

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



SERIES

OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL

1 (293)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2014 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2014 г.
JANUARY – FEBRUARY 2014**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Бас редактор
ҚР ҰҒА академигі
Б. Т. Жұмағұлов

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кәлменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, академик **А. Гаджиев** (Әзірбайжан), академик **А. Пашаев** (Әзірбайжан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Главный редактор
академик НАН РК
Б. Т. Жумагулов

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темирбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, академик **А. Гаджиев** (Азербайджан), академик **А. Пашаев** (Азербайджан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief
academician of the NAS of the RK
B. T. Zhumagulov

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, academician **A. Gadzhiev** (Azerbaijan), academician **A. Pashaev** (Azerbaijan), academician **I. Tiginaynu** (Moldova), academician **I. N. Vishnevskiyi** (Ukraine), academician **A. M. Kovalov** (Ukraine), academician **A. A. Mikhalevich** (Belarus), doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 3000 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18 www.akademiyanauk.kz
Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан)

СОПРЯЖЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. В работе для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости показана однозначная разрешимость сопряженной краевой задачи с отходом от характеристики.

Ключевые слова: задача, гиперболическое уравнение, характеристика, корректность.

Тірек сөздер: есеп, гиперболалық теңдеу, сипаттама, қисындылық.

Keywords: problem, hyperbolic equation, characteristic, well-posedness.

п. 1. Постановка задачи и результат. Пусть $D \subset R^2$ – конечная область, ограниченная отрезком $AB : 0 \leq x \leq 1$ оси $y = 0$, а при $y > 0$ – отрезком $AF : y = x, 0 \leq x \leq h, 0 < h = \text{const} < 1/2$, гладкой кривой $FH : y = \gamma(x), h \leq x \leq l$, вдоль которой $0 < \gamma'(x) < 1, \gamma(h) = h, \gamma(l) = 1 - l$ и прямой $HB : y = 1 - x$.

В области D рассмотрим линейные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0, \quad (1)$$

$$A, B \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), C \in C(D).$$

В качестве сопряженной краевой задачи с отходом от характеристики рассмотрим следующую.

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_{AB} = \tau(x), u|_{BH} = \sigma_1(x), u|_{FH} = \varphi(x), \quad (2)$$

или

$$u_y|_{AB} = \nu(x), u|_{BH} = \sigma_1(x), u|_{FH} = \varphi(x), \quad (3)$$

$$\tau(x), \nu(x) \in C^1(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1), \sigma_1(x) \in C^1(\ell \leq x \leq 1) \cap C^2(\ell < x < 1),$$

$$\varphi(x) \in C^1(h \leq x \leq l) \cap C^2(h < x < l),$$

которая встречается при исследовании трансзвуковых проблем [1].

В характеристических координатах $\xi = x + y, \eta = x - y$ уравнение (1) записывается следующим образом.

$$u_{\xi\eta} + au_{\xi} + bu_{\eta} + cu = 0, \quad (4)$$

$$4a(\xi, \eta) = A + B, 4b(\xi, \eta) = A - B, 4c(\xi, \eta) = C.$$

При этом краевые условия (2) и (3) соответственно имеют вид

$$u(\eta, \eta) = \tau(\eta), 0 \leq \eta \leq 1, u(\alpha(\eta), \eta) = \psi_2(\eta), 0 \leq \eta \leq \eta_0, u(1, \eta) = \psi_1(\eta), \eta_0 \leq \eta \leq 1, \quad (5)$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=\eta} = v(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad u(\alpha(\eta), \eta) = \psi_2(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad u(1, \eta) = \psi_1(\eta), \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1, \quad (6)$$

где

$$\psi_2(\eta) = \varphi \left(\frac{\eta}{2} + \frac{\alpha(\eta)}{2} \right), \quad \psi_1(\eta) = \sigma_1 \left(\frac{1+\eta}{2} \right), \quad \text{а функция } \eta = \alpha(\eta) \text{ является решением уравнения}$$

$$\xi = \eta + 2\gamma \left(\frac{\xi + \eta}{2} \right), \quad \text{при этом } \frac{1+\gamma'(x)}{1-\gamma'(x)} = \alpha'(\eta) > 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad \text{а также } \eta_0 > 0 : \alpha(\eta_0) = 1.$$

Пусть в случае задачи (4), (5) выполняется условие

$$\Delta_1(\eta) = \exp \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} p_1(\xi_1, \eta) d\xi - \alpha'(\eta) \alpha'(\alpha(\eta)) \exp \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} p_2(\eta, \xi_1) d\xi_1 \neq 0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1, \quad (7)$$

$$p_1(\xi_1, \eta) = \begin{cases} -\bar{b}(\xi_1, \alpha(\eta)), & \alpha(\alpha(\eta)) \leq \xi_1 \leq \alpha(\eta), \\ -\bar{b}(\xi_1, \eta), & \alpha(\eta) \leq \xi_1 \leq \eta, \end{cases}$$

$$p_2(\eta, \xi_1) = \begin{cases} \bar{a}(\alpha(\alpha(\eta)), \xi_1), & \alpha(\alpha(\eta)) \leq \xi_1 \leq \alpha(\eta), \\ \bar{a}(\alpha(\eta), \xi_1), & \alpha(\eta) \leq \xi_1 \leq \eta, \end{cases}$$

а в случае задачи (4), (6) имеет место

$$\Delta_2(\eta) = \exp \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} p_1(\xi_1, \eta) d\xi_1 - \exp \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} p_2(\eta, \xi_1) d\xi_1 \neq 0. \quad (8)$$

Тогда справедлива

Теорема Задача 1 имеет единственное решение.

п. 2. Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим задачи (1), (2), которые переходят к задаче (4), (5). Используя общее решение уравнения (4) [2] в [3], показано, что решение задачи Коши для уравнения (4) представимо в виде

$$u(\xi, \eta) = \frac{\tau(\eta)}{2} R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{\tau(\xi)}{2} R(\xi, \xi; \xi, \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^{\xi} \{ v(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) -$$

$$- \tau(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \Big|_{\xi_1=\eta_1} + 2 \left[a(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \eta_1}{\partial N} \right] \Big|_{\xi_1=\eta_1} R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) \tau(\xi_1) \} d\xi_1, \quad (9)$$

где $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ -функция Римана уравнения (4), $\frac{\partial}{\partial N} \Big|_{\xi_1=\eta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) \Big|_{\xi_1=\eta_1}$.

Тогда из (9), при $\xi = 1$ и $\xi = \alpha(\eta)$, с учетом (5), получим следующие интегральные уравнения первого рода.

$$f_1(\eta) = \int_{\eta}^1 v(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; 1, \eta) d\xi_1, \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1,$$

$$f_2(\eta) = \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} v(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \alpha(\eta), \eta) d\xi_1, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0,$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{2} f_1(\eta) &= \psi_1(\eta) - \frac{\tau(\eta)}{2} R(\eta, \eta; 1, \eta) - \frac{\tau(1)}{2} R(1, 1; 1, \eta) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; 1, \eta) \Big|_{\xi_2=\eta_2} - 2 \left[\bar{a}(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial N} + \bar{b}(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \eta_1}{\partial N} \right] \Big|_{\xi_2=\eta_2} R(\xi_1, \xi_1; 1, \eta) \right\} \tau(\xi_1) d\xi_1, \\ \sqrt{2} f_2(\eta) &= -\psi_2(\eta) + \frac{\tau(\eta)}{2} R(\eta, \eta; \alpha(\eta), \eta) + \frac{\tau(\alpha(\eta))}{2} R(\alpha(\eta), \alpha(\eta); \alpha(\eta), \eta) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \alpha(\eta), \eta) \Big|_{\xi_2=\eta_2} - 2 \left[\bar{a}(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial N} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{b}(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \eta_1}{\partial N} \right] \Big|_{\xi_2=\eta_2} R(\xi_1, \xi_1; \alpha(\eta), \eta) \right\} \tau(\xi_1) d\xi_1, \end{aligned}$$

которые дифференцированием сводятся соответственно к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v(\eta) = \mu_1(\eta) + \int_{\eta}^1 G_1(\eta, \xi_1) v(\xi_1) d\xi_1, \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1, \quad (10)$$

и функционально-интегральному уравнению

$$a_1(\eta) v(\eta) + b_1(\eta) v(\alpha(\eta)) = \mu_2(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad (11)$$

$$\mu_1(\eta) = f_1'(\eta) / R(\eta, \eta; 1, \eta), \quad G_1(\eta, \xi_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi_1, \xi_1; 1, \eta) / R(\eta, \eta; 1, \eta),$$

$$a_1(\eta) = R(\eta, \eta; \alpha(\eta), \eta), \quad b_1(\eta) = -\alpha'(\eta) R(\alpha(\eta), \alpha(\eta); \alpha(\eta), \eta),$$

$$\mu_2(\eta) = \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} v(\xi_1) \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi_1, \xi_1; \alpha(\eta), \eta) d\eta_1 + f_2'(\eta), \quad R(\eta, \eta; 1, \eta) = \exp \int_{\eta}^1 b(\xi_2, \eta) d\eta_2.$$

В[4] показано, что если

$$\Delta_1(\eta) = a_1(\eta) a_1[\alpha(\eta)] - b_1(\eta) b_1[\alpha(\eta)] \neq 0, \quad (12)$$

то функциональное уравнение (11) имеет единственное решение вида

$$v(\eta) = [a_1(\alpha(\eta)) \mu_2(\eta) - b_1(\eta) \mu_2(\alpha(\eta))] / \Delta_1. \quad (13)$$

Из определения функция Римана $R[2,5]$ формула (12) записывается в виде (7), а (13) следующим образом

$$v(\eta) = g(\eta) + \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} G(\eta, \xi_1) v(\eta_1) d\eta_1, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad (14)$$

$$g(\eta) = \left[f_2'(\eta) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))} \bar{b}(\eta_1, \alpha(\eta)) d\eta_1 + f_2'(\alpha(\eta)) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta), \eta_1) d\eta_1 \right] / \Delta_1,$$

$$G(\eta, \xi_1) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi_1, \xi_1; \alpha(\alpha(\eta)), \alpha(\eta)) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta), \eta_1) d\eta_1, & \alpha(\alpha(\eta)) \leq \xi_1 \leq \alpha(\eta), \\ -\frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi_1, \xi_1; \alpha(\eta), \eta) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))} \bar{b}(\eta_1, \alpha(\eta)) d\eta_1, & \alpha(\eta) \leq \xi_1 \leq \eta. \end{cases}$$

Известно, что функция Римана R по переменным ξ_1, η_1 и ξ, η имеет такую же гладкость, что и коэффициенты уравнения (4) [2, 5], поэтому ядро $G(\eta, \xi_1)$ допускает оценку

$$|G(\eta, \xi_1)| \leq M_1. \quad (15)$$

Решение интегрального уравнения (14) будем искать в виде ряда

$$v(\eta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} v_{\kappa}(\eta), \quad (16)$$

$$v_0(\eta) = g(\eta), \quad v_{\kappa}(\eta) = \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} G(\eta, \xi_1) v_{\kappa-1}(\xi_1) d\xi_1, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Из (15) получим следующие оценки

$$|v_0(\eta)| = \max_{[0, \eta_0]} |g(\eta)| = m_1, \quad |v_1(\eta)| \leq m_1 M_1 \eta, \quad |v_2(\eta)| \leq m_1 M_1^2 \frac{\eta^2}{2},$$

и вообще
$$|v_{\kappa}(\eta)| \leq m_1 \frac{(M_1 \eta)^{\kappa}}{\kappa!} \leq m_1 \frac{M_1^{\kappa}}{\kappa!}.$$

Тогда для ряда (16) будем иметь

$$|v(\eta)| \leq \sum_{\kappa=0}^{\infty} |v_{\kappa}(\eta)| \leq m_1 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{M_1^{\kappa}}{\kappa!} = m_1 \exp M_1.$$

Таким образом, интегральное уравнение (14) [а также (11)], при выполнении условия (7), однозначно разрешима.

Следовательно, задача (4), (5) имеет единственное решение вида (9), в которой $v(\eta)$ находится из уравнений (10) и (14).

Теорема для задачи (1), (2) доказана.

Теперь ее докажем для задачи (1), (3). Для этого достаточно рассмотреть задачу (4), (6). Из решения задачи Коши (9) при $\xi = 1$ и $\xi = \alpha(\eta)$, с учетом (6), получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(\eta) = \chi_1(\eta) + \int_{\eta}^1 G_2(\eta, \xi_1) \tau(\xi_1) d\xi_1, \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1, \quad (17)$$

и функционально-интегральное уравнение

$$a_2(\eta) \tau(\eta) + b_2(\eta) \tau(\alpha(\eta)) = \chi_2(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad (18)$$

где

$$\chi_1(\eta) = \left[2\psi_1(\eta) - \psi_1(1)R(1, 1; 1, \eta) - \sqrt{2} \int_{\eta}^1 v(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; 1, \eta) d\xi_1 \right] / R(\eta, \eta; 1, \eta),$$

$$G_2(\eta, \xi_1) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) R(\xi_1, \eta_1; 1, \eta) \Big|_{\xi_1 = \eta_1} - 2(\bar{a}(\xi_1, \xi_1) - \bar{b}(\xi_1, \xi_1)) R(\xi_1, \xi_1; 1, \eta) \right] / R(\eta, \eta; 1, \eta),$$

$$a_2(\eta) = R(\eta, \eta; \alpha(\eta), \eta) = \exp \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} \bar{b}(\xi_1, \eta) d\xi_1,$$

$$b_2(\eta) = R(\alpha(\eta), \alpha(\eta); \alpha(\eta), \eta) = \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta), \eta_1) d\eta_1,$$

$$\chi_2(\eta) = f(\eta) + \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} \tau(\xi_1) H(\eta_1, \xi_1) d\xi_1, \quad f(\eta) = 2\psi_2(\eta) - \sqrt{2} \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} v(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \alpha(\eta), \eta) d\xi_1,$$

$$H(\eta, \xi_1) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) R(\xi_1, \eta_1; \alpha(\eta), \eta) \Big|_{\xi_1 = \eta_1} - 2(\bar{a}(\xi_1, \xi_1) - \bar{b}(\xi_1, \xi_1)) R(\xi_1, \xi_1; \alpha(\eta), \eta).$$

Если выполняется условие

$$\Delta_2(\eta) = a_2(\eta)a_2[\alpha(\eta)] - b_2(\eta)b_2[\alpha(\eta)] \neq 0,$$

или то же самое условие (8), то функциональное уравнение (18) имеет единственное решение вида

$$\tau(\xi) = \psi(\eta) + \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} G(\eta, \xi_1) \tau(\xi_1) d\xi_1, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad (19)$$

$$\psi(\eta) = \left[f(\eta) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))} \bar{b}(\eta_1, \alpha(\eta)) d\eta_1 - f(\alpha(\eta)) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta), \eta_1) d\eta_1 \right] / \Delta_2,$$

$$G(\eta, \xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} H(\alpha(\eta), \xi_1) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta), \eta_1) d\eta_1, & \alpha(\alpha(\eta)) \leq \xi_1 \leq \alpha(\eta), \\ -\frac{1}{\Delta_2} H(\eta, \xi_1) \exp \int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))} \bar{b}(\eta_1, \alpha(\eta)) d\eta_1, & \alpha(\eta) \leq \xi_1 \leq \eta, \end{cases}$$

при этом $\max_{[0, \eta_0]} |\psi(\eta)| = m_2, |G(\eta, \xi_1)| \leq M_2.$

Решение интегрального уравнения (19) будем искать в виде ряда $\tau(\eta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \tau_{\kappa}(\eta)$, для которого

имеет место неравенство $|\tau(\eta)| \leq m_2 \exp M_2 \eta_0.$

Таким образом, интегральное уравнение (19) (а также (18)), при выполнении условия (8) однозначно разрешимо.

Следовательно, задача (4), (6) имеет единственное решение вида (9), в которой $\tau(\eta)$ определяются из (17) и (19).

Отметим, что если $A(x, y) = B(x, y) \equiv 0$, то условие (8) не выполняется. В этом случае уравнение (18) имеет вид

$$\tau(\eta) + \tau(\alpha(\eta)) = f(\eta) + \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} \tau(\xi_1) H(\eta, \xi_1) d\xi_1, \quad (20)$$

$$H(\eta, \xi_1) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) R(\xi_1, \eta_1; \alpha(\eta), \eta) \Big|_{\xi_1 = \eta_1}.$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (20), вполне непрерывен то, как показано в [4], функциональное уравнение (20) имеет единственное решение.

Таким образом, и в этом случае задача (4) (6) однозначно разрешима.

Теорема для задачи (1), (3) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – С. 701.
- 2 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 164.
- 3 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – С. 170.
- 4 Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – С. 448.
- 5 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 301.

REFERENCES

- 1 Frankl' F.I. Izbrannye trudy po gazovoj dinamike. M.: Nauka, 1973. S. 701.
- 2 Bicadze A.V. Uravnenija smeshannogo tipa. M.: Izd-vo AN SSSR, 1959. S. 164.
- 3 Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskikh i smeshannyh uravnenij. Almaty: Fylym, 1994. S. 170.
- 4 Litvinchuk G.S. Kraevye zadachi i singuljarnye integral'nye uravnenija so sdvigom. M.: Nauka, 1977. S. 448.
- 5 Nahushev A.M. Uravnenija matematicheskoy biologii. M.: Vysshaja shkola, 1995. S. 301.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ЕКІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРГЕ ЖАЗЫҚТЫҚТА СИПАТТАМАДАН АУЫТҚЫҒАН ТҮЙІНДЕС ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП

Жұмыста екінші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеулерге жазықтықта сипаттамадан ауытқыған түйіндес шекаралық есептің бір мәнді шешімділігі дәлелденген.

Тірек сөздер: есеп, гиперболалық теңдеу, сипаттама, қисындылық.

Summary

S. A. Aldashev

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ADJOINT WELL-POSEDNESS OF A BOUNDARY-VALUE WITH DEPARTURE FROM THE CHARACTERISTIC FOR LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF SECOND ORDER ON A PLANE

This paper shows the adjoint well-posedness of the problems with departure from characteristic for second-order linear hyperbolic equations on a plane.

Keywords: problem, hyperbolic equation, characteristic, well-posedness.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 510.532

Ас. А. ИСАХОВ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

НУМЕРАЦИИ ФРИДБЕРГА СЕМЕЙСТВА ВСЮДУ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

Аннотация. На основе обобщенного понятия вычислимой нумерации для семейств функций в арифметической иерархии было доказано, что бесконечное Σ_{n+2}^0 -вычисляемое семейство всюду определенных функций имеет бесконечное число попарно неэквивалентных нумераций Фридберга.

Ключевые слова: Σ_{n+2}^0 -вычисляемая нумерация, нумерация Фридберга, арифметическая иерархия.

Тірек сөздер: Σ_{n+2}^0 -есептелімді нөмірлеу, Фридберг нөмірлеуі, арифметикалық иерархия.

Keywords: Σ_{n+2}^0 -computable numbering, Friedberg numbering, arithmetical hierarchy.

Нумерация $\nu : \omega \mapsto F$ семейства одноместных вычислимых функций называется вычислимой, если бинарная функция $\nu(n)(x)$ является вычислимой, [1]. Нумерацией Фридберга какого-либо семейства называется произвольная вычислимая взаимно однозначная нумерация. Известно, что полурешетка Роджерса вычислимого семейства F либо состоит из одного элемента, либо из бесконечного числа элементов, [1]; а также, что в нетривиальном случае она никогда не является решеткой и не имеет максимальных элементов, и содержит либо один, либо бесконечно много минимальных элементов, [2].

Мы обобщили понятие вычислимой нумерации для семейств функций в арифметической иерархии согласно [3]. Пусть F – семейство всюду определенных одноместных функций из Σ_{n+1}^0 , $n \in \omega$. Тогда нумерация $\nu : \omega \mapsto F$ называется Σ_{n+1}^0 -вычислимой, если бинарная функция $\nu(n)(x)$ является вычислимой относительно оракула $\emptyset^{(n)}$ [3].

ТЕОРЕМА. Пусть $F \subseteq \Sigma_{n+2}^0$ – бесконечное Σ_{n+2}^0 -вычислимое семейство всюду определенных функций. Тогда F имеет бесконечное число попарно неэквивалентных нумераций Фридберга.

Доказательство. Разделим утверждение теоремы на две леммы и последовательно докажем их.

Лемма 1. Пусть $F \subseteq \Sigma_{n+2}^0$ – бесконечное Σ_{n+2}^0 -вычислимое семейство всюду определенных функций. Если F имеет $0^{(n+1)}$ -вычислимую нумерацию, тогда F имеет $0^{(n+1)}$ -вычислимую нумерацию Фридберга.

Доказательство. Пусть $\alpha : \omega \mapsto F$ произвольная $0^{(n+1)}$ -вычислимая нумерация семейства F , тогда существует $0^{(n+1)}$ -вычислимая функция $G(n, x)$ такая, что $\alpha(n) = \lambda x G(n, x)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Построим функцию f следующим образом: на шаге 1 положим $f(0) = 0$ (т.е. присвоим для $f(0)$ номер первой функций в нумерации α). На шаге $k+1$ будем искать номер функций, отличной от уже обнаруженных, сравнивая одновременно следующие функций

$$\begin{aligned} &G(0, 0), G(0, 1), \dots, G(0, k), \\ &G(1, 0), G(1, 1), \dots, G(1, k), \\ &\dots\dots\dots \\ &G(k, 0), G(k, 1), \dots, G(k, k), \end{aligned}$$

(т.е. сравнивая $k+1$ начальных функций на $k+1$ начальных аргументах). Тем самым будем присваивать функции f α -номера попарно различных функций $G(n, x)$. Очевидно, что данная функция f будет 1-1 функцией, и так как функция $G(n, x)$ $0^{(n+1)}$ -вычислима, то и сравнение конечного числа данных функций на конечном числе аргументов также будет $0^{(n+1)}$ -вычислимой. Следовательно, функция f тоже будет $0^{(n+1)}$ -вычислимой.

Тогда нумерация $\beta = \alpha \circ f$ (т.е. $\beta(n) = \lambda x F(f(n), x)$) будет $0^{(n+1)}$ -вычислимой нумерацией Фридберга. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $F \subseteq \Sigma_{n+2}^0$ – бесконечное Σ_{n+2}^0 -вычислимое семейство всюду определенных функций. Если F имеет Σ_{n+2}^0 -вычислимую нумерацию Фридберга, тогда F имеет бесконечно много попарно неэквивалентных нумераций Фридберга.

Доказательство. Пусть $\alpha : \omega \mapsto F$ Σ_{n+2}^0 -вычислимая нумерация Фридберга, K – креативное множество: $K = \{x : x \in W_x\}$. Упорядочим элементы K и \bar{K} в порядке возрастания:

$$K = \{a_0 < a_1 < a_2 < \dots\} \text{ и } \bar{K} = \{b_0 < b_1 < b_2 < \dots\},$$

и определим $0'$ -вычислимую перестановку p следующим образом: $p(a_{i+1}) = a_i$, $p(a_0) = b_0$, $p(b_i) = b_{i+1}$, где $i = 0, 1, 2, \dots$.

Заметим, что p не является вычислимой перестановкой, так как в противном случае последовательность $p(a_0), p(p(a_0)), p(p(p(a_0))), \dots$ оказалось бы вычислимым перечислением множества \overline{K} .

Очевидно, что каждая нумерация из системы

$$\begin{cases} \alpha \circ p, \\ \alpha \circ p^2, \\ \alpha \circ p^3, \\ \vdots \end{cases} \quad (1)$$

будет Σ_{n+2}^0 -вычислимой нумерацией Фридберга и нам остается установить не эквивалентность любых двух нумерации из (1). Прежде заметим, что для любого $n \geq 1$ перестановка p^n будет не вычислимой, так как в противном случае последовательность (в которой участвуют элементы a_0, a_1, \dots, a_{n-1})

$$p^n(a_{n-1}) = b_0, p^n(a_{n-2}) = b_1, \dots, p^n(a_0) = b_{n-1}, p^n(p^n(a_{n-1})) = b_n, \\ p^n(p^n(a_{n-2})) = b_{n+1}, \dots, p^n(p^n(a_0)) = b_{2n-1}, \dots$$

определила бы вычислимое перечисление множества \overline{K} .

Если $n > k$, то $\alpha \circ p^n \not\leq \alpha \circ p^k$. На самом деле, если бы $\alpha \circ p^n \leq \alpha \circ p^k$, то существовала бы вычислимая функция h такая, что $\alpha \circ p^n = \alpha \circ p^k \circ h$, но так как $\alpha \circ p^k$ -взаимно однозначная функция, то должно быть $p^{n-k} = h$, что невозможно в связи с тем, что в этом случае не вычислимая перестановка p^{n-k} была бы вычислимой функцией h . Следовательно, $\alpha \circ p^n \neq \alpha \circ p^k$, при $n \neq k$, так как $\alpha \circ p^n = \alpha \circ p^k$ тогда и только тогда, когда $\alpha \circ p^n \leq \alpha \circ p^k$ и $\alpha \circ p^n \geq \alpha \circ p^k$. Тем самым, мы построили бесконечную последовательность попарно неэквивалентных нумераций Фридберга. Лемма 2 доказана.

Из леммы 1 и леммы 2 непосредственно следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
- 2 Марченков С.С. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. – 1972. – Т. 11, № 5. – С. 588-607.
- 3 Badaev S.A., Goncharov S.S. Rogers semilattices of families of arithmetic sets // Algebra and logic. – 2001. – Vol. 40, N 5. – P. 283-291.

REFERENCES

- 1 Ershov Ju.L. Teorija numeracij. M.: Nauka, 1977. 416 s. (in Russ.)
- 2 Marchenkov S.S. O vychislmyh numeracijah semejstv obshherkursivnyh funkcij. Algebra i logika. 1972. T. 11, №5. S. 588-607. (in Russ.)
- 3 Badaev S.A. and Goncharov S.S. Rogers semilattices of families of arithmetic sets. Algebra and logic. 2001. Vol. 40, N 5. P. 283-291.

Резюме

Ас. А. Исахов

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

**АРИФМЕТИКАЛЫҚ ИЕРАРХИЯДАҒЫ БАРЛЫҚ ЖЕРДЕ АНЫҚТАЛҒАН
ФУНКЦИЯЛАР ҮЙІРІНІҢ ФРИДБЕРГ НӨМІРЛЕУЛЕРІ**

Арифметикалық иерархиядағы функциялар үйірі үшін есептелімді нөмірлеу ұғымын жалпылау негізінде, шексіз Σ_{n+2}^0 -есептелімді барлық жерде анықталған функциялар үйірінің бір-біріне эквивалент емес шексіз Фридберг нөмірлеулері бар екені дәлелденген.

Тірек сөздер: Σ_{n+2}^0 -есептелімді нөмірлеу, Фридберг нөмірлеуі, арифметикалық иерархия.

Summary

As. A. Issakhov

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

**FRIEDBERG NUMBERINGS OF THE FAMILY OF TOTAL FUNCTIONS
IN THE ARITHMETICAL HIERARCHY**

On the basis of a generalized notion of computable numbering for the families of functions in the arithmetical hierarchy, it has been proved that an infinite Σ_{n+2}^0 -computable family of total functions has infinitely many pairwise nonequivalent Friedberg numberings.

Keywords: Σ_{n+2}^0 -computable numbering, Friedberg numbering, arithmetical hierarchy.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 517.956

Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ, Е. А. НЫСАНОВ, Г. М. ХУШНИЗАРОВ

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Аннотация. В статье получены граничные условия гидродинамического потенциала для системы Стокса. Также доказано, что система Стокса с полученными граничными условиями имеет единственное решение, которое построено в явном виде.

Ключевые слова: гидродинамический потенциал, система Стокса, фундаментальное решение, потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя.

Тірек сөздер: гидродинамикалық потенциал, Стокс жүйесі, іргелі шешім, жай қабатты потенциал, қос қабатты потенциал.

Keywords: hydrodynamic potential, Stokes system, fundamental solution, single layer potential, double layer potential.

1. Введение. Ввиду большой теоретической и прикладной важности, граничные условия для гидродинамического потенциала представляют большой научный интерес. Отметим, что в данной работе получены граничные условия гидродинамического потенциала для системы Стокса и продолжены исследования на основе полученных ранее результатов работ, а именно: работа [1], в

которой для произвольной области определено граничное условие объемного потенциала, и в случае двумерного круга и трехмерного шара найдены собственные значения и собственные функции объемного потенциала; в работе [2] в ограниченной односвязной области получены граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения; в работе [3] с помощью объемного потенциала разработана нелокальная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности высокого порядка в ограниченной области. При этом было найдено единственное классическое решение этой задачи в явном виде и показано, что решение начально-краевой задачи приравняется решению задачи Коши в бесконечном пространстве.

2. Предварительные обозначения и понятия. Система Стокса – модель для описания медленного стационарного течения вязкой жидкости. В качестве величин, характеризующих движение вязкой жидкости, используют вектор скорости $\mathbf{v}(x, t) = (\mathcal{G}_1(x, t), \mathcal{G}_2(x, t), \mathcal{G}_3(x, t))$ и тензор напряжений $\sigma_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2, 3$). Здесь $x \in \mathbf{R}^3$ и x_1, x_2, x_3 – координаты точки, в которой приложены вектор \mathcal{G} тензор σ_{ij} [4, 5].

Закон сохранения массы для несжимаемой жидкости выражается уравнением неразрывности $\text{div} \mathbf{v} = 0$.

Закон сохранения количества движения имеет вид

$$\rho \frac{d\mathcal{G}_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} + \mathbf{f}_i; \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь ρ - плотность жидкости, \mathbf{f}_i - компоненты объемных сил, действующих на жидкость, а d/dt - полная производная, равная $d/dt + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Как и в случае деформируемого твердого тела, тензор напряжений симметричен

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Согласно закону Стокса уравнение состояния вязкой жидкости связывает тензор напряжений с давлением p и тензором скоростей деформации $(\partial \mathcal{G}_i / \partial x_j + \partial \mathcal{G}_j / \partial x_i) / 2$ по формуле

$$\sigma_{ij} = -p\delta_i^j + \rho\nu \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости.

В результате подстановки последнего выражения в закон сохранения количества движения и учета уравнения неразрывности получаются уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}.$$

В случае стационарного течения жидкости первый член левой части пропадает. Для медленного течения (когда число Рейнольдса $Re \ll 1$) допустима линеаризация уравнений Навье-Стокса, то есть пренебрежение нелинейным членом ввиду его малости по сравнению с остальными. Таким образом, для описания медленного стационарного течения вязкой жидкости мы приходим к системе Стокса

$$\begin{cases} \nu \Delta \mathbf{v} - \rho^{-1} \nabla p + \mathbf{f} = 0, \\ \text{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho = 1$.

Для отыскания четырех неизвестных $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ и p эта система содержит четыре уравнения. Давление p может быть определено из нее с точностью до произвольного постоянного слагаемого, что далее особо оговариваться не будет.

С подробным изложением приведенных ниже результатов, восходящих к Лихтенштейну [6] и Одквисту [7], можно познакомиться по книге О. А. Ладыженской [8]. Конкретные вопросы, связанные с практическим применением граничных интегральных уравнений при решении краевых задач для системы Стокса, рассмотрены в книге С. М. Белоносова и К. Е. Черноуса [9], где приведена и библиография.

Определение 1. Составленная из векторов скорости квадратная матрица $U(x, \xi) = [u_i^j(x, \xi)]$ и соответствующий ей вектор давления $\mathbf{Q}(x, \xi) = (q^1(x, \xi), q^2(x, \xi), q^3(x, \xi))$ называются фундаментальным решением системы Стокса, если они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \nu \Delta_x \mathbf{u}^j - \nabla_x q^j &= \delta(x - \xi) \mathbf{e}^j, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^j &= 0. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{e}^j - единичный вектор, направленный вдоль j -й оси декартовой системы координат, а $\delta(x - \xi)$ - мера Дирака, сосредоточенная в точке ξ .

Фундаментальное решение, компоненты которого стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, определяются формулами

$$\begin{aligned} u_i^j &= -\frac{1}{8\pi\nu} \left[\frac{\delta_i^j}{r} + \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^3} \right], \\ q^j &= -\frac{x_j - \xi_j}{4\pi r^3}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_i^j - символ Кронекера.

Отметим, что выражение в квадратных скобках в (1) получается из аналогичного выражения в тензоре Кельвина-Сомильяна, если в последнем положить $(\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu) = 1$.

Пусть Ω^+ - односвязная ограниченная область в \mathbf{R}^3 . Будем считать, что граница S области Ω^+ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, $0 < 1 < \alpha$. Через Ω^- обозначим $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$. Введем матричные операторы $\mathbf{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)$ и $\mathbf{P}'(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)$, действующие на пары (\mathcal{G}, p) по правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x) \mathbf{v} &= -p \mathbf{n}_x + \nu(2\partial \mathcal{G} / \partial \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_x \times \operatorname{rot} \mathbf{v}); \\ \mathbf{P}'(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x) \mathbf{v} &= p \mathbf{n}_x + \nu(2\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_x \times \operatorname{rot} \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Для решения (\mathbf{v}^\pm, p^\pm) системы Стокса в области Ω^\pm справедливо представление.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\pm(x) &= \pm \int_S \{ [\mathbf{P}'(\partial/\partial \xi, \mathbf{n}_\xi) U(x, \xi)] \mathbf{v}^\pm(\xi) - U(x, \xi) \mathbf{P}(\partial/\partial \xi, \mathbf{n}_\xi) \mathbf{v}^\pm \} d_\xi S, \\ p^\pm(x) &= \mp \int_S [\mathbf{Q}(x, \xi) \mathbf{P}(\partial/\partial \xi, \mathbf{n}_\xi) U(x, \xi)] \mathbf{v}^\pm - 2\nu \mathbf{v}^\pm(\xi) \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{n}_\xi] d_\xi S. \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы (2) в Ω^- имеют место в предположении, что при $|x| \rightarrow \infty$

$$|\mathbf{v}^-(x)| = O(|x|^{-1}), \quad (3)$$

$$|\nabla \mathcal{G}_k(x)|, \quad p(x) = O(|x|^{-2}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Определение 2. Гидродинамическими потенциалами называются пары $(V, W)\rho$ и $(V, W)\chi$, компоненты которых представляют собой зависящие от параметра $x \in \mathbf{R}^3 \setminus S$ интегралы. Потенциал простого слоя определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (V\rho)(x) &= \int_S U(x, \xi) \rho(\xi) d_\xi S, \\ (\mathcal{G}\rho)(x) &= \int_S \mathbf{Q}(x, \xi) \rho(\xi) d_\xi S. \end{aligned}$$

Потенциал двойного слоя имеет вид

$$\begin{aligned} (W\chi)(x) &= \int_S [\mathbf{P}'(\partial/\partial \xi, \mathbf{n}_\xi) U(x, \xi)] \chi(\xi) d_\xi S, \\ (\mathcal{O}\chi)(x) &= 2\nu \int_S \chi(\xi) (\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{n}_\xi)(x, \xi) d_\xi S. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что компоненты плотностей ρ_k и χ_k ($k = 1, 2, 3$) - непрерывные функции.

Потенциалы $(V, W)\rho$ и $(V, W)\chi$ удовлетворяют однородную систему Стокса в Ω^\pm . Кроме того, при $|x| \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$(V\rho)(x) = O(|x|^{-1}); \quad (4)$$

$$(\mathcal{G}\rho)(x), \quad (W\chi)(x), \quad (\mathcal{O}\chi)(x) = O(|x|^{-2}).$$

3. Основные результаты. Рассмотрим следующие гидродинамические потенциалы:

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\Omega} E(x, y)\mathbf{f}(y)dy, \quad (5)$$

$$p(x) = \int_{\Omega} Q(x, y)\mathbf{f}(y)dy \quad (6)$$

где $E(x, y)$ является фундаментальным тензором скорости и $Q(x, y)$ является его присоединенным вектором давления.

Гидродинамические потенциалы удовлетворяют:

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{из } \Omega \quad (7)$$

Основным результатом данной работы является:

Теорема. Для любой функции $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ гидродинамические потенциалы (5)-(6) удовлетворяют граничному условию

$$-\frac{\mathbf{u}(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(E(x, y))\mathbf{u}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x, y)\mathbf{P}'(\mathbf{u})dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (8)$$

И наоборот, если функции $\mathbf{u} \in W_2^2(\Omega)$ и $p \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяют системе Стокса (7) и граничному условию (8), то они определяют гидродинамические потенциалы (5) и (6).

Доказательство. Во-первых, мы предполагаем, что $\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Непосредственный подсчет показывает, что для любого $x \in \Omega$, у нас есть

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \int_{\Omega} E(x, y)\mathbf{f}(y)dy = \int_{\Omega} E(x, y)(-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p)dy = \\ &= \int_{\Omega} (-\mu\Delta E(x, y) - \nabla Q(x, y))\mathbf{u}dy + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{P}(E(x, y))\mathbf{u}(y) - E(x, y)\mathbf{P}'(\mathbf{u}))dS_y \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}(E(x, y)) := -\rho\mathbf{n} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\mathbf{n},$$

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u}) := \rho\mathbf{n} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\mathbf{n}.$$

Это означает, что

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(E(x, y))\mathbf{u}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x, y)\mathbf{P}'(\mathbf{u})dS_y = 0. \quad (9)$$

Применение свойств соответствующего двойного и простого слоя гидродинамических потенциалов к (9) с $x \rightarrow \partial\Omega$, получаем

$$-\frac{\mathbf{u}(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(E(x, y))\mathbf{u}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x, y)\mathbf{P}'(\mathbf{u})dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Далее легко показать, что, переходя к пределу, отношение (10) остается в силе для всех $\mathbf{u} \in W_2^2(\Omega)$ и $p \in W_2^1(\Omega)$. Таким образом, гидродинамические потенциалы (5)-(6) удовлетворяют граничному условию (10).

И наоборот, если функции $\mathbf{u} \in W_2^2(\Omega)$ и $p \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяют системе Стокса (7) и граничному условию (8), то они совпадают с гидродинамическими потенциалами (5)-(6). В случае если (8) не удовлетворяет (7), то функции $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \in W_2^2(\Omega)$, и $\rho = p - p_1 \in W_2^1(\Omega)$, где \mathbf{v} и ρ являются гидродинамическими потенциалами, удовлетворяют однородной системе Стокса

$$-\mu\Delta\mathbf{v} + \nabla\rho = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{из } \Omega \quad (11)$$

и граничному условию (8), т.е.

$$-\frac{\mathbf{v}(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v})dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (12)$$

Теперь, применяя формулу Грина для $\mathbf{v} \in W_2^2(\Omega)$, и $\rho \in W_2^1(\Omega)$, мы замечаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} E(x,y)\mathbf{0}dy = \int_{\Omega} E(x,y)(-\mu\Delta\mathbf{v} + \nabla\rho)dy = \\ &= \int_{\Omega} (-\mu\Delta E(x,y) - \nabla Q(x,y))\mathbf{v}dy + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y) - E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v}))dS_y \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}(E(x,y)) := -\rho\mathbf{n} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\mathbf{n},$$

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u}) := \rho\mathbf{n} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\mathbf{n}.$$

То есть

$$\mathbf{v}(x) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v})dS_y = 0.$$

Переходя к пределу при $\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega$, мы получим:

$$\mathbf{v}(x) - \frac{\mathbf{v}(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v})dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (13)$$

По сравнению с (12), мы получаем следующее граничное условие

$$\mathbf{v}(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для системы Стокса [8], у нас есть $\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_1(x) \equiv 0$ для любого $x \in \Omega$ и $\rho(x) = p(x) - p_1(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega$, т.е.

$$\mathbf{u}(x) \equiv \mathbf{u}_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$p(x) \equiv p_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где $\mathbf{u}_1(x)$ и $p_1(x)$ совпадают с гидродинамическими потенциалами. На этом завершается доказательство теоремы.

Замечания. Очевидно, что решение краевой задачи (7)-(8) совпадает в данной области Ω с физическим решением системы Стокса, полученным на всей пространстве, т.е. краевая условия (8) является прозрачным граничным условиям система Стокса.

4. Заключение. Отметим, что граничное условие, выше изложенное в теореме для гидродинамического потенциала, впервые получено в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады РАН. – 2009. – Т. 428, №1. – С. 16-19.
- 2 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 595-599.
- 3 Suragan D., Tokmagambetov N. On transparent boundary conditions for the high-order heat equation // Сиб. электрон. матем. изв. – 2013. – Т. 10. – С. 141-149.
- 4 Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. – Heidelberg, 2008.
- 5 Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики // Фундаментальные направления. – 1988. – Т. 27. – С. 131-230.
- 6 Lichtenstein L. Uber einige Existenzprobleme der Hydrodynamik // Math. Z. – 1928. – 28. – 387-415.
- 7 Odqvist F.K.G. Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zaher Flussigkeiten // Math. Z. – 1930. – 32. – 329-375.
- 8 Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 766 с.
- 9 Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1985. – 311 с.

REFERENCES

- 1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spectral'nym voprosam ob'emnogo potentsiala. Doklady RAN. 2009. T. 428, N 1. 16-19.

2 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Granichnye uslovია obemnogo potentsiala dlia poligarmonicheskogo uravnenia // Differentsial'nye uravnenia. 2012. T. 48, N 4. S. 595-599.

3 Suragan D., Tokmagambetov N. On transparent boundary conditions for the high-order heat equation. Sib. elektron. matem. izb. 2013. T. 10. S. 141-149.

4 Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. Heidelberg, 2008.

5 Maz'ia V.G. Granichnye integral'nye uravneniia. Itogi nauki I tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniia. 1988. T. 27. 131-230.

6 Lichtenstein L. Uber einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Math. Z. 1928. 28. 387-415.

7 Odqvist F.K.G. Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zaher Flussigkeiten. Math. Z. 1930. 32. 329-375.

8 Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki viazkoj neszhimaemoi zhidkosti. M.: Nauka, 1970. 766 s.

9 Belonovosov S.M., Chernous K.A. Kraevye zadachi dlia uravnenii Nav'e-Stoksa. M.: Nauka, 1985. 311 s.

Резюме

Т. Ш. Кәлменов, Е. А. Нысанов, Г. М. Хұшнizarov

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ГИДРОДИНАМИКАЛЫҚ ПОТЕНЦИАЛ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТ

Мақалада Стокс жүйесі үшін гидродинамикалық потенциалдың шекаралық шарты алынған. Сонымен қатар, Стокс жүйесі табылған шекаралық шартпен айқын түрде құрылған жалғыз шешімге ие болатыны дәлелденді.

Тірек сөздер: гидродинамикалық потенциал, Стокс жүйесі, іргелі шешім, жай қабатты потенциал, қос қабатты потенциал.

Summary

T. Sh. Kal'menov, E. A. Nysanov, G. M. Khushnizarov

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan)

BOUNDARY CONDITIONS OF HYDRODYNAMIC POTENTIAL

In this paper, the hydrodynamic boundary conditions for the Stokes system capacity. Also proved that the Stokes system with the obtained boundary conditions has a unique solution, which is constructed explicitly.

Keywords: hydrodynamic potential, Stokes system, fundamental solution, single layer potential, double layer potential.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 517.956

Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ, Д. СУРАГАН

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ

Аннотация. В данной работе представлены «проницаемые» краевые условия потенциала для оператора Лапласа-Бельтрами на поверхности единичной сферы S в R^3 , а также соответствующий физический смысл. «Проницаемость» краевых условий означает, что решение краевой задачи должно совпадать в данной области сферы с физическим решением, полученным на всей сфере.

Ключевые слова: оператор Лаплас-Бельтрами, проницаемая граница, корректная краевая задача.

Тірек сөздер: Лаплас-Бельтрами операторы, өткізгіш шекара, қисынды шектік есеп.

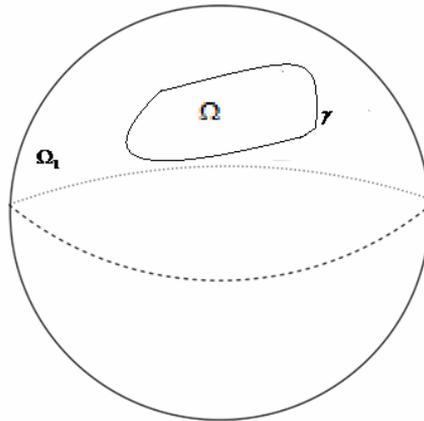
Keywords: Laplace-Beltrami operator, porous borders, the correct boundary value problem.

Введение. Начнем с описания соответствующей физической проблемы и обозначений. Затем мы рассмотрим аналог ньютонового потенциала для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере. Нашей целью является нахождение «прозрачных» краевых условий потенциала для оператора Лапласа-Бельтрами на поверхности единичной сферы S в R^3 . Проницаемость краевых условий означает, что решение краевой задачи должно совпадать в данной области с физическим решением, полученным на всей сфере.

Эта работа частично мотивирована исследованиями о движении точечных вихрей на сфере с непроницаемой границей. Кидамби и Ньютон [10] рассматривали подобную задачу методом изображений. Крауди [3-5] также исследовал движение точечных вихрей на сфере. Он использовал конформное отображение в комплексную плоскость для изучения движения вихря на сфере со стенами. В работе [6] Гемрих и др. изучал похожую модельную задачу, для которой методы из [5, 10] могут быть применимы. Однако они использовали метод интегрального уравнения, который мы используем в поисках *проницаемой границы*.

Физические предпосылки и обозначения

Подчеркнем известные физические свойства феномена движения вихря в несжимаемой жидкости на поверхности несжимаемой единичной сферы S . Мы рассмотрим ограниченную вихревую область, обозначая ее через $\Omega \subseteq S$ с односвязной границей γ . Пусть Ω_1 – остальная часть поверхность сферы $S \setminus \Omega$, где функция вихря ω равна нулю (см. рисунок).



γ -проницаемая граница на поверхности сферы S

Имеет место следующее соотношение между функцией тока ψ и функцией вихря ω

$$-\Delta_S \psi(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где $-\Delta_S$ – оператор Лапласа-Бельтрами и функция вихря должна удовлетворять условию ограниченности Гаусса

$$\int_{\Omega} \omega dx = 0. \quad (2)$$

Мы ищем решение уравнения (1) в виде, аналогичном ньютонового потенциала

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) dy. \quad (3)$$

Это напоминает аналогичные проблемы, возникающие в процессе нахождения решения задачи на сфере области без краевых условий [1, 2].

В работе [7, 8] мы нашли граничные условия ньютонового потенциала и показали некоторые применения в спектральной теории.

В этой работе нашей целью является найти корректную краевую задачу для оператора Лапласа-Бельтрами в Ω , которая имеет единственное решение в виде потенциала (3) – это есть функция тока для вихревого движение. Мы настаиваем на том, что граничное условие должно быть такое, что функция тока, приходящая на границу области, должна проходить через нее без какого-либо изменения.

Мы должны отметить, что дополнительно требуем от функции вихря следующее математическое условие

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \omega \, dy = 0 \quad (4)$$

где $u = \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| \, dy$.

Если Ω_1 сделать вырожденной, то есть если площадь Ω_1 равна нулю, Тогда $\Omega = S$

$$\mathbf{u}(x) = \int_S \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| \, dy = 0, x \in S.$$

И условие (4) отпадает, т.е. на поверхности всей сферы без стен физические свойства задачи сохраняются.

Точка на сфере S может быть представлена в терминах сферических углов:

$$x(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \in S, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi].$$

В сферических координатах оператор Лапласа-Бельтрами Δ_S определяется как

$$\Delta_S \psi(x) = \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi(x(\varphi, \theta)). \quad (5)$$

Напомним читателю о некоторых тождествах на сфере. Пусть e_r, e_θ, e_φ есть обычные единичные векторы в сферических координатах. Вспомним, что мы можем определить градиент f на S как

$$\nabla_S f(x) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta.$$

Точно так же мы введем векторное вращение поверхности для скалярного поля f на сфере

$$\text{curl}_S f(x) = -\frac{\partial f}{\partial \theta} e_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\theta$$

Мы рассматриваем замкнутую гладкую кривую γ на S , которая делит S на две части: Ω и Ω_1 , т.е. γ через мы обозначаем границу Ω .

Рассмотрим аналог ньютонового потенциала для оператора Лапласа-Бельтрами

$$\psi(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y) \omega(y) \, dy, \quad \omega \in L_2(\Omega) \quad (6)$$

Учитывая условия ограниченности Гаусса (2) в соответствии с физическим смыслом в [1, 2], мы выбираем ядро потенциала в виде

$$\varepsilon(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \log|1 - \langle x, y \rangle| = -\frac{1}{4\pi} \log \left| 1 - \cos(\varphi - \varphi_y) \sin \theta \sin \theta_y - \cos \theta \cos \theta_y \right|$$

которое удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_S \varepsilon(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{4\pi}$$

для $x = x(\varphi, \theta), y = y(\varphi_y, \theta_y) \in S \quad (\varphi, \theta) \neq (\varphi_y, \theta_y)$.

Следовательно, как в теории потенциалов для уравнения Лапласа, мы можем определить следующие два потенциала.

Определение 1. Потенциалом простого слоя с гладкой функцией плотности σ называется следующий слабосингулярный линейный интеграл

$$(V\sigma)(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \sigma(\mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad (7)$$

где $t(\mathbf{y})$ -единичный касательный вектор к γ в точке \mathbf{y} .

Определение 2. Потенциалом двойного слоя с гладкой функцией плотности μ называется следующий сингулярный линейный интеграл

$$(W\mu)(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mu(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad (8)$$

где $t(\mathbf{y})$ -единичный касательный вектор к γ в точке \mathbf{y} .

Согласно классической теории потенциала любое решение уравнения Лапласа-Бельтрами может быть записано в виде суммы потенциалов (6), (7) и (8). Однако для достижения цели этой работы мы используем потенциалы простого и двойного слоя для выражение краевого условия потенциала (6) на γ .

Как слабосингулярный линейный интеграл потенциал простого слоя (7) непрерывен вдоль γ . И как в случае потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа потенциал (8) имеет скачок на γ . Доказательство проводится как в случае для уравнения Лапласа методом изоляции сингулярных точек. Для сжатости работы мы не даем доказательства этих важных свойств потенциалов, но читатель может найти их в работе [6].

Основной результат и доказательство

Основным результатом этой работы является:

Теорема. Пусть выполнены предположения 2, 4 и ω – произвольная функция класса $L_2(\Omega)$. Тогда потенциал (6) удовлетворяет граничному условию

$$-\frac{\psi(\mathbf{x})}{2} + \int_{\gamma} \psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} - \int_{\gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi(\mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (9)$$

Обратно, если функция $\psi \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_S \psi(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset S. \quad (10)$$

и граничному условию (9), то она определяет потенциал (6), т.е.

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Замечание 1. Краевое условие (9) для уравнения Лапласа-Бельтрами (10) есть «прозрачное» краевое условие, которое решение краевой задачи (9)-(10) должно совпадать в данной области Ω с физическим решением полученным на всей сфере S .

Доказательство теоремы. Предполагая сначала, что $\psi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \gamma)$, непосредственным вычислением при любом $\mathbf{x} \in \Omega$, находим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (-\Delta_S \psi(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) (-\Delta_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\mathbf{y} + \int_{\gamma} \psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} - \\ &= \int_{\gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi(\mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = \\ &= \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\gamma} \psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} - \\ &= \int_{\gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi(\mathbf{y}) t(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

где $t(\mathbf{y})$ -единичный касательный вектор к γ в точке .

Отсюда

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (11)$$

Учитывая условия ограниченности Гаусса (2) и (4), мы вычислим

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (12)$$

Для $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in S$, переходя в терминах сферических углов

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x_1 := \cos \varphi \sin \theta \\ x_2 := \sin \varphi \sin \theta \\ x_3 := \cos \theta \end{pmatrix} \in S, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi],$$

$$\mathbf{y}(\varphi_y, \theta_y) = \begin{pmatrix} y_1 := \cos \varphi_y \sin \theta_y \\ y_2 := \sin \varphi_y \sin \theta_y \\ y_3 := \cos \theta_y \end{pmatrix} \in S, \quad \varphi_y \in [0, 2\pi), \theta_y \in [0, \pi],$$

Мы имеем

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = 2(1 - (\mathbf{y}, \mathbf{x})),$$

где $\cos(\varphi - \varphi_y) \sin \theta \sin \theta_y + \cos \theta \cos \theta_y$.

Следовательно, мы получим

$$-\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = -\frac{1}{4\pi(\log(1 - (\mathbf{y}, \mathbf{x})) + \log 2)}.$$

т.е.

$$\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \log 2 - \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \quad \mathbf{y}, \mathbf{x} \in S.$$

Подставляя в (12)

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi} \log 2 - \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \right) \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

Отсюда, учитывая условия ограниченности Гаусса (2) и (4), мы получим

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0. \quad (13)$$

Итак, из (11) находим

$$\int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (14)$$

Используя свойства потенциала простого и двойного слоя [6], из (14) при $\Omega \ni \mathbf{x} \rightarrow \Gamma$ находим

$$-\frac{\psi(\mathbf{x})}{2} + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (15)$$

Далее, предельным переходом не сложно показать, что формула (15) остается справедливой и для всех $\psi \in W_2^2(\Omega)$.

Таким образом, объемный потенциал (6) удовлетворяет граничному условию (9). Обратное покажем, что если функция $\psi_1 \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_S \psi_1(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (16)$$

и граничному условию

$$-\frac{\psi_1(\mathbf{x})}{2} + \int_{\gamma} \psi_1(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} - \int_{\gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \psi_1(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = 0, \mathbf{x} \in \gamma, \quad (17)$$

то она совпадает с потенциалом (6). Действительно, если не так, то функция $\Psi = \psi - \psi_1 \in W_2^2(\Omega)$, где ψ – потенциал (6), удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta_S \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (18)$$

$$-\frac{\Psi(\mathbf{x})}{2} + \int_{\gamma} \Psi(\mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} - \int_{\gamma} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underline{\text{curl}}_S \Psi(\mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = 0, \mathbf{x} \in \gamma. \quad (19)$$

Сохраняя гладкость, мы продолжаем функцию ψ на всю поверхность т.е.

$$\Delta_S \widehat{\Psi}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (20)$$

и $\widehat{\Psi} \equiv \Psi, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \gamma$.

Известно, что решением уравнения (20) может быть только константа, т.е.

$$\widehat{\Psi} = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \gamma.$$

Поставляя в (19), мы получим $\Psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma$, так как она везде константа

$$\Psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \cup \gamma. \quad (21)$$

т.е. $\psi_1 \equiv \psi$ совпадает с объемным потенциалом.

Теорема доказана.

Замечание 2. Из теоремы следует, что ядро

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \log \|1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$$

является функцией Грина краевой задачи (9)-(10) в произвольной гладкой области Ω на S .

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Bogomolov V.A. Dynamics of vorticity at a sphere // Fluid Dyn. 6, 863, 1977.
- 2 Bogomolov V.A. Two dimensional fluid dynamics on a sphere // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 15, 18, 1979.
- 3 Crowdy D. Point vortex motion on the surface of a sphere with impenetrable boundaries. Physics of Fluids // March 2006 Phys. Fluids 18, 036602 (2006).
- 4 Crowdy D., Cloke M. Analytical solutions for distributed multi polar vortex equilibria on a sphere // Phys. Fluids. 2003. Vol. 15, N 22.
- 5 Crowdy D. Stuart vortices on a sphere // J. Fluid. Mech. – 2004. – Vol. 498, N 381.
- 6 Gemmrich S., Nigam N., Steinbach O. Boundary integral equations for the Laplace–Beltrami Operator, Mathematics and Computation, a Contemporary View, The Abel Symposium 2006, Proceedings of the Third Abel Symposium, Springer Heidelberg, 2008.
- 7 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук России. – 2009. – Т. 428, № 4. – С.16-19.
- 8 Kalmenov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and Spectral Problems for the Newton Potentials // Operator Theory: Advances and Applications. – 2011. – Vol. 216. – P. 187-210.
- 9 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, № 6. – С. 1063-1068.
- 10 Kidambi R. and Newton P.K. Point vortex motion on a sphere with solid boundaries // Physics of Fluids, 12, 581, 2000.

REFERENCES

- 1 Bogomolov V.A. Dynamics of vorticity at a sphere, Fluid Dyn. 6, 863, 1977.
- 2 Bogomolov V.A. Two dimensional fluid dynamics on a sphere, Izv. Atmos. Ocean. Phys. 15, 18, 1979.
- 3 Crowdy D. Point vortex motion on the surface of a sphere with impenetrable boundaries. Physics of Fluids, March 2006 Phys. Fluids 18, 036602 (2006).
- 4 Crowdy D., Cloke M. Analytical solutions for distributed multi polar vortex equilibria on a sphere. Phys. Fluids. 2003. Vol. 15, N 22.
- 5 Crowdy D. Stuart vortices on a sphere. J. Fluid. Mech. 2004. Vol. 498, N 381.

6 Gemmrich S., Nigam N., Steinbach O. Boundary integral equations for the Laplace–Beltrami Operator, Mathematics and Computation, a Contemporary View, The Abel Symposium 2006, Proceedings of the Third Abel Symposium, Springer Heidelberg, 2008.

7 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spectral'ny'm voprosam ob'emnogo potentsiala. Doklady RAN. 2009. T. 428, N 1. 16-19.

8 Kalmenov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and Spectral Problems for the Newton Potentials. Operator Theory: Advances and Applications. 2011. Vol. 216. P. 187-210.

9 Kalmenov T.Sh., Suragan D. Perenos uslovii izluchenia Zommerfel'da na granisu ogranichennoi oblasti. Zurn. vychis. matem. i matem. fiz. 2012. T. 52, N 6. С. 1063-1068.

10 Kidambi R., Newton P.K. Point vortex motion on a sphere with solid boundaries, Physics of Fluids, 12, 581, 2000.

Резюме

Т. Ш. Калменов, Д. Сұраган

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ЛАПЛАС-БЕЛЬТРАМИ ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ШЕКТІК ШАРТЫ

Бұл жұмыста R^3 кеңістігіндегі S бірлік сферада Лаплас-Бельтрами операторы үшін потенциалдың «өткізгіш» шектік шарты көрсетілген, сонымен қатар, сәйкесінше физикалық мағынасы айтылған. Шектік шарттың «өткізгіштігі» шектік есептің берілген сферадағы шешімі барлық сферадағы физикалық шешіммен беттесінін анықтайды.

Тірек сөздер: Лаплас-Бельтрами операторы, өткізгіш шекара, қисынды шектік есеп.

Summary

Kal'menov T.Sh., Suragan D.

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan)

POTENTIAL BOUNDARY CONDITIONS FOR THE LAPLACE-BELTRAMI

This paper presents the «permeable» potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator on the unit sphere S in R^3 , and the corresponding physical meaning. «Permeability» boundary conditions means that the solution of the problem must be the same in the art sphere with a physical solution obtained on the whole sphere.

Keywords: Laplace-Beltrami operator, porous borders, the correct boundary value problem.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 539.3

Н. И. МАРТЫНОВ

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Аннотация. Получены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области, позволяющие сразу определять обобщенные решения статических краевых задач для составных неоднородных изотропных упругих сред упрощенной модели Коссера.

Ключевые слова: изотропное тело, интегральные уравнения, краевая задача, индекс.

Тірек сөздер: изотроптық дене, интегралдық теңдеулер, шеттік есеп, көрсеткіш.

Keywords: isotropic body, the integrated equation, region problem, index.

Введение. В работах [1, 2] двумерные краевые задачи статики и задачи кручения теории упругости неоднородных анизотропных сред приведены к краевым задачам Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора. Это позволяет логически перенести методологию Н. И. Мусхелишвили (метод комплексных потенциалов) [3] с однородных упругих сред на неоднородные упругие среды и задействовать уже разработанный аппарат [4, 5], сводящий краевую задачу Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора к эквивалентной системе контурных сингулярных интегральных уравнений. Метод контурных сингулярных интегральных уравнений универсален, и его целесообразно использовать при решении некоторых частных задач (например, для однородных сред), а также в теоретических исследованиях.

Для решения практически важных задач метод контурных интегральных уравнений не очень удобен [4, 5], так как связан с трудоемкими дополнительными процедурами: приведением системы уравнений к каноническому виду, построением фундаментальных решений, резольвентных ядер и общего решения. Поэтому естественно встает вопрос о том, нельзя ли с помощью интегральных операторов по области, минуя все промежуточные звенья, решать краевые задачи. Оказывается, что во многих случаях это возможно. Теория, базирующаяся на таком подходе, называется теорией квазианалитического вектора [4, 6]. При этом отпадают многие требования на гладкость упругих параметров, расширяется класс изучаемых уравнений и краевых задач.

В работах [7, 8] в случае односвязной области выведены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области для первой и второй краевых задач статической теории упругости неоднородной анизотропной среды, позволяющие сразу определять обобщенные решения для составных упругих сред, с изменяющейся по области анизотропией. Для однородного анизотропного материала решения краевых задач получены в замкнутом виде, т.е. выражаются через контурные интегралы и интегралы по области.

В работе [9] с определенными модификациями перенесены результаты работ [7, 8] на плоские краевые задачи общей моментной теории упругости неоднородной изотропной среды.

В настоящем исследовании излагаются результаты, имеющие свою специфику и аналогичные результатам работы [9] для упрощенной моментной теории упругости неоднородной изотропной среды.

1. Основные соотношения. В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ при условии плоской деформации, рассмотрим равновесие изотропного неоднородного линейно-упругого тела, занимающего односвязную область D с границей Γ в поле объемных сил $f = (f_1, f_2, 0)$ и объемных моментов $F = (0, 0, F_3)$. Такое напряженно-деформируемое состояние описывается векторами перемещений $u = (u_1, u_2, 0)$ и углами поворота $\omega = (0, 0, \omega_3)$, а также компонентами несимметричных тензоров напряжений σ_{ij} и моментных напряжений μ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), причем: $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$, $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{12} = \mu_{21}$.

Деформируемое состояние характеризуется несимметричным тензором деформаций γ_{ij} и тензором изгиба – кручения κ_{ij} , причем [10]:

$$\gamma_{11} = u_{1,1}, \quad \gamma_{22} = u_{2,2}, \quad \gamma_{12} = u_{2,1} - \omega_3, \quad \gamma_{21} = u_{1,2} + \omega_3, \quad (1)$$

$$\kappa_{13} = \omega_{3,1}, \quad \kappa_{23} = \omega_{3,2},$$

где запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Закон Гука, связывающий деформационные и силовые характеристики среды, имеет следующий вид [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu\gamma_{11} + \lambda\gamma_{kk}, \quad \sigma_{22} = 2\mu\gamma_{22} + \lambda\gamma_{kk}, \quad \sigma_{33} = \lambda\gamma_{kk}, \quad \gamma_{kk} = \gamma_{11} + \gamma_{22} \\ \sigma_{12} &= (\mu + \alpha)\gamma_{12} + (\mu - \alpha)\gamma_{21}, \quad \sigma_{21} = (\mu + \alpha)\gamma_{21} + (\mu - \alpha)\gamma_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu_{13} = (\delta + \varepsilon)\kappa_{13}, \quad \mu_{23} = (\delta + \varepsilon)\kappa_{23}, \quad \mu_{31} = (\delta - \varepsilon)\kappa_{13}, \quad \mu_{32} = (\delta - \varepsilon)\kappa_{23},$$

где $\lambda, \mu, \delta, \alpha, \varepsilon$ – упругие модули, зависящие от координат (x_1, x_2) . Для плоского деформированного состояния имеем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + f_1 &= 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + f_2 = 0, \\ (\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \mu_{13,1} + \mu_{23,2} + F_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Перейдем на плоскость комплексных переменных и введем комплексные операторы:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} \equiv s = x_1 - ix_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \quad (4)$$

где i - мнимая единица ($i^2 = -1$). Введем комплексные компоненты тензоров напряжений, деформаций и перемещений [11], а также следы от объемных сил и объемных моментов:

$$T_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + i(\sigma_{12} - \sigma_{21}), \quad T_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + i(\sigma_{12} + \sigma_{21}), T_3 = \sigma_{33}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}((\gamma_{11} + \gamma_{22}) + i(\gamma_{12} - \gamma_{21})), \gamma_2 = \frac{1}{2}((\gamma_{11} - \gamma_{22}) + i(\gamma_{12} + \gamma_{21})), \quad (5)$$

$$M = \mu_{13} + i\mu_{23}, \kappa = \kappa_{13} + i\kappa_{23}, W = W_1 + iW_2$$

$$\theta_1 = \int_{x_{01}}^{x_1} f_1 dx_1, \quad \theta_2 = \int_{x_{02}}^{x_2} f_2 dx_2, \quad m = \int_{x_{01}}^{x_1} F_3 dx_1$$

Тогда соотношения (1)-(3) запишутся в виде:

$$\gamma_1 = W_z - i\omega, \gamma_2 = \bar{W}_z, (\omega = \omega_3)$$

$$T_1 = 2(\lambda + \mu + \alpha)W_z + 2(\lambda + \mu - \alpha)\bar{W}_z - 4i\alpha\omega, T_2 = 4\mu W_z, M = 2(\delta + \varepsilon)\omega_z \quad (6)$$

$$(T_1 + \theta_1 + \theta_2)_z + (T_2 + \theta_1 - \theta_2)_z = 0,$$

$$(M + m)_z + (\overline{M + m})_z - \frac{i}{2}(T_1 - \bar{T}_1) = 0 \quad (7)$$

Индексы z, s означают соответствующие производные (4). Введем функции напряжений U, ψ :

$$T_1 + \theta_1 + \theta_2 = 4U_z, T_2 + \theta_1 - \theta_2 = -U_z, M - 2iU + m = 2i\psi_z \quad (8)$$

Тогда уравнения равновесия (7) удовлетворяются автоматически, а закон Гука запишется в виде:

$$U_z = p_1 W_z + p_2 \bar{W}_z - i\alpha\omega + g_1,$$

$$U_z + \mu W_z + g_2 = 0, \quad (9)$$

$$(\delta + \varepsilon)\omega_z - iU + \frac{m}{2} = i\psi_z,$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \alpha), \quad p_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \alpha), \quad g_1 = \frac{1}{4}(\theta_1 + \theta_2), \quad g_2 = \frac{1}{4}(\theta_1 - \theta_2)$$

В работе [9] показано, что разрешение закона Гука (9), записанного в комплексной форме и связывающего между собой силовые и деформационные характеристики упругого тела с соответствующими граничными условиями эквивалентно разрешению соответствующих краевых задач традиционными методами [10]. Поэтому на соотношения (9) можно посмотреть как на систему уравнений первого порядка относительно $U, \bar{U}, W, \bar{W}, \omega, \psi$. Присоединив соответствующие граничные условия основных задач теории упругости, получим соответствующие краевые задачи теории обобщенного аналитического (квазианалитического) вектора.

В упрощенной модели братьев Коссера принято [10], что поворот локального трехгранника равен среднему повороту поля перемещений:

$$\gamma^A = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} - \vec{\omega} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

и взаимодействие сил через произвольную поверхность тела происходит за счет несимметричных напряжений и моментных напряжений μ_{ij} . При этом величина $\sigma^A = 2\alpha\gamma^A$ становится в силу наложенной кинематической связи (10) опорной силой в смысле Хамеля, при этом тензор деформаций γ_{ij} становится симметричным: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Применительно к плоской деформации для упрощенной модели Коссера из приведенных выше соотношений, имеем:

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 2\sigma^A, \quad \sigma_{12} = 2\mu\gamma_{12} + \sigma^A, \quad \sigma_{21} = 2\mu\gamma_{12} - \sigma^A, \quad T_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2i\sigma^A, \quad T_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 4i\gamma \quad (11)$$

$$U_z = \frac{(\lambda + \mu)}{2}(W_z + \bar{W}_z) + \frac{i\sigma^A}{2} + g_1 \quad (12)$$

Остальные величины вычисляются по прежним формулам.

Исключая из (12) и его комплексно-сопряженного выражения опорную силу, запишем закон Гука с учетом (10) в виде:

$$\begin{aligned} U_z + \bar{U}_s &= (\lambda + \mu)(W_z + \bar{W}_s) + 2g_1 \\ U_z + \mu W_z + g_2 &= 0, \\ (\delta + \varepsilon)\omega_s - iU + \frac{m}{2} &= i\psi_s, \\ \omega &= \frac{i}{2}(\bar{W}_s - W_z) \end{aligned} \quad (13)$$

2. Приведение к каноническому виду. Задача Римана-Гильберта. Будем предполагать, что упругие параметры в (13), непрерывно дифференцируемые функции во всей области D , включая границу Γ .

С помощью замены переменных

$$U = 0,5u + \mu\bar{v}, W = eu - \bar{v}, q = (\delta + \varepsilon)\omega - i\psi, \quad e = 0,5(2\lambda + 3\mu)^{-1} \quad (14)$$

систему уравнений (13) приведем к каноническому (по И. Г. Петровскому [5]) виду:

$$X_s - QX_z = AX + B\bar{X} + Y = F, \quad \|Q\| < 1 \quad (15)$$

Здесь матрицы X, Y, Q, A, B имеют следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ q \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\mu d_1, \quad a_{21} = 0,5\mu \frac{d_1}{(2\lambda + 3\mu)}, \quad a_{22} = -0,5 \frac{\mu_s}{(\lambda + 2\mu)}, \\ a_{23} = b_{23} &= \frac{i}{2(\delta + \varepsilon)}, \quad a_{31} = 0,5i, \quad a_{33} = b_{33} = \frac{(\delta + \varepsilon)_s}{2(\delta + \varepsilon)}, \quad b_{12} = -\mu_s d_2, \quad b_{22} = \bar{a}_{22}, \\ b_{21} &= -0,5d_1, \quad b_{32} = \mu, \quad Y_1 = -g_2 d_2, \quad Y_2 = \frac{g_1}{(\lambda + 2\mu)}, \quad Y_3 = -0,5m \\ d_1 &= \frac{(2\lambda + 3\mu)_s}{2(2\lambda + 3\mu)(\lambda + 2\mu)}, \quad d_2 = \frac{(2\lambda + 3\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \end{aligned} \quad (17)$$

В (15) X – неизвестный обобщенный аналитический (квазианалитический) вектор.

Краевая задача Римана-Гильберта для обобщенного аналитического (квазианалитического) вектора формулируется следующим образом: определить обобщенный аналитический вектор, непрерывный в смысле Гельдера в $D + \Gamma$ и удовлетворяющий граничному условию

$$Re(\overline{G(t)}X(t)) = L(t), \quad (18)$$

где $G(t)$ – заданная и непрерывная по Гельдеру на Γ матрица ($\det G(t) \neq 0$) и $L(t)$ – заданный непрерывный по Гельдеру, действительный вектор [4]. Условия на G, L можно ослабить, рассматривая их в классе суммируемых функций [4-6].

Рассмотрим первую краевую задачу теории упругости, когда на границе заданы усилия.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 &= r_1, \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= r_2, \\ \mu_{13}n_1 + \mu_{23}n_2 &= R_3 = R \end{aligned} \quad (19)$$

Границу Γ области D будем проходить против часовой стрелки, тогда область D при обходе контура остается слева и внешняя нормаль к контуру Γ , записанная в комплексной форме имеет вид:

$$n = n_1 + in_2 = \frac{dx_2}{d\sigma} - i \frac{dx_1}{d\sigma} = -i \frac{dz}{d\sigma}, \quad (20)$$

где $d\sigma$ – длина элементарной дуги контура.

Учитывая (5), (19), (20) граничные условия (8) запишутся в виде:

$$nT_1 + \bar{n}T_2 = 2r = 2(G_1 + ir_2), \quad \bar{n}M + n\bar{M} = 2R, \quad (21)$$

а через функции напряжений (11) как:

$$\begin{aligned} U_\Gamma = r_* &= C_1 + \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left(ir + \theta_2 \frac{dx_1}{d\sigma} + i\theta_1 \frac{dx_2}{d\sigma} \right) d\sigma, \\ \psi_\Gamma = R_* &= C_2 - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left(R + m \frac{dx_2}{d\sigma} + \frac{\bar{r}_* dz}{d\sigma} + r_* \frac{ds}{d\sigma} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (22)$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 для односвязной области, без потери общности, можно положить равными нулю.

Разделяя в (18) действительную и мнимые части и учитывая (14), получим:

$$\bar{G}_1 = \begin{pmatrix} 0,5\mu^{-1} & 1 & 0 \\ -0,5i\mu^{-1} & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(r_*/\mu) \\ Im(r_*/\mu) \\ R_* \end{pmatrix}, \det(G_1) = \mu^{-3} \neq 0 \quad (23)$$

Для второй краевой задачи теории упругости, когда на границе области заданы перемещения W_*, ω_* , аналогичными рассуждениями как и для первой краевой задачи, получим:

$$\bar{G}_2 = \begin{pmatrix} e & -1 & 0 \\ -ie & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(W_*) \\ Im(W_*) \\ \omega_*(\mathcal{G} + \varepsilon) \end{pmatrix}, \det(G_2) = 2\bar{e} \neq 0 \quad (24)$$

Для третьей, смешанной краевой задачи (на части границы заданы усилия, на другой ее части заданы перемещения) матрицы G_3, L_3 принимают, соответственно, значения G_1, L_1 или G_2, L_2 , и терпит разрыв на множестве меры нуль.

Таким образом, основные краевые задачи плоской моментной теории упругости изотропного неоднородного тела сводятся к краевой задаче Римана-Гильберта для обобщенно-аналитического (квазианалитического) вектора.

Отметим, что индексы первой и второй краевых задач в случае непрерывных G_1, L_2 равны нулю [6], что видно из (23), (24) ($\det \bar{G}_i$ ($i = 1, 2$) принимают действительное или чисто мнимое значения, нигде необращающиеся в нуль). Для третьей краевой задачи разрывная матрица G_3 в граничном условии с помощью определенной процедуры сводится к непрерывной матрице [6, 12].

3. Интегральные уравнения по области для канонической системы уравнений.

При исследовании краевых задач эллиптических систем $2m$ уравнений ($m > 1$) первого порядка для квазианалитического вектора предварительно производят конформное отображение односвязной области на единичный круг. Такое отображение не изменяет свойств решений системы уравнений, но позволяет упростить граничные условия. Рассмотрим операторы, действующие на функциях, определенных в круге \mathbf{K} ($|z| < 1$), которые используются в дальнейшем:

$$\begin{aligned} T_0 f &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{K}} \left[\frac{f(t)}{t-z} + \frac{z\bar{f}(t)}{1-z\bar{t}} \right] dk_t, \\ S_0 f &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{K}} \left[\frac{f(t)}{(t-z)^2} + \frac{\bar{f}(t)}{(1-z\bar{t})^2} \right] dk_t \end{aligned} \quad (25)$$

Для них справедливы соотношения:

$$\frac{\partial T_0 f}{\partial s} = f, S_0 f = \frac{\partial T_0 f}{\partial z}, \operatorname{Re} T_0(f | e^{i\gamma}) = 0, \text{ при } z = e^{i\gamma}, \gamma \in [0, 2\pi] \quad (26)$$

Первый из них является регулярным, а второй – сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши ($S_0 f$ существует при $f \in L_p(\mathbf{K})$ и $\|S_0 f\|_{L_p} \leq \lambda_p \|f\|_{L_p}$, где λ_p – ограниченная

постоянная, зависящая только от p , т.е оператор S_0 является линейным и ограниченным в $L_p(\mathbf{K})$, $p > 1$ (L_p -пространство функций, интегрируемых в \mathbf{K} со степенью p) [4-6].

Рассмотрим первую и вторую краевые задачи для неоднородного изотропного тела в единичном круге. Поскольку индексы краевых задач равны нулю, то решение (15), (18) в круге $|z| < 1$ ищется в виде [6, 13]:

$$X = \Phi + T_0 \rho, \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где Φ - голоморфный вектор, T_0 - оператор определяемый (25). После подстановки (27) в (15), (18), получим:

$$\rho - QS_0 \rho = Q\Phi' + A(T_0 \rho + \Phi) + B(\overline{T_0 + \Phi}) + Y \quad (28)$$

$$R \varepsilon(\overline{G\Phi}) = L \quad (29)$$

Для решения интегрального уравнения (28) предварительно необходимо определить голоморфный вектор, удовлетворяющий краевому условию (29). То есть решить задачу Римана – Гильберта для голоморфного вектора. Как показано в [9], он определяется в явном виде: через значения известных функций на контуре и контурные интегралы.

При конформном отображении $z = \sigma(\eta)$ односвязной области на единичный круг дифференцирование по z заменяется дифференцированием по η . Матрица Q в (15) умножается на матрицу $\frac{\overline{\sigma'}}{\sigma}$, I , а правая часть (15) – на $\overline{\sigma'}I$ (I – единичная матрица). Матрицы G_1, G_2 остаются прежними.

Поэтому аналитические вектора определяются в замкнутом виде и для односвязной области.

Отметим, что разработана методика решения краевых задач в классе аналитических функций с суммированными (а не кусочно-гельдеровскими) функциями в граничных условиях [6, 12, 14]. К ним относится и задача Римана–Гильберта для аналитического вектора.

Система интегральных уравнений (15) в общем случае реализуется численным методом. Она может быть реализована, например, итерационным численным методом Ч. Ашыралиева-В. Н. Монова [15] с геометрической скоростью сходимости.

4. Интегральные уравнения для составных тел. Теоремы существования и единственности. Для составных изотропных упругих тел необходимо в каждой подобласти привести систему уравнений (13) к каноническому виду, записать условия сопряжения на границе контакта подобластей (равенство сил и моментов, а также поступательных и угловых перемещений), получить решения в каждой подобласти с учетом граничных условий на границе области, и затем провести процедуру сшивки решения. Громоздкость этих процедур ясно показывает, что такой подход не очень удобен для практических расчетов.

Для того, чтобы упростить исследования в этом направлении и ослабить условия на гладкость упругих параметров, введем неизвестные функции u, v, h :

$$U = u + \frac{\bar{v}}{e_0}, W = a(u - \frac{\bar{v}}{e_0}), \omega = b(h + \bar{h}), -i\psi = (h - \bar{h}), \quad (30)$$

где e_0, a, b – положительные, пока неопределенные действительные постоянные. Подставляя (30) в систему уравнений (13) и ряда несложных преобразований, получим:

$$X_s - \mu_1 X_z - \mu_2 \bar{X}_s = AX + B\bar{X} + N, \quad (31)$$

где

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2^{12} & 0 \\ \mu_2^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^{33} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_1 = -\frac{g_2}{1+a\mu}, N_2 = \frac{g_1 e_0}{1+a(\lambda+\mu)}, N_3 = -\frac{im}{2(1+b(\delta+\varepsilon))}, \mu_2^{12} = -\frac{1-a\mu}{e_0(1+a\mu)}, \mu_1^{21} = -\frac{e_0}{(1+a(\lambda+\mu))}, \quad (32)$$

$$\mu_2^{21} = \frac{e_0 a(\lambda+\mu)}{(1+a(\lambda+\mu))}, \mu_2^{33} = -\frac{1-b(\delta+\varepsilon)}{1+b(\delta+\varepsilon)}, a_{23} = b_{23} = \frac{i b e_0}{a}, a_{31} = b_{32} = \frac{i}{1+b(\delta+\varepsilon)}$$

В реальной ситуации упругие модули, объемные силы и объемные моменты ограничены. Условие эллиптичности системы уравнений (31) имеет вид [6]:

$$\max_i \sum_{j=1}^2 |\mu_1^{ij}| + \max_i \sum_{j=1}^2 |\mu_2^{ij}| \leq \mu_0 < 1 \quad (33)$$

В нашем случае оно сводится к виду:

$$|\mu_{21}^2| < 1, \quad |\mu_1^{21}| + |\mu_2^{21}| < 1, \quad |\mu_2^{33}| < 1 \quad (34)$$

Обозначим $k_1 = \mu_{\max} \mu_{\min}^{-1}$, $k_2 = (\delta + \varepsilon)_{\max} (\delta + \varepsilon)_{\min}^{-1}$, и положим:

$$a = n_1 \mu_{\min}^{-1}, \quad b = n_2 (\delta + \varepsilon)_{\min}^{-1}, \quad n_1, n_2 > 1, \quad e_0 = (2k_1 n_1 - 1)(2k_1 n_1 + 1)^{-1} < 1, \quad (35)$$

где n_1, n_2 – фиксированные числа. Тогда неравенства (34), как нетрудно видеть, выполняются.

Хорошо известно, что решения эллиптических систем непрерывны, т.е не могут иметь сильные разрывы [16]. Следовательно, на границах раздела контактных подобластей вектор X непрерывен, и тогда в силу подстановки (30), непрерывны ω, ψ, W, U . Таким образом, для системы уравнений (31) автоматически выполняются условия сшивки решений.

При конформном отображении $z = \sigma(\eta)$ односвязной области на единичный круг дифференцирование по z заменяется дифференцированием по η . Матрица μ_1 в (31) умножается на матрицу $\frac{\bar{\sigma}'}{\sigma}$, а правая часть (31) – на $\bar{\sigma}'I$. Матрицы G_1, G_2 остаются прежними.

Учитывая (30), граничные условия для первой краевой задачи запишутся в виде (18), где

$$\bar{G}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & e_0^{-1} & \mathbf{0} \\ -i & ie_0^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} Re(r_*) \\ Im(r_*) \\ 0,5R_* \end{pmatrix} \quad (36)$$

Для второй краевой задачи:

$$\bar{G}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -e_0^{-1} & \mathbf{0} \\ -i & -ie_0^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} Re(W/a) \\ Im(W/a) \\ \omega_*/2b \end{pmatrix} \quad (37)$$

Так как индексы краевых задач (36), (37) равны нулю, то решение векторного уравнения (31) представляется в виде (27). В результате приходим к интегральному уравнению по области:

$$\rho - \mu_1 S_0 \rho - \mu_2 \bar{S}_0 \bar{\rho} = A(\Phi + T_0 \rho) + B(\bar{\Phi} + \bar{T}_0 \bar{\rho}) + \mu_1 \Phi' + \mu_2 \bar{\Phi}' + N, \quad (38)$$

которое при численных расчетах реализуется по схеме последовательных приближений с геометрической скоростью сходимости:

$$\rho_{n+1} - \mu_1 S_0 \rho_{n+1} - \mu_2 \bar{S}_0 \bar{\rho}_{n+1} = AT_0 \rho_n + B\bar{T}_0 \bar{\rho}_n + N_0, \quad N_0 = \mu_1 \Phi' + \mu_2 \bar{\Phi}' + A\Phi + B\bar{\Phi} + N$$

Поскольку матрицы G_1, G_2 – постоянны, то голоморфный вектор Φ определяется в явном виде через интеграл Шварца [6]:

$$\Phi_j(\eta) = \frac{\bar{G}_j^{-1}}{2\pi i} \oint_{|\gamma|=1} \frac{L_j(t)(t+\eta)}{t(t-\eta)} dt + iC_{0j}, \quad j=1,2 \quad (39)$$

Произвольную действительную постоянную C_{0j} для односвязной области (без потери общности) можно положить равной нулю.

Для треугольных матриц μ_1, μ_2, A, B и матриц, близких к диагональным, в работе Е. А. Раенко [17] доказана однозначная разрешимость краевой задачи (31), (18). Для квазилинейной системы (31), (18) в работах В. Н. Монахова [6,13, 14] доказано существование хотя бы одного решения при условии ограничения на рост правой части (31). Ограничение на рост в правой части (31) вызвано существом дела, поскольку даже простейшее линейное уравнение с ограниченными коэффициентами

$$X_s = A(z)X + B(z)$$

может не иметь ограниченных решений в конечной области D [13].

В реальной ситуации упругие модули, объемные силы и объемные моменты ограничены. Для составных упругих тел упругие модули непрерывно-дифференцируемые функции координат, имеющие разрывы первого рода. Если в последних двух соотношениях (32) выбрать a, b достаточно большими числами, например $a=b^2$ ($n_1 = \mu_{\min}(\delta + \varepsilon)_{\max}^{-2} n_2^2$), то нормы матриц A, B можно сделать сколь угодно малыми. Поэтому будут выполняться условия на рост [13, 16] для линейной системы уравнений (31). Тогда решение краевой задачи (31), (18) при выбранных a, b , согласно результатам работ [6, 13, 14], существует и единственно при $\mu_1, \mu_2, A, B, N \in L_{p>2}(K), L \in SW_p^1$.

Если от переменных краевой задачи (31), (18) перейти к переменным краевой задачи (15), (18), то при условии $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{g} \in W_p^1, Y \in L_p, \mathbf{G}, \mathbf{g} \in SW_p^1, p > 2$, однозначно разрешима краевая задача (15), (19).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Мартынов Н.И. Краевые задачи теории упругости неоднородной среды как краевые задачи обобщенного аналитического вектора // Математический журнал. – 2007. – № 3(25). – С. 69-77.
- 2 Алексеева Л.А., Мартынов Н.И., Федоров И.О. Применение квазиконформного отображения в задачах кручения неоднородных анизотропных тел // Математический журнал. – 2009. – Т. 9, № 3(33). – С. 14-18.
- 3 Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- 4 Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
- 5 Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора // *Annales Polonici Mathematici*. – 1966. – Vol. 17. – P. 281-320.
- 6 Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – М.: Наука, 1977. – 424 с.
- 7 Мартынов Н.И. Интегральные уравнения по области в статической теории упругости неоднородной среды // Доклады НАН РК. – 2010. – № 3. – С. 11-16.
- 8 Martynov N.I., Chuprasov A.A. Application of the quasianalytical vector theory to boundary-value problems of the elasticity theory non-homogeneous anisotropic medium // *Materials of the II international research and practice conference «European Science and Technology»*. – Wiesbaden, Germany, 2012. – Vol. II. – P. 29-37.
- 9 Мартынов Н.И. Краевые задачи плоской моментной теории упругости неоднородной изотропной среды как краевые задачи квазианалитического вектора // Доклады НАН РК. – 2013. – № 2. – С. 22-31.
- 10 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 866 с.
- 11 Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
- 12 Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
- 13 Монахов В.Н. Нелинейные диффузионные процессы // Сиб. мат. журнал. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1082-1097.
- 14 Антонцев С.Н., Монахов В.Н. Краевые задачи с разрывными граничными условиями для квазилинейных эллиптических систем $2m(m \geq 1)$ уравнений первого порядка // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 65-73.
- 15 Ашыралиев Ч., Монахов В.Н. Итерационный алгоритм решения двумерных сингулярных интегральных уравнений // Динамика сплошной среды. – 1991. – Вып. 101. – С. 21-29.
- 16 Ладыженская О.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 538 с.
- 17 Раенко Е.А. Краевые задачи для квази-голоморфного вектора // Динамика сплошной среды. – 2001. – Вып. 118. – С. 65-68.

REFERENCES

- 1 Martynov N.I. *Matematicheskij zhurnal*. 2007. № 3(25). S. 69-77 (in Russ.).
- 2 Alekseeva L.A., Martynov N.I., Fedorov I.O. *Matematicheskij zhurnal*. 2009. T.9. № 3(33). S. 14-18 (in Russ.).
- 3 Mushelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. M.: Nauka, 1966. 707 s (in Russ.).
- 4 Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funkicii*. Nauka, 1988. 509 s (in Russ.).
- 5 Bojarskij B.V. *Annales Polonici Mathematici*. 1966. Vol. 17. P. 281-320 (in Russ.).
- 6 Monahov V.N. *Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlja jellipticheskikh sistem uravnenij*. Nauka, 1977, 424 s (in Russ.).
- 7 Martynov N.I. *Doklady NAN RK*. 2010. № 3, C.11-16 (in Russ.).
- 8 Martynov N.I., Chuprasov A.A. Application of the quasianalytical vector theory to boundary-value problems of the elasticity theory non-homogeneous anisotropic medium. // *Materials of the II international research and practice conference «European Science and Technology»*. Wiesbaden, Germany, 2012, Vol. II, P.29-37.

- 9 Martynov N.I. *Doklady NAN RK*. **2013**. № 2, С.22-32 (in Russ.).
- 10 Novackij V. *Teorija uprugosti*. M.: Mir, **1975**, 866s (in Russ.).
- 11 Chernyh K.F. *Nelinejnaja teorija uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah*. *Mashinostroenie*, **1986**, 336s (in Russ.).
- 12 Vekua N.P. *Sistemy singuliarnyh integralnyh uravnenij i nekotorye granichnye zadachi*. M.: Nauka, **1970**, 379s (in Russ.).
- 13 Monahov V.N. *Sib.mat.Zhurnal.*, **2003**, Т.44, №5, S.1082-1097 (in Russ.).
- 14 Antoncev S.N., Monahov V.N. *Izv.SO AN SSSR, ser.tehn.nauk.*, **1967**, Т.8, , №2, S.65-73 (in Russ.).
- 15 Ashyraliev Ch., Monahov V.N. *Dinamika sploshnoj sredy*, **1991**, Vyp.101, S.21-29 (in Russ.).
- 16 Ladyzhenskaja O.A., Uralceva N.I. *Linejnye i kvazilinejnye uravnenija jellihticheskogj tipa*. M:Nauka, **1964**, 538 s (in Russ.).
- 17 Raenro E.A. *Dinamika sploshnoj sredy*, **2001**, Vyp.118, S.65-68 (in Russ.).

Резюме

Н. И. Мартынов

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

БІРТЕКТІ ЕМЕС ИЗОТРОПТЫҚ СЕРПІМДІ ОРТАНЫҢ КОССЕР ЖАЛҒАНКОНТИНУУМЫНЫҢ ЖЕҢІЛДЕТІЛГЕН СҮЛБЕСІНІҢ ЖАЛПАҚ СТАТИКАЛЫҚ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРІ

Құрамды біртекті емес изотроптық серпімді ортаның жеңілдетілген Коссер сұлбесінің статикалық шеттік есептерінің жалпыланған шешімдерін бірден анықтауды мүмкін ететін облыста бір мәнді шешілетін интегралдық тендеулер алынды.

Тірек сөздер: изотроптық дене, интегралдық тендеулер, шеттік есеп, көрсеткіш.

Summary

N. I. Martynov

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan)

INTEGRAL EQUATIONS OF TWO-DIMENSIONAL STATICALLY REGIONAL PROBLEMS SIMPLE MODEL OF PSEUDOCONTINIUM COSSERA NONHOMOGENOUS ISOTROPIC ELASTICALLY MEDIUM

Simple are solved integrals equations in regional were obtained, which aloud at once defines conclusions solutions of statically regional problems of component nonhomogenous isotropic elastically mediums of simple model of pseudocontinium Cosserra.

Keywords: isotropic body, the integrated equation, region problem, index.

Поступила 15.01.2014г.

Э. Г. БООС, Т. ТЕМИРАЛИЕВ, М. ИЗБАСАРОВ, В. В. САМОЙЛОВ

(Физико-технический институт, Алматы, Республика Казахстан)

СТРУКТУРА СОБЫТИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В АНТИПРОТОН-ПРОТОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ИМПУЛЬСЕ 32 ГэВ/с

Аннотация. При исследовании антипротон-протонных взаимодействий установлено, что аннигиляционном канале распределение частиц более сферично, чем в неаннигиляционном канале. Образование мезонов с большим поперечным импульсом приводит к более сферичному вылету мезонов.

Ключевые слова: антипротон-протонное взаимодействие, мезон, поперечность.

Тірек сөздер: антипротон-протон әрекеттестігі, мезон, көлденең.

Keywords: antiproton-proton interaction, meson, across.

В работе представлены данные о неупругих антипротон-протонных взаимодействиях при импульсе 32 ГэВ/с, зарегистрированных во французской водородной пузырьковой камере «Мирабель», экспонированной на Серпуховском ускорителе У-70 Института физики высоких энергий (г. Серпухов, Россия).

При взаимодействиях антипротонов с протонами происходит множественное рождение частиц при аннигиляции антипротонов с протонами, а также рождение мезонов в неаннигиляционных каналах, аналогичные неупругим процессам, протекающим в протон-протонных взаимодействиях. Наличие различных механизмов генерации частиц приводят в индивидуальных событиях к разным угловым распределениям. Изучение коллективной переменной *сферисити* S [1], характеризующей отношение поперечного импульса к импульсу генерированных частиц, представляет интерес при исследовании динамики механизма рождения частиц

$$S = \min \frac{\sum p_{Ti}^2}{\sum \vec{p}_i^2}, \quad (1)$$

где p_i^2 и \vec{p}_{Ti}^2 – импульс i -частицы и его поперечная составляющая в системе центра масс.

Проведен анализ корреляции переменной сферисити S от величины наибольшего поперечного импульса P_T^{\max} одной из вторичных частиц. На рисунке 1 приведены двумерные графики, отражающие зависимость сферисити S от максимального поперечного импульса P_T^{\max} , а также распределения по переменной S и P_T^{\max} , соответственно относящиеся к антипротон-протонным взаимодействиям с множественностью $n \geq 2$ (рисунок 1а), $n \geq 4$ (рисунок 1б), $n \geq 6$ (рисунок 1с), которые по разработанной ранее методике были отнесены к аннигиляционному каналу $\bar{p}p \rightarrow ANN$ при 32 ГэВ/с [2]. В антипротон-протонной аннигиляции наблюдаем следующие особенности:

- рождение частиц с большим поперечным импульсом приводит к увеличению сферисити событий;
- распределение сферисити смещается в сторону больших значений S с ростом множественности, которое отражается на средних значениях $\langle S \rangle$;
- распределение P_T^{\max} более стабильный к изменению множественности;
- стандартные отклонения σ_s , $\sigma_{P_T^{\max}}$ практически не меняются с ростом множественности.

В таблице представлены для каждой реакции число событий N , среднее значение сферисити $\langle S \rangle$, стандартное отклонение σ_s и среднее значение от наибольшего поперечного импульса $\langle P_T^{\max} \rangle$ и $\sigma_{P_T^{\max}}$ при импульсе антипротона 32 ГэВ/с.

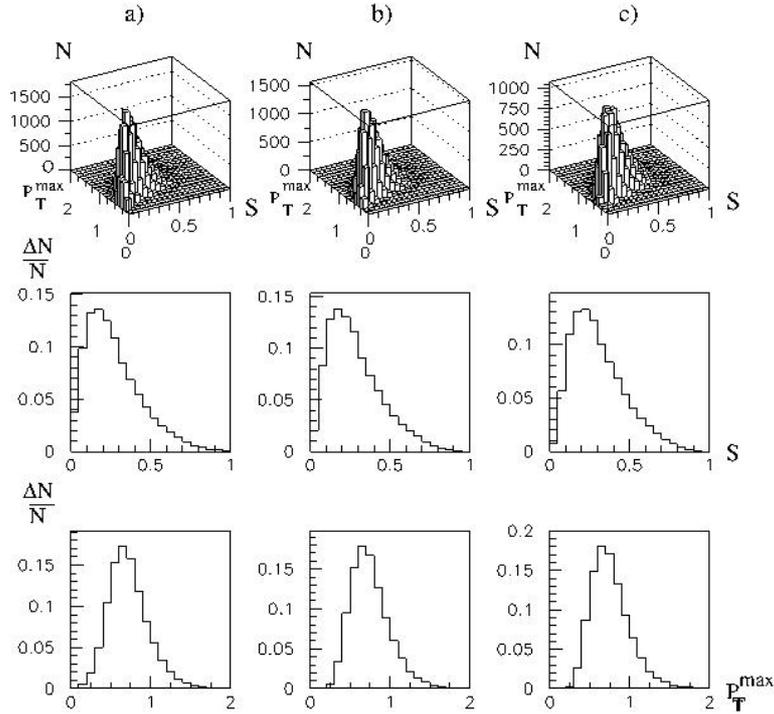


Рисунок 1 – Зависимость сферисити от максимального поперечного импульса и распределения S и P_T^{\max} в событиях антипротон-протонной аннигиляции при 32 ГэВ/с: а) данные для событий с множественностью $n \geq 2$; б) $n \geq 4$; в) $n \geq 6$

Число событий N , среднее значение сферисити $\langle S \rangle$ и среднее значение максимального поперечного импульса $\langle P_T^{\max} \rangle$

Реакция	n	N	$\langle S \rangle$	σ_s	$\langle P_T^{\max} \rangle$	σP_T^{\max}
$\bar{p}p \rightarrow ANN$	≥ 2	47228	$0,273 \pm 0,004$	0,172	$0,727 \pm 0,010$	0,258
	≥ 4	40612	$0,284 \pm 0,004$	0,167	$0,753 \pm 0,011$	0,250
	≥ 6	31453	$0,308 \pm 0,005$	0,167	$0,765 \pm 0,013$	0,245
$\bar{p}p \rightarrow NAN$ заряженные частицы	≥ 2	152862	$0,223 \pm 0,002$	0,229	$0,584 \pm 0,004$	0,238
	≥ 4	116996	$0,244 \pm 0,002$	0,221	$0,619 \pm 0,005$	0,229
	≥ 6	60598	$0,297 \pm 0,004$	0,218	$0,650 \pm 0,008$	0,219
$\bar{p}p \rightarrow NAN$ заряженные мезоны	≥ 2	144928	$0,388 \pm 0,003$	0,244	$0,545 \pm 0,004$	0,243
	≥ 4	116996	$0,382 \pm 0,003$	0,225	$0,577 \pm 0,005$	0,233
	≥ 6	60598	$0,406 \pm 0,005$	0,204	$0,622 \pm 0,008$	0,218

На рисунках 2, 3 представлены аналогичные данные для неупругих антипротон-протонных взаимодействий с учетом всех заряженных частиц в событии при определении S и импульса P_T^{\max} (рисунок 2), а также результаты неупругих антипротон-протонных взаимодействий, где при определении S и импульса P_T^{\max} учитывались данные только заряженных мезонов (рисунок 3), т.е. исключались данные о протоне и антипротоне.

В неаннигиляционных $\bar{p}p$ -взаимодействиях распределение по переменной сферисити событий, определенной по всем заряженным частицам (рисунок 2) сильно концентрированы в области малых значений S в событиях с учетом вклада малых множественностей $n \geq 2$ и смещаются в сторону больших значений с ростом n . Такая же закономерность проявляется в распределениях P_T^{\max} с ростом n . Присутствие вторичных нуклонов понижает сферичность событий, что представляется вполне закономерным явлением, связанным с существенной группировкой вторичных нуклонов вокруг оси столкновения первичных частиц из-за доминирования периферических соударений.

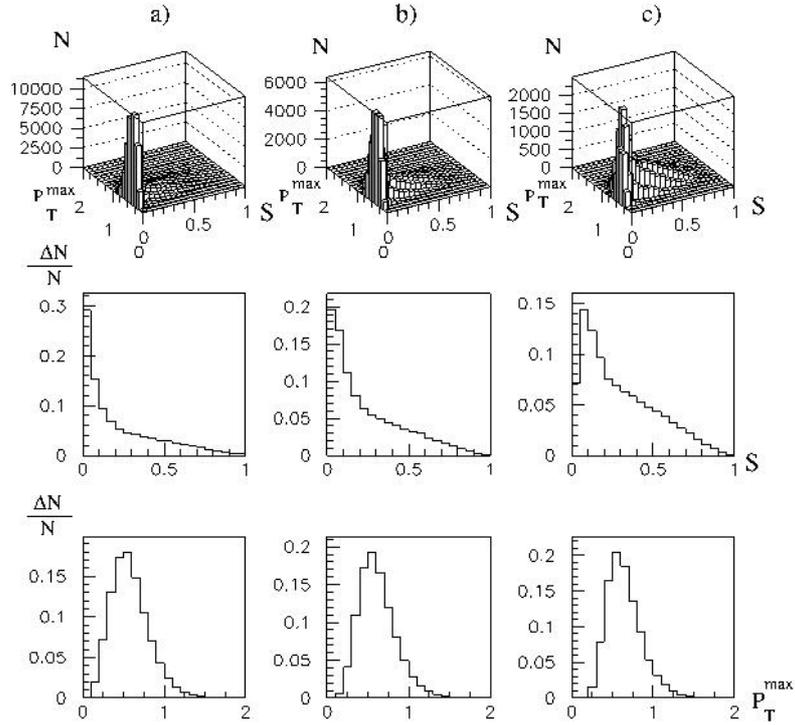


Рисунок 2 – Зависимость сферисити от максимального поперечного импульса и распределения S и P_T^{\max} , вычисленных с учетом всех заряженных частиц, в неаннигиляционных $\bar{p}p$ -взаимодействиях при 32 ГэВ/с:
 а) $n \geq 2$; б) $n \geq 4$; в) $n \geq 6$

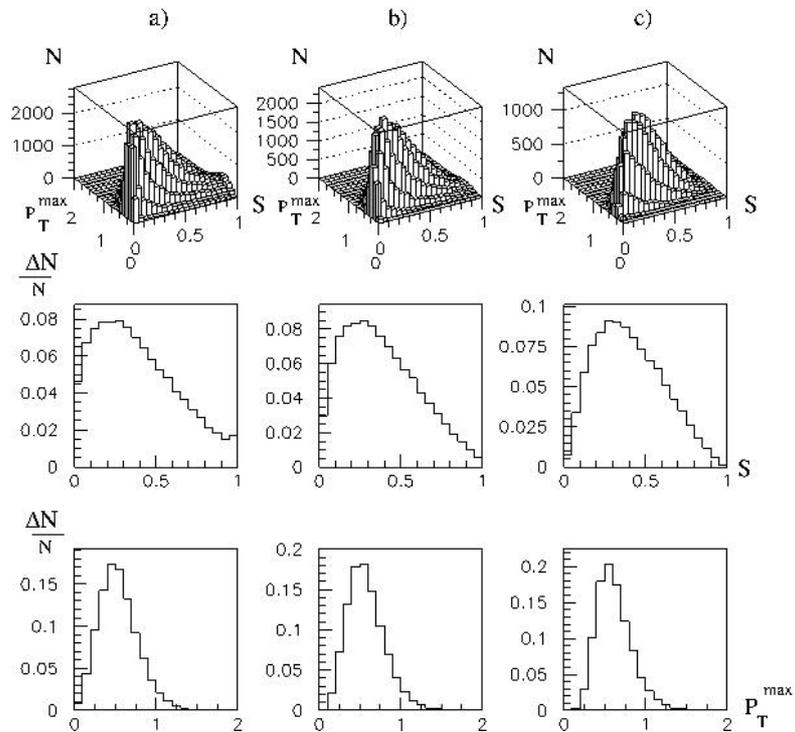


Рисунок 3 – Зависимость сферисити от максимального поперечного импульса и распределения S и P_T^{\max} , вычисленных с учетом только мезонов, в неаннигиляционных $\bar{p}p$ -взаимодействиях при 32 ГэВ/с:
 а) $n \geq 2$; б) $n \geq 4$; в) $n \geq 6$

Сравнение данных генерации мезонов в антипротон-протонной аннигиляции (рисунок 1) с распределением π -мезонов в неаннигиляционном канале (рисунок 3) приводит к выводу о том, что мезоны более изотропно распределены в системе центра масс в неаннигиляционном канале, чем в канале с аннигиляцией.

В заключение отметим основные результаты:

- корреляционного анализа зависимость S от P_T^{\max} для мезонов видно, что образование мезонов с большим поперечным импульсом приводит к увеличению сферисити мезонов;
- вылет частиц в аннигиляционном канале более сферично, чем неаннигиляционных взаимодействий;
- среднее значение сферисити для вторичных заряженных мезонов в неаннигиляционном $\bar{p}p$ -взаимодействиях выше чем, в реакции антипротон-протонной аннигиляции.

Настоящие результаты могут быть использованы для дальнейшего совершенствования модельных представлений в описании аннигиляционных и неаннигиляционных процессов при больших энергиях, достижимых в коллайдерах.

Работа выполнена благодаря гранту № 1471/ГФ2 МОН РК «Исследование динамики многочастичных реакций в экспериментах на ускорителях и в космических лучах на уровне гор».

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Мурзин В.С., Сарычева Л.И. Взаимодействия адронов высоких энергий. – М.: Наука, 1983.
- 2 Боос Э.Г., Темиралиев Т. и др. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2006. – № 6. – С. 64.

SUMMARY

- 1 Мурзин В.С., Сарычева Л.И. Взаимодействия адронов высоких энергий. – М.: Наука, 1983.
- 2 Боос Э.Г., Темиралиев Т. и др. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2006. – № 6. – С. 64.

Резюме

Э. Г. Боос, Т. Темиралиев, М. Избасаров, В. В. Самойлов

(Физика-техникалық институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ИМПУЛЬСИ 32 ГЭВ/С АНТИПРОТОН-ПРОТОНДЫҚ ӘРЕКЕТТЕСТІКТЕРДЕ ИМПУЛЬСТІК КЕҢІСТІКТЕ ОҚИҒАНЫҢ ҚҰРЫЛЫМЫ

Антипротонның протонмен әрекеттестіктерін зерттегенде импульстік кеңістікте бөлшектердің үлестірілуі аннигиляциялық емес арнаға қарағанда аннигиляциялық арнада неғұрлым сфералы болатыны анықталды. Көлденең импульсі жоғары мезондардың пайда болуы мезондардың неғұрлым сфералық ұшып шығуына әкеледі.

Тірек сөздер: антипротон-протон әрекеттестігі, мезон, көлденең.

Summary

E. G. Boos, T. Temiraliyev, M. Izbasarov, V. V. Samoilov

(Physic-technical institute, Almaty, Republic of Kazakhstan)

STRUCTURE OF EVENTS IN MOMENTUM SPACE IN ANTIPROTON-PROTON INTERACTIONS AT THE MOMENTA OF 32 GeV/c

Under studying of antiproton – proton interactions have been established that in the annihilation channel the distribution of particles in momentum space is more spherical, than the same distribution in non-annihilation channel. The production of mesons with great transverse momentum causes to more spherical emission of mesons.

Keywords: antiproton-proton interaction, meson, across.

Поступила 15.01.2014г.

Ш. АЛТЫНБЕКОВ

(Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

**ТҰЗДЫ ТОПЫРАҚТАР КОНСОЛИДАЦИЯСЫ
ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІ**

Аннотация. Нығыздалушы ортаның сұйық және қатты фазаларының үзіліссіздік заңдылықтарына, газ тәріздес фаза үшін баланс теңдеуіне, Генри заңы мен Дарси-Герсеванов заңына, сондай-ақ, еріген тұз (тұз ертіндісі) сумен бірге, ал газдың көпіршіктері мен суда ерімей қалған тұздар қатты фазамен бірге қозғалады деген ұйғарымға сүйенсе, тұзды топырақтардың фильтрациялық консолидация теориясының негізгі теңдеуі қорытылып шығарылды.

Топырақтардың, тау және тұзды жыныстардың күйін отандық және шетелдік зерттеу нәтижелеріне шолу жүргізіп (аталған жыныстардың фазалық ерекшеліктерін және жоғарыда аталаған математикалық үлгінің, жұмыс істеу принципін ескере), талдау қортындысына сүйенсе әртекті тұзды топырақтар үшін бас кернеулердің қосындысы мен уақ кеуектілік арасындағы тәуелділік ұсынылды. Осы тәуелділікке және қорытып шығарылуға теңдеу мен В.А.Флорин гипотезасына сәйкес тұзды топырақтар үшін фильтрациялық консолидация теориясының шешуші теңдеуі алынды және бастапқы-шеттік есебі математикалық тұрғыдан тұжырымдалды. Бұл есеп үшін шешімнің қасиеттері зерттелінді.

Тірек сөздер: Генри заңы, Дарси-Герсеванов заңы, тұзды топырақ, консолидациясы, шекаралық есеп.

Ключевые слова: закон Генри, закон Дарси-Герсеванова, консолидация, краевая задача.

Keywords: Henry's law, Darcy Gersevanov law, consolidation, boundary value problem.

Кіріспе. Өндірістік, азаматтық және гидротехникалық ғимараттар құрылысында олардың беріктілігін арттыру және оларды пайдалану мерзімін ұзарту проблемалары туындайды. Осы проблемаларды шешу, көп жағдайда топырақтардың нығыздалуынан туындайтын, іргетас қаланған жер бетінің шөгуді дұрыс анықтауға тікелей байланысты.

Топырақтардың фильтрациялық консолидация теориясы бүгінгі таңда жеткілікті дамыды десек те, бұл салада әлі де болса шешімін таппаған мәселелер жеткілікті. Соның бірі, тұзды топырақтардың шөгу процесі толық зерттелінбеген. Ал, Қазақстанның, Ресейдің, Украинаның, Молдавияның, Орта Азияның көптеген өңірлері тұзды топырақтар. Бұл мәселені өз уақытында академик Ш. М. Айтиалиев көтерген болатын. Жұмыста осы қойылған мәселенің шешімі келтіріледі.

1. Тұзды топырақтар консолидациясының негізгі теңдеуі

Бұл негізгі теңдеуді қорытып шығару, жоғарыда айтқандай, нығыздалушы ортаның сұйық және қатты фазаларының үзіліссіздік заңдылықтарына, газ тәріздес фаза үшін баланс теңдеуіне, Генри заңы мен Дарси-Герсеванов заңына, сондай-ақ суда еріген тұз сумен бірге, ал газдың көпіршіктері мен суда ерімей қалған тұздар қатты фазамен бірге қозғалады деген ұйғарымға негізделген. Осы заңдылықтарға рет-ретімен тоқталайық.

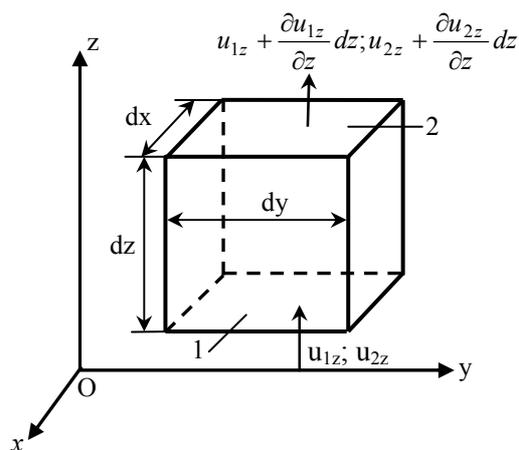
1.1. Тұзды топырақты ортаның сұйық қоспа (су және суда еріген тұз) фазасының үзіліссіздік теңдеуі

Бірлік көлемді элемент – тұзды топырақ қабатын бөліп алайық (1-сурет). Бұл көлемдегі t уақыт мезгіліндегі су көлемін (немесе t уақыт мезгіліндегі кеуектілікті) n' арқылы, топырақтың қатты бөлігін m арқылы, суда ерімей қалған тұз көлемін m_1' арқылы, суда еріген тұз көлемін m_1'' арқылы, ал газ тәріздес фаза көлемін s арқылы белгілейік. Сонда келесі қатынас орынды

$$n' + m + m_1' + m_1'' + s = 1. \quad (1)$$

Бұл dx, dy және dz өлшемді элементтің 1-жағы арқылы өтуші су мен суда еріген тұздың (тұз ертіндісінің) фильтрациялық жылдамдықтарын сәйкесінше u_{1z} және u_{2z} арқылы белгілейік (1-сурет). Сонда, бұл элементтің 2-жағы арқылы өтуші сұйықтықтардың (су және тұз ертіндісі) фильтрациялық жылдамдықтары сәйкесінше $u_{1z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dz$, $u_{2z} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dz$ өрнектермен анықталады.

dt уақыт ішінде 1-жақ арқылы өтуші су шығыны мен тұзды ертінді шығыны келесілерге тең:



1-сурет. Бірлік көлемді элемент – тұзды топырақ қабаты

$u_{1z} dx dy dt$; $u_{2z} dx dy dt$. Ал, 2-жақ арқылы өтуші: $\left(u_{1z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt$ $\left(u_{2z} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt$.

Нәтижеде dt уақыт аралығында қарастырылып отырған $dx dy dz$ элементар көлемнің ішіне енген су және тұз ертіндісі:

$$u_{1z} dx dy dt - \left(u_{1z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt = -\frac{\partial u_{1z}}{\partial z} dx dy dz dt;$$

$$u_{2z} dx dy dt - \left(u_{2z} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dz\right) dx dy dt = -\frac{\partial u_{2z}}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Дәл осылай, элементтің өзге жақтары үшін:

$$u_{1x} dy dz dt - \left(u_{1x} + \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} dx\right) dy dz dt = -\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} dx dy dz dt;$$

$$u_{2x} dy dz dt - \left(u_{2x} + \frac{\partial u_{2x}}{\partial x} dx\right) dy dz dt = -\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} dx dy dz dt;$$

$$u_{1y} dx dz dt - \left(u_{1y} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} dy\right) dx dz dt = -\frac{\partial u_{1y}}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$u_{2y} dx dz dt - \left(u_{2y} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} dy\right) dx dz dt = -\frac{\partial u_{2y}}{\partial y} dx dy dz dt.$$

Нәтижеде:

$$-\left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right) dx dy dz dt, \quad -\left(\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right) dx dy dz dt,$$

яғни

$$\left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right) dx dy dz dt.$$

Алайда, dt уақыт аралығында $dx dy dz$ элемент ішіне енген сұйық қоспа (су және тұз ертіндісі) мөлшерін өзгеше табуға да болады. Шынында да, егер нығыздалушы ортаның қарастырылып отырған элементар көлемнің t уақыт мезгіліндегі кеуектілігін n' арқылы, ал суда еріген тұз көлемі орналасқан кеуектілігін m'' арқылы белгілесек, онда осы элементар көлемнің уақ кеуектеріндегі сұйық қоспа көлемі уақыттың t мезгілінде $(n' + m'') dx dy dz$ -ке тең болады. dt уақыт аралығында

$dxdydz$ көлемді толтырушы тұзды топырақ кеуектілігі $n' + \frac{\partial n'}{\partial t} dt + m_1'' + \frac{\partial m_1''}{\partial t} dt$ -ға өзгереді. Осыған сәйкес сұйық қоспа көлемі:

$$(n' + \frac{\partial n'}{\partial t} dt + m_1'' + \frac{\partial m_1''}{\partial t} dt) dxdydz.$$

Бұл жерден, dt уақыт аралығында қаралып отырған элементар $dxdydz$ көлемдегі сұйық қоспа мөлшері артады:

$$\left(n' + \frac{\partial n'}{\partial t} dt + m_1'' + \frac{\partial m_1''}{\partial t} dt \right) dxdydz - (n' + m_1'') dxdydz = \left(\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial m_1''}{\partial t} \right) dxdydz dt.$$

Сығылмайтын сұйық қоспаның үзіліссіздік шартын ескерсек:

$$-\left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} \right) dxdydz dt = \left(\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{\partial m_1''}{\partial t} \right) dxdydz dt$$

немесе

$$\frac{\partial(n' + m_1'')}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = 0. \quad (2)$$

$dxdydz$ элемент ішіне dt уақыт аралығында енген сұйық қоспа көлемі осы көлемдегі сұйық қоспаның dt уақыт аралығындағы өзгеруіне тең.

1.2. Тұзды топырақты ортаның қатты фазалар қоспасының (топырақтың қатты бөлігі және суда ерімей қалған тұзды бөлік) үзіліссіздік теңдеуі

Фильтрация жылдамдығының аналогы бойынша бірлік аудан арқылы өтуші қатты бөлік пен суда ерімей қалған тұзды бөліктің көлемдік шығын жылдамдықтарын сәйкесінше $\vartheta_{1z}, \vartheta_{2z}$ арқылы, ал бірлік көлемдегі қатты бөлікті m арқылы, суда ерімей қалған тұзды бөлікті m_1'' арқылы белгілей, жоғарыдағы (2) теңдеуді қорытып шығарған жолмен қатты фазалар қоспасының үзіліссіздік теңдеуін мына түрде алуға болады:

$$\frac{\partial(m + m_1'')}{\partial t} + \text{div}(\bar{\vartheta}_1 + \bar{\vartheta}_2) = 0. \quad (3)$$

Элементтер көлемдегі қатты фазалар қоспасы мөлшерінің dt уақыт аралығындағы өзгеруі бірлік аудан арқылы dt уақыт аралығында өтуші қатты фазалар қоспасының көлемдік шығынына тең.

1.3. Газ тәріздес фаза үшін баланс теңдеуі

Нығыздалушы ортаның газ тәріздес фазасы үшін баланс теңдеуін қорытып шығару жоғарыда келтірілгендерге ұқсас [1]:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \mu(n' + m_1'') \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Элемент $dxdydz$ ішіне dt уақыт аралығында енген газ көлемі dt уақыт аралығында бөлініп шыққан газ массасына және осы элементар көлемдегі газ массасының dt уақыт аралығында өзгеруіне тең.

1.4. Консолидация теңдеуі

Газ күйінің теңдеуін изотермиялық режимде, ал фильтрациялық коэффициенттер матрицасын үшінші ретті диагональды матрица деп қарастыра, Генри заңы мен Дарси-Герсеванов заңына, еріген тұз сумен бірге, ал газдың көпіршіктері және суда ерімей қалған тұздар қатты фазамен бірге қозғалады деген ұйғарымға сүйене, сондай-ақ, жоғарыда келтірілген (1) қатынасты, напор мен қысым арасындағы байланысты және келесілерді ескере

$$\varepsilon = \frac{n' + m_1''}{m + m_1'}, \quad n' + m_1'' = \frac{\varepsilon}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m + m_1' = \frac{1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad n' = \frac{\varepsilon - \mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1},$$

$$m = \frac{\mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m_1' = \frac{1 - \mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad m_1'' = \frac{\mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}, \quad s = \frac{2 - \eta^* - \mu_1}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1}$$

(2), (3) және (4)-терден тұзды топырақтар консолидациясы теориясының негізгі теңдеуін келесі түрде қорытып шығаруға болады:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta_v(\varepsilon, H)(3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1)\gamma \frac{\partial H}{\partial t} = (3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \right\}. \quad (5)$$

Бұл жерде:

$$\beta_v(\varepsilon, H) = \frac{2 - \eta^* - \mu_1 + \mu \varepsilon}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1} \cdot \frac{1}{\gamma(H - z + H_0)} - \quad (6)$$

– көлемдік сығылу коэффициенті; μ – газдың ерігіштік коэффициенті; η^* – нығыздалушы ортаның суға қаныққандылық дәрежесі ($\eta^* = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu = 0$);

μ_1 – тұздың ерігіштік коэффициенті ($0 \leq \mu_1 \leq 1$); γ – тұзды қоспа ерітіндісінің меншікті салмағы; ε – уак кеуектілік коэффициенті.

Егер ортаның уактылық кеуегі және осы кеуектегі сұйықтың қысымы уакыт бойынша өзгермейді, яғни процесс қалыпты жағдайда өтіп жатыр десек, онда (5)-ші теңдеуден:

$$L(H) = 0. \quad (7)$$

Бұндағы L : $L = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ – дифференциалдық оператор.

Жоғарыда келтірілген (5)-ші теңдеуді шешу әдісі, теңдеудің шешімінің қасиеттері В. А. Флорин гипотезасына (тепе-теңдік теңдеуіне) [2]

$$\theta(t) = n\gamma \left\{ \left(\frac{\theta^*}{n\gamma} + H^* \right) - H \right\} \quad (8)$$

нығыздалушы орта күйінің реологиялық теңдеуіне және фильтрациялық коэффициентіне тікелей байланысты. Енді осы сұрақтарға жеке-жеке тоқталайық.

2. Нығыздалушы орта күйінің реологиялық теңдеуі

Топырақтардың, тау және тұзды жыныстардың күйін зерттеу нәтижелеріне және олардың практикалық қолданыстарына [1-14] шолу жүргізіп (аталған жыныстардың фазалық ерекшеліктерін және жоғарыда құрылған (5) модельдің жұмыс істеу принципін ескере) талдау қорытындысында әртекті тұзды топырақтар үшін келесі түрдегі реологиялық теңдеуді орынды деп таптық [14]:

$$\varepsilon(t) = \alpha_1 - \frac{1}{1 + (n-1)\alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}} \cdot \left\{ (\alpha_4 + \alpha_5 e^{-\alpha_6 x_3}) a_0(t + \rho(x), \theta(t)) \theta(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau) K(t + \rho(x), \tau + \rho(x), x, \theta(\tau)) d\tau \right\}, \quad (9)$$

$$K(t + \rho(x), \tau + \rho(x), x, \theta(t)) = (\alpha_4 + \alpha_5 e^{-\alpha_6 x_3}) \cdot \frac{\partial \alpha_0(\tau + \rho(x), \theta(\tau))}{\partial \tau} + (\alpha_{13} + \alpha_{14} e^{-\alpha_{15} x_3}) \cdot \frac{f(\tau + \rho(x), \theta(\tau))}{\theta(\tau)} \cdot \frac{\partial C(t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta(\tau))}{\partial \tau}. \quad (10)$$

Бұл жерде $a_0(t, \rho(x), \theta(t))$, $f(t + \rho(x), \theta(t))$, $C(t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta(\tau))$ –

– ортаның механика-физикалық қасиетін сипаттаушы функциялар;

$$\rho(x) = \rho(x_n) = \tau_1(x_n(\tau)) - \tau_1(0) = \frac{\alpha_{40}}{h \frac{\tau_{\max}^{\alpha_{41}} - \alpha^{\alpha_{42}}}{\tau_{\max}^{\alpha_{41}} - \tau_{\min}^{\alpha_{42}}} - \alpha_{43}} + \frac{\alpha_{40}}{\alpha_{43}}; \quad (11)$$

$$x_n(\tau) = h \frac{\tau^{\alpha_{41}} - \tau^{\alpha_{42}}}{\tau_{\max}^{\alpha_{41}} - \tau_{\min}^{\alpha_{42}}} = \begin{cases} 0, \tau = \tau_{\max}, \\ h, \tau = \tau_{\min}, \end{cases} \quad \rho(x_n) = \begin{cases} 0, \tau = \tau_{\max}, \\ \frac{\alpha_{40}}{h - \alpha_{43}} + \frac{\alpha_{40}}{\alpha_{43}}, \tau = \tau_{\min}, \end{cases} \quad \alpha_{40} \geq 1,$$

$0 < \alpha_{43} < h$ – материал жасының координатаға тәуелді өзгеру заңын сипаттаушы функция.

Ортаның қасиетін сипаттаушы теңдеу (9), интегралдық ядро (10) жалпы сипатқа ие. Дербес жағдайда бұл теңдеуден практикада жиі қолданыстарға ие теңдеулерді және интегралдық ядроларды (А.Р. Ржаницын, Абель, Н.Х.Арутюнян, В.А.Флорин, С.Р.Месчян, Ю.К. Зарецкий, Т.Ш. Ширинкулов) алуға болады. Алайда, ескерте кетейік: бұл теңдеуді соңғы жетілген теңдеу деп айтудан аулақпыз. Теңдеуге енген параметрлерді табу үстінде көптеген лабораториялық, теориялық зерттеулер жүргізу қажет. Бұл ертеңгі күннің мәселесі.

3. Фильтрация коэффициенті

Фильтрация коэффициенті қарастырылып отырған топырақтардың ерекшеліктеріне және белгілі зерттеулерге сәйкес, келесі түрлерде берілуі мүмкін [15-17]:

$$K(\varepsilon(t)) = K_1 + K_2 \cdot \varepsilon(t) \quad (12)$$

– саз балшықты тұзды топырақтар үшін;

$$K(\varepsilon(t)) = K_3 \exp \frac{\varepsilon(t)}{K_4 \varepsilon_T - K_5} \quad (13)$$

– жабысқақ тұзды топырақтар үшін;

$$K(\varepsilon(t)) = K_6 \left(\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_k}{\varepsilon_0 - \varepsilon_k} \right)^{n_k} \quad (14)$$

– суға қаныққан әлсіз тұзды топырақтар үшін.

Бұл жерде $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \varepsilon_T, n_k, \varepsilon_k, \varepsilon_0$ – тәжірибе тұрақтылары, ал $\varepsilon(t)$ (9) теңдеумен анықталған.

Енді осы келтірілгендерді негізге ала отырып, қаралып жатқан процестің шешуші теңдеуін қорытып шығарайық және есептің қойылымын математикалық өрнектейік.

4. Шешуші теңдеу және есептің қойылымы, оның шешімі, ірге тастың шөгугі

В. А. Флорин гипотезасы (8)-ді, топырақ күйінің негізгі теңдеуі (9)-ді, тұзды топырақтар консолидациясының негізгі теңдеуі (5)-ке және (12), (13), (14) – қатынастарға қойсақ, тұзды топырақтар консолидациясының шешуші теңдеуін аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & C_{vn}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) L(H) - C_{1n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \times \\ & \times \left\{ \int_{\tau_1}^t f(\tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \cdot K_1(x, t + \rho(x), \tau + p(x), \theta^*, H^*, H) d\tau + \right. \\ & \left. + C_{vn}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \cdot K_2(x, t + \rho(x), t + p(x), \theta^*, H^*, H) \right\} + \\ & + C_{2n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H); \end{aligned} \quad (15)$$

$$K_1(x, t + \rho(x), \tau + p(x), \theta^*, H^*, H) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial C(x, t + \rho(x), \tau + p(x), \theta^*, H^*, H)}{\partial \tau} \right);$$

$$K_2(x, t + \rho(x), t + p(x), \theta^*, H^*, H) = \left(\frac{\partial C(x, t + \rho(x), \tau + p(x), \theta^*, H^*, H)}{\partial \tau} \right)_{\tau=t};$$

$$L(H) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \left(K_{ps}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \frac{\partial H}{\partial x_s} \right).$$

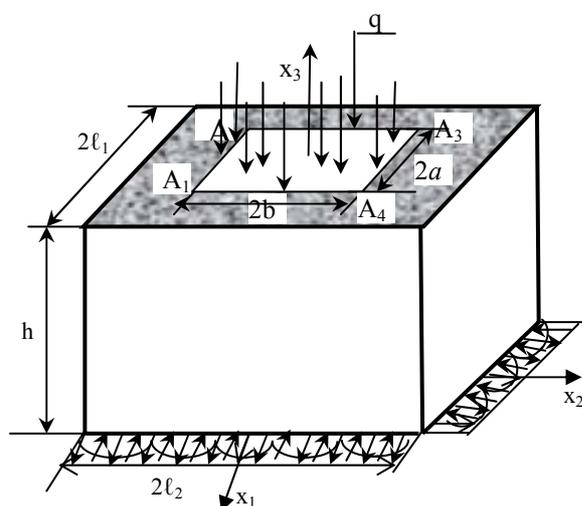
Теңдеудегі $C_{vn}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C_{ln}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $f(t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $K_1(x, t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $K_2(x, t + \rho(x), t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C_{2n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $K_{\phi s}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$ – функциялардың түрлері (6), (8), (9)-(11), және (12), (13), (14)- қатынастарға тікелей байланысты.

Интегродифференциалдық теңдеу (15) шексіз көп шешімдерге ие. Осы шешімдер жыйыны ішінен қаралып жатқан процесті нақты сипаттаушы бірден бір шешімді таңдау үшін және бұл процеске толық математикалық сараптама беру үшін шешуші теңдеуді геометриялық (2-сурет) және бастапқы-шеттік шарттармен

$$H(x, \tau_1) = \left(\frac{\theta_0^*}{(n\gamma + H_0^*)/\omega_0} \right) x \in \bar{D}, \quad (16)$$

$$\pm \chi_n^{(\alpha)} \frac{\partial H}{\partial n} + \chi_n^{(\alpha+1)} H \Big|_{\Gamma} = \psi(x, t) \Big|_{\Gamma}, \quad (x, t) \in D \times [\tau, T] \quad (17)$$

толықтыру қажет.



2-сурет. Геометриялық шарт

Бұл жердегі $\chi_n^{(\alpha)}$ және $\chi_n^{(\alpha+1)}$ ($\alpha = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3$) – коэффициенттер келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$\chi_n^{(\alpha)} \geq 0, \quad \chi_n^{(\alpha+1)} \geq 0, \quad (\chi_n^{(\alpha)})^2 + (\chi_n^{(\alpha+1)})^2 \neq 0;$$

$\psi(x, t)$ – қарастырылып отырған параллелепипед түріндегі топырақ қабатына (2-сурет) жанаса қабысып жатқан қандай да бір сулы қабат қысымын сипаттаушы функция келесі түрде берілген [14]:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, x_3, t) = & (\alpha_1^{(1)} x_1 + \beta_1^{(1)}) \psi_1(x_2, x_3, t) + (\alpha_2^{(1)} x_1 + \beta_2^{(1)}) \psi_2(x_2, x_3, t) + \\ & + (\alpha_1^{(2)} x_2 + \beta_1^{(2)}) \psi_3(x_1, x_3, t) + (\alpha_2^{(2)} x_2 + \beta_2^{(2)}) \psi_4(x_1, x_3, t) + \\ & + (\alpha_1^{(3)} x_3 + \beta_1^{(3)}) \psi_5(x_1, x_2, t) + (\alpha_2^{(3)} x_3 + \beta_2^{(3)}) \psi_6(x_1, x_2, t); \end{aligned}$$

$$\omega_0 = l - (1 - \varepsilon_0) \beta_v(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \Big|_{t=\tau_1}; \quad \theta_0^* / n\gamma + H_0^* -$$

ω_0 – қысылған ауа күйін сипаттаушы коэффициент.

$$H(x_1, x_2, x_3, \tau_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} \left(\cos \frac{\mu_{1i}}{2l_1} x_1 + B_{1i} \cdot \sin \frac{\mu_{1i}}{2l_1} x_1 \right) \times \\ \times \left(\cos \frac{\mu_{2j}}{2l_2} x_2 + B_{2j} \cdot \sin \frac{\mu_{2j}}{2l_2} x_2 \right) \cdot (ch \mu_{3ij} x_3 + F_{ij} sh \mu_{3ij} x_3) - \quad (18)$$

(7)-теңдеудің келесі шарттарды

$$\chi_n^{(\alpha)} \frac{\partial H}{\partial n} + \chi_n^{(\alpha+1)} H \Big|_{\Gamma} = \psi(x, \tau_1) \Big|_{\Gamma} \quad x \in \Gamma, \quad (19)$$

$$\chi_3^{(3)} \frac{\partial H}{\partial n} + \chi_3^{(4)} H \Big|_{x_3=h} = q / \gamma + \psi(x, \tau_1) \Big|_{x_3=h}, \quad |x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq b, \quad (20)$$

$$\chi_3^{(3)} \frac{\partial H}{\partial n_3} + \chi_3^{(4)} H \Big|_{x_3=h} = \psi(x, \tau_1) \Big|_{x_3=h}, \quad (21)$$

$-l_1 < x_1 < -a$, $a < x_1 < l_1$, $-l_2 < x_2 < -b$, $b < x_2 < l_2$ қанағаттандырушы шешімі

Қарастырылып отырған (15)-(17) бастапқы-шеттік және (7), (18)-(20) шеттік есептердің шешімдерінің барлығын, бірден-бірлігін дәлелдеуді, есептерді шешу әдістерін (интерация әдісі, А.А.Самарскийдің жиынтық – аппроксимация әдісі, прогонка әдісі) негіздеуді автордың бұдан бұрын жарық көрген жұмыстарында [18-23] келтірілгендей жүргізуге болады.

Жұмыста модельді сынап тексеру мақсатында жоғарыда келтірілген есептерді жартылай аналитикалық әдістерде шешілетіндей дәрежеге жеңілдеттік және жеңілдетілген бұл есептерді шешу үшін Фурье әдісін және экспоненциалды бүтін функцияларды екінші бір өзге экспоненциалды бүтін функциялармен аппроксимациялау әдісін қолдандық [24]. Сонда, келесі түрдегі шешімді алдық:

$$H(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk} \left(\cos \frac{\mu_{1i}}{2l_1} x_1 + B_{1i} \cdot \sin \frac{\mu_{1i}}{2l_1} x_1 \right) \times \\ \times \left(\cos \frac{\mu_{2j}}{2l_2} x_2 + B_{2j} \cdot \sin \frac{\mu_{2j}}{2l_2} x_2 \right) \cdot V_{nij} \left(\frac{2\lambda_{ijk}}{\alpha_{45} \sqrt{K_{03}}} e^{-\frac{\alpha_{45}}{2} x_3} \right) e^{-C_{vn} \lambda_{ijk}^2 t}. \quad (22)$$

(22), (21) және (22)-дегі D_{ijk} , D_{1ij} , B_{1i} , B_{2j} , F_{ij} – бастапқы және шеттік (шекаралық) шарттарға сәйкес табылған тұрақтылар, μ_{1i} , μ_{2j} , λ_{ijk} – меншікті мәндер, $V_{nij}(x_3)$ – бірінші және екінші текті Бессель функцияларының қосындыларынан түзілген цилиндрлік функция.

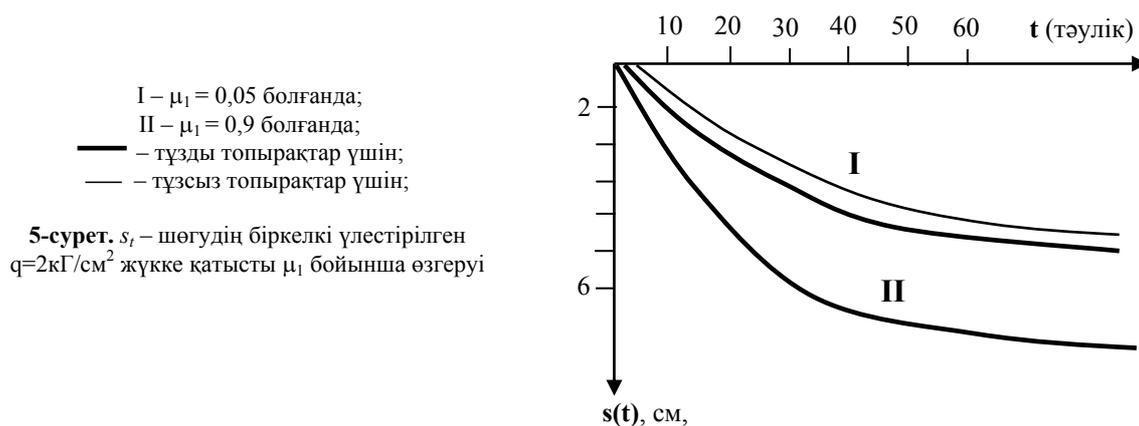
Енді жоғарыда алынған шешімдерге ((21) мен (22)) және жер бетінің шөгу процесін анықтау әдісіне [2] жүгінсек, ірге тастың шөгуін есептеу қиынға соқпайды:

$$s(t) = \frac{n\alpha_0 \gamma (\alpha_4 + \alpha_5)}{(1 + \varepsilon_0)(1 + (n-1)\alpha_2)} \cdot \int_0^h e^{\alpha_{44} x_3} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{1ij} \cdot (ch \mu_{3ij} x_3 + F_{ij} sh \mu_{3ij} x_3) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk} \cdot V_{nij} \left(\frac{2\lambda_{ijk}}{\alpha_{45} \sqrt{K_{03}}} e^{-\frac{\alpha_{45}}{2} x_3} \right) e^{-C_{vn} \lambda_{ijk}^2 t} \right\} dx_3. \quad (23)$$

Бұл жерден $t \rightarrow \infty$ ұмтылғанда

$$s_{\infty} = \frac{n\alpha_0 \gamma (\alpha_4 + \alpha_5)}{(1 + \varepsilon_0)(1 + (n-1)\alpha_2)} \cdot \int_0^h e^{\alpha_{44} x_3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{1ij} \cdot (ch \mu_{3ij} x_3 + F_{ij} sh \mu_{3ij} x_3) dx_3.$$

Жоғарыда алынған (23)-формулаға сәйкес ірге тастың шөгу процесі зерттелінді. Сандық есептеулер нәтижелері төмендегі жағдайлардың болатындығын көрсетті.



Тұзды топырақтардың шөгуі, тұздың суда ерігіштік қасиетіне сәйкес тұзсыз топырақтардың шөгуімен салыстырғанда үлкен де, елеусіз де (тұз суда ерімеген жағдайда) болуы мүмкін (3-сурет).

Топырақ құрамында суда ерігіштігі бірге тең ($\mu_1=1$) тұз мөлшері жеткілікті көп болса ($1 \leq m'_1 + m''_1 > n' + m + s$), онда ол жерге ғимарат тұрғызу тиімсіз. Тұзды топырақтың шөгу процесі бастапқы уақытта тұздың суда еру тездігіне (жылдамдығына) байланысты, ал содан соң топырақтың қатты бөлігінің жылжи деформациялануы мен уақ кеуектіліктің қасиетіне сәйкес жүреді.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Флорин В.А. Основное уравнение консолидации земляной среды // ДАН СССР. – 1948. – Т. 59. – С. 21-24.
- 2 Флорин В.А. Основы механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1961. – Т. 2. – 543 с.
- 3 Месчан С.Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов. – М.: Недра, 1985. – 342 с.
- 4 Тер-Мартиросян З.Г. Реологические параметры грунтов и расчеты оснований сооружений. – М.: Стройиздат, 1990. – 200 с.
- 5 Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. – М.: Наука, 1967. – 276 с.
- 6 Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
- 7 Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 383 с.
- 8 Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. – Ташкент: ФАН, 1986. – 387 с.
- 9 Ержанов Ж.С., Бергман Э.И., Серегин Ю.Н. Об описании реологических свойств соляных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1976. – № 1. – С. 3-9.
- 10 Ержанов Ж.С., Бергман Э.И., Векслер Ю. А. Ползучесть каменной соли в условиях сложного напряженного состояния // Вестник АН Каз ССР. – 1976. – № 2. – С. 66-69.
- 11 Ержанов Ж.С., Бергман Э.И. Ползучесть соляных пород. – Алма-Ата: Наука, 1977. – 110 с.
- 12 Борях А.А., Константинова С.А., Асанов В.А. Деформирование соляных пород. – Екатеринбург: УроРАН, 1966. – 204 с.
- 13 Унайбаев Б.Ж., Ищанова А.Ш., Унайбаев Б.Б., Арсенин В.А. Карбонатные пылевато-глинистые лессовые просадочные грунты Казахстана в основании зданий и сооружений // Тр. межд. научно-практич. конф., посвящ. 75-летию заслуженного деятеля науки и техники Казахстана академика НАН РК, док. техн. наук, профессора Ш. М. Айтиалиева «Механика и строительство транспортных сооружений». – Алматы, 2010. – С. 196-200.
- 14 Унайбаев Б.Ж., Арсенин В.А., Ищанова А.Ш. Фундаментостроение на засоленных грунтах. – Экибастуз: ЕИТИ, 2008. – 110 с.
- 15 Алтынбеков Ш. Нелинейное определяющее уравнения состояния грунта и методика определения его параметров // «Үшінші Ержанов оқулары» Қазақстан Республикасы Ұлттық инженерлік академиясының 20 жылдығына арналған Халықаралық ғылыми-техникалық конференция материалдары. – Ақтөбе, 2010. – I бөлім. – 24-28 б.
- 16 Шаманский В.Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. – Киев: Наукова думка, 1969. – 375 с.
- 17 Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н. Проектирование грунтовых плотин. – М.: Энергоатом-издат, 1987. – 303 с.
- 18 Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелев М.Ю., Тер-Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадков оснований сооружений. – М.: Стройиздат, 1967. – 238 с.
- 19 Алтынбеков Ш. Краевые задачи консолидации неоднородных грунтов: Дис. ... к.ф.-м.н. – Ташкент, 1991. – 157 с.
- 20 Алтынбеков Ш. О применении локально-одномерного метода к решению краевой задачи механики уплотняемых сред. – М., 1988. – 21 с. / Деп. в ВИНТИ 15.05.85, № 3298.
- 21 Алтынбеков Ш. Об одном методе аппроксимации // Узб. журнал «Проблемы механики». – 1995. – № 3-4. – С. 5-7.
- 22 Алтынбеков Ш., Ширинкулов Т.Ш. Об одном итерационном методе нелинейных краевых задач консолидации грунтов // ДАН РУз. Математика. Технические науки. Естествознание. – 1996. – № 1-2. – С. 25-27.
- 23 Алтынбеков Ш. Об одной начально-краевой задаче виброконсолидации неоднородных грунтов // Вестник НАН РК. – 2008. – № 2. – С. 21-27.

24 Алтынбеков Ш. Об одной задаче теории консолидации неоднородных грунтов и о методах ее решения // Приднепровский научный вестник. – Днепропетровск, 2009. – № 11(100). – С. 81-94.

REFERENCES

- 1 Florin V.A. The basic equation of consolidation earthen environment Dokl. 1948. Vol. 59. P. 21-24.
- 2 Florin V.A. Fundamentals of soil mechanics. M.: Stroiizdat, 1961. Vol. 2. 543 p.
- 3 Meschyan S.R. Eksperimentalnaya rheology of clay soils. M.: Nedpa, 1985. 342 p.
- 4 Ter-Martirosyan Z.G. Rheological parameters of soils and ground structures calculations. M.: Stroiizdat, 1990. 200 p.
- 5 Zaretsky Y.K. Theory of soil consolidation. M.: Nauka, 1967. 276 p.
- 6 Harutyunyan N.H., Kolmanovskii V.B. Creep theory of inhomogeneous bodies. M.: Nauka, 1983. 336 p.
- 7 Rabotnov Y.N. Elements of hereditary mechanics of solids. M.: Nauka, 1977. 383 p.
- 8 Shirinkulov T.S., Zaretsky Y.K. Creep and consolidation of soils. Tashkent: FAN, 1986. 387 p.
- 9 Erzhanov J.C., Bergman E.I., Seregin Y.N. On the description of the rheological properties of salt rocks. Physical and technical problems of minerals development myh. 1976. № 1. P. 3- 9.
- 10 Erzhanov J.C., Bergman E.I., Wexler A. Creep of rock salt in a complex stress state. Bulletin of the Academy of Sciences of Kazakh SSR. 1976. № 2. P. 66-69.
- 11 Erzhanov J.C., Bergman E.I. Creep salt rocks. Alma-Ata: Nauka, 1977. 110 p.
- 12 Boryah A.A., Konstantinov S.A., Assanov V.A. Deformation of salt rocks. Yekaterinburg: UroRAN, 1966. 204 z.
- 13 Unaybaev B.J., Ischanova A.Sh., Unaybaev B.B., Arsenin V.A. Calcareous silty clay loess soil subsidence in Kazakhstan based buildings and structures Proc. Intl. scientific and practical. conf. is dedicated. 75th Anniversary Honored Science and Technology Kazakhstan academician of NAS RK, Doc tehn., Professor Sh. M. Aytalieva «Mechanics and construction vehicles constructions». Almaty, 2010. P. 196-200.
- 14 Unaybaev B.J., Arsenin V.A., Ischanova A.Sh. Foundation Engineering in saline – gruntah. Törtüy: Yoichi, 2008. 110 with.
- 15 Altynbekov Sh. nonlinear constitutive equation of state of the soil and its method of determining the parameters «Yshinshi Erzhanov okulary» Kazakhstan Respublikasy Ultyk inzhenerlik akademiya synun 20 zhyldyryna arnanan Halykaralyk ғылыми-tehnikalыk conference materialdary. Aqtöbe, 2010. I bөlim. P. 24-28.
- 16 Shamanic V.E. Numerical solution of groundwater filtration on a computer. Kiev: Naukova Dumka, 1969. 375 p.
- 17 Goldin A.L., Rasskazov L.N. Tales Design of earth dams. M.: Energoatomizdat, 1987. 303 p.
- 18 Tsytovich N.A., Zaretsky Y.K., Malyshev M.V., Abel M.Y., Ter-Martirosyan Z.G. Forecast speed pellet based structures. M.: Stroiizdat, 1967. 238 p.
- 19 Altynbekov Sh. inhomogeneous boundary value problems of consolidation of soils: Ph.D. diss. Tashkent, 1991. 157 p.
- 20 Altynbekov Sh. On the application locally one-dimensional method for solving boundary value problems in the mechanics of condensed media. M., 1988. 21 p. Dep. v VINITI 15.05.85, № 3298.
- 21 Altynbekov Sh. A method of approximation. Uz. Journal «Problems of Mechanics». 1995. N 3-4. P. 5-7.
- 22 Altynbekov Sh., Shirinkulov T.Sh. An iteration method for nonlinear boundary value problems of soil consolidation. DAN Uzbekistan. Mathematics. Engineering. Science. 1996. N 1-2. P. 25-27.
- 23 Altynbekov Sh. An initial -boundary value problem vibrokonsolidatsii heterogeneous soils. Bulletin of NAS RK. Almaty, 2008. N 2. P. 21-27.
- 24 Altynbekov Sh. On a problem of inhomogeneous soil consolidation theory and the methods of its solution. Scientific Bulletin Pridneprovsky. Dnepropetrovsk, 2009. N 11 (100). P. 81-94.

Резюме

Ш. Алтынбеков

(Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Республика Казахстан)

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ СОЛЕННЫХ ГРУНТОВ
И ЕЕ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

На основе законов неразрывности жидкой и твердой фаз, уравнения баланса для газообразной фазы, закона Генри и Дарси-Герсеванова, а также, предполагая, что растворенная соль (солевой раствор) движется с водой, а пена газа и нерастворенная соль движется с твердой фазой, получено основное уравнение консолидации соленых грунтов.

Проводя обзор работ по изучению НДС грунтов, горных и соленых пород и анализируя их и взяв во внимание свойства фаз названных пород, а также принцип работы вышеназванного математического модели, предложена зависимость между главным тотальным напряжением и коэффициентом пористости. На основе этой зависимости и основного уравнения консолидации, а также гипотезы В.А. Флорина получено разрешающее уравнение и сформулировано математическая постановка начально-краевой задачи теории фильтрационной консолидации соленых грунтов. Исследовано свойство решения этой задачи.

Ключевые слова: закон Генри, закон Дарси-Герсельванова, консолидация, краевая задача.

Summary

Sh. Altynbekov

(South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

BASIC EQUATIONS OF CONSOLIDATION THEORY SALINE SOIL
AND ITS BOUNDARY PROBLEM

On the basis of the laws of continuity of the liquid and solid phases, the balance equation for the gaseous phase Henry's Law and Darcy Gersevanov and, assuming that the dissolved salt (saline) moves with water and gas and foam is not dissolved salt water moving to a solid phase, the basic equation of consolidations saline soils.

In a review of studies on the VAT soil, rock and salt rocks and analyzing them and taking into account the properties of the phases of these species, as well as the principle of the above mathematical models the relationship between the main voltage and total porosity coefficient. On the basis of this relationship and equation-based consolidation, as well as the hypothesis VA Florina received resolving equation and formulated mathematical formulation of the initial-boundary value problems in the theory of filtration consolidation of salty soils. Investigated the properties of the solution of this task is to use literature.

Keywords: Henry's law, Darcy Gersevanov law, consolidation, boundary value problem.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 621.81

М. Е. ЕСКАЛИЕВ, Б. Д. ДЮЗБЕНБЕТОВ

(Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Республика Казахстан)

МАЛЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО
НАГРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Аннотация. Рассматривается вывод системы уравнений малых свободных колебаний оболочки вращения с соответствующими преобразованиями подобных задач о статической деформации оболочки вращения с меридианом произвольной формы. Схематически показаны направления радиальных, осевых, окружных перемещений произвольной точки срединной поверхности оболочки и радиальных, осевых, приведенных сдвигающих усилий, меридиональных изгибающих моментов.

Для решения системы уравнений малых свободных колебаний оболочки вращения использованы численные методы. При исследовании свободных и вынужденных колебаний упругих элементов оболочек вращения полученные дифференциальные уравнения, введя безразмерные параметры приведены к безразмерным. Составлены алгоритм и блок-схема для численной реализации указанной задачи на ПЭВМ, результаты представлены в виде графиков.

Ключевые слова: нагрузка, оболочка, колебания, алгоритм, параметр, перемещение, вязкость.

Тірек сөздер: жүктеме, қабыршақ, тербеліс, алгоритм, параметр, жылжу, тұтқырлық.

Keywords: loading, cover, rotation algorithm, parameters, moving, viscous.

Уравнения, описывающие статические деформации оболочки вращения с меридианом произвольной формы приведены, например, в [1]. Заменяя в указанных уравнениях внешнюю нагрузку суммой интенсивностей сил инерции и сил вязкого трения, получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую вынужденные колебания оболочки вращения с меридианом произвольной формы:

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{\mu \cos \theta}{r} u_r - \frac{\mu \cos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \sin \theta \cdot g + \frac{1-\mu^2}{Eh} \cos^2 \theta \cdot Q_r + \frac{1-\mu^2}{Eh} \sin \theta \cos \theta \cdot Q_z$$
$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\mu \sin \theta}{r} u_r - \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \cos \theta \cdot g + \frac{1-\mu^2}{Eh} \sin \theta \cos \theta \cdot Q_r + \frac{1-\mu^2}{Eh} \sin^2 \theta \cdot Q_z ;$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial s} &= -\frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} v - \frac{h^2 \sin \theta}{3r^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi} + \frac{2(1+\mu)}{Eh} \cdot S^*; \\
 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} &= \frac{\mu \sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{\mu \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} - \frac{\mu \sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\mu \cos \theta}{r} \mathcal{G} + \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} \cdot M_1; \\
 \frac{\partial Q_r}{\partial s} &= \frac{Eh}{r^2} \cdot u_r + \frac{Eh^3 \sin^2 \theta}{12 r^4} \cdot \frac{\partial^4 u_r}{\partial \varphi^4} - \frac{Eh^3 \sin \theta \cos \theta}{12 r^4} \cdot \frac{\partial^4 u_z}{\partial \varphi^4} + \frac{Eh}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{Eh^3 \sin^2 \theta}{12 r^4} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \\
 &\quad - \frac{Eh^3 \sin \theta \cos \theta}{12 r^3} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \varphi^2} - \frac{(1-\mu) \cos \theta}{r} \cdot Q_r + \frac{\mu \sin \theta}{r} \cdot Q_z - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{\mu \sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_1}{\partial \varphi^2} + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_r}{\partial t} - q_r; \\
 \frac{\partial Q_z}{\partial s} &= -\frac{Eh}{12} \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^4} \cdot \frac{\partial^4 u_r}{\partial \varphi^4} + \frac{Eh^3 \cos^2 \theta}{12 r^4} \cdot \frac{\partial^4 u_z}{\partial \varphi^4} - \frac{Eh^3}{6(1+\mu)r^4} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{Eh^3 \sin \theta \cos \theta}{12 r^4} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \\
 &\quad + \frac{Eh^3 [2 + (1+\mu) \cos^2 \theta]}{12(1+\mu)r^3} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos \theta}{r} \cdot Q_z - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{\mu \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_1}{\partial \varphi^2} + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_z}{\partial t} - q_z; \\
 \frac{\partial S^*}{\partial s} &= -\frac{Eh}{r^2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{Eh^3 \sin^2 \theta}{12 r^4} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial \varphi^3} - \frac{Eh^3}{12 r^4} \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta}{\partial \varphi^3} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial \varphi^3} - \frac{Eh}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{Eh^3 \sin \theta \cos \theta}{12 r^3} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi} - \\
 &\quad - \frac{\mu \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial Q_r}{\partial \varphi} - \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial Q_z}{\partial \varphi} - \frac{2 \cos \theta}{r} \cdot S^* - \frac{\mu \sin \theta}{r^2} \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial t} - q_v; \\
 \frac{\partial M_1}{\partial s} &= -\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{Eh^3 [2 + (1+\mu) \cos^2 \theta]}{12(1+\mu)r^3} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{Eh^3 \sin \theta \cos \theta}{12 r^3} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \\
 &\quad + \frac{Eh^3}{12} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \cdot \mathcal{G} - \frac{Eh^3}{6(1+\mu)r^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \cdot Q_r - \cos \theta \cdot Q_z - \frac{h^2 \sin \theta}{3r^2} \frac{\partial S^*}{\partial \varphi} - \frac{(1-\mu) \cos \theta}{r} \cdot M_1;
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_r(\varphi, s, t); \quad u_z = u_z(\varphi, s, t); \quad v = v(\varphi, s, t); \\
 \mathcal{G} &= \mathcal{G}(\varphi, s, t); \quad Q_r = Q_r(\varphi, s, t); \quad Q_z = Q_z(\varphi, s, t); \\
 S^* &= S^*(\varphi, s, t); \quad M_1 = M_1(\varphi, s, t); \quad q_r = q_r(\varphi, s, t); \quad q_z = q_z(\varphi, s, t); \quad q_v = q_v(\varphi, s, t);
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь введены следующие обозначения (рисунок 1а,б): u_r - радиальное перемещение; u_z - осевое перемещение; v - окружное перемещение произвольной точки срединной поверхности оболочки; \mathcal{G} - угол поворота нормали к срединной поверхности в меридиональной плоскости; Q_r - радиальное усилие; Q_z - осевое усилие; S^* - приведенное сдвигающее усилие в произвольной точке оболочки, отнесенные к единице длины параллели; M_1 - меридиональный изгибающий момент в произвольной точке оболочки, отнесенный к единице длины параллели; s - длина дуги меридиана оболочки, отсчитываемая от внешнего контура жесткого центра; φ - угол между начальным меридианом и меридианом, проходящим через произвольную точку срединной поверхности; θ - угол наклона нормали недеформированной срединной поверхности к оси оболочки; r - радиус параллельного круга; h - толщина оболочки; ρ - плотность материала; μ - коэффициент Пуассона; E - модуль упругости материала оболочки; α - коэффициент вязкого трения; t - время; q_r, q_z, q_v - интенсивности сил инерции и давления, соответственно, в радиальном, осевом и окружном направлении.

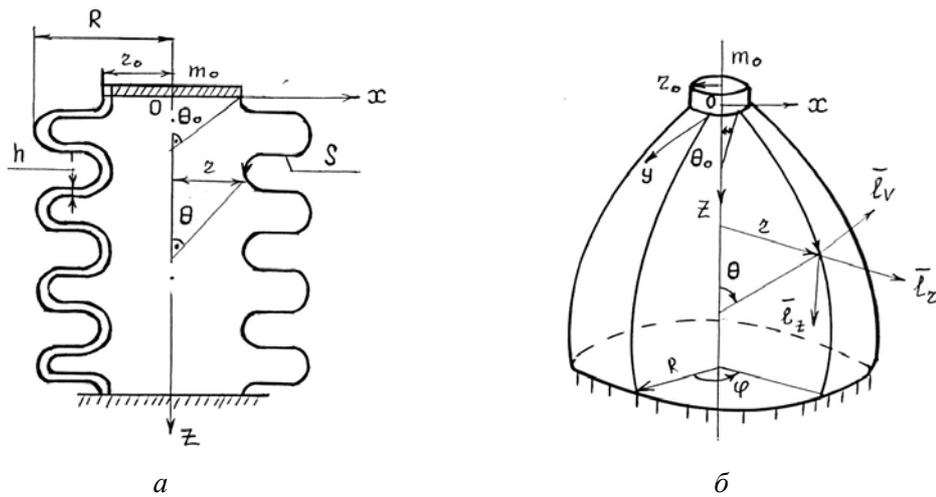


Рисунок 1

Для решения системы (1) используем численные методы [2-4], так как аналитическое решение практически невозможно. Решения уравнений (1) при гармоническом возмущении могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
 u_r(\varphi, z, t) &= (u_{rks}^{(k)} \sin pt + u_{rkc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 u_z(\varphi, z, t) &= (u_{zks}^{(k)} \sin pt + u_{zkc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 v(\varphi, z, t) &= (v_{ks}^{(k)} \sin pt + v_{kc}^{(k)} \cos pt) \sin k\varphi; \\
 g(\varphi, z, t) &= (g_{ks}^{(k)} \sin pt + g_{kc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 Q_r(\varphi, z, t) &= (Q_{rks}^{(k)} \sin pt + Q_{rkc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 Q_z(\varphi, z, t) &= (Q_{zks}^{(k)} \sin pt + Q_{zkc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 S^*(\varphi, z, t) &= (S_{ks}^{*(k)} \sin pt + S_{kc}^{*(k)} \cos pt) \sin k\varphi; \\
 M_1(\varphi, z, t) &= (M_{1ks}^{(k)} \sin pt + M_{1kc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi;
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

В выражениях (3) нижний и верхний индексы “ k ” при составляющих перемещений и усилий используется для обозначения соответственно симметричных и кососимметричных относительно начального меридиана величин.

Аналогично может быть представлена и нагрузка, действующая на оболочку:

$$\begin{aligned}
 q_r(\varphi, z, t) &= (q_{rks}^{(k)} \sin pt + q_{rkc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 q_z(\varphi, z, t) &= (q_{zks}^{(k)} \sin pt + q_{zkc}^{(k)} \cos pt) \cos k\varphi; \\
 q_v(\varphi, z, t) &= (q_{vks}^{(k)} \sin pt + q_{vkc}^{(k)} \cos pt) \sin k\varphi.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Компоненты решений и нагрузок, входящие в правые части выражений (3) и (4), являются функциями s .

В этих выражениях: p - частота изменения гармонического возмущения; k - половинное значение числа узловых меридианов (число волн в окружном направлении).

Подставляя поочередно выражения (2), (3) и (4) в систему (1), и приравняв члены при $\sin pt$ и $\cos pt$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Учитывая, что при исследовании свободных и вынужденных колебаний оболочечных упругих элементов эти уравнения целесообразно представить в безразмерном виде и введя следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{s_1 - s}{R}; \quad y_1 = \frac{u_{rks}^{(k)}}{R}; \quad y_2 = \frac{u_{rkc}^k}{R}; \quad y_3 = \frac{u_{zks}^{(k)}}{R}; \quad y_4 = \frac{u_{zkc}^{(k)}}{R}; \quad y_5 = \frac{v_{ks}^{(k)}}{R}; \quad y_6 = \frac{v_{kc}^{(k)}}{R}; \\
 y_7 &= \frac{g_{ks}^{(k)}}{2\pi}; \quad y_8 = \frac{g_{kc}^k}{2\pi}; \quad y_9 = \frac{Q_{rks}^{(k)}}{Eh_0}; \quad y_{10} = \frac{Q_{rkc}^{(k)}}{Eh_0}; \quad y_{11} = \frac{Q_{zks}^{(k)}}{Eh_0}; \quad y_{12} = \frac{Q_{zkc}^{(k)}}{Eh_0}; \\
 y_{13} &= \frac{S_{ks}^{*(k)}}{Eh_0}; \quad y_{14} = \frac{S_{kc}^{*k}}{Eh_0}; \quad y_{15} = \frac{M_{1ks}^{(k)}}{Eh_0^2}; \quad y_{16} = \frac{M_{1kc}^{(k)}}{Eh_0^2}; \quad \lambda = \frac{p}{p_0}; \quad l = \frac{r}{R};
 \end{aligned} \tag{5}$$

где R - габаритный радиус оболочки вращения, а p_0, h_0 - нормирующие множители частоты и толщины оболочки, выбор величины которых диктуется конкретными условиями решаемой задачи окончательно получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд компонентов перемещений и сил в следующем векторном виде:

$$\frac{d}{dx} \bar{y} = A\bar{y} + \bar{q}, \tag{6}$$

где \bar{y} - вектор состояния с компонентами y_1, y_2, \dots, y_{16} ; A - квадратная матрица переменных коэффициентов; \bar{q} - вектор нагрузки.

При рассмотрении свободных колебаний без вязкого трения число уравнений системы (6) может быть сокращено с 16 до 8, так как в этом случае система уравнений (6) распадается на две одинаковые системы уравнений. При осесимметричных колебаниях ($k = 0$) число уравнений системы (6), как видно из (3), сокращается до 12, следовательно, для незатухающих свободных колебаний до 6. При крутильных колебаниях ($k = 0$) число уравнений системы (6) сокращается до 4, а для незатухающих свободных колебаний до 2.

Приняв в (6) $\alpha = 0, q_{rks}^{(k)} = q_{rkc}^{(k)} = 0, q_{zks}^{(k)} = q_{zkc}^{(k)} = 0, q_{vks}^{(k)} = q_{vkc}^{(k)} = 0$, получим систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую малые свободные колебания (без затухания) предварительно нагруженной оболочки:

$$\frac{d}{dx} \bar{y} = A\bar{y} \tag{7}$$

Как было уже отмечено выше, система (7) содержит для $k = 1, 2, 3, \dots$ восемь, для осесимметричных колебаний при $k = 0$ шесть, а для крутильных колебаний при $k = 0$ лишь два уравнения, составляющих однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработана методика расчета системы уравнений (7) с граничными условиями и была составлена программа расчета собственных частот, блок-схема которой приведена ниже и рассчитаны собственные частоты, бесшовного и сварного сильфонов (рисунок 2а, б).

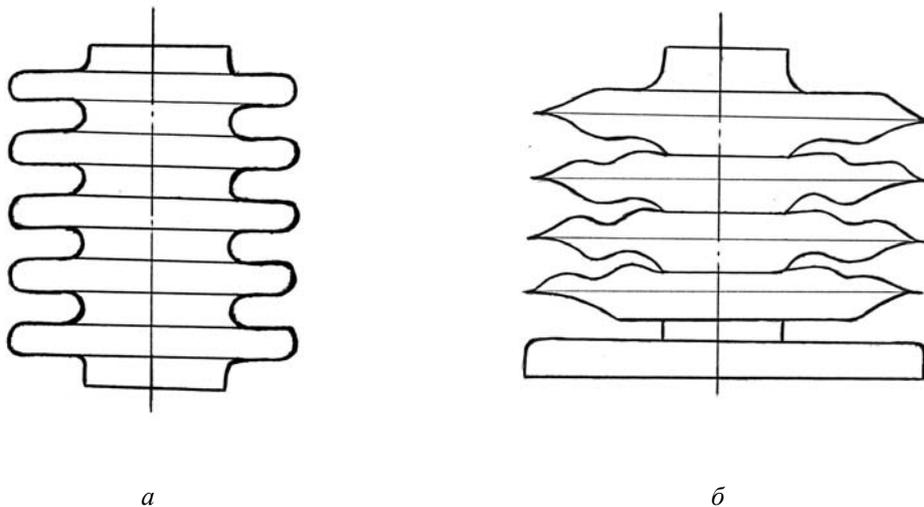
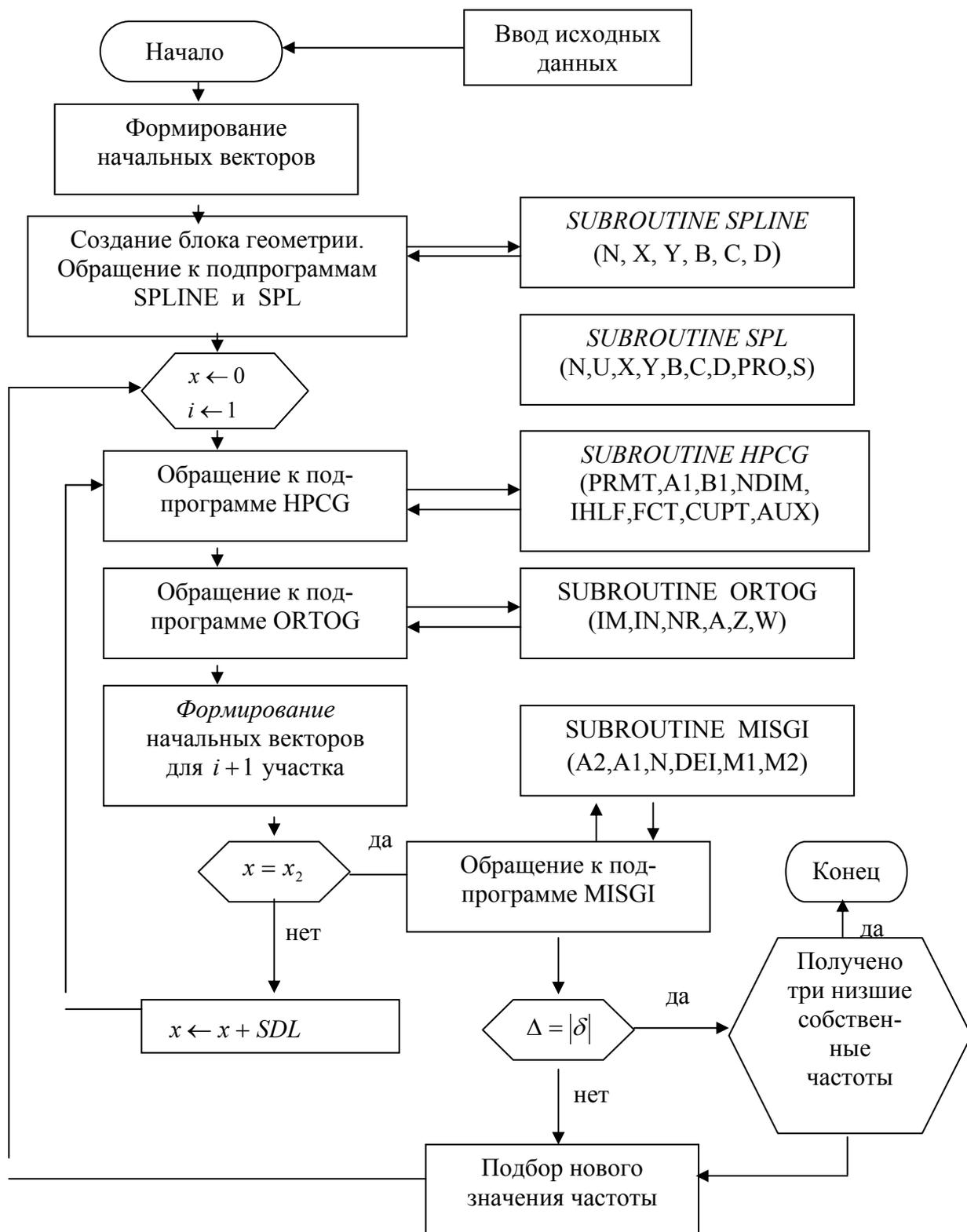


Рисунок 2



Рамки исследований ограничены определением первых двух собственных частот для сварного и бесшовного сильфонов, так как в процессе исследований выяснилось, что они охватывают частотные диапазоны для оболочек такого класса.

В качестве материала для рассматриваемых сальфонов выбрана сталь марки 65 (ГОСТ 14959-69) со следующими физико-механическими свойствами:

$$\sigma_B = 1000 \text{ Мпа}; \quad \sigma_T = 800 \text{ Мпа}; \quad E = 210 \text{ Гпа}; \quad \rho = 7,81 \text{ Г/см}^3.$$

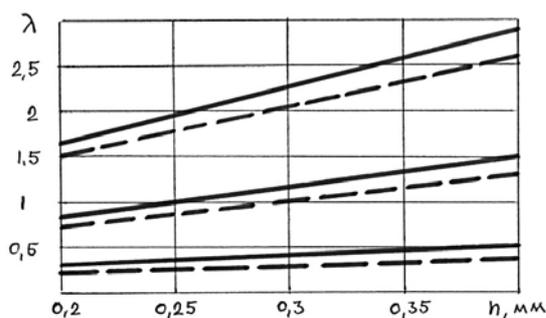
При выполнении всех численных расчетов принято:

для бесшовного сальфона: $p_0 = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$; $m_0 = 1 \text{ г}$; $R = 18,9 \text{ мм}$; $R_0 = 12,5 \text{ мм}$; $h_0 = 0,3 \text{ мм}$; число точек ортогонализации $N = 200$; число гофров $n = 5$.

для сварного сальфона: $p_0 = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$; $m_0 = 1 \text{ г}$; $R = 10,6 \text{ мм}$; $R_0 = 6,1 \text{ мм}$; $h_0 = 0,3 \text{ мм}$; $N = 200$; $n = 5$.

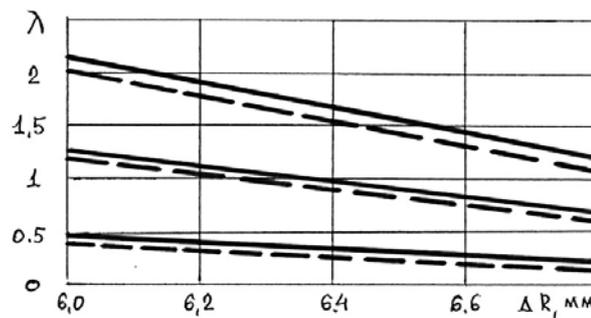
Числовые расчеты проведены на ПЭВМ с применением арифметики одинарной точности, которая дает значительный выигрыш машинного времени по сравнению с арифметикой двойной точности практически без потери точности результатов (максимальное расхождение результатов при пробных расчетах составило 0,3%).

Пробные расчеты показали также, что величину абсолютной точности ε при интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) по численному методу Хемминга достаточно принять равной 10^{-5} . На рисунке 3 показана зависимость первых трех собственных частот бесшовного сальфона от толщины h , где $0,2 \text{ мм} \leq h \leq 0,4 \text{ мм}$, на рисунке 4 показана зависимость первых трех собственных частот бесшовного сальфона толщиной $h = 0,3 \text{ мм}$ от глубины гофрировки $\Delta R = R - R_0$, где $6 \text{ мм} \leq \Delta R \leq 6,8 \text{ мм}$.



Для $k = 0$ – сплошные линии, для $k = 1$ – штриховые линии

Рисунок 3

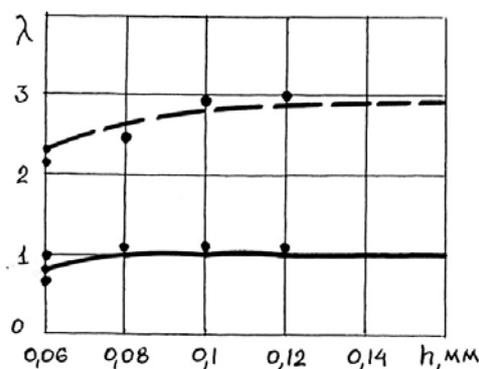


Для $k = 0$ – сплошные линии, для $k = 1$ – штриховые линии

Рисунок 4

Сплошными линиями показаны зависимости для осесимметричных колебаний относительно нулевого меридиана ($k = 0$), штриховыми линиями показаны зависимости для кососимметричных колебаний относительно нулевого меридиана ($k = 1$).

На рисунке 5 показана зависимость первых двух собственных частот сварного сальфона от толщины h , при осесимметричных колебаниях ($k = 0$), где $0,06 \text{ мм} \leq h \leq 0,16 \text{ мм}$, сплошная линия – первая частота, штриховая – вторая, точки – частоты, определенные экспериментально.



Сплошная линия – первая частота, штриховая – вторая, точки – частоты, определенные экспериментально

Рисунок 5

Из рисунков 3, 4 видно, что все три рассматриваемые первые частоты имеют одинаковый характер изменения как в зависимости от толщины, так и в зависимости от глубины гофрировки. А именно: с увеличением толщины их величины увеличиваются, причем линейно, что объясняется увеличением жесткости сильфона. С увеличением глубины гофрировки, т.е. с увеличением внешнего радиуса их величины уменьшаются, что объясняется уменьшением жесткости и увеличением массы.

Из рисунка 5 видно, что при малой толщине сварного сильфона в связи с резким уменьшением его жесткости соответственно резко уменьшаются собственные частоты и их изменения происходят нелинейно.

Зависимости приведенные на рисунках 3–5, могут быть использованы при разработке элементов, предназначенных для тех или иных конкретных условий эксплуатации. При этом существенно сокращается объем необходимых экспериментальных работ. Проектирование оболочечных упругих элементов, работающих в динамических режимах, до настоящего времени велось чисто экспериментальным путем, в то время как меняя геометрические размеры сильфона, можно удовлетворить требованиям в широком диапазоне задаваемых рабочих характеристик, в данном случае собственных частот. Кроме того, изложенные соображения помогут также избежать излишнего многообразия профилей сильфона.

Основными геометрическими параметрами, подлежащими определению в процессе проектирования, следует считать внешний радиус, толщину, глубину гофрировки. Как видно из рисунков 3–5, основные геометрические параметры в некоторых разумных пределах можно изменять собственные частоты элемента в довольно широком диапазоне, что очень важно при разработке элементов, работающих в динамических режимах и предназначенных для тех или иных устройств. В частности, меняя основные геометрические параметры сильфонного элемента акселерометра, рабочий диапазон частот которого расположен в первой дорезонансной зоне, можно добиться расширения рабочего диапазона путем увеличения значения первой собственной частоты. В данном примере этого можно добиться, увеличивая толщину и уменьшая глубину гофрировки или внешний радиус.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
- 2 Нарайкин О.С. Численный анализ вынужденных колебаний оболочек вращения // Изв. вузов. Машиностроение. – 1977. – № 7. – С. 6-9.
- 3 Нарайкин О.С., Шимырбаев М.К., Дюзбенбетов Б.Д. Расчет динамических характеристик сильфонов // Вестник АН КазССР. Фылым. – 1991. – № 8. – С. 50-54.
- 4 Ескалиев М.Е., Дюзбенбетов Б.Д. Вывод уравнений малых свободных колебаний предварительно нагруженный оболочки вращения // Хабаршы-Вестник КАЗГосЖенПи. Серия естествозн. – 2009. – № 1. – С. 67-71.

REFERENCES

- 1 Biderman V.L. Mehanika tonkostennykh konstrukuiy. M.: Mashinostroenie, 1977. 488 s.
- 2 Naraikin O.S. Chislennyi analiz vynuzhdennykh kolebaniy obolochek vrascheniya. Izv. vuzov. Mashinostroenie. 1977. N 7. S. 6-9.
- 3 Naraikin O.S., Shimirbaev M.K., Duzbenbetov B.D. Raschet dinamicheskikh harakteristik sil'fonov // Vestnik AN KazSSR. Fylym. 1991. N 8. S. 50-54.
- 4 Eskaliev M.E., Duzbenbetov B.D. Vyvod uravneniy malykh svobodnykh kolebaniy predvaritel'no nagruzhenniy obolochki vrascheniya. Habarshy-Vestnik KAZGosZhenPi. Seriya estestven. 2009. N 1. S. 67-71.

Резюме

М. Е. Есқалиев, Б. Д. Дюзбенбетов

(Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

АЛДЫН АЛА ЖҮКТЕЛГЕН СЕРППМДІ ҚАБЫРШАҚ АЙНАЛУЫНЫҢ ШАҒЫН ЕРКІН ТЕРБЕЛІСТЕРІ

Статикалық деформация жағдайындағы еркін формадағы меридианды айналу қабыршағының есебіндегі сыяқты сәйкес түрлендірулерді жасап, айналу қабыршағының шағын еркін тербелістерінің теңдеулер жүйесін алу жолы қарастырылған. Схема түрінде қабыршақтың орталық бетіндегі еркін нүктенің радиалдық, өстік, реттелген ығысу әсерлері және меридиональдық бүгілу моменттері көрсетілген.

Айналу қабыршағының шағын еркін тербелістерінің теңдеулер жүйесін шешуде сандық әдістер пайдаланылған. Айналу қабыршағының серпімді элементтерінің еркін және еріксіз тербелістерінің дифференциалдық теңдеулері өлшемсіз параметрлерді енгізу арқылы өлшемсіздікке келтірілген. ПЭВМ-де сандық есептеулер жүргізу үшін жоғарыда көрсетілген есептің алгоритмі және блок-схемасы құрылып, нәтижелері графиктер түрінде берілген.

Тірек сөздер: жүктеме, қабыршақ, тербеліс, алгоритм, параметр, жылжу, тұтқырлық.

Summary

M. Ye. Yeskaliyev, B. D. Dewzbenbetov

(Kazakh State Teacher Training University, Almaty, Republic of Kazakhstan)

SMALL FREE VIBRATIONS PRELOADED ROTATING SHELL

This article deals with deduction of the few free oscillate cover rotation standard systems in accordance with conversions such themes statistic cover deformation rotation with meridian free forms. Diagrammatic directions are shown in radial, axle, circle movement free point in the medium surface cover and radial, axle setting in motion meridian bend moments.

In order to solve the free oscillate cover rotation standard system counting method was shown. In researching of free and forced oscillate elastic elements cover rotation were taken differential standards draw one size parameters to one size. Algorithm and block scheme were made to realize the number to the shown theme in PECM, results are given in graphics.

Keywords: loading, cover, rotation algorithm, parameters, moving, viscous.

Поступила 15.01.2014г.

UDC 532.516

K. B. JAKUPOV

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan)

RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS

Annotation. Physically substantiated dependence of stress tensor components of velocity gradient arises from the laws of friction, theoretical substantiation is associated with displacement tensor. Adequate simulation of viscous fluid depends on conformity of the flow shear and normal strains to the value of the velocity components in each point.

Keywords: liquid viscosity, pressure, laminar, turbulence.

Тірек сөздер: сұйықтық, тұтқырлық, кернеу, ламинарлық, турбуленттік.

Ключевые слова: жидкость, вязкость, напряжение, ламинарное, турбулентность.

1. Rheological communication arising from the laws of friction. In the course of physics and theoretical mechanics friction law for small velocities adopted in the form of $\vec{F}_{mp} = -kv\vec{e}_v = -k\vec{v}$, to high velocities is generalized in the form of a quadratic dependence on the velocity modulus $\vec{F}_{mp} = -k_2v^2\vec{e}_v$ [1]. Shear strains $\pi_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ (Newton's law of friction) follows from the law for small velocities $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$. It makes sense distribution of this fact to degree formula of friction $\vec{F}_{mp} = -k_m v^m \vec{e}_v$, $m = 1, 2, 3, \dots$ and setting of quasi-parabolic properties of obtained in this case dynamics equations of viscous fluid.

Let the drag force of particle is proportional to the degree $m = 1,2,3,\dots$ speed in a given direction. Suppose that the friction force on the layer y_1 is $\vec{F}_1 = -k_m u_1^m \vec{i}$, respectively, $\vec{F}_2 = -k_m u_2^m \vec{i}$ on layer y_2 . Next, consider the increment $\delta\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = -k_m u_2^m \vec{i} + k_m u_1^m \vec{i} = -k_m \delta u^m \vec{i}$, $\delta\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{i}$, $\delta\vec{F} = \vec{f} \delta y$, \vec{f} - linear force density $\delta\vec{F}$, $\vec{f} \uparrow \uparrow \vec{\pi}_{yx}$, therefore, $\vec{f} = k' \vec{\pi}_{yx}$, $\delta\vec{F} = k' \vec{\pi}_{yx} \delta y$, $\vec{\pi}_{yx} \uparrow \downarrow \vec{i}$, $\vec{\pi}_{yx} = -\pi_{yx} \vec{i}$, $k' \vec{\pi}_{yx} \delta y = -k_m \delta u^m \vec{i}$.)

Resulting equalities $-k' \pi_{yx} \delta y = -k_m \delta u^m$, $\pi_{yx} = \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta y}$, $\mu_m = \frac{k_m}{k'}$, in the limit give shear stress

$$\pi_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta y} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial y}, \text{ similar conclusions:}$$

$$\pi_{xy} = \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial x}, \pi_{zy} = \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial z}, \pi_{yz} = \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial y}, \pi_{xz} = \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial x}, \pi_{zx} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial z},$$

of which at degrees $m = 1$ obtain formulas of Newton's law of friction.

Similar arguments sets formula of viscous component $\vec{\pi}_{xx}^o$ of the normal stress $\vec{\pi}_{xx} = -p \vec{i} + \vec{\pi}_{xx}^o$. Let the friction forces equal at point x_1 $\vec{F}_1 = -k_m u_1^m \vec{i}$ and $\vec{F}_2 = -k_m u_2^m \vec{i}$ at point $x_2 = x_1 + \delta x$. Increments are compiled: $\delta\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = -k_m u_2^m \vec{i} + k_m u_1^m \vec{i} = -k_m \delta u^m \vec{i}$. Through a linear density of $\delta\vec{F} = \vec{\varphi} \delta x$, $\vec{\varphi} = k'' \vec{\pi}_{xx}^o$ we have $\delta\vec{F} = k'' \vec{\pi}_{xx}^o \delta x$, $k'' \vec{\pi}_{xx}^o \delta x = -k_m \delta u^m \vec{i}$. By definition, $\vec{\pi}_{xx}^o \uparrow \downarrow \vec{i}$. This expression is scalar multiplied by the unit vector \vec{i} : $(k'' \vec{\pi}_{xx}^o, \vec{i}) \delta x = -k_m (\delta u^m \vec{i}, \vec{i})$. The result is

$$(\vec{\pi}_{xx}^o, \vec{i}) \delta x = |\vec{\pi}_{xx}^o| \cdot |\vec{i}| \cos 180^\circ = -\pi_{xx}^o, -k_m (\delta u^m \vec{i}, \vec{i}) = -k_m \delta u^m |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cos 0^\circ = -k_m \delta u^m$$

Equalities $-k'' \pi_{xx}^o \delta x = -k_m \delta u^m$, $\pi_{xx}^o = \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta x}$, $\mu_m = \frac{k_m}{k''}$, in the limit give formulas of the normal stresses components:

$$\pi_{xx}^o = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta x} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial x}, \pi_{yy}^o = \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial y}, \pi_{zz}^o = \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial z}, \text{ QED.}$$

Obviously, full normal stresses are the sum of this components and hydrostatic pressure:

$$\pi_{xx} = -p + \pi_{xx}^o = -p + \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial x}, \pi_{yy} = -p + \pi_{yy}^o = -p + \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial y}, \pi_{zz} = -p + \pi_{zz}^o = -p + \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial z}$$

This justification of normal stresses makes unnecessary hypothesis of the pressure [2].

At degrees $m = 1$ formula obtained normal stresses imposed by Navier in 1822.

The elements of the matrix of displacement \vec{S} are the 1st derivative of the Taylor's series:

$$v_i^m(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = v_i^m(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} \delta x_j, \quad i = 1,2,3, \quad \vec{S} = \left\{ \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1,2,3}$$

Obvious proportionality of derived the stress tensor components to the matrix of displacement components

$$\pi_{ji} = -p \delta_{ij} + \mu_m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j}, \quad i, j = 1,2,3, m = 1;3;5;7;9;\dots$$

which is the theoretical foundation of the power law of friction.

2. On the ineffectiveness of the Newton's law of friction in the modeling of turbulent flows. As

shown in the preceding paragraph, the Newton's law of friction $\pi_{yx(u)} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ is a consequence of friction

for small velocities $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, therefore equation, $\rho[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v}] + \nabla p = \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{F}$, based on the Newton's stress tensor $\pi_{\mu} = -pE + \mu\vec{S}$, is a model of low-rate laminar flows, and can not be a model for high-rate flows. As is well known (see [3]), the Stokes' law of friction $\pi_{yx(c)} = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$ and the Stokes' stress tensor $\pi_c = -[p + (2/3\mu - \mu')div\vec{v}]E + \mu\dot{S}$, according to Landau, is a hypothesis, as they have no physical basis, because there is no matching friction force $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, and strain rate tensor \dot{S} is part of the displacement tensor $\vec{S} = \dot{S} + \hat{S}$ for degree $m = 1$, which is another proof of the fallacy of the Stokes' hypothesis, therefore, the Navier-Stokes' equations.

3. Adequate approach to modeling viscous flows. It is quite obvious and does not require proof that in the viscous fluid flows, especially in turbulent or intermittent, the speeds are changed in magnitude and direction, therefore, frictional forces will be variable at the points of the stream

$$\vec{F}_{mp} = -k_m v^m \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v\vec{e}_v, m > 0, m = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

For example, the longitudinal velocity is many times larger than the transverse velocity component in longitudinal streaming flow of the plate: $|u| \gg |w|, |u| \gg |v|$, thus in the direction of axis \vec{i} must run one of the friction

$$\vec{F}_{mp} = -ku\vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_3u^3\vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_5u^5\vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_7u^7\vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_9u^9\vec{i}$$

etc., and in the transverse directions with the laws of other power-law

$$\vec{F}_{mp} = -kv\vec{j}, \vec{F}_{mp} = -k_3v^3\vec{j}, \vec{F}_{mp} = -k_5v^5\vec{j}, \dots, \vec{F}_{mp} = -kw\vec{k}, \vec{F}_{mp} = -k_3w^3\vec{k}, \vec{F}_{mp} = -k_5w^5\vec{k}, \dots,$$

etc., which should be taken into account in the formulas tangential and normal stresses

$$\pi_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3, m_i = 1; 3; 5; 7; 9; \dots$$

(δ_{ij} Kronecker delta) and in the dynamics equations.

4. Universal model of the dynamics of liquid and gas. Thus, from the laws of friction with different degrees refractive

$$\vec{F}_{mp} = -k_{m_v} v^{m_v} \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v\vec{e}_v, m_v > 0$$

follow the stresses with the corresponding degrees

$$\pi_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3, m_i = 1; 3; 5; 7; 9; \dots$$

and equations

$$\rho(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}), i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho c_v (\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}) - p div \vec{v} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Degree must be odd positive integers to belong quasi-parabolic type equations. Of odd powers of the property lost and the initial-boundary value problems for these equations are incorrect.

These complexes are formed in dimensionless variables:

$$\frac{1}{Re_{m_i}} = \frac{\mu_{m_i} U^{m_i-2}}{\rho L} = \frac{\mu}{\rho UL} \frac{\mu_{m_i} U^{m_i-1}}{\mu} = \frac{1}{Re} Ks_{m_i},$$

$$Ks_{m_i} = \frac{\mu_{m_i} U^{m_i-1}}{\mu} = \alpha \left(\frac{U}{m_i}\right)^{m_i-1} \cdot U^{m_i-1}$$

Euler equation of ideal gas and fluid obtained from universal equations with degrees $m_i = 0 \forall i, Ks_i = 0$. In ideal gas and fluid viscosity is zero (no molecular transport) confirms the validity of the following formula:

$$\mu_{m_i} = \alpha \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \mu, \quad \mu_{m_i=0} = \alpha \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \mu = \alpha \left(\frac{1}{0}\right)^{0-1} \mu = \alpha \left(\frac{0}{1}\right) \mu = 0, \mu_0 = 0.$$

Equation with the stress tensor can be obtained from Newton's equations with exponents $m_i = 1 \forall i$ and $\mu_1 = \mu$ viscosity coefficient.

Equality $\alpha = 1 \left(\frac{ce\kappa}{m}\right)^{m_i-1}$ follows from the formula $\mu_{m_i} = \alpha \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \mu$ with $m_i = 1: \mu_1 = \alpha \left(\frac{1}{1}\right)^{1-1} \mu = \alpha \mu, m_i = 1: \mu_1 = \alpha \left(\frac{1}{1}\right)^{1-1} \mu = \alpha \mu$, since $\mu_1 = \mu$.

5. Comparison with the experimental averaged velocity profile of turbulent flow in a circular tube and areas of applicability of power rheological law. Axial velocity of the one-dimensional steady flow of a viscous fluid in a circular tube is obtained from the equation in cylindrical coordinates

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu_m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z^m}{dr} \right), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{dp}{dz} = const < 0,$$

The solution has the form:

$$V_z^m = -\frac{1}{4\mu_m} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{V_z}{\max V_z} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Figures 1–5 are paintings comparison with the averaged velocity of the turbulent flow (indicated by asterisks), given in the textbook [2] p.670. Draws attention to Figure 1, where the velocity profiles are plotted strength laminar flow in a pipe, the corresponding friction law of Newton and solving the Navier-Stokes equations $m = 1, \mu_1 = \mu$. Averaged turbulent profile matches to Reynolds number $Re = 3\,240\,000$. Figures 2 and 3 shows the comparison of the theoretical values for $m = 7, m = 9$ with the experimental turbulent profile. There is an almost perfect match.

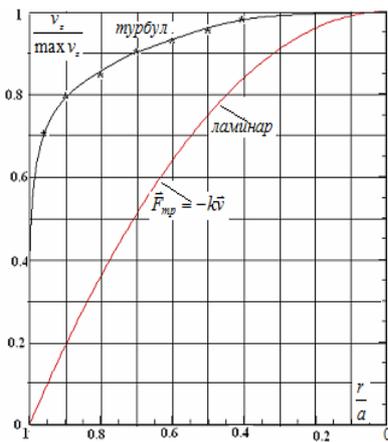


Figure 1

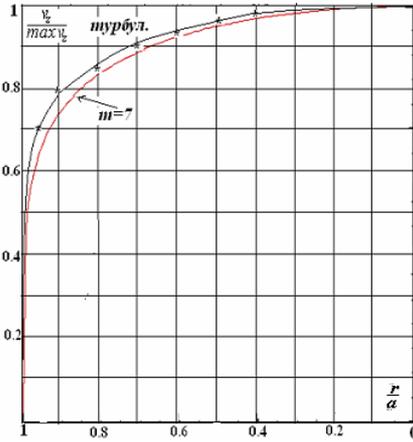


Figure 2

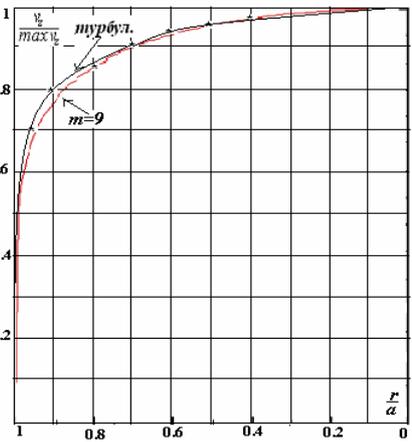


Figure 3

Thus, the most coincident with the experimental results are obtained with the increase of the degrees $m = 7, m = 9$. Obviously, it makes sense simulate certain turbulent flows by varying the dimensionless parameters of these rheological laws.

REFERENCES

1 Saveljev I.V. Kurs obschey fiziki. T. 1. M.: Hauka, 1977.
 2 Loitsyanskiy L.G. Mehanika zhidkosti i gaza. M.: Hauka, 1973.
 3 Landau L.D., Lifschits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika. M.: Hauka, 1973. 742 c.

- 4 Dzhakupov K.B. O gipoteze Stoksa i reologicheskikh zakonah. Almaty: “Fylym Ordasy”, 2013. 147 c.
5 Turbulentnost' (principy i primeneniya). M.: Mir, 1980. 585 c.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Савельев И.В. Курс общей физики. – Т. 1. – М.: Наука, 1977.
2 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.
3 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1973. – 742 с.
4 Джакупов К.Б. О гипотезе Стокса и реологических законах. – Алматы: “Ғылым Ордасы”, 2013. – 147 с.
5 Турбулентность (принципы и применения). – М.: Мир, 1980. – 585 с.

Резюме

К. Б. Жақын-тегі

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ТҮТҚЫРЛЫ СҰЙЫҚТЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ РЕОЛОГИЯЛЫҚ ЗАҢДАРЫ

Кернеулер тензорының компоненттері үйкеліс заңдарынан тәуелділіктері дәлелденген, соған сәйкес осындай байланыстарды теоретикалық негіздеуі ығысу тензорымен орнатылған. Тұтқырлы сұйықтықтың ағыстарын нақты үлгілеу ағыстың әрбір нүктесінде жанама және тік кернеулердің осы нүктедегі жылдамдықтың шамасымен байланыстығына тәуелді, яғни дифференциалдық теңдеулер құбылысты болады.

Тірек сөздер: сұйықтық, тұтқырлық, кернеу, ламинарлық, турбуленттік.

Резюме

К. Б. Жакытов

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Физически обоснована зависимость тензора напряжений градиента скорости, вытекает из законов трения, теоретическое обоснование связано с объемом тензора. Адекватное моделирование вязкой жидкости зависит от соответствия потока сдвига и штаммы нормальной стоимости компонент скорости в каждой точке.

Ключевые слова: жидкость, вязкость, напряжения, ламинарное, турбулентность.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 539.3

Ш. М. МАМАЕВ

(Московский физико-технический институт, Москва, Российская Федерация)

ВЛИЯНИЕ МЕСТА ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА УРОВНИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ УДАРЕ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Аннотация. Методом бихарактеристик численно решена в трехмерной постановке задача о локальном поперечном ударе по цилиндрической оболочке, один конец которой закреплен, а другой – свободен. Исследуется эффект взаимного влияния отраженных от закрепленной границы волн напряжений и динамических возмущений от локальных ударов по различным площадкам. На основе анализа численных результатов устанавливаются ожидаемые области разрушения и их причины.

Ключевые слова: метод бихарактеристик, цилиндрическая оболочка, нормальное окружное напряжение, осевое напряжение, радиальное перемещение, разрушение.

Тірек сөздер: бихарактеристика әдісі, цилиндрлік қабықша, нормаль айналма кернеу, осьтік кернеу, радиалдық жылжу, қирау.

Keywords: method bicharacteristics, cylindrical shell, normal hoop stress, axial stress, radial displacement, destruction.

Одним из важных функциональных назначений корпусов технических сооружений является удержание в их пределах внезапно разрушившихся при критических ситуациях внутренних элементов конструкции. Такие события, как правило, происходят при нарушении по какой-либо причине штатных условий эксплуатации узлов и элементов сооружения. Указанные нерасчетные режимы приводят к внезапному локальному динамическому воздействию на корпус. Например, решение проблемы удержания кожухом рабочей лопатки авиационного двигателя при ее обрыве в пределах двигателя может предотвратить опасные последствия происшествия.

Проблемы напряженности корпусов при локальном воздействии статическими нагрузками и моментами рассматривались во многих работах (см., например, [1, 2] и др.). При динамических нагрузках выполнено множество работ по разработке методики оценки стойкости корпусов удару (см., например, [3, 4] и др.). В [3] численно в двумерной постановке исследуются волновые и откольные явления, возникающие при импульсном нагружении слоистых упругопластических цилиндрических оболочек конечной толщины, подкрепленных с тыльной стороны ребрами жесткости. В [4] рассмотрены волны напряжений, возникающие в полом упругом толстом цилиндре при локальном нагружении, симметричном относительно торцов. Здесь искомые функции разлагались в ряды Фурье по окружной координате и задача сводилась к двумерным нестационарным задачам, которые решались численно сеточными методами. Отмечается, что локальное нагружение, несмотря на малую зону его приложения, не менее опасно для конструкции, чем равномерное нагружение вдоль оси цилиндра. В [5] эта задача рассматривалась в трехмерной постановке, с учетом пластических свойств цилиндра. Исследовано влияние на распространение волн пластических свойств материала цилиндра. Дан обзор некоторых работ по численному моделированию пространственных нестационарных задач. Однако системных исследований по анализу протекания нестационарных процессов, происходящих в теле корпуса при локальном динамическом ударе, явно недостаточно. В [6, 7] методом бихарактеристик [8] решена задача о локальном поперечном ударе по цилиндрической оболочке. Показано, что максимальные напряжения в оболочке при локальном ударе реализуются в области площадки удара и в моменты времени действия нагрузки. В [6] рассматривался случай, когда площадка удара была расположена вдали от закрепленного торца оболочки, что снижало влияние отраженных от границы волн на процессы, имеющие место в области удара. Ниже рассмотрены случаи, когда площадки удара расположены на различных расстояниях от закрепленного торца оболочки. Задача решена с применением разработанной прикладной программы расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек при локальном поперечном ударе [6], основанная на реализации метода бихарактеристик конечно-разностными подходами.

1. Определяющая система уравнений. Система уравнений, описывающая процесс распространения пространственных динамических возмущений в упругой изотропной линейной среде, в цилиндрических координатах $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = z$ в безразмерной форме имеет вид [9]:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 - \sigma_{11,1} - \frac{1}{r}\sigma_{12,2} - \sigma_{13,3} &= \frac{1}{r}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\
 \dot{v}_2 - \sigma_{21,1} - \frac{1}{r}\sigma_{22,2} - \sigma_{23,3} &= \frac{2}{r}\sigma_{21}, \\
 \dot{v}_3 - \sigma_{31,1} - \frac{1}{r}\sigma_{32,2} - \sigma_{33,3} &= \frac{1}{r}\sigma_{31}, \\
 \dot{\sigma}_{11} - c_{11}v_{1,1} - \frac{1}{r}c_{12}v_{2,2} - c_{13}v_{3,3} &= \frac{1}{r}c_{12}v_1, \\
 \dot{\sigma}_{22} - c_{21}v_{1,1} - \frac{1}{r}c_{22}v_{2,2} - c_{23}v_{3,3} &= \frac{1}{r}c_{22}v_1, \\
 \dot{\sigma}_{33} - c_{31}v_{1,1} - \frac{1}{r}c_{32}v_{2,2} - c_{33}v_{3,3} &= \frac{1}{r}c_{32}v_1, \\
 \dot{\sigma}_{12} - s_{12}\left(\frac{1}{r}v_{1,2} + v_{2,1}\right) &= -\frac{1}{r}v_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{23} - s_{23} \left(\frac{1}{r} v_{3,2} + v_{2,3} \right) &= 0, \\ \dot{\sigma}_{31} - s_{31} (v_{1,3} + v_{3,1}) &= 0. \\ \text{Здесь } c_{ij} &= \begin{cases} \lambda + 2\mu & \text{при } i = j, \\ \lambda & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad s_{ij} = \mu\end{aligned}$$

λ , μ – постоянные Ламе, точка над переменной и запятая перед индексом означают соответственно дифференцирование по времени и пространственной переменной. Безразмерные компоненты вектора скорости v_i , тензора напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) определяются через соответствующие размерные величины:

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{l}, \quad t = \frac{\bar{t} \cdot \bar{c}_1}{l}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\rho \cdot \bar{c}_1^2}, \quad v_i = \frac{\bar{v}_i}{\bar{c}_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2)$$

где с чертой обозначены размерные величины, t – время, l – характерная длина, ρ – плотность среды, c_1 – скорость распространения продольной волны.

2. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрическая оболочка толщиной H , внутренним радиусом R , длиной L . Цилиндрическая оболочка в начальный момент времени находится в состоянии покоя

$$v_i = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

В моменты времени $0 \leq t \leq T$ на локальный участок $\Omega = \{x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^1, x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^1\}$ внутренней поверхности $x_1 = R$ оболочки действует нестационарная нормальная к поверхности оболочки нагрузка $f(x_2, x_3; t)$

$$\sigma_{11} = \begin{cases} f(x_2, x_3; t) & \text{при } t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases} \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad (4)$$

где T – время действия нагрузки.

Предполагается, что торец оболочки $x_3=L$ упруго закреплен

$$m_1 \sigma_{31} + n_1 v_1 = \psi_1(t), \quad m_2 \sigma_{32} + n_2 v_2 = \psi_2(t), \quad m_3 \sigma_{33} + n_3 v_3 = \psi_3(t), \quad \text{при } x_3 = L \quad (5)$$

где m_i , n_i – коэффициенты. Другой торец $x_3=0$ оболочки свободен от нагрузок

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0 \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (6)$$

Вся наружная поверхность оболочки свободна от нагрузок, т.е.

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = R + H \quad (7)$$

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1) при начальных (3) и граничных (4-7) условиях. Ниже рассматривается частный случай условий (5) – условие жесткого крепления, когда параметры ψ_i и m_i равны нулю, а $n_i=1$.

В расчетах рассматривалась цилиндрическая оболочка конечных размеров: $H=0.02$, $R=1$, $L=1$. Отношение радиуса к толщине составляет 50 и рассматриваемая оболочка относится к семейству тонкостенных оболочек. Несмотря на особенности размеров оболочки, она исследуется в трехмерной постановке. При численной реализации задачи выбиралась следующая форма динамического нагружения

$$f(x_2, x_3; t) = A [1 - \cos(2\pi t / T)] (x_3^0 - x_3) (x_3^1 - x_3) \cos(\eta x_2) / ((x_3^1 - x_3^0) / 2)^2 \quad (8)$$

в которой A – постоянный коэффициент, характеризующий максимальное значение действующей нагрузки. В расчетах принималось $A=0.5$, $T=200\tau$, $x_2^0 = -8h_2$, $x_2^1 = 8h_2$, $\eta=15$. Место расположения участка воздействия внешней нагрузки дискретно менялось в направлении оси x_3 цилиндра. Рассматривались следующие шесть вариантов расположения участка нагружения: 1) $x_3^0 = 60h_3$, $x_3^1 = 100h_3$; 2) $x_3^0 = 100h_3$, $x_3^1 = 140h_3$; 3) $x_3^0 = 120h_3$, $x_3^1 = 160h_3$; 4) $x_3^0 = 130h_3$, $x_3^1 = 170h_3$; 5) $x_3^0 = 140h_3$, $x_3^1 = 180h_3$; 6) $x_3^0 = 160h_3$, $x_3^1 = 200h_3$. Задача решалась на сетке $5*241*201$ ($H=4h_1$, $R=200h_1$, $L=200h_3$). Шаги сетки по времени $\tau=0.002$ и пространственным координатам $h_1 = h_3 = h = 0.005$; $h_2 = \pi/240 = 0.01309$ выбирались в соответствии с условием устойчивости [10].

В куполообразной форме нагружения (8) максимальное значение внешней нагрузки достигается в центре площадки удара в точке $x_2 = 0, x_3 = 0.5(x_3^0 + x_3^1)$ в момент времени $T = 100\tau$ и она направлена обратно нормали к внутренней поверхности оболочки: $f(0, 0.5(x_3^0 + x_3^1)h_3; 100\tau) = -1$. Изотропный материал цилиндра имеет следующие характеристики: $E=202$ ГПа, $\nu=0.3$, $\rho=7.951 \cdot 10^{-10}$ кгс²/мм⁴.

3. Анализ результатов численных расчетов. Принятая форма нагружения (8) является симметричной относительно сечения $x_2=0$. Это обстоятельство позволяет ограничить область исследования полуокружностью $0 \leq x_2 \leq \pi$. В этом случае на поверхностях $x_2=0, \pi$ ставятся условия симметрии

$$\nu_2 = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{23} = 0, \nu_{1,2} = \sigma_{11,2} = \sigma_{22,2} = 0. \quad (9)$$

На рисунке 1 на одном графике приведены осциллограммы нормальных осевых напряжений σ_{33} на внутренней $x_1=R$ (линии 1, 2, 3, 4) и внешней $x_1=R+4h$ (линии 5, 6, 7, 8) поверхностях оболочки в точках $(0, 0, 200h)$, $(4h, 0, 200h)$ жестко-закрепленного торца, где достигаются наибольшие и наименьшие значения для четырех вариантов расположения площадки удара: 1) $x_3^0 = 60h_3$, $x_3^1 = 100h_3$ (линии 1, 5); 2) $x_3^0 = 100h_3$, $x_3^1 = 140h_3$ (линии 2, 6); 5) $x_3^0 = 140h_3$, $x_3^1 = 180h_3$ (линии 3, 7); 6) $x_3^0 = 160h_3$, $x_3^1 = 200h_3$ (линии 4, 8). Прежде всего, можно видеть, что по мере приближения площадки удара к закрепленному торцу время достижения на этом торце наибольших и наименьших значений напряжений снижается. Оно равно, соответственно, 2500τ (вариант 1), 1376τ (вариант 2), 558τ (вариант 5), 290τ (вариант 6), т.е. приближается к времени достижения наибольшего значения внешней нагрузки T . До достижения максимального значения на торце наблюдается колебательный характер распределения напряжений. При этом число смен знаков напряжений уменьшается с приближением места удара к закрепленному торцу.

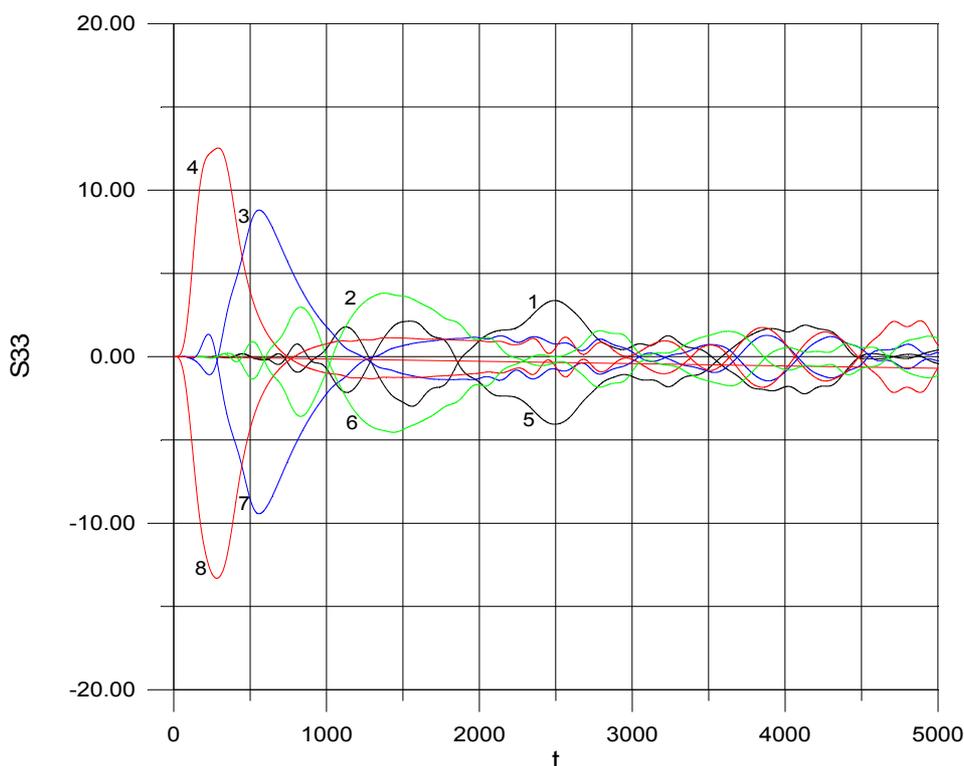


Рисунок 1 – Осциллограммы нормальной осевой компоненты напряжений в точках $(0, 0, 200h)$, $(4h, 0, 200h)$ закрепленного торца оболочки для вариантов расположения площадки удара: 1 (кривые 1, 5), 2 (кривые 2, 6), 5 (кривые 3, 7), 6 (кривые 4, 8)

Сравнивая результаты расчетов для 1-ого, 2-ого вариантов расположения площадки удара с результатами 5-ого и 6-ого вариантов, можно заметить по мере приближения площадки удара к закрепленному концу уровни наибольших и наименьших напряжений на закрепленной границе растут, особенно заметен в области закрепленного конца. В [6] показано максимальные значения

напряжений имеют место не на границе, а в области приложенной нагрузки и в моменты времени ее действия. Однако, если площадка удара близка к закрепленной границе, то ощутимо наложение двух событий: удар приходится на локальную площадку и известное повышение напряжений за счет отраженной волны. Последний результат наглядно демонстрируется на рисунке 1 сравнением максимальных осевых напряжений в первых двух вариантах (линии 1, 2 и 5, 6) расположения площадки удара с результатами для двух последних (линии 3, 4 и 7, 8), а также сравнением между собой результатов для двух последних вариантов (линии 3 и 7 с 4 и 8).

Из приведенного анализа следует, что при динамическом локальном ударе более опасным является случай, когда площадка удара прилегает к закрепленному концу.

На рисунке 2 приведены уровни максимальных значений по абсолютной величине окружной (линии 1, 2, 5, 6) и осевой (линии 3, 4, 7, 8) компоненты напряжений в зависимости от места расположения площадки локальной ударной нагрузки. Линиями 1, 2 и 3, 4 приведены вышеуказанные значения напряжений на закрепленном торце, а линиями 5, 6 и 7, 8 – в области приложенной нагрузки. Линиями 1, 2 и 3, 4 демонстрируется, что с приближением площадки удара к закрепленному торцу уровни напряжений в торцевом сечении начинают возрастать и при расположении центра площадки удара в области $(x_3^0 + x_3^1)/2 \geq 150h$ (см. кривые 3, 5, 7) уровни осевых напряжений на закрепленном торце становятся преобладающими. Характер изменения линий 5, 6 и 7, 8 показывает, что при расположении центра площадки удара в области $(x_3^0 + x_3^1)/2 < 150h$ окружное напряжение является преобладающим и окружные и осевые напряжения сохраняют постоянные значения при $(x_3^0 + x_3^1)/2 < 160h$, в противном случае растут. Влияние закрепленного конца на величины напряжений заметно в том случае, когда центр площадки удара расположена в окрестности закрепленного конца $(x_3^0 + x_3^1)/2 \geq 160h$, т.е. расстояние от центра площадки удара до закрепленного конца не превышает длины площадки удара. Радиальные напряжения с приближением места удара к закрепленному концу также растут, однако их рост менее значителен. Кроме отмеченных особенностей влияния места расположения площадки локальной ударной нагрузки на величины напряжений в закрепленном торце оболочки, из приведенных результатов четко видно, что напряжения на внутренней и наружной поверхностях оболочки подчинены общему закону симметрии относительно срединной поверхности оболочки. Линии 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8 симметричны относительно оси абсцисс.

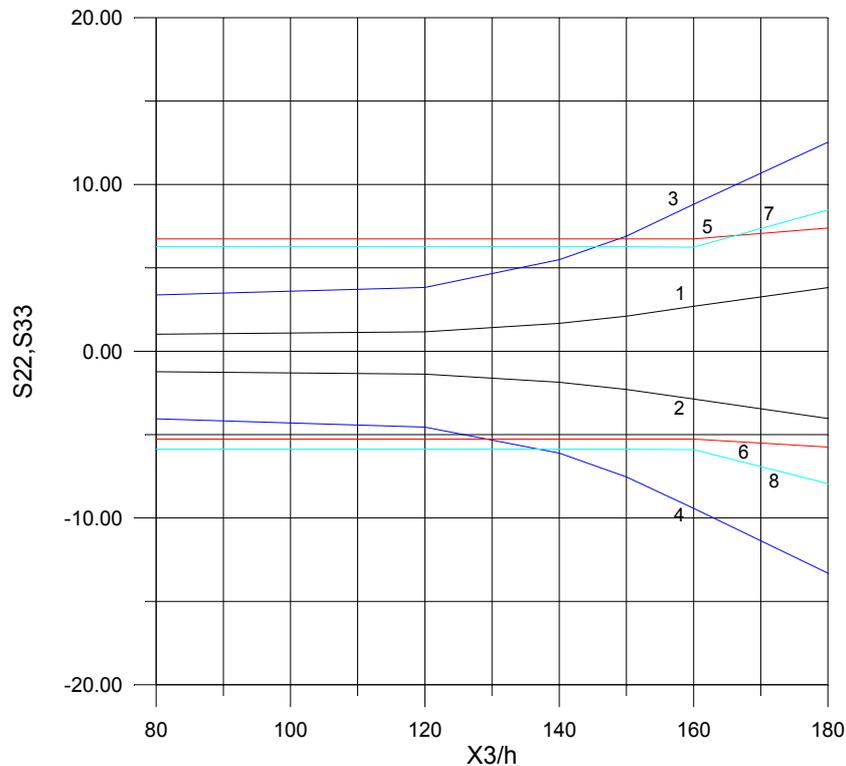


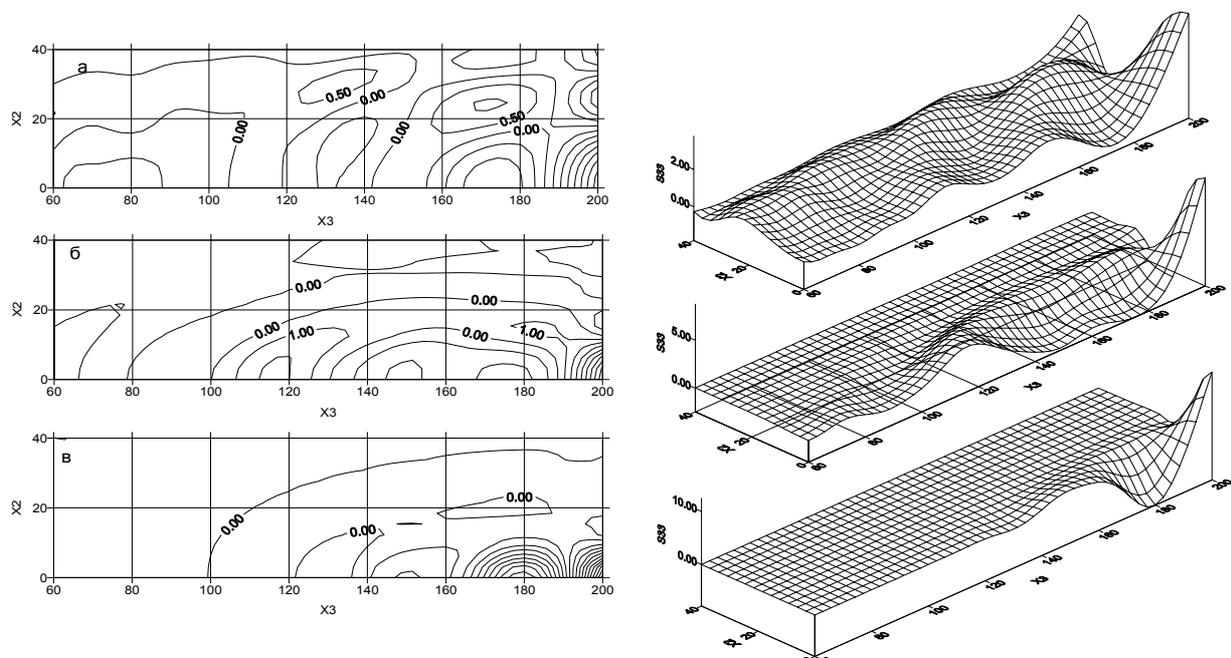
Рисунок 2 – Зависимость наибольшей и наименьшей окружной и осевой компонент напряжений от места приложения локальной нагрузки

В таблице приведены наибольшие и наименьшие значения окружной σ_{22} , осевой σ_{33} и сдвиговой σ_{23} компоненты напряжений в жестко закрепленном торце цилиндра для вышеуказанных шести вариантов расположения участка нагружения. Эффекты, отмеченные при анализе приведенных на рисунках 1 и 2 результатов, имеют место не только для осевой и окружной компоненты напряжения. Они имеют место и для сдвиговой компоненты напряжения.

Наибольшие и наименьшие значения окружного, осевого и касательного напряжения в закрепленном торце оболочки

Компонента напряжения	Поверхность оболочки	Варианты					
		1	2	3	4	5	6
σ_{22}	$x_1=0$	1.02	1.16	1.67	2.1	2.69	3.81
	$x_1=5h$	-1.23	-1.38	-1.86	-2.3	-2.87	-4.04
σ_{33}	$x_1=0$	3.37	3.82	5.49	6.9	8.819	12.54
	$x_1=5h$	-4.06	-4.55	-6.11	-7.54	-9.43	-13.31
σ_{23}	$x_1=0$	0.28	0.44	0.644	0.83	1.089	1.39
	$x_1=5h$	-0.17	-0.21	-0.17	-0.24	-0.4	-0.8

На рисунке 3 приведены распределения осевого напряжения $\sigma_{33}(x_2, x_3)$ на внутренней поверхности оболочки в момент времени соответствующие максимуму напряжений в закрепленном торце для трех вариантов расположения площадки приложения нагрузки: $t=1376\tau$ (а, вариант 2), $t=558\tau$ (б, вариант 5), $t=290\tau$ (в, вариант 6). Из поверхности распределения напряжений видно, что чем дальше расположена площадка удара от закрепленного торца, тем больший объем оболочки вовлекается в динамически возмущенное состояние. Это приводит к тому, что в этом случае на закрепленный торец оболочки поступает более размытая и менее интенсивная в ближайшей к области нагружения точке торца энергия динамического возмущения. Это обстоятельство, в конечном счете, является причиной того, что уровень напряжений в закрепленном торце снижается по мере удаления от него площадки удара.



ZX2X34. Распределение напряжении S33(X2,X3) в момент времени T=1376t (а, вар.2), T=558t (б, вар.5), T=290t (в, вар.6) соответствующую максимуму напряжений на внутренней поверхности в закрепленном торце

Рисунок 3 – Характер распределения напряжений $\sigma_{33}(x_2, x_3)$ на фрагменте внутренней поверхности оболочки в моменты времени достижения максимальных значений осевых напряжений в закрепленном торце

Выводы. В трехмерной постановке решена динамическая задача о локальном поперечном ударе по цилиндрической оболочке, один конец которой закреплен, а другой – свободен. В работе исследовано влияние места расположения локальной площадки удара на уровень напряжений в области закрепленного торца оболочки.

Выявлено, что

– при удалении площадки удара от закрепленного торца оболочки на расстоянии большей половины длины площадки удара ($d=(x_3^1-x_3^0)/2$) наибольшие значения компонент напряжений достигаются в центре области локального воздействия внешней нагрузки, которая является критической с точки зрения целостности,

– наибольшие значения окружного и осевого компонента напряжений в области действия нагрузки находятся на одном уровне, если локальная площадка удара находится на расстоянии большей половины длины площадки удара ($d=(x_3^1-x_3^0)/2$) от закрепленного конца,

– с приближением места площадки удара к закрепленному торцу оболочки уровень наибольших значений всех компонент напряжений в области крепления начинает расти,

– при принятых параметрах расчетов при расположении центра площадки удара в области $(x_3^0+x_3^1)/2 \geq 150h$ наиболее опасной с точки зрения разрушений становится узел крепления оболочки

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Даревский В.М. Оболочки под действием локальных нагрузок. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 2. Справочник в трех томах. – М.: Машиностроение, 1968. – С. 49-96.
- 2 Шаринов Л.И. Действие на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки, приложенной к свободному краю // Изв. АН СССР. МТТ. – 1967. – № 3. – С. 24-29.
- 3 Петров И.Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 4. – С. 118-124.
- 4 Бабич Ю.Н., Алпаидзе З.Г., Галиев Ш.У. Напряженное состояние полого цилиндра при импульсном локальном нагружении // Проблемы прочности. – 1987. – № 10. – С. 89-94.
- 5 Зеленский А.С., Кукуджанов В.Н. Численное решение пространственных динамических задач для осисимметричных упругопластических тел // Препринт № 384. Институт проблем механики АН СССР. – 1989. – 40 с.
- 6 Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш.М. Применение метода бихарактеристик к исследованию локального импульсного нагружения цилиндрической оболочки // Механика и моделирование процессов технологии. – Тараз, 2005. – № 1. – С. 150-161.
- 7 Мамаев Ш. Численное моделирование сопротивления цилиндрической оболочки локальным динамическим нагрузкам // Мат-лы конф. «VI Международная конференция по вычислительной и прикладной математике». – Киев, 2013. – С. 165-166.
- 8 Тарабин Г. Т. Численное решение нестационарных задач динамики анизотропной упругой среды // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – С. 83-95
- 9 Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 841 с.
- 10 Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

REFERENCES

- 1 Darevskij V.M. Obolochki pod dejstviem lokal'nyh nagruzok. Prochnost'. Ustojchivost'. Kolebanija. T. 2. Spravochnik v treh tomah. M.: Mashinostroenie, 1968. S. 49-96.
2. Sharinov L.I. Dejstvie na cilindricheskiju obolochku sosredotochennoj nagruzki, prilozhennoj k svobodnomu kraju. Izv. AN SSSR. MTT. 1967. N 3. S. 24-29.
3. Petrov I.B. Volnovye i otkol'nye javlenija v sloistyh obolochkah konechnoj tolshhiny. Izv. AN SSSR. MTT. 1986. N 4. S. 118-124.
4. Babich Ju.N., Alpaidze Z.G., Galiev Sh.U. Naprjazhennoe sostojanie pologo cilindra pri impul'snom lokal'nom nagruzhennii. Problemy prochnosti. 1987. N 10. S. 89-94.
5. Zelenskij A.S., Kukudzhanov V.N. Chislennoe reshenie prostranstvennyh dinamicheskikh zadach dlja osisimetricnyh uprugoplasticheskikh tel. Preprint N 384. Institut problem mehaniki AN SSSR. 1989. 40 s.
6. Karimbaev T.D., Mamaev Sh.M. Primenenie metoda biharakteristik k issledovaniju lokal'nogo impul'snogo nagruzhennija cilindricheskoj obolochki. Mehanika i modelirovanie processov tehnologii. Taraz, 2005. N 1. S. 150-161.
7. Mamaev Sh. Chislennoe modelirovanie soprotivlenie cilindricheskoj obolochki lokal'nym dinamicheskim nagruzkam. Mat-ly konf. «VI Mezhdunarodnaja konferencija po vychislitel'noj i prikladnoj matematike». Kiev. 2013. S. 165-166.
8. Tarabin G.T. Chislennoe reshenie nestacionarnyh zadach dinamiki anizotropnoj uprugoj sredy. Izv. AN SSSR. MTT. 1982. S. 83-95
9. Lur'e A.I. Teorija uprugosti. M.: Nauka, 1970. 841 s.
10. Magomedov K.M., Holodov A.S. Setochno-harakteristicheskie chislennye metody. M.: Nauka, 1988. 288 s.

Резюме

Ш.М.Мамаев

(Москва физика-техника институты, Мәскеу, Ресей Федерациясы)

ЦИЛИНДРЛІК ҚАБЫҚШАНЫ ЖЕРГІЛІКТІ СОҚҚЫЛАУДА ЖҮКТЕМЕНІ ҚОЮ ОРНЫНЫҢ КЕРНЕУЛЕРДІҢ ДЕҢГЕЙІНЕ ӘСЕРІ

Бихарактеристика әдісімен үш өлшемді қойылымда цилиндрлік қабықшаны жергілікті көлденең соққылау есебінің сандық шешімі алынған. Цилиндрлік қабықшаның бір ұшы қатты бекітілген, екінші ұшы кернеуден бос. Қатты бекітілген ұштан шағылысқан толқындардың әртүрлі аудандарды локаль соққылаудың динамикалық кернеулерімен өзара ықпалының нәтижесі зерттеледі. Сандық нәтижелерді талдау негізінде цилиндрдің қирау облыстары және оның себебі анықталған.

Тірек сөздер: бихарактеристика әдісі, цилиндрлік қабықша, нормаль айналма кернеу, осьтік кернеу, радиалдық жылжу, қирау.

Summary

Sh. M. Mamayev

(Moscow institute of physics and technology, Moscow, Russian Federation)

INFLUENCE OF LOAD LOCATION ON THE STRESS LEVELS AT THE LOCAL IMPACT OF A CYLINDRICAL SHELL

Bicharacteristics method is numerically solved in three-dimensional formulation of the problem locally transverse impact on a cylindrical shell with one end fixed and the other – is free. Study the effect of the mutual influence of the reflected waves from the fixed boundary stresses and dynamic disturbances from local impacts on various platforms. Based on the analysis of the numerical results are set expected areas of destruction and their causes.

Keywords: method bicharacteristics, cylindrical shell, normal hoop stress, axial stress, radial displacement, destruction.

Поступила 04.12.2013 г.

УДК 539.23: 621.793

D. M. MUKHAMEDSHINA¹, K. A. MIT', N. B. BEISENKHANOV²

¹Institute of Physics and Technology, 050032 Almaty, Kazakhstan

²Kazakh-British Technical University, 050000 Almaty, Kazakhstan

INFLUENCE OF PLASMA TREATMENTS ON PROPERTIES OF THE SnO₂ AND ZnO THIN FILMS PREPARED BY THE SOL-GEL TECHNIQUE

Abstract. SnO₂ and ZnO thin films were synthesized by sol-gel technique. Then films were treated by glow discharge O- and H-plasmas. The structure, optical and morphological characteristics of films were measured and analyzed. The correlations between crystallite sizes and the morphological characteristics of films have been extracted on the basis of the frontier computational analysis of the scanning probe microscope (SPM) data matrices. Measurements of X-ray diffraction and optical transmittance spectra have confirmed the computational results. The discovery size-morphology correlations in thin oxide films might open new avenues ultimately leading towards deeper insight into unsolved problems of evaluation of optimal technological conditions for thin oxide film designing.

Keywords: oxygen or hydrogen plasma, sol-gel technique, tin oxide, zinc oxide.

Тірек сөздер: оттегі және сутегі плазмасы, sol-gel әдісі, мырыш тотығы, қалайы тотығы.

Ключевые слова: кислородная или водородная плазма, золь-гель технология, оксид олова, оксид цинка.

INTRODUCTION. Metal oxide nanostructures have attracted great interest due the large variety of physical properties they present. The importance of transparent conducting oxides (TCO) in the field of future production of electric energy by sun light conversion has become unquestionable over the past time, as using TCO for front contact or intermediate reflector are one of the technological key points of solar cell designing [1-4]. Formation condition of metal oxides films significantly influences on the structure, surface morphology and their electrophysical properties. Among the various perspective physical and chemical methods of thin films deposition sol-gel process has distinct advantages over other techniques due to excellent composition control, homogeneity on the molecular level, simplicity of impurity doping process, high porosity and small crystallite sizes of synthesized films [5]. Recently, the plasma treatments have been widely used for modification of semiconductor metal oxide thin films [6-8].

This article presents the effects of hydrogen and oxygen glow discharge plasma on the structure, morphology and optical properties of SnO₂ and ZnO thin films prepared by the sol-gel technique.

EXPERIMENTAL

SnO₂ and ZnO thin films were obtained by a sol-gel technique. The films were deposited on cleaned microscopy glass slides. A colloidal solution was preparing by dissolving of anhydrous stannic chloride (SnCl₄) in ethanol for making the films of tin dioxide. Zinc acetate dehydrate (Zn(CH₃COO)₂·2H₂O) had been dissolved in an isopropanol (C₃H₇OH) with addition of hydroxide ammonium (NH₄OH) for deposition of zinc oxide films. The films were deposited on cleaned microscopy glass slides by spin coating at 3800 rpm (revolutions per minute). The rotation time was 3-5 s. The films were heated up by an infrared radiation lamp up to 80°C for elimination of organic residues. Then the samples were annealed at a temperature of 400°C for 15 min. There were 15-deposited layers for SnO₂ and 9 layers for ZnO films. The thickness of the deposited film was estimated from the weight of the film and was about 300 nm.

The glow discharge oxygen or hydrogen plasma was generated at the pressure of 6.5 Pa with a capacitive coupled radio frequency (r.f. 27.12 MHz) power of about 12.5 W. The temperature of processing did not exceed 100°C. The processing time was 5 min.

The film's structure was investigated by X-ray diffraction using a narrow collimated (0.05x1.5 mm²) monochromatic (CuK_α) X-ray beam directed at an angle of 5° to the sample surface. The intensity of X-ray radiation along the diffraction patterns was measured by 2θ = 0.05° steps. The average crystallite size estimated from the width of X-rays lines by Jones method. The optical transmittance spectra had been measured in the wavelength range from 190 nm to 1100 nm by means of the SF-256 UVI and from 1100 nm to 2500 nm by means of the SF-256 NIR spectrophotometers (LOMO, Russia). The surface morphology was investigated using atomic force microscope (JSPM 5200 Jeol, Japan). Scanning of the surface was carried out in air at the room temperature.

RESULTS AND DISCUSSION

Optical properties of SnO₂ and ZnO thin films

The optical transmittance spectra of synthesized SnO₂ and ZnO thin films before and after treatments by glow discharge hydrogen and oxygen plasmas are shown in Fig.1a and b, respectively. Plasma processing of SnO₂ films weakly influences on their transmission spectra in the wavelength range from 300 to 1200 nm (Fig. 1a).

Fig.1b shows the optical transmittance spectra of the thin ZnO films for as-synthesized and treated by the glow discharge oxygen (Fig. 1b, curve 3) or hydrogen plasma (Fig. 1b, curve 4). The optical transmittance spectra have shown that all films exhibit high transmittance in the 350-600 nm range (about 80%). Transmission, however, falls very sharply in the UV region due to the onset of fundamental absorption.

The appreciable decreasing of optical transmittance $T(\lambda)$ after processing of ZnO film by the oxygen plasma (Fig. 1b, curve 3) is taken place on wavelengths more than 1000 nm. After treatment by hydrogen plasma (Fig. 1b, curve 4) the transparency of a film slightly decreased in the region of small wavelengths.

The optical transmittance in the visible range was about 90%. Optical constants for all tin oxide films were estimated by the envelope method from the transmittance data. The optical band gap was determined from the allowed direct transition. The porosity and density are determined using the equation of Lorentz-Lorenz [9]. The obtained results are shown in Table 1.

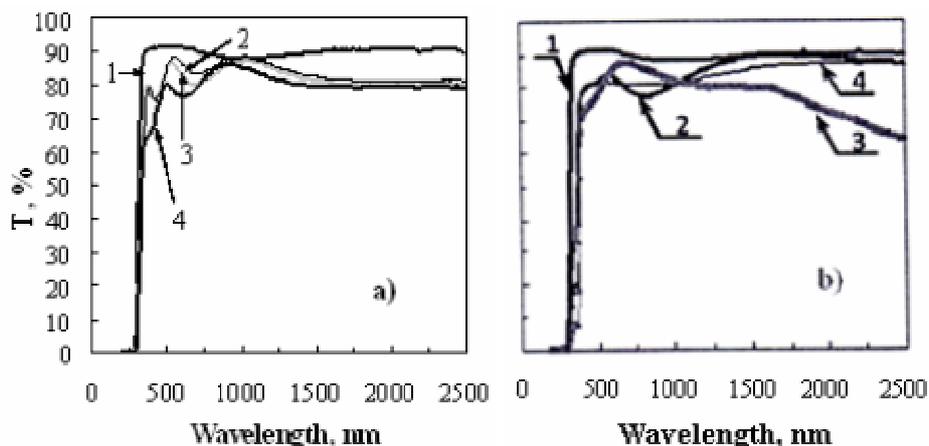


Figure 1 – Optical transmittance of SnO₂ (a) and ZnO (b) thin films on glass substrate.
 SnO₂ (a): glass substrate (1), as-synthesized (2), treated by O-plasma (3) and H-plasma (4);
 ZnO (b): glass substrate (1), as-synthesized (2), treated by O-plasma (3) and H-plasma (4)

Table 1 – Calculated optical parameters of SnO₂ films

Samples	Refractive index, n	Thickness, nm	Optical band gap, E _g , eV	Absorption coefficient, k, cm ⁻³	Porosity V, %	Density ρ, g/cm ³
SnO ₂	1.741	316	4.10	2.50·10 ³	22.3	5.40
O-plasma	1.816	297	4.10	3.05·10 ³	16.5	5.80
H-plasma	1.734	288	4.00	5.91·10 ³	22.8	5.36

The band gap energy of ZnO determined from the assumption of direct transitions, increases at processing by hydrogen plasma and is reduced at processing by oxygen plasma. The as-deposited, oxygen plasma treated and hydrogen plasma treated ZnO samples have optical band-gap energy of 3.42 eV, 3.37 eV and 3.6 eV, respectively. The increase band-gap energy after hydrogen plasma treatment probably specifies occurrence of the shallow hydrogen donors. The reduction of band-gap energy after oxygen plasma processing can occur due to reduction of ZnO grain sizes and changes in the nature of bond potentials between internal defects and the basic material [10].

Structure properties of SnO₂ and ZnO films

Fig. 2a,b,c shows XRD patterns of SnO₂ thin films annealed at 400°C for 15 min and after treatments by glow discharge hydrogen and oxygen plasmas, respectively. The structure of SnO₂ crystal grains was sufficiently good formed. It takes place providing registration of X-ray reflections from 7 planes with Miller indices (110), (101), (200), (211), (220), (112), (301).

As it has been shown earlier [6, 11] the growth of absorption in the near IR range after plasma treatment can occur as a result of the increase of free charge carrier concentration due to the presence of subnanometer Sn clusters or Sn crystallites. Plasma processing weakly influences on absorption in the near IR range of SnO₂ films synthesized by sol-gel technique. It indicates the absence of tin nanoparticles in these films due to their better stoichiometry.

This assertion is confirmed by the X-ray data of the average sizes of crystallites of SnO₂ films (Table 2). The treatment in the oxygen plasma leads to a reduction of the average crystallites sizes. The reduction can be caused by crystallization of amorphous fraction and formation of SnO₂ crystallites with small sizes. This assumption is confirmed by visible increase of amplitudes and integral intensity of SnO₂ peaks. In contrast, processing by hydrogen plasma causes the growth of average crystallite sizes demonstrating its segregating influence.

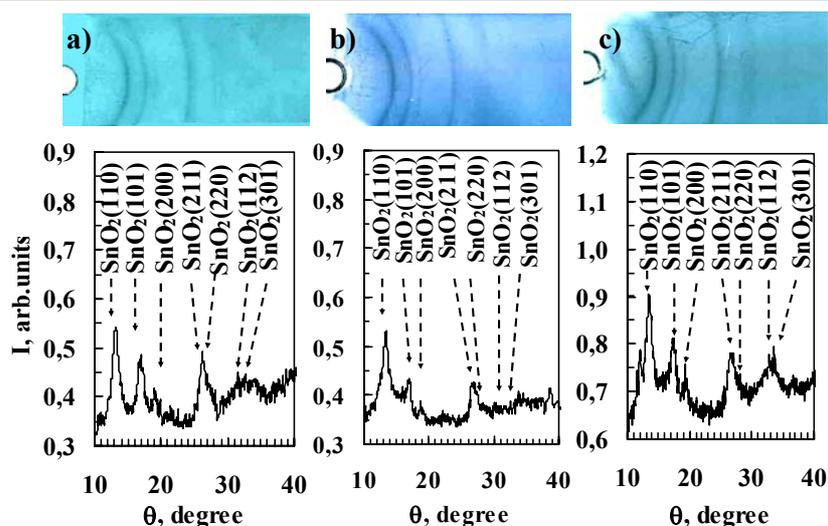


Figure 2 – X-ray diffraction pattern and X-ray intensity curves for thin SnO₂ films on the glass substrate after deposition (a), after treatment during 5 min by glow discharge oxygen (b) and H-plasma (c)

Table 2 – Average size of crystallites (nm) for the SnO₂ and ZnO films estimated from XRD-patterns

Samples	SnO ₂ (101)	SnO ₂ (200)	SnO ₂ (211)	SnO ₂ (110)	ZnO(100)	ZnO(002)	ZnO(101)
as-deposited	6.5	6	6	5	15	14	13
O-plasma	6	5.5	4.5	5.5	14	12	12
H-plasma	9.5	10	10	6.5	19	–	16

Fig. 3a,b,c shows XRD patterns of ZnO thin films synthesized and after treatments by glow discharge hydrogen and oxygen plasmas, respectively. XRD patterns show that in the zinc oxide film only ZnO polycrystalline phase was observed, 7 lines typical for ZnO were revealed (Fig. 3a). The hydrogen plasma treatment results (Fig.3b) in partial destruction of crystallites structure and disappearance of X-ray lines with Miller indices (102), (002), (110), (103), (112). It could be associated with destroying influence of hydrogen plasma streams on structural perfection of zinc oxide crystallites. As shown in [11], hydrogen forms in ZnO crystals the donor centers which concentration strongly grows after processing in hydrogen plasma; however, such treatment does not lead to effective passivation of deep traps. Processing in oxygen plasma results a reduction of the crystallites sizes, but the quantity of X-ray lines is not changed (Table 2).

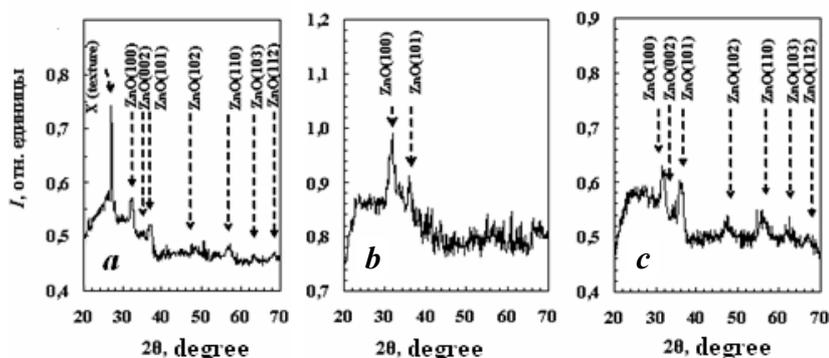


Figure 3 – X-ray intensity curves for thin ZnO films on the glass substrate after deposition (a), after treatment during 5 min by glow discharge oxygen (b) and H-plasma (c)

The amplitude and integrated intensity of ZnO peaks are increased for both plasma treatments. Growth of integrated intensity of peaks could be caused by oxidation of the excess zinc atoms in as-deposited film. Really, observable reduction of a transparency in NIR range of the transmittance spectra at processing by

oxygen plasma (Fig. 1b, curve 3) is occurred, probably, due to formation of fine metal nanoparticles which size could be insufficient for formation of Zn crystallites, but sufficient for growth of IR absorption. It is possible only in case of presence of superfluous zinc atoms in the film, which under influence of oxygen is transformed into ZnO, and nanoclusters of Zn. A similar decrease of the transparency in the NIR range was observed in [6] after short-term treatment by oxygen plasma of SnO_x layers synthesized by magnetron sputtering containing excess tin atoms.

Atomic force microscopic study of SnO₂ and ZnO films

The topography of the SnO₂ and ZnO surface films both before and after plasma treatments has been investigated by AFM. The AFM images (500×500 nm) are presented in Fig. 4. The as-synthesized films (Fig. 4a, d) have fine-grained structure with a wide spread of the particles sizes. The surface structure of ZnO film is more granular in comparison with the same of SnO₂ film. Since the sizes of ZnO grains are large and lie between 20-100 nm, it is likely that the grain consist of crystallites.

As it was mentioned above (paragraph 3.2), processing by hydrogen plasma causes the growth of average crystallite sizes demonstrating its segregating influence. It is also seen (Fig. 4c, f) that the formation of large grains occurred during processing by hydrogen plasma. Destroying influence of hydrogen plasma streams on structural perfection of zinc oxide crystallites and disappearance of X-ray lines with Miller indices (102), (002), (110), (103), (112) was shown in Fig.3. As is also seen on Fig. 4f, the grain boundaries become less clear and more blurred.

As it was stated earlier (paragraph 3.2) the treatment by oxygen plasma leads to a reduction of the average crystallites sizes. As is seen on Fig.4b and e, the treatment by oxygen plasma results in destruction of granular structure of film. One can assume clustering of the surface during processing by oxygen plasma.

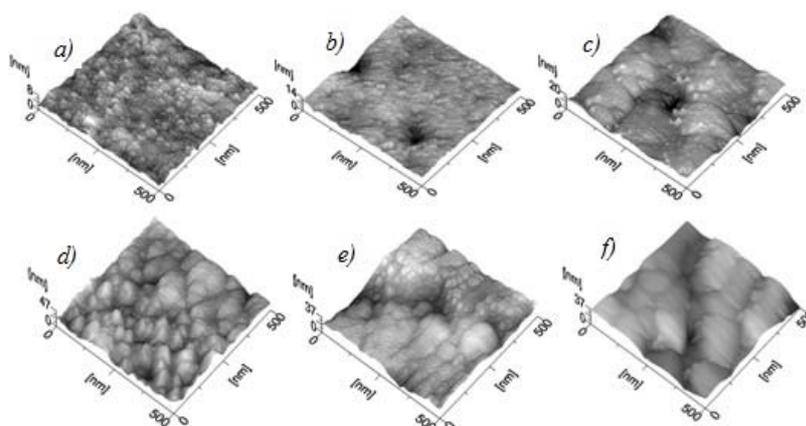


Figure 4 – 500×500 nm AFM AC images of the SnO₂ and ZnO films microstructure:
(a) – SnO₂ as-synthesized; (b) – SnO₂ treated by O-plasma; (c) – SnO₂ treated by H-plasma,
(d) – ZnO as-synthesized; (e) – ZnO treated by O-plasma; (f) – ZnO treated by H-plasma

In Table 3 the results of image analysis of SnO₂ and ZnO films surfaces using the AFM software are shown. The roughness is increased after processing of SnO₂ films by both hydrogen and oxygen plasma, especially after hydrogen plasma treatment due to the formation of granular structure of film surface (Fig.4c). The roughness of ZnO film is decreased after processing by oxygen plasma due to the intensive destructive influence of oxygen plasma processing on well-formed granular structure of as-deposited ZnO film. As one can see from the Table 3 and Fig.4, the roughness of ZnO films exceeds the same of SnO₂ films both before and after plasma treatment, because the structure of ZnO film is more granular in comparison with the same of SnO₂ film. The as-synthesized films have fine-grained structure with a wide scatter of the sizes of particles. Treatment by oxygen plasma leads some destruction of granular structure of films and to a decrease of grains sizes, confirming the assumption about its cluster structure after oxygen plasma processing. In contrast, the treatment by hydrogen plasma leads the increase of grain sizes showing a segregating effect of hydrogen plasma.

Table 3 –The analysis of surface images of SnO₂ and ZnO films (500?500 nm) surface

Samples	R _s , nm	R _q	R _z , nm
Glass substrate	2.31	2.92	19.0
SnO ₂ film as-synthesized	0.66	0.84	7.02
O-plasma	1.15	1.58	13.6
H-plasma	2.04	2.61	19.7
ZnO film as-synthesized	5.37	6.71	47.2
O-plasma	4.88	6.08	37.0
H-plasma	5.38	6.58	37.4

R_s – average roughness, nm; R_q – root mean square roughness; R_z – maximum difference between high and low height, nm.

Substantial growth of a surface roughness of SnO₂ films after plasma processing leads to increase the proportion of absorbed radiation (Fig.1), the maximum scattering of the incident radiation, the optimization of light absorption.

The studies clearly shows that the analysis results of synthesis of metal oxide thin film requires research of optical, morphological and structural film's features, i.e. requires use of the different measuring platform collection and consequently substantial time and financial resources. In work [12] we have processed the data on the effect of plasma treatment for time only on the basis of measurements of the topography of the ZnO films testing. The estimation of size and morphology correlation is a way to create a nanolaboratory on the single measuring platform by means of mathematical and computing tools, which would enable to obtain a set of morphological and structural film's features. The crystallite sizes in thin films (in the limiting case – two-dimensional structures), from general point of view, should be recognized in morphological features of the surface. Detection and recognition of these very weak correlations requires precise measurement tools and effective analysis methods. The correlation estimates were obtained on the basis of effective methods of spectral and clustering analyzes. All computations were performed on the groundwork in the field of scanning probe microscopy, neural network computing and wavelet analysis in the environment of MATLAB software platform.

Size-property relations in plasma-modified ZnO thin films have been established as a function of plasma treatment duration. It has been shown that duration of plasma treatment is a key parameter of thin oxide modifications. The correlations between crystallite sizes and the morphological characteristics of films have been extracted on the basis of the wavelet and self-organizing map analyzes of the scanning probe microscope (SPM) data matrices. The nanocluster structure of oxide films have been studied in detail with accuracy corresponding to the results of the SPM with a tenfold sharper cantilever tip. The strong plasma-induced changes in crystallite sizes have been interpreted as a size-structure phase transition. Direct measurements of X-ray diffraction and optical transmittance spectra have confirmed the computational results. The exploration of size-property relations has shown that SPM and effective spectral and clustering approaches can be very useful not only at analyzes but also at optimal property designing of thin oxide films for promising nanophotonics devices.

CONCLUSIONS. The influence of treatments by glow discharge hydrogen or oxygen plasmas on optical properties, structure and morphology of SnO₂ and ZnO thin films received by sol-gel technique was studied. It is shown that plasma processing weakly influences on absorption in the near IR range of SnO₂ films synthesized by sol-gel technique indicating the absence of tin nanoparticles in these films due to their high stoichiometry. In contrast, the observable reduction of a transparency in near IR range after short-term processing of ZnO films by oxygen plasma indicates a formation of fine metal nanoparticles which size could be insufficient for formation of Zn crystallites, but sufficient for growth of IR absorption.

It was shown, that the structure of as-deposited ZnO film is more granular in comparison with the same of SnO₂ film. Since the ZnO grains are large (20-100 nm), it is likely that the grains consist of crystallites. The treatment in oxygen plasma leads to the reduction of the both crystallite and grain sizes and the processing by hydrogen plasma cause the insignificant growth of the same sizes. Growth of a roughness of a surface SnO₂ films after plasma processing leads to increasing, as against ZnO films to light absorption.

The possibility of increasing the efficiency of carrier generation in solar cells using plasma treatment TCO front contact or intermediate reflector SnO and ZnO films for better scattering of incident light and the multiple reflections of photons can be applied.

The discovery size-morphology correlations in thin oxide films might open new avenues ultimately leading towards deeper insight into unsolved problems of evaluation of optimal technological conditions for thin oxide film designing.

ACKNOWLEDGEMENT. This work was supported by grant of Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan. The authors are very grateful to Dmitriyeva E.A. and Gritskova E.V. for preparation of SnO₂ and ZnO films, respectively.

REFERENCES

- 1 Brongersma M.L, Matias V., Segalman R., Shea L.D., et al, MRS Spring Symposium S: Nanostructured Metal Oxides for Advanced Applications in Material Research Society. April 1-5 **2013**, San Francisco, California, <http://www.mrs.org/s13-chairs/>.
- 2 Soderstrom T., Domine D., Feltrinnet A. al., ZnO Proc. of SPIE Vol. 7603 76030B-5. August 3-5 **2010**, San Diego, California.
- 3 Gondoni P., Ghidelli M., DiFonzo F. et al., arXiv 1205.3359 [cond-mat. mtrl-sci] May 15 **2012**.
- 4 Kurdzesau F.V., Problems of Physics, Mathematics and Technics, **2011**, 4(9), 45-50.
- 5 Mukhamedshina D.M., Beisenkhanov N.B., Mit' K.A., Dmitriyeva E.A., Medetov N.A. *Perspectivnye Materialy*, **2012**, 1, 35-42 (in Russ).
- 6 Mukhamedshina D.M., Mit K.A.', Beisenkhanov N.B., Dmitriyeva E.A., Valitova I.V., J. Mater. Sci: Mater. Electronics, **2008**, 19, 382-387.
- 7 Hosono H., Ohta H., Orita M., Ueda K., Hiran. Vacuum, **2002**, 66, 419-425.
- 8 Suche M., Chistolakis S., Moschovis K., Katsarakis N., Kiriakidis G., Thin Solid Films **2006**, 515, 551-554.
- 9 Jiang J.C., Lian K., Meletis E.I., Thin Solid Films, **2002**, 411, 203-210.
- 10 Gritskova E.V, Mukhamedshina D.M., Mit' K.A., Dolya N.A., Abdullin Kh. A., Physica B: Condensed Matter, **2009**, 4816-4820.
- 11 Mukhamedshina D.M. and Beisenkhanov N.B., in «Crystallization / Book 2», by InTech, Croatia , **2012**, 219-258.
- 12 Argynova A.Kh., Loctionov A.A., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., arXiv.1302. 4821 [cond-mat.mtrl-sci] February **2013**.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Brongersma M.L, Matias V., Segalman R., Shea L.D., et al, MRS Spring Symposium S: Nanostructured Metal Oxides for Advanced Applications in Material Research Society. April 1-5 **2013**, San Francisco, California, <http://www.mrs.org/s13-chairs/>.
- 2 Soderstrom T., Domine D., Feltrinnet A. al., ZnO Proc. of SPIE Vol. 7603 76030B-5. August 3-5 **2010**, San Diego, California.
- 3 Gondoni P., Ghidelli M., DiFonzo F. et al., arXiv 1205.3359 [cond-mat. mtrl-sci] May 15 **2012**.
- 4 Kurdzesau F.V., Problems of Physics, Mathematics and Technics, **2011**, 4(9), 45-50.
- 5 Мухамедшина Д.М., Бейсенханов Н.Б., Мить К.А., Дмитриева Е.А., Медетов Н.А. Перспективные материалы, **2012**, 1, 35-42.
- 6 Mukhamedshina D.M., Mit K.A.', Beisenkhanov N.B., Dmitriyeva E.A., Valitova I.V., J. Mater. Sci: Mater. Electronics, **2008**, 19, 382-387.
- 7 Hosono H., Ohta H., Orita M., Ueda K., Hiran. Vacuum, **2002**, 66, 419-425.
- 8 Suche M., Chistolakis S., Moschovis K., Katsarakis N., Kiriakidis G., Thin Solid Films, **2006**, 15, 551-554.
- 9 Jiang J.C., Lian K., Meletis E.I., Thin Solid Films, **2002**, 411, 203-210.
- 10 Gritskova E.V, Mukhamedshina D.M., Mit' K.A., Dolya N.A., Abdullin Kh. A., Physica B: Condensed Matter, **2009**, 4816-4820.
- 11 Mukhamedshina D.M. and Beisenkhanov N.B., in "Crystallization / Book 2", by InTech, Croatia, **2012**, 219-258.
- 12 Argynova A.Kh., Loctionov A.A., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., arXiv.1302. 4821 [cond-mat.mtrl-sci] February **2013**.

Резюме

Д. М. Мұхамедшина¹, К. А. Мить¹, Н. Б. Бейсенханов²

¹Физика-техникалық институты, Алматы, Қазақстан Республикасы,
²Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ӘДІСІМЕН СИНТЕЗДЕЛГЕН SnO₂ ЖӘНЕ ZnO ЖҰҚА ПЛЕНКАЛАРДЫҢ ҚАСИЕТІНЕ
ОТТЕГІ ЖӘНЕ СУТЕГІ ПЛАЗМАСЫМЕН ӨНДЕУДІҢ ӘСЕРІ

Жұқа SnO₂ және ZnO пленкалары золь-гель әдісімен синтезделді. Сонан соң пленкалар солғын разрядты О- және Н-плазмасымен өнделді. Құрылымы, оптикалық және морфологиялық сипаттамалары өлшенді және

талданды. Кристаллиттердің өлшемі мен морфологиялық сипаттамасының арасындағы корреляция сканирулеуші зондтық микроскоптың (СЗМ) деректерінің матрицасын компьютерлік талдаудың негізінде алынды. Рентгендік спектрлерді және оптикалық өткізудің спектрлерін өлшеу компьютерлік нәтижелерді дәлелдеді. Жұқа тотықтық пленкаларды синтездеу үшін жұқа тотықтық пленкаларда мөлшер-морфология корреляциясын табу тиімді технологиялық жағдайды бағалаудың мәселесін өте терең ұғынуға әкеледі.

Тірек сөздер: оттегі және сутегі плазмасы, золь-гель әдісі, мырыш тотығы, қалайы тотығы.

Резюме

Д. М. Мухамедшина¹, К. А. Мить¹, Н. Б. Бейсенханов²

¹Физико-технический институт, Алматы, Республика Казахстан,

²Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Республика Казахстан)

ВЛИЯНИЕ ОБРАБОТКИ ВОДОРОДНОЙ И КИСЛОРОДНОЙ ПЛАЗМОЙ НА СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК SnO₂ И ZnO, СИНТЕЗИРОВАННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ТЕХНОЛОГИЕЙ

Тонкие пленки SnO₂ и ZnO были синтезированы золь-гель методом. Затем пленки были обработаны O- и H-плазмами тлеющего разряда. Структура, оптические и морфологические характеристики были измерены и проанализированы. Корреляция между размерами кристаллитов и морфологическими характеристиками были выведены на основе компьютерного анализа матрицы данных сканирующего зондового микроскопа (СЗМ). Измерения рентгеновских спектров и спектров оптического пропускания подтвердили компьютерные результаты. Обнаружение корреляции размер-морфологии в тонких оксидных пленках ведет к более глубокому пониманию проблем оценки оптимальных технологических условий для синтеза тонких оксидных пленок.

Ключевые слова: кислородная и водородная плазма, золь-гель технология, оксид олова, оксид цинка.

Поступила 15.01.2014г.

УДК 539.3:622.24

Л. А. ХАДЖИЕВА, А.Б. УМБЕТКУЛОВА

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЖАТО-СКРУЧЕННОЙ БУРОВОЙ ШТАНГИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Аннотация. Рассматриваются буровые штанги неглубинного бурения (до 500 м), используемые в нефтегазодобывающей промышленности. Проведен динамический анализ перемещений вращающейся сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях. Осевая нагрузка и крутящий момент, действующие на буровую штангу, полагаются переменными во времени. Принято шарнирное опирание штанги на концах. Нелинейные колебания буровой штанги аппроксимируются спектром форм ее изгиба. В результате численного анализа модели установлено влияние числа форм изгиба и технических характеристик буровой штанги на характер движения и амплитуду ее колебаний.

Ключевые слова: буровая штанга, нелинейные колебания, поперечные колебания, амплитуда колебаний, изгиб, перемещения.

Тірек сөздер: бұрғылау қарнағы, сызықсыз ауытқулар, көлденең ауытқулар, ауытқу амплитудасы, бүгіліс, ауыспалылық.

Keywords: drilling rod, nonlinear vibrations, transverse vibrations, the amplitude of vibrations, bending, displacement.

Одной из задач нефтегазодобывающей промышленности является эффективное бурение скважин. Техничко-экономические показатели и темпы бурения скважин зависят от совершенства буровых машин и инструментов, режима их работы, который, в свою очередь, зависит в большинстве

случаев от устойчивости и прочности буровых штанг. Известно, что большие деформации буровых штанг, возникающие под действием переменных осевых сил и крутящих моментов, могут привести к потере устойчивости штанги, их поломке или искривлению скважины. В связи с чем моделирование движения буровых штанг с учетом возможных конечных деформаций и ее динамический анализ представляет практический и научный интерес.

Целью работы является исследование нелинейной модели поперечных колебаний сжато-скрученной буровой штанги неглубинного бурения при конечных деформациях и выбор оптимальных параметров буровой штанги, обеспечивающих уменьшение амплитуды колебаний.

Известно, что от рационального сочетания таких параметров, как осевая нагрузка на долото, скорость его вращения, угол закручивания буровой штанги зависят механическая скорость бурения и скорость подачи инструмента к забою [1, 2 и др.]. Оно позволяет, затратив минимальную энергию, получать наибольшую производительность в забое при рациональном выборе необходимых параметров. Поэтому величины осевых нагрузок и крутящих моментов, а также характер их поведения имеют принципиальное значение в моделировании динамики буровых штанг.

Здесь в качестве расчетной схемы буровой штанги достаточно большой длины l принимается гибкий упругий стержень, закрепленный по концам. В процессе бурения на штангу действуют переменные во времени внешние нагрузки, такие как сжимающая осевая нагрузка $N(t)$ и крутящий момент $M(t)$.

Осевая нагрузка $N(t)$ складывается из собственного веса и усилия подачи, которое является периодической функцией времени:

$$N(t) = N_0 + N_t \cdot \Phi(t), \quad (1)$$

где N_0 – продольная сила, обусловленная собственным весом конструкции и постоянной во времени силой сжатия; $\Phi(t)$ – периодическая функция времени, характеризующая режим нагружения; N_t – функция, определяющая вклад переменной составляющей.

При вращении штанги на буровую коронку (долото) действуют силы сопротивления со стороны горной породы. Эти силы, а также силы трения о стенки скважины в случае касания преодолеваются за счет крутящего момента $M(t)$, передаваемого от двигателя:

$$M(t) = M_0 + M_t \cdot \Phi(t), \quad (2)$$

Величина M_0 характеризует номинальный момент, постоянный во времени; M_t – определяет вклад переменной составляющей; $\Phi(t)$ – также периодическая функция времени. Крутящий момент имеет постоянную и переменную во времени составляющие. Периодический характер момента $M(t)$ обусловлен изменением во времени сил сопротивления породы, которые, в свою очередь, зависят от величины продольного усилия $N(t)$.

Характер периодического воздействия зависит от устройства нагружения. Простейший вариант функции $\Phi(t)$ соответствует гармоническому воздействию:

$$\Phi(t) = \cos(\omega t). \quad (3)$$

К внешним нагрузкам относится также центробежная сила C , распределенная по длине вращающейся искривленной штанги. Величина этой силы зависит от угловой скорости ω , и отклонения штанги от оси вращения. Номинальное значение скорости ω постоянно, однако, вследствие периодического характера изменения крутящего момента угловая скорость также будет иметь малые отклонения, переменные во времени.

Под действием указанных факторов и центробежной силы при вращении со скоростью ω , применяя принцип Даламбера, можно записать динамическую модель изогнутой оси для сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях, в следующем виде:

$$EJ_V \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[M(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + K_1 V = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$EJ_U \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[M(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + K_1 U = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

где $K_1 = \frac{\gamma F \omega^2}{g}$; $\gamma = \rho \cdot g$ – удельный вес материала штанги; ρ – плотность материала; F – площадь поперечного сечения буровой штанги; g – скорость свободного падения; EJ_u, EJ_v – жесткость штанги относительно осей y, z ; U – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости xOy ; V – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости xOz ; ω – частота вращения.

Система (4) задает динамическое состояние изогнутой оси буровой штанги. В основе модели лежит гипотеза плоских сечений [3]. Предполагаем, что поперечные сечения стержня при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к его деформированной оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, являются пренебрежимо малыми. Растяжением оси стержня пренебрегаем.

Для определенности стержень считается шарнирно опертым по концам, что выражает равенство нулю перемещения и изгибающего момента, и задаются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} u(x, t) = v(x, t) = 0 \quad (x = 0, x = l) \\ EJ_u \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = EJ_v \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, x = l). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагается, что жесткость штанги относительно осей y и z постоянна по длине, т.е.

$$EJ_u = EJ_v = EJ = const. \quad (6)$$

Из-за сложности прямого интегрирования нелинейной модели (4) приводим последнюю к виду, удобному для численного интегрирования. Для этого применяется известный метод разделения переменных – метод Бубнова-Галеркина, где форма изгиба оси буровой штанги задается спектром гармонических форм.

Полагая крутящий момент и продольную силу постоянными по длине буровой штанги, то есть функциями только от времени, систему (4) представляем как:

$$\begin{aligned} EJ_v \left[\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right] + \\ + M(t) \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + N(t) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + K_1 V = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ EJ_u \left[\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right] - \\ - M(t) \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + N(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_1 U = - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина решение системы (7) задается в виде:

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{U}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad V(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{V}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (8)$$

Рассмотрено решение (8) в первом и во втором приближениях.

В первом приближении:

$$U(x, t) = \bar{U}(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad V(x, t) = \bar{V}(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (9)$$

система с распределенными параметрами (7) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma F}{g} \bar{V}''(t) + \left[EJ_v \frac{\pi^4}{l^4} - N(t) \frac{\pi^2}{l^2} + K_1 \right] \bar{V}(t) + \frac{3}{8} EJ_v \frac{\pi^6}{l^6} \bar{V}^3(t) = 0, \\ \frac{\gamma F}{g} \bar{U}''(t) + \left[EJ_v \frac{\pi^4}{l^4} - N(t) \frac{\pi^2}{l^2} + K_1 \right] \bar{U}(t) + \frac{3}{8} EJ_v \frac{\pi^6}{l^6} \bar{U}^3(t) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Проведен численный анализ динамической модели буровой штанги (10) с помощью пакета символьной математики Wolfram Mathematica (WM). Все расчеты проведены при следующих значениях параметров: внешний диаметр штанги $D = 0,2$ м, внутренний диаметр $d = 0,12$ м. Исследованы стальные и дюралюминиевые буровые штанги с характеристиками модуля упругости $E_{cm} = 2.1 \cdot 10^5$ МПа и $E_{dюр} = 0.7 \cdot 10^5$ МПа, соответственно, и плотностью $\rho_{cm} = 7800 \frac{кг}{м^3}$ и $\rho_{dюр} = 2700 \frac{кг}{м^3}$. Буровые штанги испытывают действие переменной продольной силы $N(t) = [2.198 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^3 \sin(\omega t)]H$ и переменного крутящего момента $M(t) = 10^4 \sin(\omega t)$ Нм, скорость вращения штанги $\omega = 25$ об/мин.

На рисунках 1 и 2 представлена временная часть амплитуды колебаний стальной буровой штанги в первом приближении. Установлено, что увеличение длины буровой штанги вызывает рост амплитуды ее колебаний (рисунок 1), дюралюминиевые буровые штанги подвержены меньшим отклонениям, чем стальные (рисунок 2).

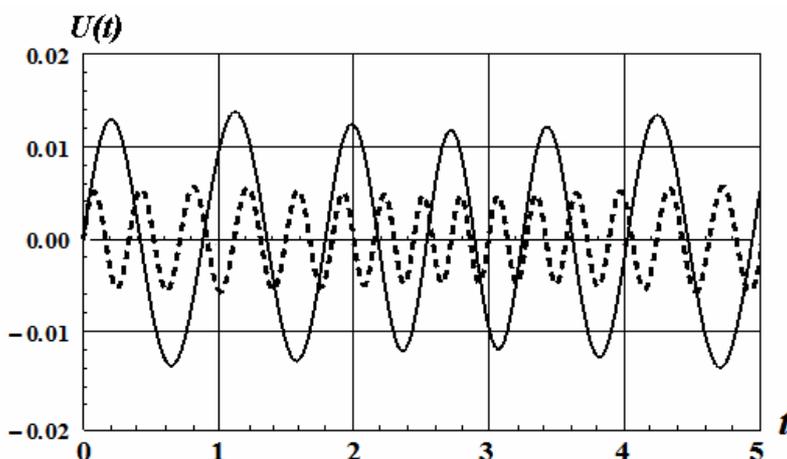


Рисунок 1 – Амплитуды колебаний стальной буровой штанги для первого приближения (---- $l = 200$ м, _____ $l = 450$ м)

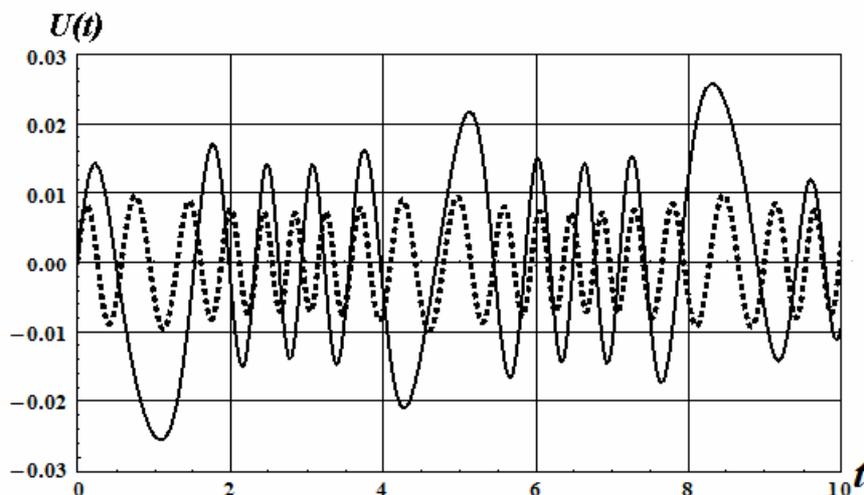


Рисунок 2 – Амплитуды колебаний стальной и дюралюминиевой буровой штанги для первого приближения, при $l = 250$ м (---- дюралюминий, _____ сталь)

Исследовано влияние формы прогиба штанги на амплитуду колебаний, задаваемой составляющими ряда (8).

Для этого рассмотрено решение нелинейной модели (7) во втором приближении:

$$U(x,t) = \bar{U}_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \bar{U}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \quad V(x,t) = \bar{V}_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \bar{V}_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \quad (11)$$

В этом случае нелинейная модель приводится к виду:

$$\begin{aligned} EJ_V \frac{\pi^4}{l^4} \bar{V}_1(t) - \frac{3}{8} EJ_V \frac{\pi^6}{l^6} \bar{V}_1^3(t) + \frac{32}{3} M(t) \frac{\pi^2}{l^3} \bar{U}_2(t) - N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{V}_1(t) + K_1 \bar{V}_1(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{V}_1''(t), \\ 16EJ_V \frac{\pi^4}{l^4} \bar{V}_2(t) - 2^6 \frac{3}{8} EJ_V \frac{\pi^6}{l^6} \bar{V}_2^3(t) + \frac{8}{3} M(t) \frac{\pi^2}{l^3} \bar{U}_1(t) - 4N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{V}_2(t) + K_1 \bar{V}_2(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{V}_2''(t), \\ EJ_U \frac{\pi^4}{l^4} \bar{U}_1(t) - \frac{3}{8} EJ_U \frac{\pi^6}{l^6} \bar{U}_1^3(t) - \frac{32}{3} M(t) \frac{\pi^2}{l^3} \bar{V}_2(t) - N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{U}_1(t) + K_1 \bar{U}_1(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{U}_1''(t), \\ 16EJ_U \frac{\pi^4}{l^4} \bar{U}_2(t) - 2^6 \frac{3}{8} EJ_U \frac{\pi^6}{l^6} \bar{U}_2^3(t) - \frac{8}{3} M(t) \frac{\pi^2}{l^3} \bar{V}_1(t) - 4N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{U}_2(t) + K_1 \bar{U}_2(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{U}_2''(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Для аппроксимации формы изгиба штанги первым и третьим членом ряда:

$$U(x,t) = \bar{U}_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \bar{U}_3(t) \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \quad V(x,t) = \bar{V}_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \bar{V}_3(t) \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \quad (13)$$

нелинейная модель (7) приводится к виду:

$$\begin{aligned} EJ_V \frac{\pi^4}{l^4} \bar{V}_1(t) - \frac{3}{8} EJ_V \frac{\pi^6}{l^6} \bar{V}_1^3(t) - N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{V}_1(t) + K_1 \bar{V}_1(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{V}_1''(t), \\ 3^4 EJ_V \frac{\pi^4}{l^4} \bar{V}_3(t) - EJ_V \frac{\pi^6}{l^6} \left\{ \frac{27}{8} \bar{V}_1^3(t) + \frac{37}{8} \bar{V}_3^3(t) \right\} - 9N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{V}_3(t) + K_1 \bar{V}_3(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{V}_3''(t), \\ EJ_U \frac{\pi^4}{l^4} \bar{U}_1(t) - \frac{3}{8} EJ_U \frac{\pi^6}{l^6} \bar{U}_1^3(t) - N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{U}_1(t) + K_1 \bar{U}_1(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{U}_1''(t), \\ 3^4 EJ_V \frac{\pi^4}{l^4} \bar{U}_3(t) - EJ_V \frac{\pi^6}{l^6} \left\{ \frac{27}{8} \bar{U}_1^3(t) + \frac{37}{8} \bar{U}_3^3(t) \right\} - 9N(t) \frac{\pi^2}{l^2} \bar{U}_3(t) + K_1 \bar{U}_3(t) &= -\frac{\gamma F}{g} \bar{U}_3''(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Их решения представлены на рисунках 3 и 4, соответственно.

В обоих случаях видно, что уточнение формы колебаний буровой штанги за счет добавления членов ряда разложения функции перемещения по длине штанги ведет к поправке амплитуды колебаний по основной форме изгиба, увеличивая ее. Данное уточнение амплитуды колебаний приближает решение исследуемой модели к реальности физического процесса, происходящих в буровых штангах.

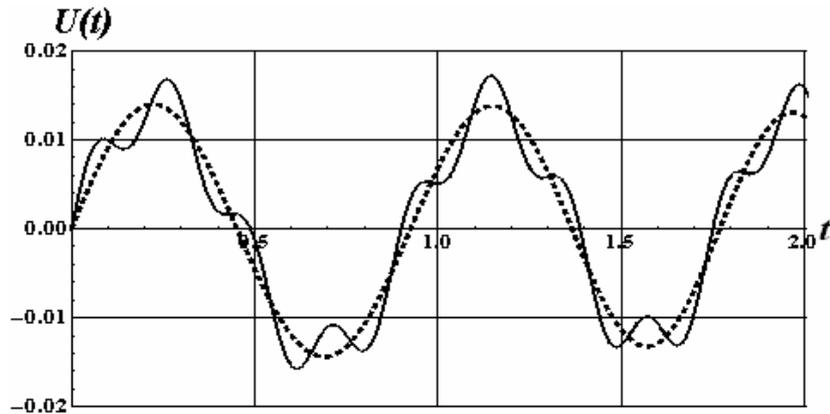


Рисунок 3 – Величина амплитуды колебаний в первом (_ _ _) и первых двух приближениях (_ _ _) для стальной штанги длиной \$l = 400\$ метров

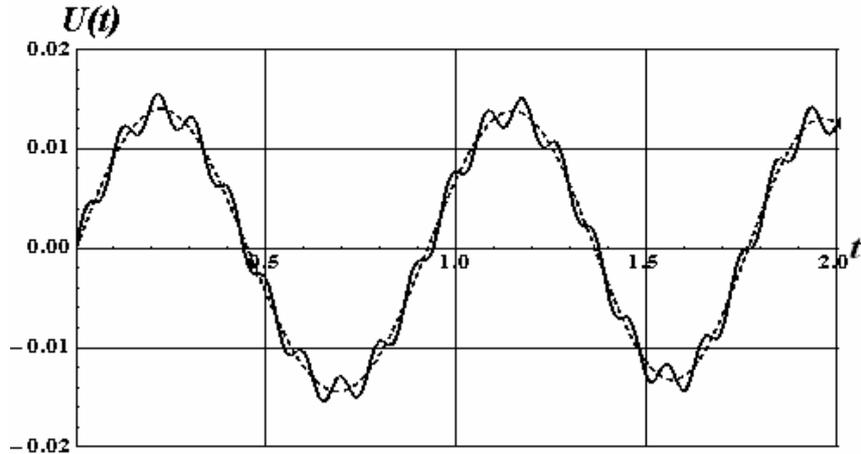


Рисунок 4 – Величина амплитуды колебаний в первом (—), первом и третьем приближениях (---) для стальной штанги длиной $l = 400$ метров

Исследовано влияние скорости вращения буровой штанги на амплитуду ее колебаний. Установлено, что увеличение скорости вращения ведет к росту амплитуды колебаний штанги (рисунок 5). Исследовано распределение колебаний по длине штанги. На рисунке 6а) и 6б) представлена форма изгиба штанги в моменты времени $t = 20$ сек и $t = 28$ сек соответственно, при частоте вращения штанги $\omega = 25$ об/мин.

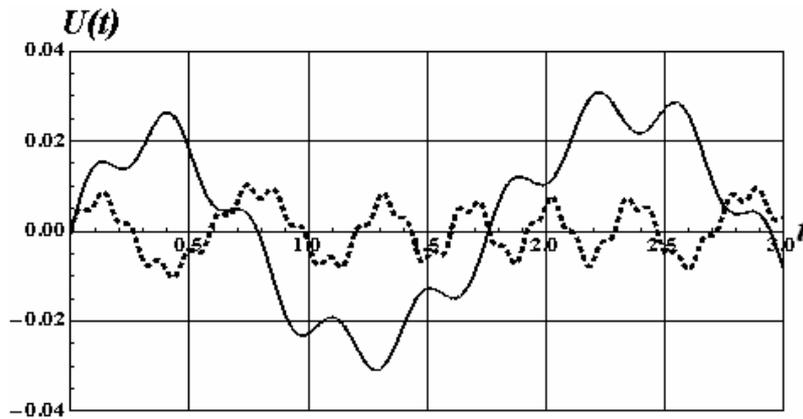


Рисунок 5 – Влияние скорости вращения стальной буровой штанги длиной $l = 100$ м на амплитуду ее колебаний в случае первых двух приближений гармонического ряда — $\omega = 50$ об/мин, — $\omega = 150$ об/мин

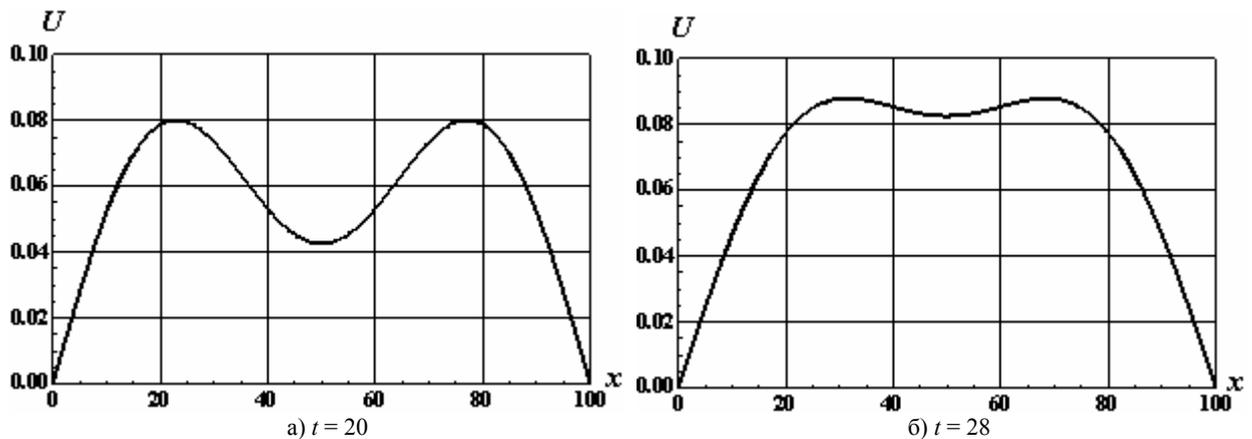


Рисунок 6 а), б) – Плоский изгиб стальной буровой штанги длиной $l = 100$ м для случая первого и третьего приближения гармонического ряда, $\omega = 50$ об/мин в разный момент времени

Из анализа графиков 6 следует, что основной формой изгиба штанги для заданных граничных условий является первая форма. Уточнение решения модели за счет увеличения членов разложения решения в ряд по спектру форм изгиба штанги ведет к количественному изменению искомой величины – ее росту. То есть, уточнение формы колебаний буровой штанги ведет к увеличению амплитуды колебаний, при этом частота колебаний не меняется и, в целом, характер колебаний остается неизменным.

По результатам исследования можно судить о влиянии материала буровой штанги на ее отклонение от прямолинейной формы. Буровые штанги, изготовленные из дюралюминия, подвергаются меньшим изгибным деформациям, чем штанги, изготовленные из стали. Заметно влияние длины и угловой скорости вращения на колебания буровой штанги. Увеличение длины штанги и частоты вращения также влечет за собой возрастание амплитуды поперечных колебаний и длины их волн. По мере удлинения штанги повышается риск ее потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Wilderman Giles H. Exploration drilling techniques used as a «Field determinator» and data gatherer in mill and plant design // Can. Mining and Met. Bull. – 1973. – N 740. – P. 110-116.
- 2 Зарипов А.Р., Терметчиков М.К. Прогнозирование оптимальных режимов бурения, обеспечивающих максимальную скорость // Труды Фрунзенского политехнического института. «Механика. Исследование и совершенствование бурильных машин». – Фрунзе, 1974. – Вып. 80. – С. 39-45.
- 3 Вибрации в технике. Справочник: в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
- 4 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

REFERENCES

- 1 Wilderman Giles H. Exploration drilling techniques used as a «Field determinator» and data gatherer in mill and plant design. Can. Mining and Met. Bull. **1973**. N 740. P. 110-116.
- 2 Zaripov A.R., Termetchikov M.K. Prognostirovanie optimalnyh rezhimov bureniya, obespechivayushih maksimalnuyu skorost. Trudy Frunzenskogo politechnicheskogo instituta. «Mechanika. Issledovanie I sovershenstvovanie burilnyh mashin». Frunze, **1974**. Vol. 80. P. 39-45. (in Russ.).
- 3 *Vibracii v tehnikе*, Spravochnik v 6-ti t. M.: Mashinostroenie, **1978**. T.1. 352 (in Russ.).
- 4 Samarskij A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody*, Ucheb. posobie dlja vuzov. M.: Nauka, **1989**. 432 (in Russ.)

Резюме

Л. А. Хаджиева, А. Б. Үмбетқұлова

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ТЫҒЫЗДАЛҒАН ЖӘНЕ БҰРАЛҒАН БҰРҒЫЛАУ ҚАРНАҒЫНЫҢ СЫЗЫҚСЫЗ АУЫТҚУЛАРЫНЫҢ ЖУЫҚТАМАСЫ ТУРАЛЫ

Мұнай және газ ұңғымасын бұрғылау үшін қолданылатын терең емес (500 м дейін) бұрғылау қарнақтар қарастырылған. Шеткі деформациядағы айналмалы тығыздалған және бұралған бұрғылау қарнағының динамикалық талдауы өткізілген. Бұрғылау қарнағына әсер ететін жүк-салмақ пен бұрау моменті уақыт аралығында өзгермелі болып саналады. Екі жағынан топсалы тірелген қарнақ қарастырылады. Бұрғылау қарнағының сызықсыз ауытқулар өзінің бүгіліс нысанының спектрі бойынша жуықтатылады. Модельдің сандық талдау нәтижесі бойынша бұрғылау қарнақ бүгілісі нысанының саны және техникалық сипаттамының оның көлденең ауытқуына және ауытқу амплитудасына әсері анықталды.

Тірек сөздер: бұрғылау қарнағы, сызықсыз ауытқулар, көлденең ауытқулар, ауытқу амплитудасы, бүгіліс, ауыспалылық.

Summary

L. Khajiyeva, A. Umbetkulova

(al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ABOUT THE APPROXIMATION OF NONLINEAR FLUCTUATIONS OF COMPRESSED AND TWISTED DRILLING RODS AT THE FINITE DEFORMATION

Drilling rods for shallow drilling (up to 500 m) applied in oil-gas extractive industry is considered. A dynamic analysis of the rotating compressed and twisted drilling rods movement at finite deformations. The axial force and twisting moment acting on the drilling rod are relying time variable. Hinged bearing rod at the ends is accepted. Nonlinear fluctuations of the drilling rod approximated by the spectrum of its bending forms. The numerical analysis of the model established the influence of the number of forms of bending and the technical characteristics of the drilling rod on the nature of its movement and amplitude of fluctuations.

Keywords: drilling rod, nonlinear fluctuations, cross fluctuations, the amplitude of fluctuations, curve, movement.

Поступила 14.01.2014 г.

ӨЖ 621.391

A. K. БЕЙСЕТАЕВА, К. Н. ТАЙСАРИЕВА

(Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ЕКІЛІК ЖАЛҒАН КЕЗДЕЙСОҚ СИГНАЛДАРДЫ ТҮРЛЕНДІРУ ӘДІСТЕРІН ЖӘНЕ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Берілген мақалада екілік жалған кездейсоқ сигналдарды түрлендіру әдістерін және қасиеттерін зерттеу қарастырылған. Екілік рекурентті жалған кездейсоқ тізбекті түрлендіру ақпарат берудің әртүрлі жүйелеріндегі шуыл тәріздес сигналдардың қалыптасуының кең қолданылуына себеп болып отыр. Шуыл тәріздес сигналдарды жылдам іздестіру құрылғыларын зерттеу кезінде ең басты назар екілік сызықты рекурентті максималды периодқа негізделіп құрастырылған (М-тізбекті) шуыл тәріздес сигналдарға аударылды. Ұзын жалған кездейсоқ тізбектерді пайдаланатын ақпаратты беру жүйесінде синхронизацияны орнату аяғын азайту мақсатында арнайы кодтық тізбектер дайындалды.

Тірек сөздер: шуыл тәріздес сигналдар, екілік жалған кездейсоқ сигналдар.

Ключевые слова: шумоподобные сигналы, двоичные псевдослучайные сигналы.

Keywords: noise-like signals, pseudorandom binary signals.

Кіріспе. Қазіргі заманға сай ақпаратты беру жүйелерінде сигналдар спектрінің кеңейтуге ие жүйелерді қарқынды ендіру үрдісі қалыптасты. Ақпаратты беру және сигналды өңдеу әдістерін жүзеге асыруда сандық технологияларды құрастыру және пайдалануда үлкен жетістіктерге себепші болып отыр. Рұқсат етілген жиілік диапазондарында радиоэлектронды құрылғылардың типтері мен сандарының үздіксіз артуына байланысты, ақпаратты беру жүйелері күрделі бөгетті жағдайда, ақпаратты қабылдаудың сенімді жолдарымен қамтамасыз ету керек. Сондықтан берілетін ақпараттың бөгетке төзімділігі мен құпиялылығын жоғарылатуға, қызмет көрсетілетін абоненттер санын өсіруге септігін тигізетін ақпаратты күрделі кодтауды қолдануға мүмкіндік беретін шуыл тәріздес сигналдарды қолданатын ақпаратты беру жүйелері кең қолданысқа ие болып отыр [1].

Тар жолақты бөгеттермен күресудің ең кең таралған әдісі терең режекция болып саналады. Оның тиімділігі, жалпы жағдайда, кездейсоқ сипатқа ие тар жолақты бөгеттердің негізгі параметрлерін өлшеу дәлдігіне айтарлықтай дәрежеде тәуелді. Сондықтан тар жолақты бөгеттердің параметрлерін бағалау міндеті – қабылдағыштың кірісінде тар жолақты бөгеттер бар болғанда жұмыс істей беретін шуыл тәріздес сигналдарды жылдам іздеп табу құрылғыларының бөгетке төзімділігін

жоғарылатуда кілтті сәттердің бірі. Тар жолақты бөгеттің екі параметрінің бірлескен фильтрленуінен алынған теңдеулер: флуктуациялары кездейсоқ марковтық үрдістер деп тұспалданған амплитуда мен жиілік, сонымен қоса амплитуданың флуктуациясында – тар жолақты бөгеуіл реле үлестіріміне, ал жиіліктікі – гаустыққа ие. Алынған теңдеулер негізінде фильтрлеу құрылғылары синтезделген. Оларға тән ерекшелік фильтрациялау деңгейіне қарай көрсетілген параметрлерді өлшеудің дәлдігін жоғарылатуға жағдай жасайтын салмақтық өңдеуге ие амплитуда мен жиілікті өлшеу каналдары арасында тоғыспалы байланыстардың болуын көрсетеді [3].

Ақпаратты берудің кең жолақты жүйелерінде қолданылатын кеңейтілген спектрге ие сигналдар күрделі сигналдар санатына жатады және әдебиеттерде шуыл тәріздес сигналдар деп жиі аталады. Мұндай сигналдарда спектр ені мен шуыл тәріздес сигналдың ұзақтығының $T_{ШТС}$ көбейтіндісі $B_{ШТС}$ сигналдың базасы, бірден көп шамаға үлкен

$$B_{ШТС} = FT_{ШТС} \gg 1 \quad (1.1)$$

Дискретті кодталған гармоникалық сигнал жалпы түрде осылай жазылады:

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^L A_k \cdot \text{rect}[t - (k-1)T] \exp\{j[(\omega - \omega_k)t + \Theta_k]\} \\ 0 \end{cases},$$

t өзге шамаларында мұндағы $k \in \overline{1, L}$; L – жалған кездейсоқ тізбек; A_k, Θ_k, ω_k – манипуляция түрімен анықталатын сигналдардың амплитудалары, фазалары және жиіліктерінің дискретті мәндері; $\text{rect}(\cdot)$ – бірлік амплитуда мен T ұзақтығының импульсі, сондықтан

$$\text{rect}[t - (k-1)T] = \begin{cases} 1, (k-1)T < t < kT \\ 0, (k-1)T > t > kT \end{cases} \quad (1.3)$$

Бинарлы фазалық манипуляция (ФМ) үшін (1.2) өрнегі үшін $\omega_k = 0, A_k = \text{const}, \Theta_k = \text{var}$, келесі түрге ие болады

$$s(t) = \sum_{k=0}^{L-1} A_C \text{rect}[t - kT - \tau(t)] \exp[j\omega_0 t + \Theta_k + \Theta_0], \quad (1.4)$$

мұндағы $\Theta_k = \alpha_k \cdot \pi, \alpha \in \{0, 1\}$ жалған кездейсоқ тізбек кодымен басқарылады, Θ_0 – шуыл тәріздес сигналдың тасымалдаушы жиілігінің бастапқы фазасы.

Шуыл тәріздес сигналдардың бинарлы фазалық модуляциясы $B_{ШПС} \approx L$ жуықталған теңдігімен расталу керек.

Көптеген екілік кодтаушы тізбектер белгілі: Баркера, Рид-Мюллер, Диджиллок және Стиффлер, Лежандр, GMW, Холл, Якоби, Цирпер, Гаймюплер, Пейли-Ппоткин, Хаффмен соңғы төртеуі сызықты рекурентті тізбектерді қолдану арқылы қалыптасады.

Бинарлы шуыл тәріздес сигналдардың қасиеттерін бірнеше сипаттамалармен бағалауға болады. Олардың ішіндегі маңыздысы автокорреляция мен өзара корреляция функциялары. Көрсетілген сипаттамалар шуыл тәріздес сигналдардың кездейсоқтық дәрежесі мен ортогоналдылығын бағалауға мүмкіндік береді [2].

Ұзын жалған кездейсоқ тізбектерді пайдаланатын ақпаратты беру жүйесінде синхронизацияның орнатылу уақытын азайту мақсатында арнайы кодтық тізбектер құрастырылды. Шуыл тәріздес сигналдарды жылдам іздестіру үшін ең танымал тізбектерге қысқа кодтық тізбекшелерден пайда болған күрделі кодтық тізбектер жатады. Күрделі тізбектің ұзындығы тізбекшелер ұзындықтарының көбейтіндісіне тең, ал синхронизацияның орнатылу уақыты тізбекшелер элемент сандарының қосындысына тура пропорционал. Синхронизацияның жылдам орнатылуы барлық тізбек бойынша синхронизация жоқ кезіндегі коррелятордың шығысындағы сигнал-шуыл қатынасының азаюы салдарынан болып тұр. Д. Андерсонның жалған кездейсоқ тізбегі жақсы корреляционды қасиеттерге ие. Қысқа сегменттерін синхронизирлеуші комбинация ретінде қолданылуға болады.

Адамар, Рид-Мюллер, Диджиллок және Стиффлер матрицалары негізіндегі сызықты емес екілік тізбектер тобы белгілі. Матрицалардың қалыптасуы әдетте сызықты емес кері байланыстарды жылжыту регистрлерімен жүзеге асады. Бірақ бұл тізбектердің ансамблі көп емес, өзара корре-

ляция функциясы тек уақыттық жылжу болмаған жағдайда ғана ортогоналдық болғанда, тізбектер бүйірлі шығарылудың жоғары деңгейіне ие.

Жылдам іздестірудің барлықтай дерлік тізбектерінің кемшілігіне, өзара корреляцияның бүйір жапырақшаларының жоғары деңгейі салдарынан жалған синхронизацияға әкелетін, шуыл тәріздес сигналдардың жалған анықталымдар санының өсуі жатады [1].

Автокорреляция мен өзара корреляцияның жақсы функциялары максималды периодты сызықты рекурентті тізбек негізінде қалыптасқан шуыл тәріздес сигналдарға ие. Сызықты рекурентті тізбекті $\{a_j\} = a_1, a_2, \dots, a_j$ символдарының тізбегі деп атайды. Тізбектің әрбіреуі $G = \{0, 1, \dots, g-1\}$ облысындағы мәндерді қабылдай алатын және келесі рекурентті ережені қанағаттандыратын мәндер:

$$c_0 a_j = c + c_1 a_{j-1} + \dots + c_m a_{j-m}, \quad (1.5)$$

Сонымен қоса c және $c_i \in G$, ал қосу және көбейту амалдары g модулі бойынша жүзеге асады. g модулі қарапайым сан деп болжанады. (1.5) қатынасын кодтау ережесі деп атайды, ал g санын жалған кездейсоқ тізбектің негізі дейді. Максималды периодты сызықты рекурентті тізбекті құру үшін m символдар (a_1, a_2, \dots, a_m) ішінен бастапқы ерікті комбинация беру қажет. Максималды периодты екілік сызықты рекурентті тізбектерді Хаффмен немесе M -тізбектер деп жиі атайды. Мұндай жалған кездейсоқ тізбектердегі әрбір келесі символдың мәні алдыңғы m мәнге тәуелді және келесі рекурентті ережемен анықталады:

$$a_{k+1} = \sum_{k=1}^m c_{m-k} a_k = c_{k-1} a_1 \oplus c_{k-2} a_2 \oplus \dots \oplus c_{k-m} a_m, \quad (1.6)$$

мұндағы a_k және c_k 0 немесе 1 мәндерін қабылдай алады; \oplus – екі модулі бойынша қосу белгісі.

Сызықты рекурентті максималды периодты тізбек негізіндегі екілік жалған кездейсоқ тізбектерді қалыптастырушы қарапайым құрылғы бұралымдары бар m – разрядты жылжытушы регистр болып саналады. Жылжытушы регистрлермен түрлендірілетін мүмкін болатын әртүрлі екілік жалған кездейсоқ тізбектердің жалпы саны $L=2^m-1$ (m – тудырушы полиномның дәрежесі) тең болатын сигналдар ансамблін (класын) анықтайды.[2]

Максималды периодты сызықты рекурентті тізбек негізіндегі екілік жалған кездейсоқ тізбек келесі қасиеттерге ие:

- $L=2^m-1$ периодқа ие периодты болып есептеледі, мұндағы m -регистр ұзындығы, жалған кездейсоқ тізбек осы шама көмегімен қалыптасады;
- $1/L$ тең болатын автокорреляцияның периодты функциясы бүйір шыңдарға ие;
- периодтағы барлық импульстер біркелкі таралған;
- бір-біріне қатысты жылжытылған екі M -тізбектің қосындысы M -тізбек болып саналады;
- периодта L жалған кездейсоқ тізбекте екілік символдардың нөлден басқа m -таңбалы комбинациялары;
- L периодтағы бірліктердің жалпы саны нөлдердің жалпы санынан кем дегенде бірге өзгеше;
- өзара корреляцияның аперидотты функциясының максималды шығарылымы $5\sqrt{L}$ шамасынан аспайды, ал периодты функциянікі $6\sqrt{L}$ шамасынан аспайды;

Екілік рекурентті жалған кездейсоқ тізбектерді өңдеудің және түрлендірудің қарапайым әдістері ақпаратты берудің түрлі жүйелерінде шуыл тәріздес сигналдардың қалыптасуына кең қолдану себеп болды. Берілген мақалада шуыл тәріздес сигналды жылдам іздестіру құрылғысын зерттеу барысында басты назар максималды периодты екілік сызықты рекурентті тізбекте құрастырылған шуыл тәріздес сигналдарға аударылды.[4]

Қорытынды. Шуыл тәріздес сигналдардың корреляционды және энергетикалық қасиеттерінің талдауы шуыл тәріздес сигналы бар ақпарат беруші жүйелер осы сигналдарды түрлендірудің қарапайымдылық, ортогоналдылық және жоғары бөгетке төзімділік талаптарын қанағаттандырады. Әсіресе екілік рекурентті жалған кездейсоқ максималды периодқа ие тізбектер негізінде құрастырылса. Шуыл тәріздес сигналдары бар ақпарат беруші жүйелердің алуан түрлілігі мен санының өсуіне байланысты жалған кездейсоқ ұзын тізбектерге негізделіп құрастырылған шуыл тәріздес сигналдарды қолдану үрдісі байқалады. Бірақ шуыл тәріздес тізбек ұзындығының өсуімен қатар қабылдағыштың жалған кездейсоқ тізбегінің бастапқы шуыл тәріздес сигналдың жалған кездейсоқ

тізбегімен кодтық синхронизация мәселесі туындайды. Оның орнатылу уақыты бастапқы шуыл тәріздес сигналдың жалған кездейсоқ тізбегінің ұзындығының өсуімен қатар ұзарады. Бұл өз алдында ұзын және өте ұзын жалған кездейсоқ тізбектері бар ақпарат беруші жүйелердің қолдану аясын шектейді.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Петрович Н.Т., Размахин М.К. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Сов. радио, 1969.
- 2 Пестряков В.Б., Афанасьев В.П. и др. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации / Под ред. В. Б. Пестрякова. – М.: Сов. радио, 1973.
- 3 Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985.
- 4 Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др.; Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / Под ред. Г. И. Тузова. – М.: Радио и связь, 1985.

REFERENCES

- 1 Petrovich N.T., Razmahin M.K. Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami. M.: Sov. radio, 1969.
- 2 Pestyakov V.B., Afanasiev V.P. i dr. Shumopodobnye signaly v sistemah peredachi informacii. Pod red. V. B. Pestyakova. M.: Sov. radio, 1973.
- 3 Varakin L.E. Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami. M.: Radio i svyaz', 1985.
- 4 Tuzov G.I., Sivov V.A., Prytkov V.I. i dr.; Pomehozaschischennost' radiosistem so slozhnymi signalami. Pod red. G. I. Tuzova. M.: Radio i svyaz', 1985.

Резюме

А. К. Бейсетаева, К. Н. Тайсариева

(Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан)

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ГЕНЕРИРОВАНИЯ ДВОИЧНЫХ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ И ИХ СВОЙСТВА

В данной статье рассматривается исследование методы генерирования двоичных рекуррентных псевдослучайная последовательность стали причиной их широкого использования для формирования шумоподобные сигналы в различного рода система передачи информации. При исследовании устройств быстрого поиска шумоподобные сигналы основное внимание уделяется шумоподобные сигналы, построенным на двоичных линейная рекуррентная последовательность максимального периода (М-последовательностях). С целью уменьшения времени установления синхронизации в система передачи информации, использующих длинные псевдослучайная последовательность, были разработаны специальные кодовые последовательности.

Ключевые слова: шумоподобные сигналы, двоичные псевдослучайные сигналы.

Summary

A. Beisetaeva, K. Taissariyeva

(Kazakh National Technical University after K. I. Satpayev, Almaty, Republic of Kazakhstan)

INVESTIGATION OF METHODS FOR GENERATING PSEUDO-RANDOM BINARY SIGNALS AND THEIR PROPERTIES

This article Input a word study methods for generating pseudo-random sequence of binary recurrence caused their widespread use for the formation of noise-like signals in different kinds of data transmission system. In the study of devices quick search noise-like signals focuses on noise-like signals, built on binary linear recurring sequence of maximal period (M-sequences). To reduce the time required to establish synchronization in a data transmission system using a long pseudo-random sequence, were designed specific code sequence.

Keywords: noise-like signals, pseudorandom binary signals.

Поступила 14.01.2014 г.

УДК 532.536

Б.Ж. АБДИКАРИМОВ, Б.И. МУСАТАЕВА

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ НА СВОЙСТВА РАСТВОРОВ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ РАССЛОЕНИЯ

Аннотация

Проведены экспериментальные исследования температурной зависимости вязкости раствора изомасляная кислота-вода + KCl с добавлением наночастиц лапонитов вблизи критической температуры расслоения. Показано, что добавление наночастиц лапонитов в раствор вблизи критической температуры расслоения приводит к увеличению его вязкости и связанного с ней радиуса корреляции системы. Также добавление наночастиц лапонитов приводит к увеличению температуры фазового перехода и увеличению сил межмолекулярного взаимодействия в растворе.

Ключевые слова: критическая температура расслоения, вязкость, радиус корреляции, лапониты

Тірек сөздер: сындық температура, тұтқырлық, корреляция радиусы, лапониттер.

Keywords: consolution critical temperature, viscosity, correlation length, laponits

В настоящее время исследования влияния внешних факторов на состояние вещества вблизи критической точки остается актуальной задачей физики конденсированного состояния вещества. Эти исследования важны для новых направлений исследований в области энергетики, экологии и медицины, интенсивно развиваются в связи с уникальными свойствами систем с добавлением заряженных частиц, наночастиц, к которым относятся системы с лапонитами.

Промышленное использование нанокompозитных мембранных материалов, содержащих в качестве наноразмерных компонентов наноглины, охватывает широкий круг задач рационального природопользования, развития экологически чистых, ресурсо- и энергосберегающих технологий, таких как опреснение морских и соленых вод, получения сверхчистой воды, переработка промышленных отходов, биотехнологии, пищевая промышленность, разделение газовых смесей. Введение от 2 % до 5 % нанокompонентов при формировании нанокompозитного материала способствует повышению транспортных свойств мембран, при этом улучшаются также механические свойства, формоустойчивость, повышается огнестойкость, электропроводность, стабилизируются эмульсии.

Актуальность экспериментальных исследований равновесных и кинетических свойств конденсированных систем в околкритическом состоянии связана с их аномально большой восприимчивостью к действию влияния различных факторов и полей. Особые экстремальные свойства вещества вблизи критической точки является причиной их успешного практического использования в новейших технологиях.

В данной работе исследовано влияние добавления наночастиц лапонитов в кинетическую характеристику - вязкость вблизи критической температуры расслоения раствора изомасляная кислота - вода + KCl [1].

В расчетах было использовано уравнение критической вязкости, учитывающее конечность вязкости в критической точке. Теоретически конечное значение критической вязкости, исходя из классической теории критических явлений [ii], впервые получено в работе М. Фиксмана [iii], в которой автор учитывает пространственную дисперсию системы вблизи КТ ($qR_c \neq 0$). На основе такого подхода в работах [iv, v] предложено уравнение критической вязкости, в котором также учтена пространственная дисперсия системы. В этих работах флуктуационная часть вязкости в окрестности критической точки представляется в виде:

$$\eta_f(T) = \frac{AR_c(T, c)}{\left[1 + (q \cdot R_c(T, c))^2\right]^{1/2}} = \frac{\Delta\eta_0 t^{-\nu}(T, c)}{\left[1 + (q \cdot r_0 t^{-\nu}(T, c))^2\right]^{1/2}} \quad (1)$$

Здесь $\Delta\eta_0 = Ar_0$ – амплитуда сингулярной части вязкости. Формула (1), качественно согласуясь с расчетам Фиксмана [iii], обеспечивает конечное значение сдвиговой вязкости в КТ. Как видно, при $t \rightarrow 0$ и неограниченном возрастании радиуса корреляции ($R_c(t) = r_0 \cdot t^{-\nu} \Rightarrow \infty$), вязкость системы в критической точке принимает конечное значение: $\eta_{fk} = \Delta\eta_0 / qr_0 = A/q = const$.

Тогда на основе (10) - (11) уравнение полной вязкости запишем в виде:

$$\eta(T) = \eta_r(T) + \eta_f(T) = A \exp \frac{B}{T} + \frac{\Delta\eta_0 t^{-\nu}(T, c)}{\left[1 + (q \cdot r_0 t^{-\nu}(T, c))^2\right]^{1/2}} \quad (2)$$

Это уравнение вязкости ранее была апробировано в работах [v, vi] при анализе поведения вязкости широкого класса двойных растворов и металлических расплавов вблизи критической температуры расслоения.

Ранее методом капиллярного вискозиметра были исследованы температурные зависимости вязкости $\eta(T)$ раствора изомаляная кислота - вода (критическая массовая концентрация изомаляной кислоты в воде $x_{vk} = 0,38$, критическая температура $T_k = 300,45$ K) и раствора изомаляная кислота - вода + KCl для 3 массовых концентраций ионов ($x=0,07\%$; $x=0,14\%$; $x=0,3\%$) в окрестности критической температуры расслоения.

В этих работах был сделан вывод, что при увеличении концентрации ионов флуктуационная часть вязкости η_f возрастает. Это приводит к увеличению температурной области ($\Delta T_f = T_k - T_f(\eta_f = 0)$) проявления флуктуационной части вязкости.

Целью данной работы было установление характера влияния добавления наночастиц лапонитов в раствор изомаляная кислота - вода + KCl вблизи критической температуры расслоения. Для этого в исследованный раствор были поочередно добавлены наночастицы лапониты с массовой концентрацией 0,025 % и 0,15 %.

В данной работе впервые проведены экспериментальные исследования температурной зависимости вязкости раствора с добавлением наночастиц лапонитив вблизи критической температуры расслоения. Методика эксперимента методом капиллярного вискозиметра была аналогична экспериментальным исследованием температурной зависимости вязкости раствора [i] без добавления лапонитов. Результаты эксперимента показаны на рис. 1.

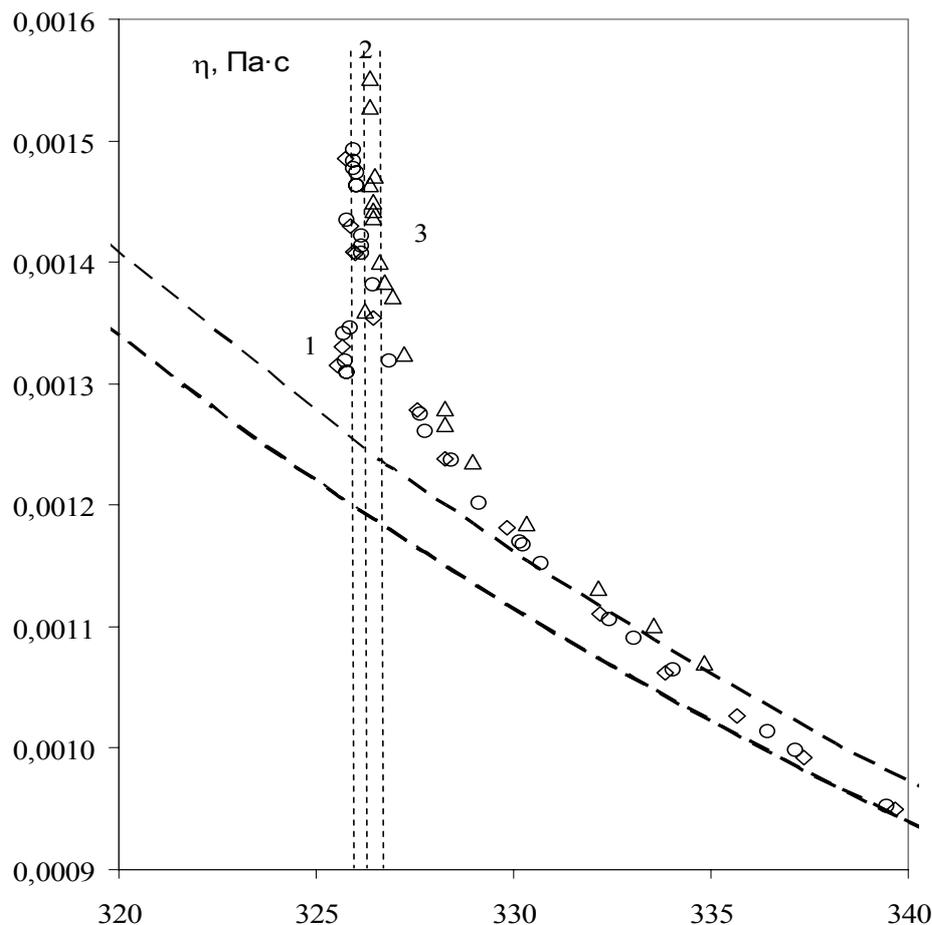


Рис. 1 - Температурные зависимости вязкости раствора изомасляная кислота-вода + KCl (1), и раствора изомасляная кислота-вода + KCl с добавлением наночастиц лапонитов с массовой концентрацией 0,025% (2) и 0,15% (3). Наклонными пунктирными линиями показаны регулярные части вязкости. Вертикальными пунктирными линиями показано увеличение температуры фазового перехода при добавлении лапонитов.

При обработке полученных данных $\eta(T)$, рис. 1, использовано уравнение критической вязкости (1). Изначально рассчитана величина регулярной части вязкости $\eta_r(T) = A \exp \frac{B}{T}$ при температурах, далеких от критической температуры ($\Delta T \geq 10 K$), рис. 2. В этой области температур найдены параметры A и B регулярной части вязкости.

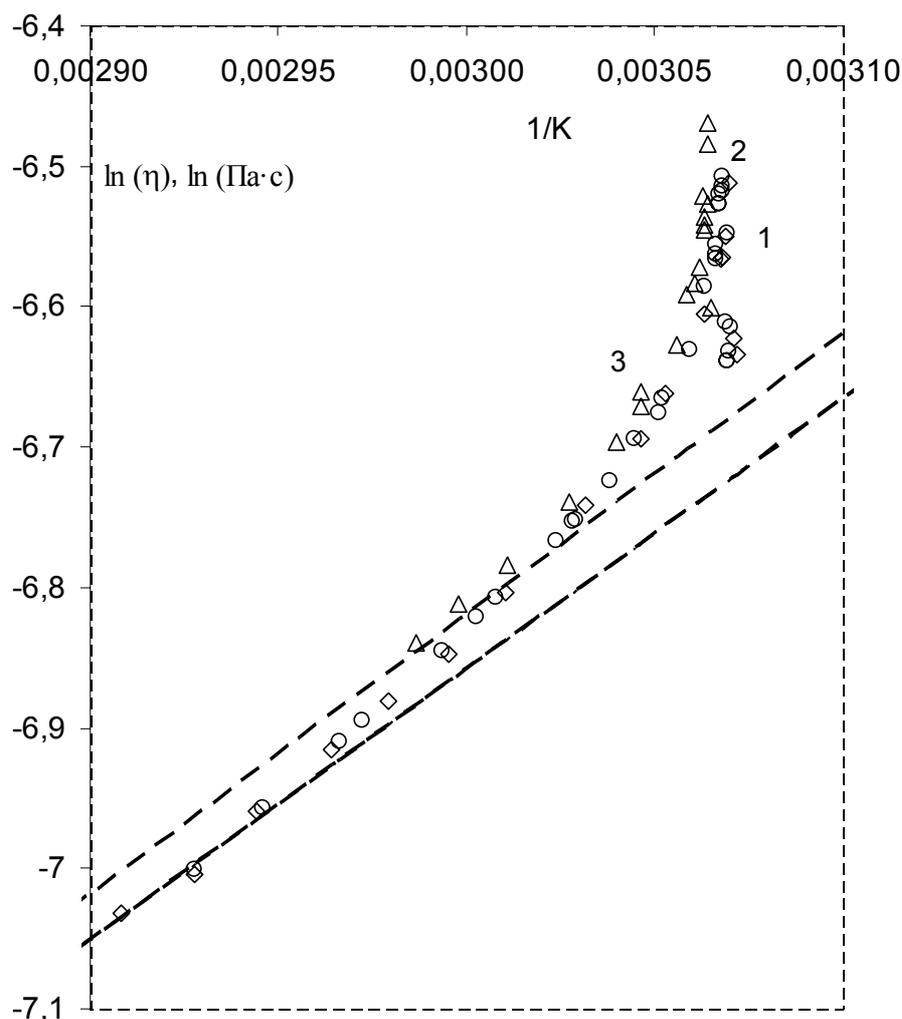


Рис. 2 - Зависимости логарифма вязкости раствора изомасляная кислота-вода + KCl (1), и раствора изомасляная кислота-вода + KCl с добавлением наночастиц лапонитов с массовой концентрацией 0,025% (2) и 0,15% (3) от обратного значения температуры. Пунктирной прямой показаны регулярные части вязкости.

Используя эти значения регулярной части вязкости, согласно формуле (2) были рассчитаны флуктуационные части вязкости: $\eta_f = \eta - \eta_r$. Полученные результаты приведены на рис. 3.

Анализ полученных температурных и концентрационных зависимостей флуктуационной части вязкости позволил сделать вывод, что при увеличении концентрации лапонитов флуктуационная часть вязкости η_f возрастает. Исходя из взаимосвязи флуктуационной части сдвиговой вязкости и радиуса корреляции системы можно сделать вывод, что добавление лапонитов в раствор приводит к увеличению радиуса корреляции раствора.

Другим проявлением влияния добавления наночастиц лапонитов является незначительное (0,5 К и 1 К при концентрациях 0,025 % и 0,15 % соответственно) смещение экстремумов флуктуационной части вязкости в сторону больших температур. Это указывает на увеличение температуры фазового перехода, а следовательно, на увеличение сил межмолекулярного взаимодействия в результате добавления наночастиц лапонитов.

Проведенные в данной работе исследования (рис. 1 - 3) раствора с добавлением лапонитов согласуются с проведенными нами ранее исследованиями температурной зависимости вязкости растворов изомасляная кислота - вода, изомасляная кислота - вода + KCl , метанол - гексан и метанол - гексан + KCl [i]. Из этих данных также следует, что добавление ионов KCl в растворы изомасляная кислота - вода и метанол - гексан приводит к увеличению флуктуационной части вязкости раствора и температуры фазового перехода.

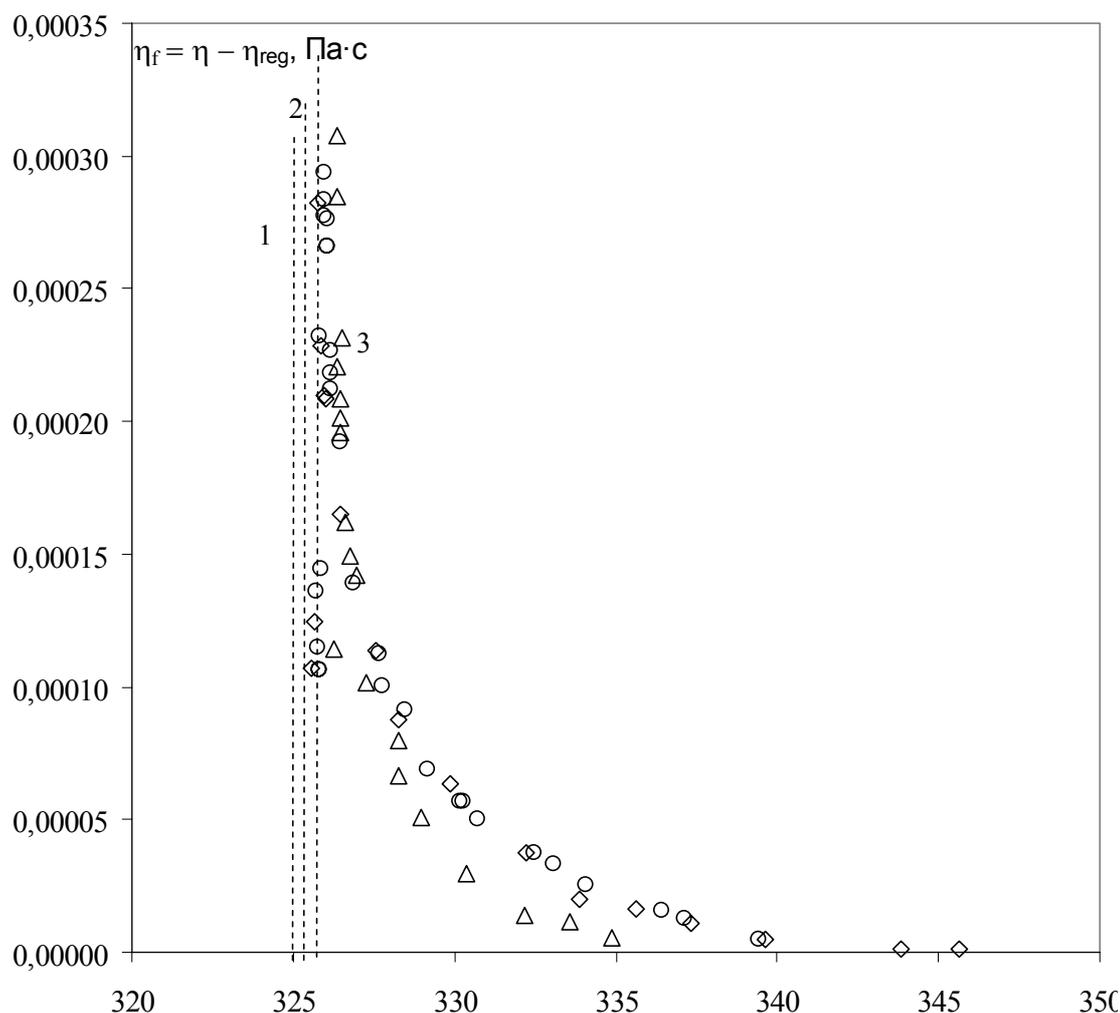


Рис. 3 - Температурные зависимости флуктуационной части вязкости раствора изомаляная кислота-вода + KCl (1), и раствора изомаляная кислота-вода + KCl с добавлением наночастиц лапонитов с массовой концентрацией 0,025% (2) и 0,15% (3). Вертикальными пунктирными линиями показано увеличение температуры фазового перехода при добавлении лапонитов.

Анализ приведенных выше результатов экспериментальных исследований (рис. 1 - 3) влияния наночастиц лапонитов на поведение вязкости раствора вблизи критической температуры расслоения позволяет сделать ряд выводов :

1. Экспериментально исследовано влияние добавления наночастиц лапонитов на кинетическую характеристику растворов - вязкость вещества. Впервые показано , что добавление наночастиц лапонитов в раствор вблизи критической температуры расслоения приводит к увеличению его вязкости.

2. Добавление наночастиц лапонитов приводит к увеличению температуры фазового перехода и увеличению сил межмолекулярного взаимодействия в растворе.

3. Сделанные выводы согласуются с результатами проведенных экспериментальных исследований вязкости растворов метанол - гексан , изомаляная кислота - вода и при добавлении к ним ионов KCl вблизи критической температуры расслоения.

Исходя из прямой взаимосвязи вязкости и радиуса корреляции системы сделан вывод, что добавление лапонитов в раствор приводит к увеличению радиуса корреляции раствора.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Алехин А.Д., Билоус О.И., Остапчук Ю.Л., Рудников Е.Г., Гаркуша Л.Н., Елеусинов Б.Т., Сборник работ международной конференции „Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах”. // Махачкала, 2010. - №379.
- 1 Ландау Л.Д. Статистическая физика. - М.: Наука, 1976. - 584 с.
- 1 Fixman M. Viscosity of critical mixtures // J. Chem. Phys. - 1962. - V.36, №2. - P.310 – 320.
- 1 Alekhin A.D. Equations of Critical Viscosity and Limits of their Application // Ukr. J. Phys. 2004, Vol. 49, N 2, p.138-140.
- 1 Alekhin A.D., Bilous O.I. Behavior of the Viscosity of Liquid Systems near the Critical Temperature of Stratification // Ukr. J. Phys. 2007, Vol. 52, N 8, p.793-797.
- 1 Alekhin A.D., Sperkach V.S., Abdikarimov B.Zh., Bilous O.I. Viscosity of Liquid Crystal Pentylcyanbiphenyl Close to the Point of the Nematic - Dielectric Liquid Phase Transition // Ukr. J. Phys. 2000, Vol. 45, N 9, p.1067-1069.

LITERATURA

- Alehin A.D., Bilous O.I., Ostapchuk Ju.L., Rudnikov E.G., Garkusha L.N., Eleusinov B.T., Sbornik rabot mezhdunarodnoj konferencii „Fazovye perehody, kriticheskie i nelinejnye javlenija v kondensirovannyh sredah”. // Mahachkala, 2010. - №379.
- Landau L.D. Statisticheskaja fizika. - M.: Nauka, 1976. - 584 s.
- Fixman M. Viscosity of critical mixtures // J. Chem. Phys. - 1962. - V.36, №2. - P.310 – 320.
- Alekhin A.D. Equations of Critical Viscosity and Limits of their Application // Ukr. J. Phys. 2004, Vol. 49, N 2, p.138-140.
- Alekhin A.D., Bilous O.I. Behavior of the Viscosity of Liquid Systems near the Critical Temperature of Stratification // Ukr. J. Phys. 2007, Vol. 52, N 8, p.793-797.
- Alekhin A.D., Sperkach V.S., Abdikarimov B.Zh., Bilous O.I. Viscosity of Liquid Crystal Pentylcyanbiphenyl Close to the Point of the Nematic - Dielectric Liquid Phase Transition // Ukr. J. Phys. 2000, Vol. 45, N 9, p.1067-1069.

СЫНДЫҚ ТЕМПЕРАТУРА МАҢЫНДАҒЫ ЕРІТІНДІ ҚАСИЕТТЕРІНЕ СЫРТҚЫ ФАКТОРДЫҢ ӘСЕРІ

Б.Ж.ӘБДІКӘРІМОВ, Б.И.МҰСАТАЕВА

Резюме

Жұмыста сындық температураға жақын изомай қышқылы-су ерітіндісіне лапонит нанобөлшегін енгізгеннен кейінгі ерітінді тұтқырлығының температуралық байланыстылығы тәжірибелік зерттелінген. Сындық температураға жақын ерітіндіге лапонит нанобөлшегін енгізу ерітінді тұтқырлығының оған байланысты жүйенің корреляция радиусының өсетіндігіне алып келетіндігі көрсетілді. Сонымен қатар лапонит нанобөлшегін енгізу жүйенің фазалық алмасу температурасының және ерітіндінің молекулааралық өзара әсер күшінің өсуіне алып келеді.

THE INFLUENCE OF EXTERNAL FACTORS ON PROPERTY OF SOLUTION NEAR THE CRITICAL TEMPERATURE OF EXFOLIATION

B.ZH. ABDIKARIMOV, B.I.MUSATAEVA

Summary

Temperature dependence of viscosity of isobutyric acid-water + KCl solution with the addition of laponite nanoparticles near the critical consolute temperature has been experimentally studied. It has been shown, that the addition of laponite nanoparticles to solution near the critical consolute temperature leads to increase of the viscosity and associated with it correlation length of the system. The addition of laponite nanoparticles also causes the increasing of the phase transition temperature and increasing of intermolecular interaction forces in the solution.

Абдикаримов Бахытхан Жунайдович

доктор физ.-мат. наук, профессор

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан

Мусатаева Бактыгул Исатайқызы

магистрант

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан

МАЗМҰНЫ

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Алдашев С.А.</i> Екінші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеулерге жазықтықта сипаттамадан ауытқыған түйіндес шекаралық есеп.....	3
<i>Исахов Ас.А.</i> Арифметикалық иерархиядағы барлық жерде анықталған функциялар үйірінің Фридберг нөмірлеулері.....	8
<i>Кәлменов Т.Ш., Нысанов Е.А., Хұшинизаров Г.М.</i> Гидродинамикалық потенциал үшін шекаралық шарт.....	11
<i>Кәлменов Т.Ш., Сұраған Д.</i> Лаплас-Бельтрами операторы үшін потенциалдың шектік шарты.....	16
<i>Мартынов Н.И.</i> Біртекті емес изотроптық серпімді ортаның коссер жалғанконтинуумының жеңілдетілген сұлбесінің жалпақ статикалық шеттік есебінің интегралдық теңдеулері.....	22
<i>Боос Э.Г., Темірәлиев Т., Избасаров М., Самойлов В.В.</i> Импульсі 32 ГэВ/с антипротон-протондық әрекеттестіктерде импульстік кеңістікте оқиғаның құрылымы.....	31
<i>Алтынбеков Ш.</i> Тұзды топырақтар консолидациясы теориясының негізгі теңдеуі және шекаралық есебі.....	35
<i>Есқалиев М.Е., Дүзбенбетов Б.Д.</i> Алдын ала жүктелген серпімді қабыршақ айналуының шағын еркін тербелістері.....	44
<i>Жақып-тегі К.Б.</i> Тұтқырлы сұйықтықтың қозғалысының реологиялық заңдары.....	51
<i>Мамаев Ш.М.</i> Цилиндрлік қабықшаны жергілікті соққылауда жүктемені қою орнының кернеулердің деңгейіне әсері.....	55
<i>Мұхамедишина Д.М., Мить, К.А. Бейсенханов Н.Б.</i> Золь-гель әдісімен синтезделген SnO ₂ және ZnO жұқа пленкалардың қасиетіне оттегі және сутегі плазмасымен өңдеудің әсері.....	62
<i>Хаджиева Л.А., Үмбетқұлова А.Б.</i> Тығыздалған және бұралған бұрғылау қарнағының сызықсыз ауытқуларының жуықтамасы туралы.....	69
<i>Бейсетаева А.К., Тайсариева К.Н.</i> Екілік жалған кездейсоқ сигналдарды түрлендіру әдістерін және қасиеттерін зерттеу.....	76
<i>Әбдікәрімов Б.Ж., Мұсатаева Б.И.</i> Сындық температура маңындағы ерітінді қасиеттеріне сыртқы фактордың әсері.....	80

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Алдашев С.А.</i> Сопряженная краевая задача с отходом от характеристики для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости.....	3
<i>Исахов Ас.А.</i> Нумерации Фридберга семейства всюду определенных функций в арифметической иерархии.....	8
<i>Кальменов Т.Ш., Нысанов Е.А., Хушнизаров Г.М.</i> Граничные условия гидродинамического потенциала.....	11
<i>Кальменов Т.Ш., Сураган Д.</i> Краевые условия потенциала для оператора Лапласа-Бельтрами.....	16
<i>Мартынов Н.И.</i> Интегральные уравнения плоских статических краевых задач упрощенной модели псевдоконтинуума Коссера неоднородной изотропной упругой среды.....	22
<i>Боос Э.Г., Темиралиев Т., Избасаров М., Самойлов В.В.</i> Структура событий в импульсном пространстве в антипротон-протонных взаимодействиях при импульсе 32 ГэВ/с.....	31
<i>Алтынбеков Ш.</i> Основное уравнение теории консолидации соленых грунтов и ее краевая задача.....	35
<i>Ескалиев М.Е., Дюзбенбетов Б.Д.</i> Малые свободные колебания предварительно нагруженной упругой оболочки вращения.....	44
<i>Жакыпов К.Б.</i> Реологические законы динамики вязкой жидкости.....	51
<i>Мамаев Ш.М.</i> Влияние места приложения нагрузки на уровни напряжений при локальном ударе по цилиндрической оболочке.....	55
<i>Мухамедшина Д.М., Мить, К.А. Бейсенханов Н.Б.</i> Влияние обработки водородной и кислородной плазмой на свойства тонких пленок SnO ₂ и ZnO, синтезированных золь-гель технологией.....	62
<i>Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б.</i> Об аппроксимации нелинейных колебаний сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях.....	69
<i>Бейсетаева А.К., Тайсариева К.Н.</i> Исследование методов генерирования двоичных псевдослучайных сигналов и их свойства.....	76
<i>Абдикаримов Б.Ж., Мусатаева Б.И.</i> Влияние внешних факторов на свойства растворов вблизи критической температуры расслоения.....	80

CONTENTS

Theoretical and experimental researches

<i>Aldashev S.A.</i> Adjoint well-posedness of a boundary-value with departure from the characteristic for linear hyperbolic equations of second order on a plane.....	3
<i>Issakhov As.A.</i> Friedberg numberings of the family of total functions in the arithmetical hierarchy.....	8
<i>Kal'menov T.Sh., Nysanov E.A., Khushnizarov G.M.</i> Boundary conditions of hydrodynamic potential.....	11
<i>Kal'menov T.Sh., Suragan D.</i> Potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami.....	16
<i>Martynov N.I.</i> Integral equations of two-dimensional statically regional problems simple model of pseudocontinuum cossera nonhomogenous isotropic elastically medium.....	22
<i>Boos E.G., Temiraliyev T., Izbasarov M., Samoilov V.V.</i> Structure of events in momentum space in antiproton-proton interactions at the momenta of 32 GeV/c.....	31
<i>Altynbekov Sh.</i> Basic equations of consolidation theory saline soil and its boundary problem.....	35
<i>Yeskaliyev M.Ye., Dewzbenbetov B.D.</i> Small free vibrations preloaded rotating shell.....	44
<i>Jakupov K.B.</i> Rheological laws of viscous fluid dynamics.....	51
<i>Mamayev Sh.M.</i> Influence of load location on the stress levels at the local impact of a cylindrical shell.....	55
<i>Mukhamedshina D.M., Mit' K.A., Beisenkhanov N.B.</i> Influence of plasma treatments on properties of the SnO ₂ and ZnO thin films prepared by the sol-gel technique.....	62
<i>Khajiyeva L.A., Umbetkulova A.B.</i> About the approximation of nonlinear fluctuations of compressed and twisted drilling rods at the finite deformation.....	69
<i>Beisetaeva A., Taissariyeva K.</i> Investigation of methods for generating pseudo-random binary signals and their properties.....	76
<i>Abdikarimov B.Zh., Musataeva B.I.</i> The influence of external factors on property of solution near the critical temperature of exfoliation.....	80

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 04.02.2014.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
5,5 п.л. Тираж 3000. Заказ 1.

