

И. О. ОРАЗОВ, А. М. САРСЕНБИ, А. А. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПАРАТОРЫНЫҢ ЕКІЕСЕЛІ СПЕКТРИ ЖАЙЫНДА

Аннотация. Бұл еңбекте Штурм-Лиувиллдің онша тұрлаулы емес операторының структурасының алгебралық себептері айқындалды, соның арқасында оператордың индефиниті кеңістіктегі таралымдары табылды.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля, собственные функции, присоединенные функций.

Keywords: the operator of Sturm-Liouville, own functions, attached functions.

Спектрлері еселі операторлар туралы еңбектерді саусақпен санауға болады, дерліктей, солардың бірі [1] $L^2(a,b)$ кеңістігінде $l(y)$ дифференциалдық өрнегінен туындайтын L операторының, мұндағы

$$l(y) = -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} y(x) \right] + q(x)y(x) \quad (a < x < b),$$

спектрінің еселік қасиеттерін, $l[y] - \lambda y = 0$, дифференциалдық теңдеуінің (a, c) және (c, b) аралықтарындағы шекаралық есептерінің спектралдік қасиеттерімен байланыстырады.

Бұл еңбекте біз L операторының өте қарапайым сәтін егжей-тегжейлі зерттеп, түпкілікті нәтижелер алдық. Зерттеу нысананың дербес жағдайларын [2] еңбектен көруге болады.

Гилберттің $L^2(0,1)$ кеңістігінде, мынадай,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_j[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

шекаралық есебін қарастыралық, мұндағы a_{ij} ($i = 1,2; j = 1,2,3,4$) алдын-ала белгілі комплекс сандар, ал λ – алдын-ала белгісіз спектралді параметр. Оның нақты мәндері, есепті шешу барысында, анықталады. Бұл есептің нөлге тең ($y(x) \equiv 0$) шешімі әруақта бар екені айдан анық, біз мұндай шешімдерге назар аудармаймыз және оларды елеусіз (ескерусіз) шешімдер дейміз, ал нөлден өзгеше шешімдерді елеулі шешімдер қатарына жатқызамыз.

Әлгі λ -параметрінің елеулі шешімдерге сәйкес мәндерін шекаралық есептің меншікті мәндері дейміз, ал оларға тиісті елеулі шешімдерді шекаралық есептің меншікті функциялары делік.

Есептің $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ меншікті мәндерінің жиынын осы (1)-(2) шекаралық есептің спектрі дейік.

Егер меншікті мәнінің сәтінде (1)-(2) есебі k -рет шешілсе, онда оны k -еселік дейді [3, с. 193].

Мына,

$$y_1(\lambda; 0) = y_2'(\lambda; 0) = 1; \quad y_1'(\lambda; 0) = y_2(\lambda; 0) = 0$$

бастапқы шарттарға (1) теңдеудің, мынадай,

$$y_1(\lambda; x) = \cos \sqrt{\lambda}x, \quad y_2(\lambda; x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \quad (3)$$

шешімдерінің фундаменталді системасы сәйкес келеді. Жоғарыдағы (1) теңдеудің жалпы шешімі осы шешімдердің сызықтық комбинациясы болғандықтан,

$$y(x; \lambda) = A y_1(\lambda; x) + B y_2(\lambda; x),$$

мұнан

$$U_i[y] = A[a_{i1} + a_{i3}y_1(\lambda; 1) + a_{i4}y_1'(\lambda; 1)] + B[a_{i2} + a_{i3}y_2(\lambda; 1) + a_{i4}y_2'(\lambda; 1)] = 0 \quad (i = 1,2)$$

Демек, (1)-(2) шекаралық есебінің елеулі шешімі бар болуы үшін, мына,

$$\begin{cases} A[a_{11} + a_{13}y_1(\lambda; 1) + a_{14}y_1'] + B[a_{12} + a_{13}y_2(\lambda; 1) + a_{14}y_2'(\lambda; 1)] = 0, \\ A[a_{21} + a_{23}y_1(\lambda; 1) + a_{24}y_1'(\lambda; 1)] + B[a_{22} + a_{23}y_2(\lambda; 1) + a_{24}y_2'(\lambda; 1)] = 0 \end{cases}$$

теңдеулер системасының елеулі шешімінің бар болуы қажетті әрі жеткілікті.

Егерде біз $W[y_1, y_2]$ - вронскианының бірге тең екенін ескере отырып, жоғарыдағы теңдеулер системасының анықтауышын есептесек, мынадай,

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \Delta_{42} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \quad (4)$$

формула аламыз, мұндағы $\Delta_{ij} = a_{i1} \times a_{2j} - a_{2i} \times a_{1j}$ – дегеніміз,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad (5)$$

– матрицасының i -ші және j -ші бағандарынан құрылған минор. Меншікті λ_0 мәнінің еселігі, оның, $\Delta(\lambda)$ функциясының нөлі ретіндегі еселігінен артпайды, онан кем немесе тең. Бұл еселіктердің бірдей болуы шарт емес, олар әртүрлі болуы-да мүмкін. Меншікті мәндерінің еселік көрсеткіштерінен кем болған сәтте қосарлас функциялар [4] пайда болады, біз дәл осы сәтке тоқталмақпыз.

МӘСЕЛЕ. Айталық, $\Delta(\lambda)$ – характеристикалық детерминантының еселік нөлдерінің жиыны еңдеулі жиын болсын, онда (1)-(2) шекаралық есептің шекаралық шарттары қандай болады деген сұрақ көлденең тұрады. Мысалы, бұл (1)-(2) есептің кем дегенде екі-екіеселі меншікті мәндері бар болса, онда оның шекаралық шарттары, мынадай,

$$y(0) + ky(1) = 0, y'(0) + ky'(1) = 0 \quad (k^2 = 1)$$

болары белгілі [2].

КӨМЕКШІ МӘЛІМЕТТЕР

1-ЛЕММА.

(а) Егер $a \times d \neq 0$ болса, онда, мына,

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda} \right) \times \sin \sqrt{\lambda} + c \times \cos \sqrt{\lambda} = 0 \quad (6)$$

теңдеудің нөлден өзгеше еселі нөлдерінің саны төрттен артпайды;

(б) Егер $a = 0, d \neq 0$ болса, онда (6) теңдеудің нөлден өзгеше еселі нөлдерінің саны екіден артпайды;

(в) Егер $d = 0, b \neq 0$ болса, онда (6) теңдеудің еселі нөлдерінің саны екіден артпайды.

САЛДАР 1. Егер $d = 0, b \neq 0, c^2(a^2 - c^2) = 0$ болса, онда (6) теңдеудің еселі нөлі тек біреу ғана болуы мүмкін.

САЛДАР 2.

Егер $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0,$

$b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^3c \neq 0$ болса, онда (6) теңдеуінің еселі нөлдері жоқ, мысалы $c = 0, a = 0, b \neq 0$ сәтінде.

2-лемма.

Егер $c \neq 0$ және

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} + c \times \cos \sqrt{\lambda}$$

функциясының еселі нөлдерінің саны екіден артық болса, онда

$$b = 0, a^2 = c^2$$

болады.

3. СТРУКТУРАЛЫҚ НӘТИЕЖЕЛЕР

1-теорема.

Егер (1)-(2) шекаралық есептің характеристикалық детерминантының еселі нөлдерінің жиыны еңдеулі болса, онда (2) шекаралық шарттың тұрлаулылығы (регулярный) шамалы ғана [4, 71 б.].

2-теорема

Егер (1)-(2) шекаралық есептің характеристикалық детерминантының еселі нөлдерінің жиыны еңдеулі болса, онда бұл шекаралық есепке сай оператор төмендегі екі кейіптің біріне енеді:

$$\text{a) } L_1(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C}, k \neq 1; \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } L_2(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) - y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C}, k \neq \pm 1 \\ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

немесе осы операторларға сыңарлас (формально сопряженный) операторлардың кейіпіне енеді, мұндағы k -дегеніміз кең комплекс жазықтығына тиісті.

3-теорема.

Егер, төменгі,

$$Ay = iy'(x); y(0) + ky(1) = 0, \quad k \in \mathbb{C}, k \neq -1$$

$$Bz = iz'(x); z(0) + z(1) = 0$$

формулалар арқылы A және B операторлары анықталса, онда, мына,

$$1) L_1(k) = B \times A;$$

$$2) L_3\left(\frac{1}{k}\right) = AB \quad k \in \mathbb{C}, k \neq -1$$

формулалар орынды, мұндағы

$$L_1(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0 \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_3(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) + y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C}, k \neq -1. \\ y(0) + y(1) = 0 \end{cases}$$

4-теорема.

Егер, төмендегі,

$$Cy = iy'(x), ky(0) - y(1) = 0, \quad k \in \mathbb{C}, k \neq -1;$$

$$Dz = iz'(x), \quad z(0) - z(1) = 0$$

формулалары арқылы C және D операторлары анықталса, онда, мына,

$$L_2(k) = C \times D;$$

$$L_4(k) = D \times C$$

формулалар орынды, мұндағы $L_2(k)$, $L_4(k)$ – дегендеріміз:

$$L_2(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_4(k)y = -y''(x); x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - ky(1) = 0; \end{cases}$$

5-теорема.

Егер $k^2 \neq 1$ болса, онда, мына,

$$L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(0)P(k), \quad P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$$

$$L_2(k) = Q^{-1}(k)L_2(\infty)Q(k), \quad Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x)$$

теңдіктер орындалады.

6-теорема.

Егер I – бірлік оператор, ал $Su(x) = u(1-x)$ болса, онда мына,

$$\dot{L}_1(k) = L_1(k) (KI + S)^{-1} - (KI + S)^{-1} L_1(k)$$

теңдік орынды, мұндағы (°) – дегеніміз k-бойынша туынды.

СПЕКТРӘЛДІ ТАРАЛЫМДАР

Төмендегі 7, 8 теоремалар, жоғарыдағы 3, 4-структуралық теоремалардың айдан-анық салдарлары.

7-теорема.

Егер $k \neq 1$ болса, онда төмендегі формулалар орынды

$$a) L_1(k)u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (Au, \varphi_n) \times \varphi_n \quad (7)$$

мұндағы $u \in D(L_1)$, $B\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$

$$b) L_1^{-1}(k)u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(B^{-1}u, \psi_m)}{\mu_m} \times \varphi_m \quad (8)$$

мұндағы $A^*\psi_m = \mu_m \psi_m$, $A\varphi_m = \mu_m \varphi_m$, $(\psi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}$;

8-теорема.

Егер $k \neq -1$ болса, онда төмендегі спектрәлді таралым орынды

$$L_2(k)u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k (Du, \psi_k) \times \varphi_k, \quad (9)$$

мұндағы

$$(\psi_k, \varphi_m) = \delta_{km}, \quad C_{\varphi_k} = v_k \varphi_k, \quad C^* \psi_k = \bar{v}_k \psi_k.$$

Жоғарыдағы (8), (9) формулалар индефинитті кеңістіктегі спектрәлді таралымдар болып саналады, ал (7) +++++ $|k| = 1$ сәтінде осылай болады.

9-теорема. Егер төмендегі

$$Au = -u''(x); \quad u(0) = 0, u'(0) - u'(1) = 0;$$

$$Bv = -v''(x); \quad v(0) = 0, v'(0) + v'(1) = 0;$$

$$Tu = u''(1-x); \quad u(0) = 0$$

формулалар арқылы А, В, Т операторлары анықталса, онда, мына,

$$TA = A^*T, \quad TB = B^*T$$

формулалар орынды, мұндағы A^* және B^* сыңарлас операторлар.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Кац И.С. Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям // Известия академии наук СССР. Серия математическая, 27 (1963), 1081-1112.
- 2 Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. двукратных собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля // Институт математики МО и Н РК «Математический журнал». – Алматы, 2012. – Т. 12, № 3(45). – С. 1-6.
- 3 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- 4 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

- 1 Kac I.S. Kratnost' spektra differencial'nogo operatora vtorogo porjadka i razlozhenie po sobstvennym funkciyam. Izvestija akademii nauk SSSR. Serija matematicheskaja, 27 (1963), 1081-1112.
- 2 Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. dvukratnyh sobstvennyh znachenijah operatora Shturma-Liuuillja. Institut matematiki MO i N RK «Matematicheskij zhurnal». Almaty, 2012. T. 12, № 3(45). S. 1-6.
- 3 Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1971. 576 s.
- 4 Najmark M.A. Linejnnye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 s.

Резюме

И. О. Оразов, А. М. Сарсенби, А. А. Шалданбаев

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

СТРУКТУРЫ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ
С НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной работе описан алгебраический механизм структуры операторов Штурма-Лиувилля с неусиленно регулярными краевыми условиями и получены спектральные разложения таких операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля, собственные функции, присоединенные функций.

Summary

I. O. Orazov, A. M. Sarsenbi, A. A. Shaldanbaev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan)

STRUCTURE OF OPERATORS OF THE STURM-LIOUVILLE
WITH NEWSLINE REGULAR BOUNDARY CONDITIONS

In this work is described algebraic mechanism structure exponentiation Sturm-Liouville operator with hard regular Sobolev space and received the spectral decomposition of such operators in spaces with indefinite metric.

Keywords: the operator of Sturm-Liuivillay, own functions, attached functions.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 517.9

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан)

КРИТЕРИЙ ИРРЕГУЛЯРНОСТИ
ОПЕРАТОРА ШТУРМА- ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе установлен критерии иррегулярности оператора Штурма-Лиувилля¹, выраженный в терминах миноров граничной матрицы. Этот признак отличается от известных своей практичностью.

Ключевые слова: оператор Штурм-Лиувилля, собственные функций, присоединенные функций.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Keywords: the operator of Sturm-Liuivillay, own functions, attached functions.

1. В монографии [2] построена теория операторов Штурма-Ливулля, основанная на теории целых функций [3]. Структура спектра операторов Штурма-Ливулля была детально исследовано в [4], тем не менее, некоторые вопросы еще остаются открытыми.

2. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператора Штурма-Ливулля

$$ly = -y''(x), \quad x \in (0,1) \quad (2.1)$$

$$U_1(y) = a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0,$$

$$U_2(y) = a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \quad (2.2)$$

с двумя линейно независимыми краевыми условиями (2.2), где $a_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$ произвольные комплексные постоянные, $y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$. Областью определения оператора L является линейное многообразие

$$D(L) = \{y(x) \in D(L): y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1], U_i(y) = 0, i = 1, 2\}.$$

Постановка задачи. Предположим, что граничные условия (2.2) являются иррегулярными [1, с.73], тогда какими будут коэффициенты граничных условий a_{ij} ?

Для решения этой задачи предположим несколько лемм.

Лемма 2.1. Если имеет место равенства

$$\Delta_{42} = 0;$$

$$|\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| = 0$$

то граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу [1, с.73].

Доказательство.

Из условий леммы тождества $\Delta_{13} \times \Delta_{24} = \Delta_{12} \times \Delta_{34} - \Delta_{14} \times \Delta_{32}$ имеем $\Delta_{14} \times \Delta_{32} = 0$. Возможны следующие три случая:

а) $\Delta_{14} = 0$ и $\Delta_{32} = 0$;

б) $\Delta_{14} \neq 0$ и $\Delta_{32} = 0$;

в) $\Delta_{14} = 0$ и $\Delta_{32} \neq 0$

В случае а) $\Delta_{13} \neq 0$, иначе граничные условия (2.2) окажутся линейно зависимыми.

Поэтому граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) + \Delta_{23}y'(0) + \Delta_{43}y'(1) = 0, \\ \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) = 0, \\ \Delta_{13}y(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) = 0, \\ \Delta_{13}y(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Тогда граничная матрица принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

следовательно, $a_{12} = a_{14} = a_{22} = a_{24} = 0, \Delta_{13} \neq 0$, т.е. граничные условия (2.2) регулярны по 3) пункту определения Биркгофа.

б) $\Delta_{14} \neq 0$ и $\Delta_{32} = 0$;

В этом случае граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \\ \Delta_{14}y(0) + \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{34}y(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0; \\ \Delta_{14}y(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0; \\ \Delta_{14}y(0) = 0; \end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\Delta_{24} = 0$ и $a_{14} = \Delta_{14} \neq 0$, то 1) и 3) пункты определения Биркгофа не выполняются, поэтому проверим 2) пункта.

$$|a_{12}| + |a_{14}| = |\Delta_{14}| > 0,$$

$$a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = \Delta_{14} \times \Delta_{14} + 0 \cdot 0 = \Delta_{14}^2 \neq 0,$$

следовательно граничные условия регулярны по второму пункту определения Биркгофа [1, с. 73].

в) $\Delta_{14} = 0$ и $\Delta_{32} \neq 0$;

В этом случае граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) + \Delta_{23}y'(0) + \Delta_{43}y'(1) = 0, \\ \Delta_{21}y(0) + \Delta_{23}y(1) + \Delta_{24}y'(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_{13}y(0) + \Delta_{23}y'(0) = 0, \\ \Delta_{23}y(1) = 0 \end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta_{13} & \Delta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24} = 0$ и $a_{12} = \Delta_{23} \neq 0$, то пункты 1) и 3) определения Биркгофа [1, с.73], не выполняются, поэтому проверим 2) пункта.

$$|a_{12}| + |a_{14}| = |a_{23}| + 0 = |a_{23}| > 0,$$

$$a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = 0 \times 0 + \Delta_{23} \times \Delta_{23} = \Delta_{23}^2 \neq 0,$$

следовательно граничные условия регулярны по Биркгофу по второму пункту определения Биркгофа. Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Если имеет место соотношения

$$\Delta_{24} = 0;$$

$$|\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| \neq 0,$$

$$\Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0$$

то граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу.

Доказательство.

Из 2) условия леммы следует, что возможны два случая, либо $\Delta_{12} \neq 0$, либо $\Delta_{34} \neq 0$.

Если $\Delta_{12} \neq 0$, то граничные условия (2.2) принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{12} \times y(0) + \Delta_{32}y(1) + \Delta_{42}y'(1) = 0, \\ \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \\ \Delta_{12}y(0) + \Delta_{32}y(1) = 0. \end{cases}$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{12} & 0 & \Delta_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24} = 0$ и $a_{12} = \Delta_{12} \neq 0$, то 1) и 3) случай регулярности по Биркгофу не выполняются, поэтому проверим 2) случая.

$$|a_{12}| + |a_{14}| = |\Delta_{12}| + |\Delta_{14}| > 0,$$

$$a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = \Delta_{14} \times \Delta_{12} + \Delta_{12} \times \Delta_{32} = \Delta_{12}(\Delta_{14} + \Delta_{32}) \neq 0$$

следовательно, в этом случае граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу.

Если $\Delta_{34} \neq 0$, то граничные условия (2.2) принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{31}y(0) + \Delta_{32}y'(0) + \Delta_{34}y'(1) = 0, \\ \Delta_{34}y(0) + \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{34}y(1) = 0; \\ \Delta_{31}y(0) + \Delta_{32} \times y'(0) + \Delta_{34}y'(1) = 0, \\ \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

Тогда граничная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta_{31} & \Delta_{32} & 0 & \Delta_{34} \\ \Delta_{14} & 0 & \Delta_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24} = 0$ и $a_{14} = \Delta_{34} \neq 0$, то 1) и 3) пункты регулярности по Биркгофу не выполняются, поэтому проверим 2) случая.

$$|a_{12}| + |a_{14}| = |\Delta_{32}| + |\Delta_{34}| > 0,$$

$$a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = \Delta_{34} \times \Delta_{14} + \Delta_{32} \times \Delta_{34} = \Delta_{34}(\Delta_{14} + \Delta_{32}) \neq 0;$$

следовательно граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу по 2) пункту определения Биркгофа.

Теорема 2.1. Оператор Штурма-Лиувилля (2.1) – (2.2) является иррегулярным тогда и только тогда, когда имеет место следующие условия:

$$\Delta_{24} = 0; 2) |\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| \neq 0; 3) \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0.$$

Доказательство

а) Необходимость

Предположим, что граничные условия (2.2) иррегулярны по Биркгофу, тогда $\Delta_{24} = 0$, иначе они окажутся регулярными по Биркгофу по первому пункту регулярности. Если $\Delta_{24} = 0$ и $|\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| = 0$, то граничные условия (2.2) регулярны, в силу доказанной леммы 2.1, поэтому $|\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| \neq 0$. Если имеет место соотношения $\Delta_{24} = 0, |\Delta_{12}| + |\Delta_{34}| \neq 0$ и $\Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0$, то граничные условия (2.2) регулярны по Биркгофу по утверждению леммы 2.2, поэтому $\Delta_{14} + \Delta_{32} = 0$.

б) Достаточность.

Из условия 2) следует, что либо $\Delta_{12} \neq 0$, либо $\Delta_{34} \neq 0$.

Если $\Delta_{12} \neq 0$, то граничные условия (2.2) принимают следующий вид

$$\begin{cases} \Delta_{12} \times y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \\ \Delta_{12}y(0) + \Delta_{32}y(1) = 0; \end{cases}$$

Этому граничному условию соответствует граничная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{12} & 0 & \Delta_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{24} = 0$ и $|\Delta_{12}| + |\Delta_{14}| > 0$, то 1) и 3) пункты условий Биргофа не выполняются, остается проверка второго условия:

$$\begin{aligned} \Delta_{24} = 0, \quad |\Delta_{12}| + |\Delta_{14}| > 0, \quad a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = \\ = \Delta_{14} \times \Delta_{12} + \Delta_{12} \times \Delta_{32} = \Delta_{12}(\Delta_{14} + \Delta_{32}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, второе условие Биркгофа также не выполняется, поэтому граничные условия (2.2) иррегулярны.

Если $\Delta_{34} \neq 0$, то матрица граничных условий имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta_{31} & \Delta_{32} & 0 & \Delta_{34} \\ \Delta_{14} & 0 & \Delta_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\Delta_{24} = 0$ и $|\Delta_{32}| + |\Delta_{34}| > 0$, поэтому 1) и 3) пункты условий Биркгофа не выполняются, поэтому проверим второго условия:

$$a_{14} \times a_{21} + a_{12} \times a_{23} = \Delta_{34} \Delta_{14} + \Delta_{32} \Delta_{34} = \Delta_{34} (\Delta_{14} + \Delta_{32}) = 0,$$

т.е. второе условие Биркгофа также не выполняется, следовательно граничные условия (2.2) иррегулярны.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 529 с.
- 2 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 329 с.
- 3 Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
- 4 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

REFERENCES

- 1 Naimark M.A. Lineinye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 (in Russ.).
- 2 Marchenko V.A. Operatory Sturma-Liuvillya i ih prilozheniya. Kiev: Nauka dumka, 1977. 332 (in Russ.).
- 3 Leont'ev A.Ph. Celye funktsii. Ryady exponent. M.: Nauka, 1983. 17 (in Russ.).
- 4 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O structure spectra kraevoi zadachi Shturma-Liuvillya na konechnom otrezke vremeni. Izvestiya AN RK. Serya phis.-math. 2000. № 3. 29-34(in Russ.).

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан)

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ҮЗІЛДІ-КЕСІЛДІ БЕЛГІСІ

Бұл еңбекте тұрлаусыз Штурм-Лиувилл операторының үзілді-кесілді белгісі табылды.

Тірек сөздер: Штурм-Лиувиллдің операторы, меншікті функциялар, қосарлас функциялар.

Summary

A. Sh. Shaldanbaev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan)

THE CRITERION OF REGULYARNOSTI OPERATOR OF STURM – LIOUVILLE

In this work is the heading no regular Sturm-Liouville operator ,expressed in terms boundary matrix presenting. This symptom is different, from the well-known, its practicality.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay, own functions, attached functions.

Поступила 05.05.2014 г.

МАЗМҰНЫ

Теориялық физика

Боикаев К.А. Нейтрон жұлдыздардың магнит өрісін зерттеу.....	3
Темиров Б.К. Шеткі айырымы бар m -туынды тақ түрлерінің эллиптикалық операторларымен сызықты емес интегралды дифференциалды-айырым теңдеуі осцилляция шешімі.....	11
Темиров Б.К. Шеткі айырымы бар m -туынды тақ түрлерінің сызықты емес интегралды-айырым теңдеуі шешімінің осцилляция белгісі.....	17

Плазма, газдар және сұйықтар физикасы

Асқарова А.С., Гороховски М.А., Бөлегенова С.Ә., Березовская И.Э., Оспанова Ш.С. Жоғары қысымдар мен Рейнольдс санының жоғары мәндеріндегі цилиндрлік жану камерасындағы әртүрлі сұйық отындардың жану процесіне бұрқу жылдамдығының әсерін сандық зерттеу.....	22
Жұмағұлова Қ.Н., Машеева Р.У., Аханов Р. Тозанды бөлшектердің спектрлік функциясын зерттеу.....	26
Асқарова А.С., Бөлегенова С.Ә., Гороховски М.А., Березовская И.Э., Оспанова Ш.С. Бұрқу жылдамдығының тетрадеканның жану процесіне әсерін сандық зерттеу.....	32

Ақпараттық жүйелер

Түкеев У.А., Болатбек М.А., Илжанов М.А., Разахов А.Х. Қазақ-орыс машиналық аудармасы көпмәнді бейнелеу аппараты негізінде.....	38
Болатбек М.А., Байсылбаева К.Д. Қазақ-орыс және кері бағыттағы машиналық аударманың грамматикалық сәйкестіктері.....	46

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

Әжібекова Ә.С. Мұнай қабаттың параметрлерін анықтау кері есебін шешуге арналған итерациялық тәсіл.....	53
Ақжігітов Е.А., Қадырбаева Ж.М. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық шарты бар сызықты шеттік есебінің шешілімділігі.....	58
Алдашев С.А. Көп өлшемді Лаплас теңдеуіне цилиндр облысында Пуанкаре есебінің корректілігі.....	62
Бараев А., Жұмабаев М.Ж., Төлеп А.С. Қисық сызықты пішіні бар қатты дененің беткі жағын айналдыра қоршап тұрған жіпке сол жақ соңынан сокқы беру.....	67
Бөлен А. 2^1 модулі бойынша Дирихле характерімен Гаусс қосындылары және олардың қолданулары.....	77
Арғынова А.Х., Гайтинов А.Ш., Лебедев И.А., Локтионов А.А., Харчевников П.Б. Фотоэмульсия ядроларымен әрекеттесуіндегі Au (10 А-ГэВ) және Pb (158 А-ГэВ) көп зарядты бөліктер ядроларының түзілуі.....	85
Есқалиев М.Е., Қожамқұлова Ж.Ж. Күрделі құрылымды жер сілемдеріндегі серпімді емес өзгерістер аймақтарын есептеп шығару.....	90
Садықов А.А., Жайлаубаев Е.Б., Тайсариева К.Н. Блоктық кодтарды алгебралық және алгебралық емес әдістерімен салыстыру.....	94
Исмаилов Н.А. Еркін Новиков алгебрасының ішкі S_n -модульдері.....	98
Қаирбаева А.Ж., Жұмаиш А.М. Информатика мамандарын кәсіби даярлаудағы инновациялық технологиялар.....	105
Қожамқұлова Ж.Ж., Нүсіпбекова А.Н. Интербелсенді әдістер арқылы жоғары оқу орнында оқыту.....	108
Нұрғабұл Д.Н. Жоғарғы туындыларының жанында кішкене параметрі бар дифференциалдық теңдеу үшін шекаралық есеп шешімін құру.....	113
Толубаев Ж.О. Жартылай осьтегі екінші ретті Вольтерра–Стилтьес интегралды-дифференциалдық теңдеуі сызықты жүйесі шешуінің бір класы туралы.....	119
Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Аяшева Е.С., Дайырбеков С.С., Сансызбаева А.С., Үсіпбекова Д.И. Орталық ньютон күш өрісінде қатты дене динамикасының бір интегралданатын кезі туралы.....	128
Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Әбжапбаров А., Дайырбеков С.С., Қытайбеков Е., Жолдасов С. $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$ интервалында $A = B = 4C$ шартындағы Эйлер бұрыштарын анықтау.....	131
Алдашев С.А. Көп өлшемді Лаврентьев–Бицадзе теңдеуіне цилиндрлік аймақта Дирихле есебінің корректілігі.....	136
Алексеева Л.А. Термосерпімді өзек динамикасының стационарлық шеттік есебі.....	144
Оразов И.О., Сарсенби А.М., Шалданбаев А.А. Штурм-Лиувил операторының екіеселі спектрі жайында.....	153
Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. Штурм-Лиувил операторының үзілді-кесілді белгісі.....	157

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретическая физика

<i>Бошикаев К.А.</i> Исследование магнитного поля нейтронных звезд.....	3
<i>Темиров Б.К.</i> Осцилляция решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков с эллиптическим оператором.....	11
<i>Темиров Б.К.</i> Признак осцилляции решений линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков.....	17

Физика плазмы, газов и жидкостей

<i>Аскарова А.С., Гороховски М.А., Болегенова С.А., Березовская И.Э., Оспанова Ш.С.</i> Численное исследование влияния скорости впрыска на процесс горения жидкого топлива различного вида при высоких давлениях и высоких числах Рейнольдса в цилиндрической камере сгорания.....	22
<i>Джумагулова К.Н., Машеева Р.У., Аханов Р.</i> Исследование спектральной функций пылевых частиц.....	26
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Гороховски М.А., Березовская И.Э., Оспанова Ш.С.</i> Численное исследование влияния скорости впрыска на процесс горения тетрадекана.....	32

Информационные системы

<i>Тукеев У.А., Болатбек М.А., Ильжанов М.А., Разахов А.Х.</i> Казахско-русский машинный перевод на основе аппарата многозначных отображений.....	38
<i>Болатбек М.А., Байсылбаева К.Д.</i> Грамматические соответствия машинного перевода с казахского на русский язык и обратно.....	46

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Ажибекова А.С.</i> Итерационный подход к решению комбинированной обратной задачи идентификации параметров нефтяного пласта.....	53
<i>Акжигитов Е.А., Кадирбаева Ж.М.</i> Разрешимость линейной краевой задачи с интегральным условием для нагруженных дифференциальных уравнений.....	58
<i>Алдашев С.А.</i> Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.....	62
<i>Барбаев А., Жумабаев М.Ж., Тулеп А.С.</i> Удар по левому концу нити, огибающей поверхности твердого тела, имеющего криволинейную форму.....	67
<i>Болен А.</i> Гауссовы суммы для характеров Дирихле по модулю 2^l и их приложения.....	77
<i>Аргынова А.Х., Гайтинов А.Ш., Лебедев И.А., Локтионов А.А., Харчевников П.Б.</i> Образование многозарядных фрагментов ядер Au (10 А·ГэВ) и Pb (158 А·ГэВ) во взаимодействиях с ядрами фотоэмульсии.....	85
<i>Ескалиев М.Е., Кожамкулова Ж.Ж.</i> К расчету развития области неупругой деформации в грунтовом массиве сложного строения.....	90
<i>Садыков А.А., Жайлаубаев Е.Б., Тайсариева К.Н.</i> Сравнение алгебраических и неалгебраических методов блоковых кодов.....	94
<i>Исмаилов Н.А.</i> S_n -подмодули свободной алгебры Новикова.....	98
<i>Каирбаева А.Ж., Жумаиш А.М.</i> Инновационные технологии при профессиональной подготовке специалистов информатики.....	105
<i>Кожамкулова Ж.Ж., Нусипбекова А.Н.</i> Обучение в высших учебных заведениях с помощью интерактивных методов.....	108
<i>Нургабыл Д.Н.</i> Построения решения краевой задачи для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.....	113
<i>Толубаев Ж.О.</i> Об одном классе решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка вольтерра-стильеса на полуоси.....	119
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Аяшева Е.С., Даирбеков С.С., Сансызбаева А.С., Усипбекова Д.И.</i> Об одном интегрируемом случае динамики твердого тела в центральном ньютоновском поле тяготения.....	128
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Абжапбаров А., Дайырбеков С.С., Кытайбеков Е., Жолдасов С.</i> Определение углов Эйлера в случае $A = B = 4C$ на интервале $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$	131
<i>Алдашев С.А.</i> Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе.....	136
<i>Алексеева Л.А.</i> Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней.....	144
<i>Оразов И.О., Сарсенби А.М., Шалданбаев А.А.</i> Структуры операторов Штурма-Лиувилля с неусиленно регулярными краевыми условиями.....	153
<i>Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Критерий иррегулярности оператора Штурма- Лиувилля.....	157

CONTENTS

Theoretical physics

<i>Boshkayev K.A.</i> Investigation of the magnetic field of neutron stars.....	3
<i>Temirov B.K.</i> Oscillation of the solutions of nonlinear difference-integro-differential equation with elliptic operator and finite differences m -arbitrary odd order.....	11
<i>Temirov B.K.</i> Sign of oscillations of the solutions of linear integro-differential equations with finite differences arbitrary m -odd order.....	17

Physics of plasma, gases and liquids

<i>Askarova A.S., Gorokhovski M.A., Bolegenova S.A., Berezovskaya I.E., Ospanova Sh.S.</i> Numerical investigation of injection speed influence on the combustion process of different kind of fuel at high pressures and high reynolds's numbers in the cylindrical combustion chamber.....	22
<i>Dzhumagulova K.N., Masheeva R.U., Akhanov R.</i> Investigation of spectral function of dust particles.....	26
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Gorokhovski M.A., Berezovskaya I.E., Ospanova Sh.S.</i> Numerical study of the influence of the spray velocity on the tetradecane's combusti.....	32

Information systems

<i>Tukeev U.A., Bolatbek M.A., Ilzhanov M.A., Razakhov A.Kh.</i> Kazakh-Russian machine translation based on the unit-valued mappings.....	38
<i>Bolatbek M.A., Baisylbaeva K.D.</i> Grammatical matching machine translation from Kazakh into Russian and back.....	46

Theoretical and experimental researches

<i>Azhibekova A.S.</i> Iterative approach for solving a combined inverse problem of identifying reservoir parameters.....	53
<i>Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M.</i> Solvability of linear boundary value problem with integral condition for loaded differential equations.....	58
<i>Aldashev S.A.</i> Correctness of Poincare's problem in a cylindrical region for Laplace's multi-measured equation.....	62
<i>Baraev A., Zhumabaev M.Zh., Tulep A.S.</i> Kick on the left end of the string, envelope surface of a rigid body with a curved shape.....	67
<i>Bolen A.</i> Gaussian sums for characters of Dirichlet on the module 2^l , and their appendix.....	77
<i>Argynova A.Kh., Gaitinov A.Sh., Lebedev I.A., Loctionov A.A., Kharchevnikov P.B.</i> Formation of multicharging fragments of nucleus (10A-GeV) and (158A-GeV) in interactions with photoemulsion nucleus.....	85
<i>Yeskaliyev M.E., Kozhamkulova Zh.Zh.</i> To the calculation of the development of the field of inelastic deformation in the earthen array of complex structure.....	90
<i>Sadykov A.A., Zhajlaubaev E.B., Tajsarieva K.N.</i> Comparison of methods algebraic and non-algebraic block codes.....	94
<i>Ismailov N.A.</i> S_n -submodules of free Novikov algebras.....	98
<i>Kairbaeva A.Zh., Zhumash A.M.</i> Innovative technology in vocational training information.....	105
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Nusipbekova A.N.</i> Training in institutions of higher education using interactive methods.....	108
<i>Nurgabyl D.N.</i> A construction solution of boundary value problem for linear differential equations with small parameter at higher derivatives.....	113
<i>Tolubaev Zh.O.</i> On a class of solutions of linear integral-equations of second order differentsialnyh Volterra-Stieltjes on the half.....	119
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Ajasheva E.S., Dairbekov S.S., Sansyzbaeva A.S., Usipbekova D.I.</i> About one integriruemost case of the rigid body dynamics in Central Newtons-Russian gravitational field.....	128
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Abzhapbarov A., Dajyrbekov S.S., Kytajbekov E., Zholdasov S.</i> The definition of euler angles in the case $A = B = 4C$ in the interval $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$	131
<i>Aldashev S.A.</i> The correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional equations of the Lavrent'ev-Bitsadze.....	136
<i>Alexeyeva L.A.</i> Stationary boundary value problem of dynamics of thermoelastic cores.....	144
<i>Orazov I.O., Sarsenbi A.M., Shaldanbaev A.A.</i> Structure of operators of the Sturm-Liouville with Newsline regular boundary conditions.....	153
<i>Shaldanbaev A.Sh., Orazov I.O.</i> The criterion of regulyarnosti operator of Sturm – Liouville.....	157

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.akademianauk.kz

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 05.06.2014.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
9,75 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19