \\ EJ_u \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = EJ_v \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, x = l). \end{aligned} \quad (2)$$

Полагается, что на штангу в процессе бурения действует равномерно распределенная по ее длине продольная сжимающая нагрузка  $N$ . Силы сопротивления со стороны твердой породы и трения о стенки скважины преодолеваются за счет действия крутящего момента  $M$ , который предполагается постоянным во времени. Осевая нагрузка  $N$  состоит из суммы постоянной и переменной во времени слагаемых:

$$N(t) = N_0 + N_t \cdot \Phi(t), \quad (3)$$

где  $N_0$  – постоянная во времени составляющая сжимающей нагрузки;  $N_t$  – переменная во времени составляющая;  $\Phi(t)$  – периодическая функция времени, характеризующая режим нагружения.

В качестве функции  $\Phi(t)$  берется функция, соответствующая гармоническому воздействию:

$$\Phi(t) = \cos(\omega t). \quad (4)$$

Далее предполагаем, что жесткость штанги относительно осей  $y$  и  $z$  постоянна по длине, т.е.

$$EJ_u = EJ_v = EJ = const. \quad (5)$$

Тогда уравнения поперечных колебаний сжато-скрученного стержня под действием внешних нагрузок принимают вид:

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + M \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_1 v &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - M \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + N(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_1 u &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

Решение модели (6) основывается на понижении порядка дифференциальных уравнений в частных производных путем введения новых переменных. Для удобства вводятся обозначения:

$$a^2 = \frac{EJ}{\gamma F / g}, \quad b^2 = \frac{M}{\gamma F / g}, \quad c^2 = \frac{N(t)}{\gamma F / g}, \quad (7)$$

а также по аналогии с [2] вводятся следующие новые переменные:

$$\begin{aligned} s_1 = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w_1 = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial v}{\partial x} + \omega \cdot v, \quad z_1 = b \frac{\partial u}{\partial x}, \\ s_2 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w_2 = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \cdot u, \quad z_2 = b \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и проводя соответствующие преобразования, получаем эквивалентную (6) систему из шести дифференциальных уравнений второго порядка с распределенными параметрами. Ввиду ее громозкости здесь она не представлена. Решение последней не представляет труда. Численное моделирование производится путем аппроксимации полученных уравнений с применением разностных схем [3]. Используется явная схема. Для этого вводятся сетки по переменной  $x$  с шагом  $h$  и переменной  $t$  с шагом  $\tau$ :

$$\begin{aligned}\omega_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, \mathbf{N}; h\mathbf{N} = l\}, \\ \omega_\tau &= \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, \mathbf{M}; \tau\mathbf{M} = t\},\end{aligned}\tag{9}$$

здесь  $\mathbf{N}$  – количество шагов сетки по пространству,  $\mathbf{M}$  – количество шагов по времени.

Граничные условия (2) после аппроксимации принимают вид:

$$\begin{aligned}u_0^{n+1} &= u_{\mathbf{N}}^{n+1} = 0, \\ v_0^{n+1} &= v_{\mathbf{N}}^{n+1} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0^{n+1} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\mathbf{N}}^{n+1} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0^{n+1} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{\mathbf{N}}^{n+1} = 0, \quad n = 0, \dots, \mathbf{M} - 1,\end{aligned}\tag{10}$$

а в переменных (8) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}s_{1,0}^{n+1} &= \frac{v_0^{n+2} - v_0^{n+1}}{\tau}, \quad s_{2,0}^{n+1} = \frac{u_0^{n+2} - u_0^{n+1}}{\tau}, \\ z_{1,0}^{n+1} &= b \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h}, \quad z_{2,0}^{n+1} = b \frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{h}, \\ w_{1,0}^{n+1} &= a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0^{n+1} + c \frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{h} + \omega \cdot v_0^{n+1}, \\ w_{2,0}^{n+1} &= a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0^{n+1} + c \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} + \omega \cdot u_0^{n+1}, \\ s_{1,\mathbf{N}}^{n+1} &= \frac{v_{\mathbf{N}}^{n+2} - v_{\mathbf{N}}^{n+1}}{\tau}, \quad s_{2,\mathbf{N}}^{n+1} = \frac{u_{\mathbf{N}}^{n+2} - u_{\mathbf{N}}^{n+1}}{\tau}, \\ z_{1,\mathbf{N}}^{n+1} &= b \frac{u_{\mathbf{N}}^{n+1} - u_{\mathbf{N}-1}^{n+1}}{h}, \quad z_{2,\mathbf{N}}^{n+1} = b \frac{v_{\mathbf{N}}^{n+1} - v_{\mathbf{N}-1}^{n+1}}{h}, \\ w_{1,\mathbf{N}}^{n+1} &= a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{\mathbf{N}}^{n+1} + c \frac{v_{\mathbf{N}}^{n+1} - v_{\mathbf{N}-1}^{n+1}}{h} + \omega \cdot v_{\mathbf{N}}^{n+1}, \\ w_{2,\mathbf{N}}^{n+1} &= a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\mathbf{N}}^{n+1} + c \frac{u_{\mathbf{N}}^{n+1} - u_{\mathbf{N}-1}^{n+1}}{h} + \omega \cdot u_{\mathbf{N}}^{n+1}, \\ n &= 0, \dots, \mathbf{M} - 2.\end{aligned}\tag{11}$$

Начальные условия аппроксимируются как:

$$\begin{aligned}u_i^0 &= v_i^0 = 0, \\ \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} &= C_1, \quad \frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau} = C_2, \quad i = 0, \dots, \mathbf{N},\end{aligned}\tag{12}$$

тогда в переменных (8) они имеют вид:

$$\begin{aligned}
s_{1,i}^0 &= \frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau}, & s_{2,i}^0 &= \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}, \\
z_{1,i}^0 &= b \frac{u_{i+1}^1 - u_{i-1}^0}{2h}, & z_{2,i}^0 &= b \frac{v_{i+1}^1 - v_{i-1}^0}{2h}, \\
w_{1,i}^0 &= a \frac{v_{i+1}^0 - 2v_i^0 + v_{i-1}^0}{h^2} + c \frac{v_{i+1}^1 - v_{i-1}^0}{2h} + \omega \cdot v_i^0, \\
w_{2,i}^0 &= a \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2} + c \frac{u_{i+1}^1 - u_{i-1}^0}{2h} + \omega \cdot u_i^0, \\
i &= 1, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Несмотря на то, что производная по  $x$  берется с верхнего слоя, схема остается явной; так как  $w^{n+1}$  и  $z^{n+1}$  вычисляются явно из первых уравнений данной системы.

Расчет колебаний выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+2} &= u_i^{n+1} + \tau \cdot s_{2,i}^{n+1}, \\
v_i^{n+2} &= v_i^{n+1} + \tau \cdot s_{1,i}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N-1; n = 0, \dots, M-2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Шаг по времени  $\tau$  задается равным  $\frac{h^2}{2a}$ .

Проведен численный анализ динамической модели буровой штанги. Все расчеты проводились на языке программирования C++ при следующих значениях параметров: внешний диаметр штанги  $D = 0,2$  м, внутренний диаметр  $d = 0,12$  м, крутящий момент  $M = 10^4$  Нм, продольная сила  $N = 2,2 \cdot 10^6$  Н. Рассмотрены стальные и дюралюминиевые буровые штанги с характеристиками модуля упругости стали и дюралюминия  $E_{ст} = 2,1 \cdot 10^5$  МПа и  $E_{дюр} = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, соответ-

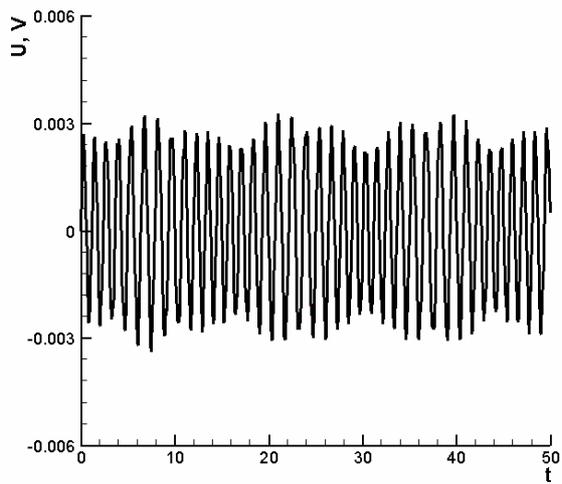
ственно, и плотностью стали  $\rho_{ст} = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  и дюралюминия  $\rho_{дюр} = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Рассмотрен случай переменной продольной силы  $N(t) = 1,8 \cdot 10^6 + 0,4 \cdot 10^6 \cos(\omega t)$ . Она разложена, соответственно, на постоянную и переменную во времени слагаемые. Полагая скорость вращения штанги  $\omega = 25$  об/мин, построены графики амплитуды колебаний срединного сечения буровой штанги в зависимости от ее длины (рисунок 1).

Исследовано влияние материала буровой штанги на амплитуду ее колебаний. Установлено, что дюралюминиевая буровая штанга имеет меньшую амплитуду колебаний (рисунок 2). Исследовано распределение колебаний по длине штанги. На рисунке 3 представлена форма изгиба штанги в момент времени  $t = 40$  сек. при частоте вращения штанги  $\omega = 30$  об/мин.

Полученные графики показывают, что буровые штанги, изготовленные из дюралюминия, подвергаются меньшим изгибным деформациям, чем штанги, изготовленные из стали. Амплитуда их изгибных колебаний примерно в 1,5–3 раза меньше. Также заметно влияние длины и угловой скорости вращения на плоский изгиб буровой штанги. При увеличении длины, несмотря на уменьшение частоты вращения, происходит возрастание величины прогиба, как у стальных, так и у дюралюминиевых штанг и меняется его форма.

Увеличение частоты вращения буровой штанги также влечет за собой возрастание амплитуды поперечных колебаний и длины их волн. Однако влияние данного параметра оказывается неодинаковым для штанг различной длины – по мере удлинения штанга становится более чувствительной к изменению частот и повышается риск потери устойчивости системы.



а)

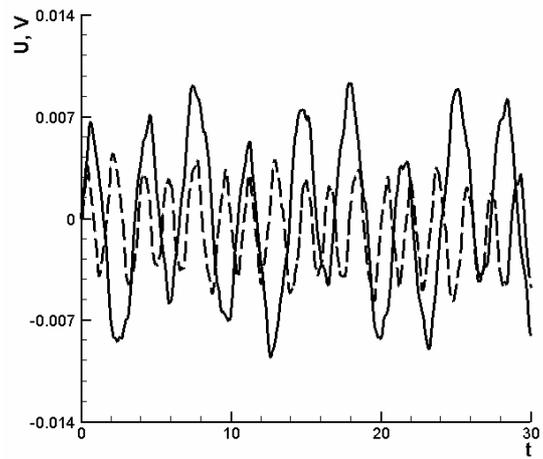
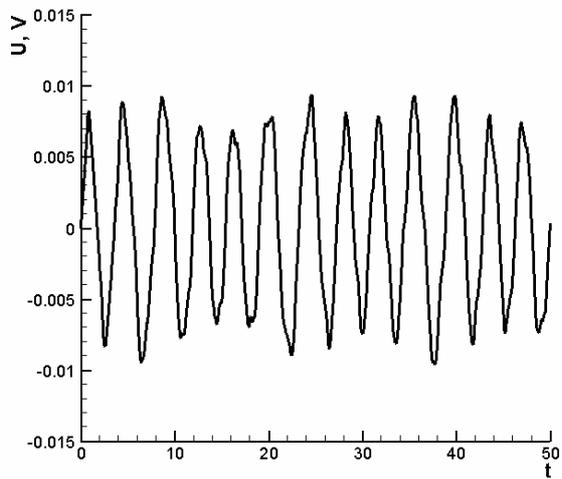
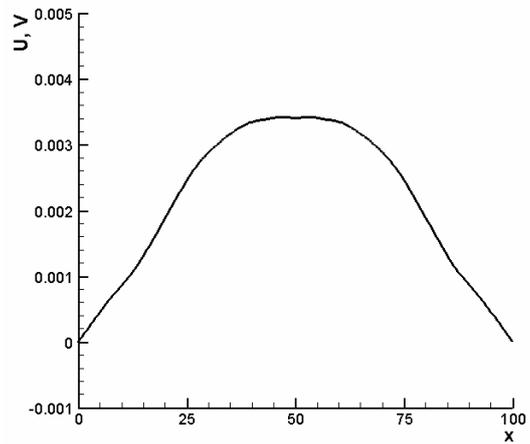


Рисунок 2 – Влияние материала на колебания при  $l = 150$  м,  $\omega = 70$  об/мин.

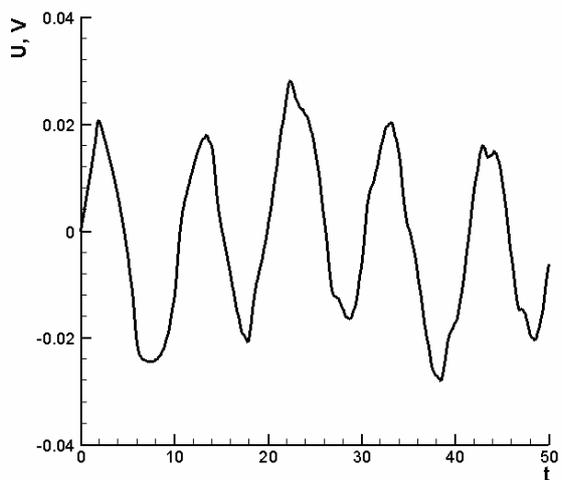
— сталь, - - - дюралюминий



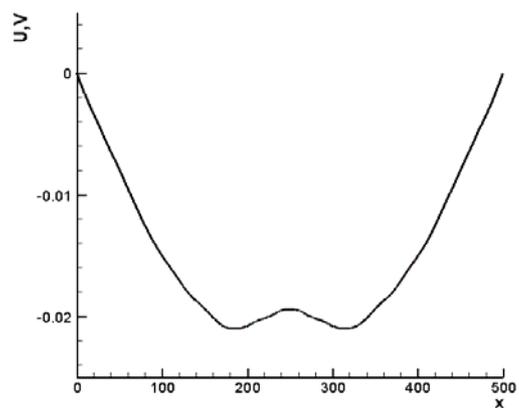
б)



а)



в)



б)

Рисунок 3 – Плоский изгиб буровой штанги а)  $l = 100$  м, б)  $l = 500$  м

Рисунок 1 – Поперечные колебания буровой штанги, при а)  $l = 70$  м, б)  $l = 200$  м, в)  $l = 450$  м

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Вибрации в технике. Справочник: в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1 – 352 с.
- 2 Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2008. – 215 с.
- 3 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

REFERENCES

- 1 *Vibracii v tehnike*, Spravochnik v 6-ti t. M., Mashinostroenie, **1978**, T.1., 352 (in Russ.).
- 2 Kukudzhanov V.N. *Komp'yuternoe modelirovanie deformirovaniya, povrezhdaemosti i razrusheniya neuprugih materialov i konstrukcij*, Uchebnoe posobie. M., MFTI, **2008**, 215 (in Russ.).
- 3 Samarskij A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody*, Ucheb. posobie dlja vuzov. M., Nauka, **1989**, 432 (in Russ.)

Резюме

*А. Қ. Құдайбергенов, Асх. К. Құдайбергенов, Л. А. Хаджиева*

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ҚЫСАҢ-ШИРАТПА БҰРҒЫЛАУ ҚАРНАҒЫНЫҢ  
ТЕРБЕЛІСТЕРІН САНДЫҚ ҮЛГІЛЕУ

Мұнай ұңғымасын бұрғылау үшін қолданылатын бұрғылау қарнағының динамикасы зерттелді. Білікке түсетін жүк-салмақ және бұрау моменті әсерімен айналмалы бұрғылау қарнағының қозғалысы қаралды. Сығылған және бұралған бұрғылау қарнағының сандық үлгісі ұсынылды. Штанга параметрлерінің ықпалы оның көлденең ауытқуларының шегіне зерттелді.

**Тірек сөздер:** бұрғылау қарнағы, серпінді үлгі, көлденең ауытқулар, айқын сызба.

Summary

*A. Kudaibergenov, Askh. Kudaibergenov, L. Khadjiyeva*

(al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan)

NUMERICAL MODELLING OF SQUEEZED AND TWISTED BORING  
BAR FLUCTUATIONS

Dynamics of boring bars applied to drilling oil wells is investigated. The case of the rotating bar subjected to influence of an axial load and twisting moment was considered. Numerical model of the twisted and squeezed boring bar was proposed. Impact of the bar parameters on the amplitude of its cross fluctuations was studied.

**Keywords:** boring bar, dynamic model, cross fluctuations, explicit scheme.

*Поступила 15.10.2013 г.*

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

**КРИТЕРИЙ  $S$  САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ**

**Аннотация.** В данной работе установлен критерий  $S$  самосопряженности обратимого оператора Штурма-Лиувилля.

**Ключевые слова:** критерий, самосопряженность, обратимый, оператор, Штурм-Лиувилль.

**Тірек сөздер:** критерий, жалқылық, қайтымды, оператор, Штурм-Лиувилл.

**Keywords:** criterion самосопряженность, reversible, the operator Sturm-Liouville.

Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  обратимый оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x), \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

где  $a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3,4)$  – произвольные комплексные постоянные,  $y(x) \in D(L) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]: U_i[y] = 0 (i = 1,2)\}$ , т.е. функций  $y(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы на интервале  $(0,1)$  и непрерывно дифференцируемы на всем сегменте  $[0,1]$ . Линейное многообразие  $D(L)$  называется областью определения оператора Штурма-Лиувилля (1)–(2).

Через  $S$  обозначим оператор, определяемый формулой

$$Su(x) = u(1-x), \quad \forall x \in [0,1] \text{ и } u(x) \in L^2(0,1). \quad (3)$$

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** При каких условиях на коэффициенты  $a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3,4)$  имеет место формула

$$SL = L^*S, \quad (4)$$

где  $L^*$  – оператор формально сопряженный к оператору  $L$ , т.е.  $\forall y(x) \in D(L)$  и  $z(x) \in D(L^*)$  имеет место равенство

$$(Ly, z) = (y, L^*z).$$

где  $(\dots)$  – скалярное произведение пространства  $L^2(0,1)$ , т.е.  $\forall f(x), g(x) \in L^2(0,1)$

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x) dx.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2), удовлетворяющий условию (4), назовем  $S$  самосопряженной.

**2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функциями экспоненциального типа называются целые функции, порядок которых меньше 1 либо равен 1, то тогда тип конечен [1, с. 42].

**ЛЕММА 1.** Если функция экспоненциального типа  $f(z)$  не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где  $a, b$  – некоторые комплексные числа [2, с. 31].

Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  задачу на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} Ly &= \lambda y \\ U_i[y] &= 0 \quad (i = 1,2) \end{aligned}$$

с двумя  $(i = 1,2)$  линейно независимыми краевыми условиями. Собственные значения этой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристической функций [3, с. 33].

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \Delta_{42} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{ij} = a_{1i} a_{2j} - a_{2i} a_{1j} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Если имеет место формула (4), где  $L$  – обратимый оператор Штурма-Лиувилля, а оператор  $S$  определен формулой (3), то существует такое комплексное число  $k$ ,  $|k| = 1$ , что имеет место равенства

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} &= k(\Delta_{12} + \Delta_{34}); & 2) \quad \bar{\Delta}_{13} &= k\Delta_{13}; & 3) \quad \bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32} &= k(\Delta_{14} + \Delta_{32}); \\ 4) \quad \bar{\Delta}_{24} &= k\Delta_{24}; & 5) \quad k &= \frac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)}, \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (4) имеем  $L^* = S^{-1}LS$ , т.е. операторы  $L^*$  и  $L$  подобны. Подобные операторы имеют одинаковый спектр, поэтому в силу леммы 1 имеет место формула  $\Delta^*(\lambda^2) = k_1^* \Delta(\lambda^2)$ , где  $\Delta^*(\lambda^2)$  характеристическая функция сопряженного оператора  $L^*$ . С другой стороны, в силу той же леммы имеем  $\Delta^*(\lambda) = k_2^* \Delta(\bar{\lambda})$ , где  $k_1^*, k_2^*$  – некоторые постоянные. Следовательно,

$$\overline{\Delta(\bar{\lambda}^2)} = \frac{k_1^*}{k_2^*} \Delta(\lambda^2) = k \Delta(\lambda^2), \quad k = \frac{k_1^*}{k_2^*}. \quad (7)$$

В силу обратимости оператора  $L$ , имеет место неравенство  $\Delta(0) \neq 0$ , поэтому

$$\bar{\Delta}(0) = k \times \Delta(0), \quad k = \frac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)}, \quad |k| = 1. \quad \text{Подставив (5) в (7), получим}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32}) \cos \lambda - \bar{\Delta}_{42} \lambda \sin \lambda = \\ = k \left[ \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \lambda - \Delta_{42} \lambda \sin \lambda \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая левую и правую часть этой формулы, получим утверждение леммы.

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если  $L$  – обратимый оператор Штурма-Лиувилля, а оператор  $S$  определен формулой (3), то равенство (4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\Delta}_{13} &= k\Delta_{13}; \\ 2) \quad \bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{14} &= (\Delta_{12} + \Delta_{32}); \\ 3) \quad \bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{34} &= k(\Delta_{32} + \Delta_{34}); & 4) \quad \bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{42} &= k(\Delta_{32} + \Delta_{42}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } k = \frac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)}, \quad \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}, \quad \Delta_{ij} [\text{см. (6)}].$$

Если имеет место формула (4), то в силу леммы 2, справедливы равенства 1)–5). Сравнивая формулу 4) с пунктом 4) формулы (8) выводим, что  $\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{32}$ . Тогда с пункта 3) формулы (8) имеем  $\bar{\Delta}_{34} = k\Delta_{34}$ , а со второго пункта этой же формулы получим  $\bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{12}$ .

Таким образом, если для обратимого оператора Штурма-Лиувилля имеет место формула (4), то справедливы формулы

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\Delta}_{12} &= k\Delta_{12}; & 2) \quad \bar{\Delta}_{13} &= k\Delta_{13}; & 3) \quad \bar{\Delta}_{14} &= k\Delta_{32}; \\ 4) \quad \bar{\Delta}_{32} &= k\Delta_{14}; & 5) \quad \bar{\Delta}_{24} &= k\Delta_{24}; & 6) \quad \bar{\Delta}_{34} &= k\Delta_{34}. \end{aligned}$$

$$\text{где } k = \frac{\bar{\Delta}(0)}{\Delta(0)}, \quad \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}, \quad \Delta_{ij} [\text{см. (6)}]$$

Несложно показать, что верно и обратное утверждение, следовательно справедливо также следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если  $L$  – обратимый оператор Штурма-Лиувилля, то формула (4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$1) \bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{12}; \quad 2) \bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}; \quad 3) \bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{32}; \\ 4) \bar{\Delta}_{32} = k\Delta_{14}; \quad 5) \bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}; \quad 6) \bar{\Delta}_{34} = k\Delta_{34}.$$

где  $k = \frac{\Delta(\mathbf{0})}{\Delta(\mathbf{0})'}$ ,  $\Delta(\mathbf{0}) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – С. 176.
- 2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.
- 3 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – С. 329.

#### REFERENCES

- 1 Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. S. 176.
- 2 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN RK. Serija fiz.-mat. 2000. № 3. S. 29-34.
- 3 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukva dumka, 1977. S. 329.

#### Резюме

*А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов*

#### ҚАЙТЫМДЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫ S ЖАЛҚЫЛЫҒЫНЫҢ КРИТЕРИЙІ

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

Бұл еңбекте қайтымды Штурм-Лиувилл операторының  $S$  жалқылығының үзілді кесілді шарттары табылған.

**Тірек сөздер:** критерий, жалқылық, қайтымды, оператор, Штурм-Лиувилл.

#### Summary

*A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov*

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

#### CRITERION S ITSELF CONJUGACY OF AN INVERTIBLE OPERATOR OF STURM-LIOUVILLE

In this work the criterion  $S$  self-conjugacies of the reversible operator of Storm Liouville is established.

**Keywords:** criterion самосопряженность, reversible, the operator Sturm-Liuvill.

*Поступила 15.10.2013г.*

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

## КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ НЕОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

**Аннотация.** В данной работе получен критерий самосопряженности необратимого оператора Штурма-Лиувилля, отличающиеся от известных признаков Э. Л. Айнса и Н. Левинсона.

**Ключевые слова:** критерий, самосопряженность, необратимый оператор, Штурм-Лиувилль.

**Тірек сөздер:** критерий, жалқылық, қайтымсыз оператор, Штурм-Лиувилль.

**Keywords:** criterion, itselfconjugacy, irreversible operator, Sturm- Liuvill.

Пусть  $L$  – оператор второго порядка определяемый равенством

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2), \quad (2)$$

где  $a_{ij}$  ( $i = 1,2; j = 1,2,3,4$ ) – комплексные постоянные.

Обозначим соотношения  $U_i[y] = 0, i = 1,2$ , через  $Uy = 0$ . Задача

$$p; Ly = \lambda y, \quad Uy = 0 \quad (3)$$

называется задачей на собственные значения (или краевой задачей). Она называется самосопряженной, если

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad (4)$$

для всех  $u, v \in C^2$  на  $[0,1]$ , которые удовлетворяют краевым условиям

$$Uu = Uv = 0.$$

Если здесь  $f, g \in L^2(0,1)$ , то

$$(f, g) = \int_0^1 f \bar{g} dt, \quad \|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

Число  $(f, g)$  называется скалярным произведением функций  $f$  и  $g$ , и  $\|f\|$  есть норма функции  $f$  в  $L^2(0,1)$  [1, с. 205].

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Найти необходимые и достаточные условия самосопряженности задачи (3).

Наш метод отличается от ранее известных методов и базируется на идеях работы [3].

### 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

**ЛЕММА 1.** Если функция экспоненциального типа  $f(z)$  [2, с. 42] не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где  $a, b$  – некоторые комплексные числа [3, с. 31].

**ЛЕММА 2.** Если

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

то имеет место формула

$$\Delta_{12} \times \Delta_{24} + \Delta_{14} \times \Delta_{32} - \Delta_{14} \times \Delta_{34} = 0,$$

которая является следствием леммы 1.

**ЛЕММА 3.** Если  $\Delta_{24} \neq 0$ , то граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям,

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) + \Delta_{21}y(0) + \Delta_{23}y(1) = 0, \end{cases}$$

сопряженными которым являются

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{24} Z'(0) + \bar{\Delta}_{14} Z(0) + \bar{\Delta}_{12} Z(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24} Z'(1) - \bar{\Delta}_{34} Z(0) - \bar{\Delta}_{32} Z(1) = 0. \end{cases}$$

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если  $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} = 0$ , то задача Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(n)}(x) = \lambda y(x); x \in (0, 1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

самосопряжена тогда и только тогда, когда

$$1) |\Delta_{12}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| \neq 0; 2) \bar{\Delta}_{12} = e^{i\alpha} \Delta_{34};$$

$$3) \bar{\Delta}_{13} = e^{i\alpha} \Delta_{13}; 4) \bar{\Delta}_{14} = e^{i\alpha} \Delta_{14}; \quad (6)$$

$$5) \bar{\Delta}_{24} = e^{i\alpha} \Delta_{24}; 6) \bar{\Delta}_{32} = e^{i\alpha} \Delta_{32};$$

$$7) \bar{\Delta}_{34} = e^{i\alpha} \Delta_{34}.$$

где  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i, j = 1, 2, 3, 4)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место равенство

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad (4)$$

для всех  $u, v$  удовлетворяющих условий  $Uu = Uv = 0$ . Тогда задача Штурма-Лиувилля не имеет не вещественных собственных значений.

Предположим, что  $|\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| = 0$ , тогда 1)  $\Delta_{24} = 0$ ; 2)  $\Delta_{14} + \Delta_{32} = 0$ ; 3)  $\Delta_{13} = 0$ . поэтому по условию теоремы  $\Delta_{12} + \Delta_{34} = 0$ .

Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля являются квадратами корней уравнения [4, с. 33]

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \Delta_{12} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad (7)$$

следовательно, вся комплексная плоскость является собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля, что противоречит предыдущему утверждению, стало быть, имеет место неравенство

$$1) |\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| \neq 0.$$

Если  $\Delta^*(\lambda)$  – характеристическая функция [4, с. 33] сопряженной задачи Штурма-Лиувилля, то в силу леммы 1 существует такая постоянная  $k_1^* \neq 0$ , что

$$\Delta^*(\lambda) = k_1^* \times \Delta(\bar{\lambda}).$$

С другой стороны, в силу самосопряженности задачи Штурма-Лиувилля, опять, в силу той же леммы, имеем

$$\Delta^*(\lambda) = k_2^* \times \Delta(\lambda).$$

Поэтому имеет место формула

$$\overline{\Delta(\bar{\lambda})} = \frac{k_2^*}{k_1^*} \times \Delta(\lambda) = k \times \Delta(\lambda), \rightarrow \Delta[\overline{(\bar{\lambda})^2}] = k \times \Delta(\lambda^2).$$

Тогда в силу формулы (7) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32}) \cos \lambda - \bar{\Delta}_{12} \lambda \sin \lambda = \\ k \left[ \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \lambda - \Delta_{12} \lambda \sin \lambda \right]. \end{aligned}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты в левой и правой части этой формулы, имеем

$$1) (\bar{\Delta}_{12} + \Delta_{134}) = k(\Delta_{12} + \Delta_{134}); \quad 2) \bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13};$$

$$3) \bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32} = k(\Delta_{14} + \Delta_{32}), \quad 4) \bar{\Delta}_{42} = k\Delta_{42}.$$

Кроме того, в силу предыдущего вывода

$$|\bar{\Delta}_{24}| + |\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32}| + |\bar{\Delta}_{13}| = |k| [|\Delta_{12}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}|], \rightarrow |k| = 1, k \neq 0,$$

Далее предположим, что  $\Delta_{12} \neq 0$ , тогда в силу леммы 3 граничные условия(2) принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) - \Delta_{12}y(0) - \Delta_{32}y(1) = 0 \end{cases}$$

а сопряженными к ним являются

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{24}z'(0) + \bar{\Delta}_{14}z(0) + \bar{\Delta}_{12}z(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}z'(1) - \bar{\Delta}_{34}z(0) - \bar{\Delta}_{32}z(1) = 0. \end{cases}$$

Если  $L = L^*$ , то из условия  $y(x) \in D(L)$  следует, что  $y(x) \in D(L^*)$ , поэтому равенства

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) - \Delta_{12}y(0) - \Delta_{32}y(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}y'(0) + \bar{\Delta}_{14}y(0) + \bar{\Delta}_{12}y(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}y'(1) - \bar{\Delta}_{34}y(0) - \bar{\Delta}_{32}y(1) = 0. \end{cases}$$

выполняются одновременно. Тогда в силу формулы  $\bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$  имеем

$$\begin{cases} (\bar{\Delta}_{14} - k\Delta_{14})y(0) + (\bar{\Delta}_{12} - k\Delta_{34})y(1) = 0, \\ ((-\bar{\Delta}_{34} + k\Delta_{12})y(0) + (-\bar{\Delta}_{32} + k\Delta_{32})y(1) = 0 \end{cases}$$

Отсюда в силу произвольности  $y(0)$  и  $y(1)$  имеем

$$\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{14}, \quad \bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{34}, \quad \bar{\Delta}_{34} = k \times \Delta_{12}, \quad \bar{\Delta}_{32} = k\Delta_{32}.$$

Следовательно выполняются все условия теоремы.

Теперь докажем достаточность условий теоремы. Пусть имеет место формулы (6). В силу первой формулы из (6) имеем

$$|\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{12}| \neq 0.$$

Для определенности предположим, что  $\Delta_{24} \neq 0$ , тогда граничные условия(2) эквивалентны с граничным условиям

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) + \Delta_{21}y(0) + \Delta_{23}y(1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Сопряженные граничные условия к этим имеет вид

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{24}z'(0) + \bar{\Delta}_{14}z(0) + \bar{\Delta}_{12}z(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}z'(1) - \bar{\Delta}_{34}z(0) - \bar{\Delta}_{32}z(1) = 0. \end{cases}$$

Тогда в силу условий теоремы имеем

$$\begin{cases} k\Delta_{24}z'(0) + k\Delta_{14}z(0) + k\Delta_{34}z(1) = 0, \\ k\Delta_{24}z'(1) - k\Delta_{12}z(0) - k\Delta_{32}z(1) = 0 \end{cases} \quad k = e^{i\alpha} \neq 0$$

Разделив обе части этих равенств на  $k$ , получим

$$\begin{cases} \Delta_{24}z'(0) + \Delta_{14}z(0) + \Delta_{34}z(1) = 0, \\ \Delta_{24}z'(1) - \Delta_{12}z(0) - \Delta_{32}z(1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Идентичность граничных условий (8) и (9), очевидна, остальные случаи доказываются также. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: ИЛ, 1958. – С. 474.
- 2 Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – С. 176.
- 3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.
- 4 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – С. 329.
- 5 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939. – 717 с.

#### REFERENCES

- 1 Koddington Je.A., Levinson N. Teorija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. M: IL, 1958. S. 474.
- 2 Leont'ev A.F. Celye funkciy. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. S. 176.
- 3 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoy zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN RK. Serija fiz.-mat. 2000. № 3. S. 29-34.

4 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukva dumka, 1977. S. 329.  
5 Ajns Je.L. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Har'kov, 1939. – 717 s.

### Резюме

*Шалданбаев А. Ш., И. О. Оразов*

#### ҚАЙТЫМСЫЗ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ЖАЛҚЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

Бұл еңбекте қайтымсыз Штурм-Лиувилл операторының жалқылығының үзілді-кесілді шарттары табылған, олар көпке белгілі Э. Л. Айнс пен Н. Левинсонның шарттарынан мүлдем өзгеше.

**Тірек сөздер:** критерий, жалқылық, қайтымсыз оператор, Штурм-Лиувилл.

### Summary

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

*A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov*

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

#### CRITERION ITSELF CONJUGACY IRREVERSIBLE STURM-LIOUVILLE OPERATOR

In this work the criterion of self-conjugacy of the irreversible operator of the Storm Liouville, E. L. Aynsas and N. Levinson different from known signs is received.

**Keywords:** criterion, itselfconjugacy, irreversible operator, Sturm-Liuvill.

*Поступила 15.10.2013г.*

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

*К. А. ҚАБЫЛБЕКОВ, П. А. САЙДАХМЕТОВ, А. С. АРЫСБАЕВА, Л. Е. БАЙДУЛЛАЕВА*

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

## ОҚУШЫЛАРДЫҢ ӨЗ БЕТІНШЕ АТҚАРАТЫН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫС БЛАНКІСІНІҢ ҮЛГІСІ

**Аннотация.** Оқушылардың виртуальды конструкторды пайдалана отырып өз бетінше атқарған «Тұрақты ток көзінің электрқозғалтқыш күші және оның шикі кедергісін анықтау» атты компьютерлік зертханалық жұмыс бланкісінің үлгісі ұсынылған.

**Тірек сөздер:** үлгі, бланк, виртуальды конструктор, зерттеу.

**Ключевые слова:** модель, бланк, виртуальный конструктор, исследования.

**Keyword:** model form, virtual constructor research.

Қазақстан Республикасының Президенті Н. Ә. Назарбаевтың 2011 жылғы қаңтардың 28-індегі Қазақстан халқына Жолдауында: – 2015 жылға қарай білім беру ұйымдарының 50 пайызы электронды оқытуды пайдаланып, 2020 жылға қарай оның саны 90 пайызға дейін артады. 2020 жылға қарай халықаралық стандарттар бойынша тәуелсіз ұлттық аккредитациялаудан өткен ЖОО-дар үлесі 30 пайызды құрайтын болады деген мақсатты алға тартты [1]. «Қазақстанды әлеуметтік модернизациялау: Жалпы Еңбек Қоғамға қарай жиырма қадам» бағдарламасына сәйкес Елбасының

тапсырмасында: 2013–2014 оқу жылынан бастап жалпы орта білім беретін мектептердегі оқу үрдісінде интерактивті оқыту формасын қолдануды кеңейту қарастырылсын және онлайн оқытудың арнайы бағдарламасы ендірілуі керек деп атап көрсетілген.

Қазақстан Республикасының Президенті – Елбасы Н. Ә. Назарбаев ««Қазақстан-2050 – стратегиясы» – қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты» атты Қазақстан халқына Жолдауында: Қазақстан 2050 жылы 30 дамыған мемлекеттер қатарына енуі керек деп атап көрсетті. Дамып келе жатқан елдер арасында мұндай қатарда болуы үшін бәсекелестік қатаң болады. Ұлт жаһандық экономикалық бәсекелестікке дайын болғанда ғана мұндай қатарда бола алады. Біз, аса маңызды мақсаттарымызды естен шығармай, мақсатты және шабытты еңбек етуіміз керек: қазіргі заманға сай нәтижелі білім мен денсаулық сақтау жүйесін құру, бәсекеге қабілетті дамыған мемлекет болу үшін біз сауаттылығы жоғары елге айналуымыз керек. Бізге оқыту әдістемелерін жаңғырту және өңірлік мектеп орталықтарын құра отырып, білім берудің онлайн-жүйелерін белсене дамыту керек болады. Біз қалайтындардың барлығы үшін қашықтан оқытуды және онлайн режимінде оқытуды қоса, отандық білім беру жүйесіне инновациялық әдістерді, шешімдерді және құралдарды қарқынды енгізуге тиіспіз [2].

Білім беруді ақпараттандыру – жаңа технологияны пайдалану арқылы дамыта оқыту, дара тұлғаны бағыттап оқыту мақсаттарын жүзеге асырады. «Қазіргі заманда жастарға ақпараттық технологиямен байланысты әлемдік стандартқа сай мүдделі жаңа білім беру өте қажет» деп, Ел басы атап көрсеткендей, жас ұрпаққа білім беру жолында ақпараттық технологияны яғни компьютерді оқу үрдісінде оңтайландыру мен тиімділігін арттырудың маңызы зор.

Бүгінгі таңда Қазақстан мектептері түгелдей интернет жүйелеріне қосылған компьютерлермен, интерактивті тақталармен қамтамасыз етілген.

Білім беру мекемелерін компьютерлендіру электронды білім беру ресурстары (ББР) мен Интернет-технологияларды кеңінен қолдануға мүмкіншілік тудырады. Интернет-технологиялар мен білім беру ресурстарын қолдану оқытудың дәстүрлі түрінен артықшылығы басым болған жағдайда ғана пайдалы.

Қалайша физика сабақтарында Интернет-технологиялар мен білім беру ресурстарын қолдануға болады? Ақпараттық технологияны пайдалану арқылы оқытушы келесілерді іске асыра алады:

- оқушыларды даралап интерактивті оқытуды ұйымдастыру;
- электронды ресурстарды, әсіресе анимацияларды, апплеттер мен компьютерлік үлгілерді және виртуалды зертханаларды, демонстрацияларды пайдалану;
- компьютерлік үлгілер мен виртуалды зертханаларды пайдаланып компьютерлік зертханалық жұмыстарды жүргізу;
- оқушылардың зерттеу және жобалау жұмыстарын ұйымдастыру;
- компьютерлік бағдарламалар мен алыстан оқыту технологиясын қолданып оқушылардың білімін тексеру.

Физика сабақтарында кеңінен қолданылатын ресурстарды келтіруге болады: «Физика колебаний», «Движение космических тел» [3] (СПбГУ бағдарламалары, «Начала электроники» – әртүрлі электр тізбектерін құрастыруға арналған -электронды конструктор [4], «Физика в анимациях» [5] – механика, толқындар, термодинамика, оптика бөлімдеріне арналған үшөлшемді анимациялар, физикаға арналған тақырыптық Интернет–ресурс каталогы [6], физикадан ғылыми зертхана каталогы [7] және «Открытая физика» (ФИЗИКОН) [8], «Живая физика» [9]. Сонымен қатар виртуалды зертханалар және конструкторлар: бұл ресурстар компьютер экранында әртүрлі тәжірибелік құрылғыларды жинастырып, көптеген тәжірибелер мен зерттеулер жүргізуге мүмкіншілік береді. Интернет жүйесіндегі солардың арасындағы ең қызықтылары төменгілер:

- «Открытый колледж» сайтындағы «Online лаборатория по физике» [10]
- «Сборка» тұрақты тоқ тізбегіне арналған виртуалды конструктор [11];
- «Начала электроники» [4] – виртуалды конструктор.

Виртуалды зертханалық жұмыстар: көп жағдайда құрастырушылар өздерінің электронды ресурстарын зертханалық жұмыстар деп атайды. Олардың пайымдауынша ол бағдарламалар сабақта пайдаланылатын дәстүрлі құрылғылардың көмегімен жүргізілетін зертханалық жұмыстарды имитациялайды. Солардың жарқын мысалы: СПБИТМО сайтындағы орта мектепке арналған алыстан орындалатын зертханалық практикум [12].

ФИЗИКОН компаниясының [8], компьютерлік курстарының негізгі айырмашылығы компанияның оригинал және бірегей туындылары болып есептелетін компьютерлік үлгілері пайдаланылады. Айта кету керек: оқушылар өздері тәжірибелердің бастапқы шарттарын өзгерте алады және өздері әртүрлі виртуал тәжірибелер жүргізе алады. Мұндай интерактивті мүмкіншілік оқушылардың танымдық қабілетін арттырып, тәжірибе жасаушылардың бірі болып қатысуын қамтамасыз етеді. «Открытая Физика 1.0» және «Открытая Физика 1.1» курстарын компьютерлік класта оқушыларды даралап оқыту мақсатында пайдаланған жөн. Бұл ресурс көлемді оқулықтан, 12 интерактивті зертханалық жұмыстан, көптеген интерактивті тестерден және толық шешімдерімен қоса өз бетінше шығаруға арналған есептерден тұрады. Сонымен қатар курс тапсырмаларды орындау барысын бақылау үшін әр оқушыға арналған үлгерім журналын қамтиды. «Открытая Физика 2.5» мультимедиа курсы айтылғандарға қоса, демонстрациялауға өте ыңғайлы компьютерлік үлгілер терезесін және электронды оқулықтың иллюстрацияларын ұлғайтатын «Лупа» инструментімен жабдықталған. Мектеп қосымша желісімен журналы бар компакт-дискі алған жағдайда, оқытушы «Открытая Физика 2.5» курсының желіде істейтін вариантын орнықтыра алады да, барлық оқушылардың жұмысты орындау барысын бақылауға мүмкіншілік алып өз компьютерінде олардың жауаптарын көре алады. Сонымен «Открытая Физика 2.5» курсы материалды түсіндіру үшін демонстрацияларды да, оқушылардың дара жұмыстарын да ұйымдастыра алады. «Открытая Физика 2.5» курсының компакт-дискілерінде оқытушыларға арналған әдістемелік материалдар бар. Өкінішке орай, физика курсының нақ өзінде ол ашылмайды. Әдістемелік материалдарды ашу үшін компьютер экранының сол жақ төменінде орналасқан есептер панелі «Пуск» түймесін басу керек, одан әрі таңдау: «Программы / Программы Физикона / Открытая Физика 2.5 / Методические пособия для учителей». Материалдар ішінен сіз төменгілерді таба аласыз:

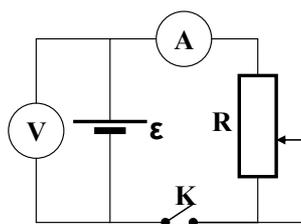
- оқушылардың компьютерлік үлгілермен жұмыс жасауын ұйымдастыруына арналған әдістемелік ұсыныстар және сабақ барысы мен зертханалық жұмыстарды орындау жобалауын;
- практикалық тапсырмалар мысалдары мен компьютерлік үлгілерде зертханалық жұмыс орындау бланкілерін;
- 7-11 сыныптарға арналған күнтізбелік және сабақ өткізу жоспарларын, сонымен қоса бақылау жұмыстарының текстерін.

Бірақ жоғарыда аталғандардың барлығы орыс немесе ағылшын тілінде жасалған, сондықтан қазақ сыныптарында оларды қолдану мүмкіншілігі шектеулі.

Президент жолдауында келтірілген тапсырмаларды орындау үшін М.Әуезов атындағы Мемлекеттік университетінің «Физиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» кафедрасы биылғы оқу жылында оқу үрдісіне «Білімдегі ақпараттық технологиялар» және «Физиканы оқытудағы ақпараттық технологиялар» курстарын енгізді. Курстың мақсаты: студент-болашақ физика мұғалімдерін оқу үрдісінде, өздерінің кәсіпшілік қызметінде және біліктілігін жоғарылатуында, оқу үрдісі мен сыныптан тыс жұмыстарды ұйымдастыруда болашағы зор білім беру технологияларын творчесволық және тиімді пайдалануға дағдыландыру.

Оқу материалдары базасын жасауда студенттер мен магистранттар бесенді қатыстырылады. Авторлар құрастырған бірқатар демонстрациялық тәжірибелердің компьютерлік үлгілерін оқу үрдісінде пайдалану туралы біз бұрын жазғанбыз [13-23].

Бұл мақалада студенттерге, магистранттарға, мектеп мұғалімдеріне көмекші құрал ретінде оқушылардың [5] немесе [11] ресурсын пайдаланып нақты компьютерлік зертханалық жұмыстарын атқаруға арналған бланкі үлгісі ұсынылып отыр. Мұндай бланкілерді мұғалім алдын ала дайындап оқушыларға таратуы керек.



1- сурет

## Компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі

**Жұмыстың тақырыбы:** ЭҚК және тұрақты ток көзінің ішкі кедергісі. Толық тізбек үшін Ом заңын тағайындау.

**Жұмыстың мақсаты:** ток көзінің ішкі кедергісін және оның ЭҚК-ін анықтау.

**Сынып..... Оқушының аты-жөні..... Есімі.....**

**1. Есептердің жауаптарын компьютермен тексеруге арналған есептер:**

Алдымен есептерді қағазға жазып шығарып, сонынан алынған жауапты компьютерде тексеріңдер. Есептерді шығару барысын жазбаша дайындап зертханалық жұмыстың бланкісімен қоса тапсырыңдар.

**1.1-есеп.** Ток көзінің ЭҚК  $\varepsilon=2$  В, ішкі кедергісі  $r=1$  Ом. Егер сыртқы кедергі  $R=7$  Ом болса, онда тізбекте қандай ток жүреді?

*Жауабы.* .....

**1.2-есеп.** Ток көзінің ЭҚК  $\varepsilon=1,5$  В, ішкі кедергісі  $r=3$  Ом. Тізбекте  $0,28$  А ток жүруі үшін сыртқы кедергі қандай болуы керек?

*Жауабы.* .....

**1.3-есеп.** Ток көзінің ЭҚК  $\varepsilon=3$  В. Тізбекте  $0,69$  mA ток жүруі үшін сыртқы кедергі қандай болуы керек?

*Жауабы.* .....

**1.4-есеп.** Ток көзінің ЭҚК  $\varepsilon=1,5$  В, ішкі кедергісі  $r=0,5$  Ом. Тізбекте  $3$  А ток жүруі үшін сырт-қы кедергі қандай болуы керек?

*Жауабы* .....

**1.5-есеп.** Ток көзінің ЭҚК  $\varepsilon=3$  В, ішкі кедергісі  $r=0,5$  Ом. Тізбекте  $6$  А ток жүруі үшін сыртқы кедергі қандай болуы керек?

*Жауабы* .....

**2. Тәжірибелік есептер**

**2.1- есеп.** 1- суретте көрсетілген сызбаны құрастырыңдар.

1. Реостат кедергісін  $7$  Ом, батареикадағы ЭҚК-ті  $1,5$  В, батареиканың ішкі кедергісін  $3$  Ом-ға қойыңыздар.

2. Мультиметрдің көмегімен кілт ағытулы кездегі батареикадағы кернеуді анықтаңыздар. Ағытылған тізбек үшін  $U_{\text{ішкі}} = 0$ , олай болса  $\varepsilon = U$  мультиметрдің көрсетуі – ЭҚК.

3. Кілтті қосып, тізбектегі ток күшін және реостаттағы кернеуді өлшеңдер. Өлшеу құралдарының көрсетуін жазып алыңдар.

*Жауабы* .....

4. Реостаттағы кедергіні өзгертіңдер және ток күші мен кернеудің басқа мәндерін де жазып алыңдар. *Жауабы* .....

5. Реостаттың жылжымалы тиегінің орнын  $6$  рет өзгерте отырып, сәйкес ток күші мен кернеуді өлшеп, алынған мәндерін кестеге толтырыңыздар.

*Жауабы* .....

6. Тізбектегі ток күшінің реостаттағы кернеуге байланысты графигін салыңдар. Графикті саралап қорытынды жасаңдар.

*Жауабы* .....

7.  $r = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}$  формуланы қолданып ішкі кедергіні есептеп шығарыңдар. Алынған нәтижені

бастапқы реостатқа қойылған мәнмен салыстырыңдар

*Жауабы* .....

**2.2- есеп.** 1- суретте көрсетілген сызбаны құрастырыңыз.

1. Реостат кедергісін  $7$  Ом, батареикадағы ЭҚК-ті  $1,5$  В, батареиканың ішкі кедергісін  $3$  Ом-ға қойыңыздар.

2. Мультиметрдің көмегімен кілт ағытулы кездегі батареикадағы кернеуді анықтаңыздар. Ағытылған тізбек үшін  $U_{\text{ішкі}} = 0$ , олай болса  $\varepsilon = U$  мультиметрдің көрсетуі – ЭҚК.

3. Кілтті қосып, тізбектегі ток күшін және реостаттағы кернеуді өлшендер. Өлшеу құралдарының көрсетуін жазып алыңдар.

Жауабы .....

4. Реостаттағы кедергіні өзгертіндер және ток күші мен кернеудің басқа мәндерін де жазып алыңдар.

Жауабы .....

5. Реостаттың жылжымалы тиегінің орнын 6 рет өзгерте отырып, сәйкес ток күші мен кернеуді өлшеп, алынған мәндерін кестеге толтырыңыздар.

Жауабы .....

6. Тізбектегі ток күшінің тізбектің толық кедергісіне байланысты графигін салыңдар. Графикті саралап қорытынды жасаңдар.

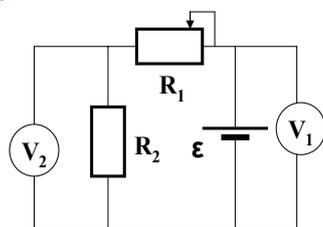
Жауабы .....

7.  $r = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}$  формуланы қолданып ішкі кедергіні есептеп шығарыңдар. Алынған нәтижені

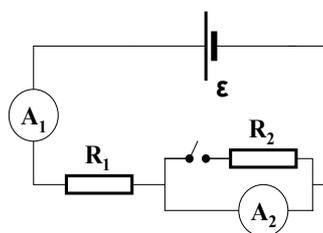
бастапқы реостатқа қойылған мәнмен салыстырыңдар

Жауабы .....

### 3. Зерттеу есептері



1- сурет



2- сурет

**3.1-есеп.** 1-суреттегі тізбекті құрастырыңдар. Егер  $R_1$  жылжымалы тетігін солға қарай жылжытса, онда  $V_1$  және  $V_2$  вольтметрлерінің көрсетулері қалай өзгереді? Егер оңға жылжытса, онда қалай өзгереді?

Жауабы:.....

**3.2-есеп.** 2-суреттегі тізбекті құрастырыңдар. Егер  $R_2$  жалғанған кілтті қосқанда немесе ажыратқанда, онда  $A_1$  және  $A_2$  амперметрлерінің көрсетулері қалай өзгереді?

Жауабы:.....

**Орындалған тапсырмалар саны:.....Қателер саны:.....Оқытушының бағасы:.....**

**Зертханалық жұмысты орындауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары**

1. Біртекті тізбек үшін Ом заңын тұжырымдаңдар. Жауабы:.....
2. Толық тізбек үшін Ом заңын тұжырымдаңдар. Жауабы:.....
3. Ағытылған тізбектегі ток көзінің ЭҚК-і неге тең? Жауабы:.....
4. Ток көзінің ішкі кедергісі немен байланысқан? Жауабы:.....
5. Батареяді қысқаша тұйықтау кезіндегі ток күші қалай анықталады? Жауабы:.....

Бланкіде берілген тапсырмаларды орындау барысында оқушы өзі жасаған тәжірибелерді қорытып Ом заңдарын тұжырымдайды.

**Ескерту:** Тапсырмаларды әр оқушының шамасына қарай берген дұрыс немесе олар тапсырмаларды өздері тандап алса да болады. Зертханалық жұмыстың нәтижесін және қорытындысын бланкіге толтырып оқушы оқытушының электрондық адресіне жібереді немесе өзі мұғалімге тапсырады. Оқытушы сабақ соңында немесе келесі сабақта оқушылардың бағаларын жариялайды. Жіберілген қателер міндетті түрде сарпталуы керек.

### ӘДЕБИЕТ

- 1 Назарбаев Н.Ә. Қазақстан халқына Жолдауы. www.bnews.kz. 28. 01. 2011 ж. Астана.
- 2 Назарбаев Н.Ә. «Қазақстан-2050 – стратегиясы» – қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты». Қазақстан халқына Жолдауы. www.bnews.kz. 14.12.2012ж. Астана.
- 3 [http:// www.phys.spbu.ru](http://www.phys.spbu.ru). «Физика колебаний», «Движение космических тел».
- 4 <http://www.elektronika.newmail.ru>. Начало электроники.

- 5 <http://physics.nad.ru/pysics.htm>. Физика в анимациях.
- 6 <http://www.college.ru/pysics>. Каталог Интернет-ресурсов.
- 7 <http://www.nsu.ru/materials/ssi/>. Каталог научной лаборатории по физике.
- 8 <http://lod-in.ru>. «Открытая физика» (ФИЗИКОН)
- 9 <http://narod.ru>. «Живая физика»
- 10 <http://www.college.ru/laboratory/MainMenu.php3>, «Online лаборатория по физике».
- 11 <http://shadrinsk.zaoral.ru/~sda/project1/index.html>. «Сборка».
- 12 <http://phdep.ifmo.ru/labor/common/>. Дистанционный лабораторный практикум по курсу физики средней школы на сайте СПБИТМО.
- 13 Кабылбеков К.А., Туйебаев М.К., Турмамбеков Т.А., Иманбеков Д.А., Сайдахметов П.А. Компьютерные модели опытов и демонстраций по курсу физики «Электричество. Часть – 1» и их использование в учебном процессе // Высшая школа Казахстана. – Алматы, 2007. – № 3. – С. 14-19.
- 14 Кабылбеков К.А., Туйебаев М.К., Турмамбеков Т.А., Иманбеков Д.А., Сайдахметов П.А. Компьютерные модели опытов и демонстраций по разделу «Механика» курса физики и их использование в учебном процессе «Ұлт тағдыры». – Алматы, 2007. – С. 128-132.
- 15 Кабылбеков К.А., Турмамбеков Т.А., Бердиева М.А., Сайдахметов П.А., Иманбеков Д.А., Омашова Г.Ш. Компьютерные модели опытов и демонстраций по снятию вольт-амперной характеристики диода и петли гистерезиса ферромагнетика и их использование в учебном процессе // Труды междунар. научно-практич. конф. «Современные проблемы подготовки пед. кадров и перспективы развития естественных наук-2». – Шымкент, 2008. – С. 226-233.
- 16 Кабылбеков К.А. Компьютерные модели физических явлений (механика). – Свид-во о госрегистрации прав на объект авторского права № 685 от 29.04.2011.
- 18 Кабылбеков К.А. Компьютерные модели физических явлений (электричество). – Свид-во о госрегистрации прав на объект авторского права № 725 от 10.05.2011.
- 19 Кабылбеков К.А. Компьютерные модели физических явлений (магнетизм). – Свид-во о госрегистрации прав на объект авторского права. № 686 от 29.04.2011.
- 20 Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений // Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. – Томск, 2011. – С. 210-215.
- 21 Кабылбеков К.А., Иманбеков Д.А., Арысбаева А.С. Мультимедиа насыщение образовательных ресурсов динамическими компьютерными моделями // Труды международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-11: Казахстан на пути к обществу знаний: инновационные направления науки, образования и культуры», посвященной 115-летию юбилею Мухтара Ауэзова. – 2012. – С. 48-53.
- 22 Кабылбеков К.А., Сайдахметов П.А., Баубекова Г., Арысбаева А.С. Использование ИНТЕРНЕТ-ресурсов в преподавании физики. Сообщение 1. Использование возможности программы «Начала электроники» на практических занятиях // Труды международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-11: Казахстан на пути к обществу знаний: инновационные направления науки, образования и культуры», посвященной 115-летию юбилею Мухтара Ауэзова. – 2012. – С. 53-57.
- 23 Кабылбеков К.А., Серкебаев С.К., Арысбаева А.С., Баубекова Г. Использование ИНТЕРНЕТ-ресурсов в преподавании физики. Сообщение 2. Использование возможности «Начала электроники» на практических занятиях // Труды международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-11: Казахстан на пути к обществу знаний: инновационные направления науки, образования и культуры», посвященной 115-летию юбилею Мухтара Ауэзова. – 2012. – С. 57-60.

## REFERENCES

- 1 Nazarbaev N.Ə. Qazaqstan halkyna Zholdauy. www.bnews.kz. 28. 01. 2011 zh. Astana.
- 2 Nazarbaev N.Ə. ««Kazakhstan-2050 – strategiasy» – qalyptaskan memlekettiң zhaңa sajası baғыty». Qazaqstan halkyna Zholdauy. www.bnews.kz. 14.12.2012zh. Astana.
- 3 <http://www.phys.spbu.ru>. «Fizika kolebanij», «Dvizhenie kosmicheskikh tel».
- 4 <http://www.elektronika.newmail.ru>. Nachalo jelektroniki.
- 5 <http://physics.nad.ru/pysics.htm>. Fizika v animacijah.
- 6 <http://www.college.ru/pysics>. Katalog Internet-resursov.
- 7 <http://www.nsu.ru/materials/ssi/>. Katalog nauchnoj laboratorii po fizike.
- 8 <http://lod-in.ru>. «Otkrytaja fizika» (FIZIKON)
- 9 <http://narod.ru>. «Zhivaja fizika»
- 10 <http://www.college.ru/laboratory/MainMenu.php3>, «Online laboratorija po fizike».
- 11 <http://shadrinsk.zaoral.ru/~sda/project1/index.html>. «Sborka».
- 12 <http://phdep.ifmo.ru/labor/common/>. Distancionnyj laboratornyj praktikum po kursu fiziki srednej shkoly na sajte SPБИТМО.
- 13 Kabylbekov K.A., Tujebaev M.K., Turmambekov T.A., Imanbekov D.A., Sajdahmetov P.A. Komp'juternye modeli opytov i demonstracij po kursu fiziki «Jelektrichestvo. Chast' – 1» i ih ispol'zovanie v uchebnom processe. Vysshaja shkola Kazahstana. Almaty, 2007. № 3. S. 14-19.
- 14 Kabylbekov K.A., Tujebaev M.K., Turmambekov T.A., Imanbekov D.A., Sajdahmetov P.A. Komp'juternye modeli opytov i demonstracij po razdelu «Mehanika» kursa fiziki i ih ispol'zovanie v uchebnom processe «Ұлт tardyry». Almaty, 2007. S. 128-132.
- 15 Kabylbekov K.A., Turmambekov T.A., Berdieva M.A., Saidahmetov P.A., Imanbekov D.A., Omashova G.Sh. Komp'juternye modeli opytov i demonstracij po snjatiju vol't-ampernoj harakteristiki dioda i petli gisterezisa ferromagnetika i ih

ispol'zovanie v uchebnom processe. Trudy mezhdunar. nauchno-praktich. konf. «Sovremennye problemy podgotovki ped. kadrov i perspektivy razvitiya estestvennyh nauk-2». – Shymkent, 2008. S. 226-233.

16 Kabyzbekov K.A. Komp'juternye modeli fizicheskikh javlenij (mekhanika). Svid-vo o gosregistracii prav na ob#ekt avtorskogo prava № 685 ot 29.04.2011.

18 Kabyzbekov K.A. Komp'juternye modeli fizicheskikh javlenij (jelektrichestvo). Svid-vo o gosregistracii prav na ob#ekt avtorskogo prava № 725 ot 10.05.2011.

19 Kabyzbekov K.A. Komp'juternye modeli fizicheskikh javlenij (magnetizm). Svid-vo o gosregistracii prav na ob#ekt avtorskogo prava. № 686 ot 29.04.2011.

20 Kabyzbekov K.A., Bajzhanova A. Ispol'zovanie mul'timedijnyh vozmozhnostej komp'juternyh sistem dlja rasshirenija demonstracionnyh resursov nekotoryh fizicheskikh javlenij. Trudy Vserossijskoj nauchno-prakt. konf. s mezhdunar. uchastiem. Tomsk, 2011. S. 210-215.

21 Kabyzbekov K.A., Imanbekov D.A., Arysbaeva A.S. Mul'timediasyshhenie obrazovatel'nyh resursov dinamicheskimi komp'juternymi modeljami. Trudy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Auezovskie chtenija-11: Kazahstan na puti k obshhestvu znaniy: innovacionnye napravlenija nauki, obrazovanija i kul'tury», posvjashhennoj 115-letnemu jubileju Muhtara Aujezova. 2012. S. 48-53.

22 Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P.A., Baubekova G., Arysbaeva A.S. Ispol'zovanie INTERNET-resursov v prepodavanii fiziki. Soobshhenie 1. Ispol'zovanie vozmozhnosti programmy «Nachala jelektroniki» na prakticheskikh zanjatijah. Trudy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Auezovskie chtenija-11: Kazahstan na puti k obshhestvu znaniy: innovacionnye napravlenija nauki, obrazovanija i kul'tury», posvjashhennoj 115-letnemu jubileju Muhtara Aujezova. 2012. S. 53-57.

23 Kabyzbekov K.A., Serkebaev S.K., Arysbaeva A.C., Baubekova G. Ispol'zovanie INTERNET-resursov v prepodavanii fiziki. Soobshhenie 2. Ispol'zovanie vozmozhnosti «Nachala jelektroniki» na prakticheskikh zanjatijah. Trudy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Auezovskie chtenija-11: Kazahstan na puti k obshhestvu znaniy: innovacionnye napravlenija nauki, obrazovanija i kul'tury», posvjashhennoj 115-letnemu jubileju Muhtara Aujezova. 2012. S. 57-60.

### **Резюме**

*К. А. Кабылбеков, П. А. Саудахметов, А. С. Арысбаева, Л. Е. Байдуллаева*

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

### **МОДЕЛЬ БЛАНКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ**

Предлагается модель бланка компьютерной лабораторной работы «Электродвижущая сила источника постоянного тока и определение его внутреннего сопротивления» проводимого учащимися самостоятельно с использованием виртуального конструктора.

**Ключевые слова:** модель, бланк, виртуальный конструктор, исследования.

### **Summary**

*K. A. Kabyzbekov, P. A. Saidahmetov, A. S. Arysbaeva, L. Ye. Baidullayev*

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

### **MODEL INDEPENDENT BLANCA COMPUTER LABORATORY WORK OF STUDENTS**

The model of the form of computer laboratory work «Electromotive force of a source of a direct current and definition of its internal resistance», made by pupils independently with use of the virtual constructors is offered.

**Keyword:** model form, virtual constructor research.

*Поступила 15.10.2013г.*