

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**4 (302)**

**ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2015 ж.**

**ИЮЛЬ – АВГУСТ 2015 г.**

**JULY – AUGUST 2015**

**1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН**

**ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА**

**PUBLISHED SINCE JANUARY 1963**

**ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ**

**ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД**

**PUBLISHED 6 TIMES A YEAR**

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

**Мұтанов Г. М.**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байгүнчеков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к е ñ е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

**Г. М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

**G. M. Mutanov,**  
academician of NAS RK

Editorial board:

**A.A. Ashimov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

**I.N. Vishnievski**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 5 – 12

## MIDLATITUDE SUMMER NIGHTTIME ANOMALY EFFECT IN THE IONOSPHERE OVER ALMATY

A. F. Yakovets<sup>1</sup>, G. I. Gordienko<sup>1</sup>, Yu. G. Litvinov<sup>1</sup>, N. Abdrakhmanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>«Institute of Ionosphere» JSC «NCSRT», Almay, Kazakhstan,  
<sup>2</sup>Korkyt ata's Kysylorda State University, Kysylorda, Kazakhstan.  
E-mail: artyak40@mail.ru

**Key words:** ionosphere, vertical sounding, midlatitude summer nighttime anomaly.

**Abstract.** Morphology of the midlatitude summer night anomalies over Alma-Ata for different seasons and levels of solar activity according to the vertical sounding of the ionosphere in the last 7 months of 2011 and the summer of 1999, 2008 and 2012 is studied. For the numerical evaluation of the effectiveness of manifestations summer anomalies the amplitude, representing the ratio of the maximum value of the electron concentration of the night at the maximum F2-layer (NmF2) to the day and time value corresponding to the maximum peak night NmF2 are introduced. It is shown by the nature of daily dependencies NmF2, built for June and July 2008, 2012 and 1999, for which the values of solar flux F10.7 were equal to 65.8, 128 and 168, respectively, that the value of these parameters depends on the solar activity. The graph shows that in the year with the maximum activity of the amplitude anomaly of summer takes a minimum value. It is shown that in the equinoctial months the anomaly does not appear in the daily course of maximum electron concentration of the F2-layer. The maximum effect of the anomalies is seen in the summer months from June to August. The maximum value of the electron concentration in the evening peak falls on the Sun zenith angles, when the radiation is practically no longer flow to the maximum height of F2-layer. The anomaly is clearly manifested in the minimum of solar activity, and it is hardly noticeable at the maximum. It is shown that the parameters of a summer anomaly on the border area of North-East Asia (Almaty, 76°55'E) changed slightly compared with the parameters of its center (Japan, 130°E). The mechanisms of formation of anomalies, as well as its daily and seasonal behavior are discussed.

УДК 550.383

## ПРОЯВЛЕНИЕ ЛЕТНЕЙ НОЧНОЙ АНОМАЛИИ В ИОНОСФЕРЕ НАД АЛМАТОЙ

А. Ф. Яковец<sup>1</sup>, Г. И. Гордиенко<sup>1</sup>, Ю. Г. Литвинов<sup>1</sup>, Н. Абдрахманов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,  
<sup>2</sup>Кызылординский государственный университет им. Коркыт ата, Кызылорда, Казахстан

**Ключевые слова:** ионосфера, вертикальное зондирование, среднеширотная летняя ночная аномалия.

**Аннотация.** Исследована морфология среднеширотной летней ночной аномалии над Алма-Атой для разных сезонов и уровней солнечной активности по данным вертикального зондирования ионосферы за 7 месяцев 2011 г. и летние месяцы 1999 г., 2008 г. и 2012 г. Для численной оценки эффективности проявления летней аномалии введена амплитуда, представляющая отношение максимального ночного значения концентрации электронов в максимуме F2-слоя (NmF2) к дневному значению и время, соответствующее пику ночного максимума NmF2. Показано по характеру суточных зависимостей NmF2, построенных для

июня-июля 2008, 2012 и 1999 гг., для которых значения солнечного потока F10.7 были равны 65.8, 128 и 168 соответственно, что величина этих параметров зависит от солнечной активности. Из графиков следует, что в год с максимальной активностью амплитуда летней аномалии принимает минимальное значение. Показано, что в равноденственные месяцы аномалия не проявляется в суточном ходе максимума электронной концентрации F2-слоя. Максимальный эффект аномалии проявляется в летние месяцы июнь-август. Максимальное значение электронной концентрации в вечернем пике приходится на зенитные углы Солнца, когда ионизирующее излучение практически перестает поступать на высоты максимума F2-слоя. Аномалия отчетливо проявляется в минимуме солнечной активности, и она практически не заметна в максимуме. Показано, что параметры летней аномалии на границе зоны Северо-Восточной Азии (Алма-Ата, 76°55'Е) изменяются незначительно по сравнению с параметрами ее центра (Япония, 130°Е). Обсуждены механизмы образования аномалии, а также ее суточного и сезонного поведения.

**Введение.** Известно, что летом суточные вариации электронной плотности среднеширотного F2 слоя ионосферы (NmF2) отклоняются от поведения, характерного для простого слоя, контролируемого потоком солнечной радиации. Впервые этот эффект был обнаружен над Антарктикой [1, 2]. Этот эффект получил название "аномалия моря Уэдделла" (WSA –Weddell Sea Anomaly). Аномалия поведения состоит в том, что суточный ход электронной концентрации в максимуме F2-слоя обнаруживает два максимума, наблюдаемых вблизи местного полудня и в первой половине ночи. С развитием спутниковых технологий исследования WSA приобрели значительные масштабы [3-8]. Аналогичный эффект был обнаружен и в Северном полушарии в летние месяцы [9, 10]. Rishbeth [9] интерпретировал этот эффект, как результат позднего захода Солнца и термосферного ветра, смещающего слой на большие высоты в то время, когда еще происходит фотоионизация ионосферы.

Суточные аномалии, наблюдаемые в Северном и Южном полушариях, получили название среднеширотной летней ночной аномалии (MSNA - midlatitude summer nighttime anomaly) [11, 12]. Моделирование MSNA было проведено с использованием современных атмосферно-ионосферных моделей [13–17]. В результате измерений и моделирования было показано, что MSNA образуется в результате комбинации эффектов нейтрального ветра, смещающего плазму по вертикали в существующей конфигурации геомагнитного поля, и фотоионизации на заходе Солнца. Среди этих механизмов, эффект зависимости скорости вертикального дрейфа плазмы, вызванного нейтральным ветром, от конфигурации геомагнитного поля, особенно магнитного наклонения, играет доминирующую роль. Максимальные амплитуды эффекта наблюдаются на долготах, соответствующих максимальному расстоянию геомагнитного от географического экватора. Для Южного полушария эти долготы расположены вблизи 30° W (с максимальной амплитудой в области WSA), для Северного полушария эти долготы расположены вблизи 135° E (аномалия Северо-Восточной Азии (ENA) с максимальной амплитудой на долготах Японии и Охотского моря [4]. В работе [18] было показано, что зона ENA имеет пространственную протяженность около 8000 км в направлении восток-запад и ~3000 км в направлении север-юг. Согласно этим оценкам, Алматинский меридиан (76°55'Е) расположен на западном краю долготного сектора аномалии Северо-Восточной Азии, поэтому изучение характеристик последней на этой долготе представляет значительный интерес. Настоящая работа посвящена анализу поведения MSNA над Алматы, полученного по данным вертикального зондирования ионосферы.

**Методы и результаты исследования.** Наблюдения ионосферы проводятся в Институте ионосферы на цифровом ионозонде, сопряженном с компьютером, который предназначен для сбора, хранения и обработки ионограмм в цифровом виде. Информация считывается с ионограмм полуавтоматическим методом. Зондирование ионосферы осуществлялось в 15 – минутном режиме.

Первичная обработка ионограмм включает считывание значений критической частоты слоя F2 ( $f_0F2$ ). Ионозонд обеспечивает точность считывания  $f_0F2 \sim 0.05$  МГц. Критическая частота слоя (в МГц) связана с электронной концентрацией в максимуме слоя (NmF2), выражаемой количеством электронов в кубическом сантиметре, соотношением  $NmF2 = 1.24 \cdot 10^4 f_0F2^2$ . Для анализа суточного поведения NmF2 в отдельные месяцы мы использовали ее медианные значения, принимая во внимание значительный день ото дня разброс NmF2 и то обстоятельство, что в отличие от среднего значения величина медианы меньше реагирует на отдельные большие отклонения электронной концентрации, которые могут иметь место во время магнитных бурь.

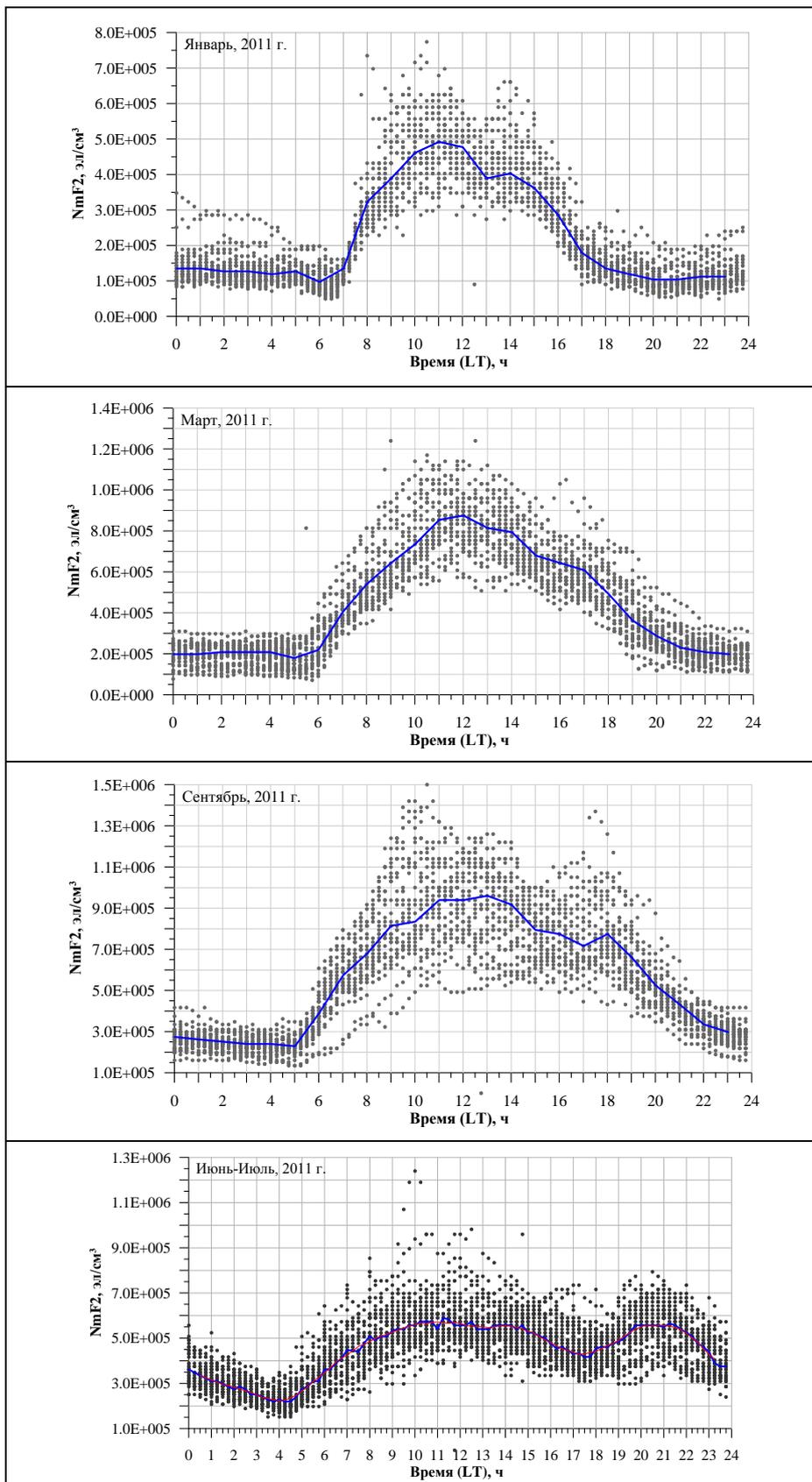


Рисунок 1 – Суточный ход электронной концентрации в максимуме F2-слоя в январе, марте, сентябре и июне-июле 2011 г.

Для сравнения суточного хода NmF2 в разные сезоны мы построили поведение электронной концентрации в январе, марте, сентябре и июне-июле 2011 г. (рисунок 1). Точки представляют единичные измерения NmF2. Сплошной кривой изображена медиана, ход которой позволяет исключить заметный день ото дня разброс концентрации, вызванный различными возмущениями, обусловленными вариациями солнечного ионизирующего излучения, флуктуациями плотности и состава термосферы, а также источниками волновых процессов разнообразной природы. Большая часть данных измерений электронной концентрации, анализированных нами, были получены при низкой магнитной активности ( $Dst > -50$  nT). Относительная продолжительность измерений, во время которых наблюдалась умеренная магнитная активность ( $Dst \leq -50$  nT), составила в июне-июле 1999г. - 0.5%, в июне-июле 2012г. - 11%, в июне-июле 2011г. - 0.5%, в июне-июле 2008г. - 0%, январе 2011г. - 0%, марте 2011г. - 5% и сентябре 2011 г. - 7.3%. Из этого следует, что возмущения электронной концентрации, связанные с увеличенной геомагнитной активностью, не могли повлиять на визуализацию летней аномалии.

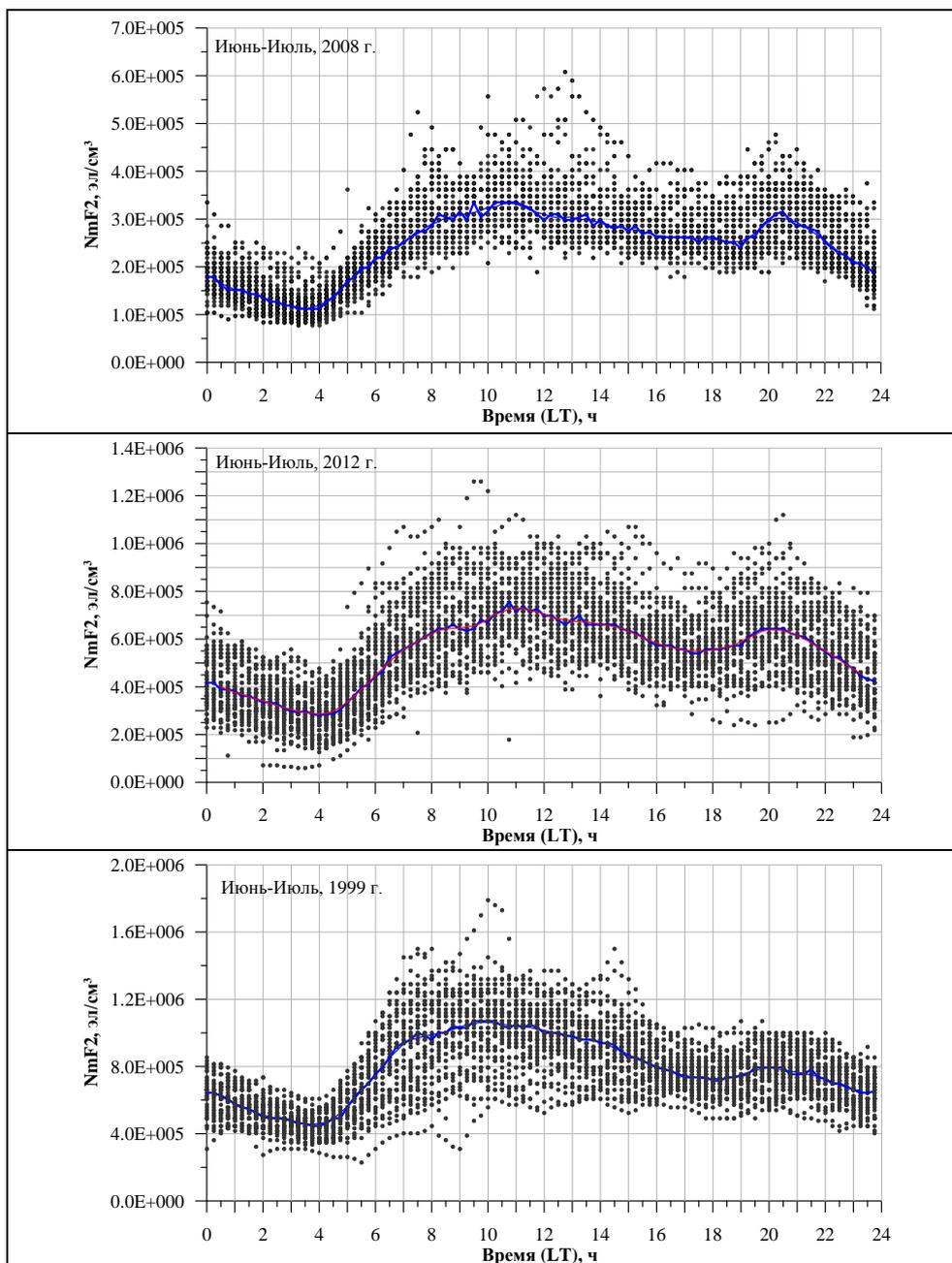


Рисунок 2 – Суточный ход электронной концентрации в максимуме F2-слоя в июне-июле 2008, 2012 и 1999 гг.

Количество электронов, произведенных за счет фотоионизации, зависит от зенитного угла солнца и плотности потока ионизирующего излучения. Поэтому ионизация простого ионосферного слоя (слоя Чепмена) должна следовать зенитному углу солнца, достигающему максимального значения в местный полдень. Суточные поведения медианы NmF2, построенные по январским, мартовским и сентябрьским наблюдениям, хорошо соответствует Чепменовскому слою. Летняя же медиана обнаруживает заметное отклонение (летнюю аномалию), характеризующееся ночным максимумом ионизации, существующим наряду с дневным максимумом.

Для численной оценки летней аномалии введем следующие параметры: 1) амплитуду, представляющую отношение максимального ночного значения NmF2 к дневному, 2) время, соответствующее пику ночного максимума NmF2. Величина этих параметров зависит от солнечной активности, как это видно из рис. 2, где приведены суточные зависимости NmF2, построенные для июня-июля 2008, 2012 и 1999 гг., для которых значения солнечного потока F10.7 были равны 65.8, 128 и 168 соответственно. Из графиков следует, что в год с максимальной активностью амплитуда летней аномалии принимает минимальное значение.

**Обсуждение результатов.** Далее мы сравнили полученные нами в 2008 г. результаты с результатами измерений, проведенных в Японии в июле 2008 г. в центре зоны ENA [6]. Эти измерения проводились радиозатменным методом, позволяющим получать профиль электронной концентрации, начиная с основания слоя и до высот, заметно превышающих высоту максимума слоя. Авторами было показано, что местное время, соответствующее пику ночного максимума, зависит от географической широты – время сдвигается по направлению к полуночи при увеличении широты. Для широты  $45^{\circ}\text{N}$ , практически совпадающей с широтой Алматы, это время оказалось равным 20:30, что точно совпадает с временем, полученным нами. Амплитуды аномалий были также близки. Если в Японии она равнялась 1.02, то у нас ее величина составила 0.91. Это говорит о том, что параметры аномалии на границе зоны ENA (Алматы,  $76^{\circ}55'\text{E}$ ) и в ее центре ( $130^{\circ}\text{E}$ ) изменяются незначительно. Заметим, что мы проводили измерения NmF2 в максимуме F2-слоя, поэтому и сравнения параметров осуществлялось для аномалии, наблюдаемой в NmF2.

В то же время в работе [14] показано, что, если измерения концентрации проводить на фиксированных высотах, то заметно возрастает амплитуда аномалии, достигая на отдельных высотах значения 2.0. Причина этого эффекта становится ясной из рассмотрения вопроса о механизме формирования летней аномалии. Электронная концентрация в F2-слое определяется процессами производства, потерь и переноса. Процесс производства (фотоионизация) имеет место в дневные часы, когда ионосфера освещена солнцем. Ночью производство плазмы мало. Скорость химических потерь плазмы сильно зависит от высоты, так как она определяется плотностью нейтральной компоненты атмосферы, участвующей в столкновениях с заряженной компонентой. Скорость переноса плазмы определяется скоростью меридионального ветра. В зависимости от направления меридионального ветра плазма переносится на большие высоты (ветер направлен к экватору), где скорость рекомбинации мала, или на меньшие высоты (ветер направлен к полюсу), где велики потери. Ионосфера целиком перемещается вверх ночью направленным к экватору, и вниз днем, направленным к полюсу нейтральным ветром, так что hmF2 выше ночью, чем днем. Это приводит к тому, что некоторая фиксированная высота оказывается ночью ближе к максимуму слоя, чем днем. Эти физические и геометрические эффекты, скомбинированные вместе, объясняют то, почему суточная аномалия более отчетливо видна в поведении Ne на фиксированных высотах, чем в поведении NmF2. То, почему описанные выше механизмы приводят к аномалии в летние месяцы, объясняется тем, что согласно наблюдениям и модели горизонтального ветра, ветер, направленный к экватору, появляется летом на средних широтах около 15 LT, значительно раньше, чем в другие сезоны, а фотоионизация перед заходом солнца является необходимым фактором, который в комбинации с подъемом ионосферы на высоты незначительной рекомбинации, приводит к формированию ночного увеличения NmF2.

В работе [13] представлены результаты модельных расчетов глобального распределения электронной концентрации на разработанной модели верхней атмосферы Земли (UAM – Upper Atmosphere Model) [19–21], включающей термосферу, ионосферу и плазмосферу и учитывающую несовпадение геомагнитного и географического полюсов Земли. Как показали модельные расчеты, аномалия в северном и южном полушариях формируется на долготах, на которых геомагнитный

экватор оказывается максимально смещенным относительно географического в летнее полушарие. Для проверки роли этого эффекта в формировании обеих аномалий авторы провели расчеты глобального распределения электронной концентрации в F2-области ионосферы с совмещенными координатами географического и геомагнитного полюсов. Оказалось, что в таком случае MSNA практически исчезала, как в северном, так и в южном полушариях, доказывая тем самым, что несовпадение геомагнитной и географической осей Земли играет необходимую роль в формировании и долготном распределении MSNA.

**Выводы.** Исследована морфология среднеширотной летней ночной аномалии над Алма-Атой для разных сезонов и уровней солнечной активности по данным вертикального зондирования ионосферы за 7 месяцев 2011 г. и летние месяцы 1999 г., 2008 г. и 2012 г. Показано, что в равноденственные месяцы аномалия не проявляется в суточном ходе максимума электронной концентрации F2-слоя. Максимальный эффект аномалии проявляется в летние месяцы июнь-август. Максимальное значение электронной концентрации в вечернем пике приходится на зенитные углы Солнца, когда ионизирующее излучение практически перестает поступать на высоты максимума F2-слоя. Аномалия отчетливо проявляется в минимуме солнечной активности, и она практически не заметна в максимуме. Показано, что параметры летней аномалии на границе зоны Северо-Восточной Азии (Алма-Ата,  $76^{\circ}55'E$ ) изменяются незначительно по сравнению с параметрами ее центра (Япония,  $130^{\circ}E$ ). Обсуждены механизмы образования аномалии, а также ее суточного и сезонного поведения.

*Работа выполнена по РБП-076 «Прикладные научные исследования в области космической деятельности, транспорта и коммуникаций» в рамках целевой программы*

*«Развитие методов мониторинга и исследований космического пространства на базе современных информационных технологий» (Шифр О.0674), подпрограмма 2. «Развитие методов исследования ближнего космоса с использованием информационных технологий»:*

*- тема «Изучить структуру и динамику потока космических лучей, геомагнитного поля, ионосферы и атмосферы с целью диагностики и прогноза состояния ближнего космоса», Регистрационный номер (РН) 0115PK01275.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bellchambers W.H., Piggott W.R. Ionospheric measurements made at Halley Bay. Nature. Vol. 182. 1958. P.1596-1597.
- [2] Penndorf R. The average ionospheric conditions over the Antarctic in Geomagnetism and Aeronomy. Antarctic Research Series. N 4. 1965. P.1-45.
- [3] Burns A.G., Zeng Z., Wang W., Lei J., Solomon S.C., Richmond A.D., Killeen T.L., Kuo Y.-H. Behavior of the F2 peak ionosphere over the South Pacific at dusk during quiet summer conditions from COSMIC data. Journal of Geophysical Research. Vol.113. A12305. 2008. doi:10.1029/2008JA013308.
- [4] He M., Liu L., Wan W., Ning B., Zhao B., Wen J., Yue X., Le H. A study of the Weddell Sea Anomaly observed by FORMOSAT-3/COSMIC. Journal of Geophysical Research. Vol.114. A12309. 2009. doi:10.1029/2009JA014175.
- [5] Horvath I., Essex E.A. The Weddell Sea Anomaly observed with the TOPEX satellite data. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. Vol. 65. 2003.P.693-706.
- [6] Horvath I., Lovell B.C. An investigation of the northern hemisphere midlatitude nighttime plasma density enhancements and their relations to the midlatitude nighttime trough during summer. Journal of Geophysical Research. Vol.114. A08308. 2009. doi:10.1029/2009JA014094.
- [7] Horvath I., Lovell B.C. Distinctive plasma density features of the topside ionosphere and their electrodynamic investigated during southern winter. Journal of Geophysical Research. Vol.114. A01304. 2009. doi:10.1029/2009JA013683.
- [8] Horvath I., Lovell B.C. Investigation of the southern daytime midlatitude trough's relation with the daytime Weddell Sea Anomaly during equinoxes. Journal of Geophysical Research. Vol.115. A01302. 2010. doi:10.1029/2008JA014.
- [9] Rishbeth H. The effect of winds on the ionospheric F2-peak. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. Vol. 30. 1968. P. 63-71.
- [10] Jee G., Burns A.G., Kim Y.-H., Wang W. Seasonal and solar activity variations of the Weddell Sea Anomaly observed in the TOPEX total electron content measurements. Journal of Geophysical Research. Vol. 114. A04307. 2009. doi: 10.1029/2008JA013801.
- [11] Thampi S.V., Lin C., Liu H., Yamamoto M. First tomographic observations of the Midlatitude Summer Nighttime Anomaly over Japan. Journal of Geophysical Research. Vol. 114. A10318. 2009. doi:10.1029/2009JA014439.
- [12] Lin, C. H., C. H. Liu, J. Y. Liu, C. H. Chen, A. G. Burns, and W. Wang. Midlatitude summer nighttime anomaly of the ionospheric electron density observed by FORMOSAT - 3/COSMIC. Journal of Geophysical Research. Vol. 115. A03308. 2010. doi:10.1029/2009JA014084.
- [13] Князева М.А., Зубова Ю.В., Намгаладзе А.А. Численное моделирование аномалии моря Уэдделла в поведении F2-области ионосферы. Вестник МГТУ. Т. 13. № 4/2. 2010. С.1068-1077.

- [14] Thampi S. V., Balan N., Lin C., Liu H., and Yamamoto M. Mid-latitude Summer Nighttime Anomaly (MSNA) – observations and model simulations. *Ann. Geophys.* Vol. 29. 2011. P. 157–165.
- [15] Lin C.H., Liu J.Y., Cheng C.Z., Chen C.H., Liu C.H., Wang W., Burns A.G., Lei J. Three-dimensional ionospheric electron density structure of the Weddell Sea Anomaly. *Journal of Geophysical Research.* Vol.114. A02312. 2009. doi: 10.1029/2008JA013455.
- [16] Pavlov A.V., Pavlova N.M. Anomalous nighttime peaks in diurnal variations of NmF2 close to the geomagnetic equator: A statistical study. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* Vol. 69. 2007. P.1871-1883. doi:10.1016/j.jastp.2007. 07.003.
- [17] Карпачёв А.Т., Гасилов Н.А., Карпачев О.А. Причины долготных вариаций NmF2 на средних и субавро- ральных широтах в летних ночных условиях. *Геомагнетизм и аэронавигация*, Т. 50, № 4, С.1-7, 2010.
- [18] Liu H., Thampi S.V., Yamamoto M. Phase reversal of the diurnal cycle in the midlatitude ionosphere. *Journal of Geophysical Research.* Vol.115. A01305. 2010. doi: 10.1029/2009JA014689.
- [19] Namgaladze A.A., Martynenko O.V., Volkov M.A., Namgaladze A.N., Yurik R.Yu. High-latitude version of the global numerical model of the Earth's upper atmosphere. *Reports of MGTU.* Vol. 1. 1998. P. 23-84.
- [20] Namgaladze A.A., Korenkov Yu.N., Klimenko V.V., Karpov I.V., Bessarab F.S., Surotkin V.A., Glushchenko T.A., Naumova N.M. Global model of the thermosphere-ionosphere-protonosphere system. *Pure and Applied Geophysics.* Vol.127. 1988.P. 219-254.
- [21] Namgaladze A.A., Korenkov Yu.N., Klimenko V.V., Karpov I.V., Surotkin V.A., Naumova N.M. Numerical mode- lling of the thermosphere-ionosphere-protonosphere system. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* Vol. 53. 1991. P.1113-1124.

## REFERENCES

- [1] Bellchambers W.H., Piggott W.R. Ionospheric measurements made at Halley Bay. *Nature.* Vol. 182. 1958. P.1596- 1597.
- [2] Penndorf R. The average ionospheric conditions over the Antarctic in Geomagnetism and Aeronomy. *Antartic Research Series.* N 4. 1965. P.1-45.
- [3] Burns A.G., Zeng Z., Wang W., Lei J., Solomon S.C., Richmond A.D., Killeen T.L., Kuo Y.-H. Behavior of the F2 peak ionosphere over the South Pacific at dusk during quiet summer conditions from COSMIC data. *Journal of Geophysical Research.* Vol.113. A12305. 2008. doi:10.1029/2008JA013308.
- [4] He M., Liu L., Wan W., Ning B., Zhao B., Wen J., Yue X., Le H. A study of the Weddell Sea Anomaly observed by FORMOSAT-3/COSMIC. *Journal of Geophysical Research.* Vol.114. A12309. 2009. doi:10.1029/2009JA014175.
- [5] Horvath I., Essex E.A. The Weddell Sea Anomaly observed with the TOPEX satellite data. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* Vol. 65. 2003. P.693-706.
- [6] Horvath I., Lovell B.C. An investigation of the northern hemisphere midlatitude nighttime plasma density enhancements and their relations to the midlatitude nighttime trough during summer. *Journal of Geophysical Research.* Vol.114. A08308. 2009. doi:10.1029/2009JA014094.
- [7] Horvath I., Lovell B.C. Distinctive plasma density features of the topside ionosphere and their electrodynamic- ics investigated during southern winter. *Journal of Geophysical Research.* Vol.114. A01304. 2009. doi:10.1029/2009JA013683.
- [8] Horvath I., Lovell B.C. Investigation of the southern daytime midlatitude trough's relation with the daytime Weddell Sea Anomaly during equinoxes. *Journal of Geophysical Research.* Vol.115. A01302. 2010. doi:10.1029/2008JA014.
- [9] Rishbeth H. The effect of winds on the ionospheric F2-peak. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* Vol. 30. 1968. P. 63–71.
- [10] Jee G., Burns A.G., Kirn Y.-H., Wang W. Seasonal and solar activity variations of the Weddell Sea Anomaly observed in the TOPEX total electron content measurements. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 114. A04307. 2009. doi: 10.1029/2008JA013801.
- [11] Thampi S.V., Lin C., Liu H., Yamamoto M. First tomographic observations of the Midlatitude Summer Nighttime Anomaly over Japan. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 114. A10318. 2009. doi:10.1029/2009JA014439.
- [12] Lin, C. H., C. H. Liu, J. Y. Liu, C. H. Chen, A. G. Burns, and W. Wang. Midlatitude summer nighttime anomaly of the ionospheric electron density observed by FORMOSAT - 3/COSMIC. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 115. A03308. 2010. doi:10.1029/2009JA014084.
- [13] Knyazeva V.A., Zubova Yu.V. Namgaladze A.A. Numerical simulation of the Weddell Sea Anomaly in behavior of ionospheric F2 layer. *Reports of MGTU.* Vol. 13. N 4/2. 2010. P. 1068-1077. (In Russ.).
- [14] Thampi S. V., Balan N., Lin C., Liu H., and Yamamoto M. Mid-latitude Summer Nighttime Anomaly (MSNA) – observations and model simulations. *Ann. Geophys.* Vol. 29. 2011. P. 157–165.
- [15] Lin C.H., Liu J.Y., Cheng C.Z., Chen C.H., Liu C.H., Wang W., Burns A.G., Lei J. Three-dimensional ionospheric electron density structure of the Weddell Sea Anomaly. *Journal of Geophysical Research.* Vol.114. A02312. 2009. doi: 10.1029/2008JA013455.
- [16] Pavlov A.V., Pavlova N.M. Anomalous nighttime peaks in diurnal variations of NmF2 close to the geomagnetic equator: A statistical study. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* Vol. 69. 2007. P.1871-1883. doi:10.1016/j.jastp.2007. 07.003.
- [17] Karpachev A.T., Gasilov N.A., Karpachev O.A. Reasons of longitude variations of NmF2 on middle and sub-auroral latitudes in summer nights. *Geomagnetizm and aeronomy.* Vol. 50, N 4. 2010. P. 1-7. (in Russ.).
- [18] Liu H., Thampi S.V., Yamamoto M. Phase reversal of the diurnal cycle in the midlatitude ionosphere. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 115. A01305. 2010. doi: 10.1029/2009JA014689.

[19] Namgaladze A.A., Martynenko O.V., Volkov M.A., Namgaladze A.N., Yurik R.Yu. High-latitude version of the global numerical model of the Earth's upper atmosphere. *Reports of MGTU*. Vol.1. 1998. P. 23-84.

[20] Namgaladze A.A., Korenkov Yu.N., Klimenko V.V., Karpov I.V., Bessarab F.S., Surotkin V.A., Glushchenko T.A., Naumova N.M. Global model of the thermosphere-ionosphere-protonosphere system. *Pure and Applied Geophysics*. Vol.127. 1988. P. 219-254.

[21] Namgaladze A.A., Korenkov Yu.N., Klimenko V.V., Karpov I.V., Surotkin V.A., Naumova N.M. Numerical modelling of the thermosphere-ionosphere-protonosphere system. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. Vol. 53. 1991. P.1113-1124.

## АЛМАТЫ ҮСТІНДЕ ИОНОСФЕРАДАҒЫ ЖАЗҒЫ ТҮНДЕГІ ҚАЛЫПСЫЗДЫҚТАРДЫҢ ӘСЕРІ

А. Ф. Яковец<sup>1</sup>, Г. И. Гордиенко<sup>1</sup>, Ю. Г. Литвинов<sup>1</sup>, Н. Абдрахманов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>«Ионосферы институт» ЕЖШС, «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>Қорқыт ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қызылорда, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ионосфера, тік барлау, орташа ендіктегі жазғы түндегі қалыпсыздық.

**Аннотация.** 2011 ж. 7 айлары және 1999 ж., 2008 ж. және 2012 ж. жазғы айлары үшін ионосфераны тік барлау бойынша күн белсенділіктің әртүрлі маусымдары және деңгейлері үшін Алма-ата үстінде орташа ендіктегі жазғы түндегі қалыпсыздықтардың морфологиясы зерттелді. жазғы түндегі қалыпсыздықтардың эффективтілігін сандық бағалау үшін амплитуданың (NmF2) F2-қабаттағы электрондардық концентрациясының максималды түндегі мәндерінің түндегі NmF2 максималды шыңына сәйкес уақыттағы күндізгі мәндеріне қатынасын ұсындық. 2008, 2012 и 1999 жж. маусым-шілде айлары үшін сипаттамасы бойынша F10.7 күн ағынының мәндері сәйкесінше 65.8, 128 және 168 тең болатын параметрлердің шамасы күн белсенділіктерден тәуелді тәуелділіктер NmF2 көрсетілген. Графиктерден жыл ішінде жазғы қалыпсыздықтардың максимал белсенділіктердің амплитудасы ең төменгі мәндерді қабылдап жатқаны көрсетілген. Күн мен түннің теңескен айларында қалыпсыздық F2-қабатында электрондық концентрациясының максималды тәуелділік жүрісінде байқалмайды. Қалыпсыздықтардың максималды әсері жаздың маусым-тамыз айларында байқалып жатыр. Иондалған сәулеленудің F2-қабатында максимум биіктіктерге түсуі тоқтаған кезде электрондық концентрациясының максималды мәндерінің кешкі шыңдары кезінде Күннің зениттік бұрыштарына дәл келеді. Қалыпсыздық күн белсенділігінің минимумында айқындалып жатыр және максимум кезінде негізінен байқалмайды. Солтүстік - шығыс Азия аймақтарының шекарасында жазғы қалыпсыздықтар параметрлері (Алма - ата, 76°55'Е) оның орталықтағы (Жапония 130°Е) параметрлерімен салыстырғанда болмашы ғана өзгереді. Қалыпсыздықтардың пайда болу механизмі және оның тәуелділік және маусымдық тәртіптері туралы талқыланды.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 12 – 18

## MECHANISMS OF NIGHTTIME ENHANCEMENTS IN THE ELECTRON CONCENTRATION IN THE F2-LAYER MAXIMUM OF THE MIDLATITUDE IONOSPHERE

A. F. Yakovets, G. I. Gordienko, Yu. G. Litvinov

Institute of the Ionosphere, National Center for Space Research and Technology, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: artyak40@mail.ru

**Key words:** ionosphere, vertical sounding, midlatitude summer nighttime anomaly.

**Abstract.** The goal of this paper is to reveal signs in the behavior of the nighttime F2-layer, making it possible to identify the events of enhancements in  $N_mF2$  and LS TIDs according to the ionospheric vertical sounding data. The data obtained are interpreted on the basis of the occurrence of a self-supporting avalanche-like process, representing the mechanism of formation of electron concentration nighttime enhancements, which is based on the equatorward thermospheric wind, and therefore a raise of the F2-layer to heights characterized by substantially lower recombination rates, and on the increase in the downward plasma flux from the protonosphere. Comparison of the behavior of the F2-layer parameters caused by the mechanism considered, with their behavior during LS TIDs passages showed their similarity. During a passage of LS TIDs, the  $N_mF2$  peak value is formed later than the  $h_mF2$  peak value, as in the first mechanism. Phase relations between the variations of the electron concentration at the neighboring heights, showing the phase delay of variations at lower altitudes relative to the higher altitudes, also reveal the similarity in the F2-layer reactions to two considered mechanisms of nighttime enhancements. Possible methods of identification of mechanisms are discussed.

УДК 550.383

## МЕХАНИЗМЫ НОЧНЫХ УВЕЛИЧЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В F2-СЛОЕ НАД АЛМАТОЙ

А. Ф. Яковец, Г. И. Гордиенко, Ю. Г. Литвинов

ДТОО «Институт ионосферы» Акционерного общества  
«Национальный центр космических исследований и технологий», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** вертикальное зондирование ионосферы, ночные увеличения электронной концентрации, перемещающиеся ионосферные возмущения

**Аннотация.** В работе рассмотрены признаки поведения ночного F2-слоя ионосферы, позволяющие идентифицировать увеличения электронной концентрации ( $N_mF2$ ) в его максимуме и крупномасштабные перемещающиеся ионосферные возмущения (КМ ПИВ) по данным вертикального зондирования. Полученные данные проинтерпретированы в рамках лавинообразного процесса, представляющего механизм образования ночных увеличений электронной концентрации, основанный на экваториальном термосферном ветре, который поднимает F2-слой на большие высоты, характеризующиеся низкими рекомбинационными потерями, и потоком плазмы из протоносферы. Сравнение поведения параметров слоя, обусловленного рассмотренным механизмом с поведением при прохождении КМ ПИВ, показало их подобие. Во время прохождения КМ ПИВ пиковое значение электронной концентрации в максимуме слоя образуется позднее пикового значения высоты максимума слоя, как и в первом механизме. Фазовые соотношения между вариациями электронной концентрации на соседних высотах обнаружили задержку вариаций на нижних высотах относительно больших высот, что также подобно реакции F2-слоя при увеличении концентрации. Рассмотрены возможные способы идентификации процессов.

**Введение.** Известны различные типы ночных увеличений электронной концентрации максимума F2-слоя ( $N_mF2$ ) среднеширотной ионосферы, различающиеся механизмами их формирования. В большей части работ [1–8] ночные послеполуночные увеличения  $N_mF2$  среднеширотной ионосферы связывают с увеличением скорости направленного вниз потока плазмы из протоносферы и подъемом F2-слоя, обусловленным направленным к экватору термосферным ветром, на высоты, где скорость рекомбинации невелика.

Вероятность формирования ночных увеличений  $N_mF2$  весьма высока. В среднем она достигает 50%, а в зимние месяцы может превышать 80% [9]. Следует заметить, что ночные вариации  $N_mF2$  могут быть обусловлены также крупномасштабными перемещающимися ионосферными возмущениями (КМ ПИВ) [10]. КМ ПИВ являются проявлением распространения атмосферных гравитационных волн (АГВ), генерируемых в полярных районах во время геомагнитных возмущений [11–13] и в нижней атмосфере независимо от уровня магнитной активности [14]. Вероятность наблюдения КМ ПИВ также велика. Анализ результатов продолжительных наблюдений F2-слоя, выполненных на ионозонде и радаре некогерентного рассеяния показал, что вероятность превышает 50% [15, 16]. Высокие вероятности формирования ночных увеличений  $N_mF2$  и прохождения КМ ПИВ означают большую вероятность их одновременного присутствия над местом

наблюдения, что приводит к необходимости различать эти два явления между собой. Однако существование этой проблемы и возможные пути ее решения никак не обозначаются в большинстве работ, посвященных исследованию этих явлений.

Поэтому целью настоящей работы является выделение признаков в поведении ночного  $F_2$ -слоя, позволяющих идентифицировать явления увеличений  $N_m F_2$  и КМ ПИВ по данным вертикального зондирования ионосферы.

**Результаты исследований и обсуждение.** Вертикальное зондирование ионосферы проводилось в Институте ионосферы (Алма-Ата ( $76^{\circ}55'E$ ,  $43^{\circ}15'N$ )) на цифровом ионозонде “Парус”. Зондирование ионосферы проводилось каждые 5 мин. С ионограмм считывались значения действующих высот отражения  $h'(f)$  радиосигнала на ряде рабочих частот и значения критических частот  $f_{o,x}F_2$ . Дальнейшая обработка представляла расчет высотных распределений электронной плотности ( $N(h)$ -профилей) методом POLAN [17] и получение временных вариаций ряда параметров  $F_2$ -слоя (электронной плотности на фиксированных высотах ( $N_h(t)$ ), плотности в максимуме слоя ( $N_m F_2$ ), истинных высот максимума ( $h_m F$ ) и основания ( $h_{bot} F$ ) слоя и его полутолщины ( $\Delta h = h_m F - h_{bot} F$ ) + 8.

На рисунке 1а изображено изменение электронной концентрации во времени электронной концентрации наблюдалось на фоне ее спокойного суточного хода. Расстояние между соседними высотами составляет 10 км, а нижняя высота для этого случая равна 230 км.

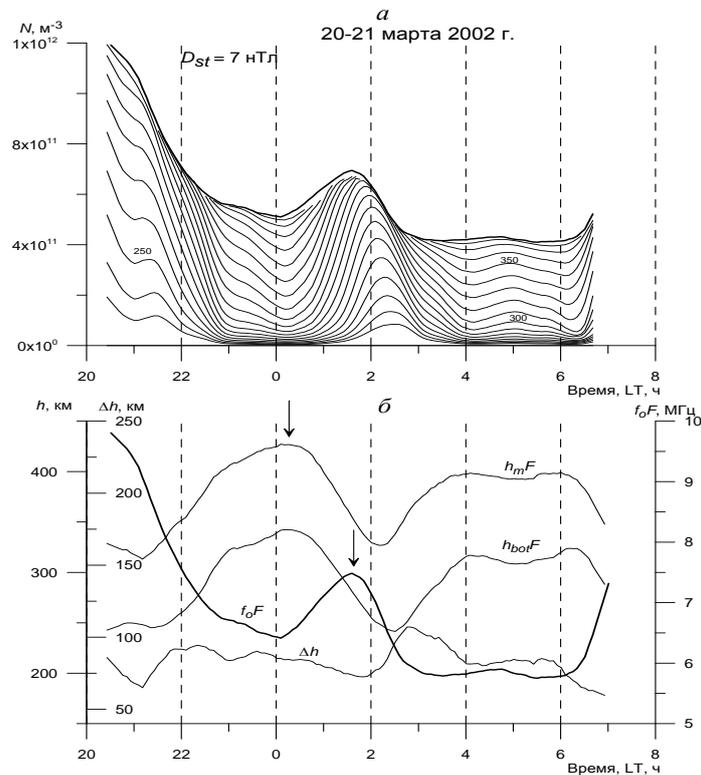


Рисунок 1 – а – Изменения электронной концентрации во времени на ряде фиксированных высот и в максимуме слоя (жирная кривая) при низком уровне магнитной активности, когда послеполуночное увеличение электронной концентрации наблюдается на фоне ее спокойного суточного хода; б – поведение  $h_m F$ ,  $h_{bot} F$ ,  $\Delta h$  и  $f_o F$  для этого случая

На рисунке 1б приведено поведение  $h_m F$ ,  $h_{bot} F$ ,  $\Delta h$  и  $f_o F$ , основные моменты которого можно описать следующим образом. Термосферный ветер, направленный к экватору, поднимает слой с высоты  $h_m F \sim 315$  км в  $t \sim 21:10$  на высоту  $h_m F \sim 425$  км в  $t \sim 00:20$ , при этом полутолщина слоя медленно уменьшается от значения  $\Delta h \sim 90$  км в  $t \sim 21:45$  до значения  $\Delta h \sim 70$  км в  $t \sim 01:55$ . Подъем слоя на высоты, характеризующиеся значительно меньшими скоростями рекомбинации, приводит к тому, что в  $t \sim 22:40$  скорость падения  $N_m F_2$  заметно снижается, а в  $t \sim 24:00$   $N_m F_2$  начинает расти за счет усиления направленного вниз потока плазмы из протоносферы. Умень-

шение полутолщины слоя свидетельствует об уменьшении электронной температуры. Так формируется самоподдерживающийся лавинообразный процесс, лежащий в основе механизма формирования ночных увеличений электронной концентрации, описанного в работе [2]. Процесс затормаживается, когда начинает уменьшаться высота максимума слоя, возвращая его в область высокой скорости рекомбинации. Согласно рассмотренному механизму, пик в  $N_m F$  формируется позже пика в  $h_m F$ . В данном случае пик в  $N_m F$ , наблюдавшийся в  $t \sim 01:30$ , запаздывает относительно пика в  $h_m F$  ( $t \sim 00:20$ ) на 1 ч 10 мин.

На рисунке 2 представлено поведение параметров слоя, которое можно интерпретировать как последовательность ночного увеличения электронной концентрации и КМ ПИВ. Ночь 25-26 октября 2005 г. характеризовалась умеренной магнитной активностью, при которой  $Dst$ -индекс в часы 20:00, 22:00, 24:00, 02:00 и 04:00 принимал значения -22, -24, -29, -35 и -28 нТл соответственно. Увеличение электронной концентрации, начавшееся в  $t \sim 22:25$  и продолжавшееся более 4-х часов, достигло максимума в  $t \sim 02:45$ . Поведение при этом всех параметров слоя соответствует механизму, рассмотренному на примере увеличения, представленного на рисунке 1. Следует заметить, что такой характер увеличения электронной концентрации – длительное, продолжающееся несколько часов нарастание и быстрый спад, формирующий пик  $N_m F$ , является наиболее часто встречающейся формой увеличений [18, 19]. Следующий, второй пик в поведении  $N_m F$  ( $t \sim 04:30$ ), как мы полагаем, представляет КМ ПИВ, которая инициирована АГВ, сгенерированной в полярных широтах в  $t \sim 02:00$ , когда была отмечена максимальная магнитная активность. В пользу такого заключения говорят периодические вариации  $h_m F$ ,  $h_{bot} F$ ,  $\Delta h$  и  $N_m F$  и фазовые соотношения между ними, характерные для КМ ПИВ. Интересно отметить, что так же, как и при ночных увеличениях электронной концентрации, в КМ ПИВ пик в вариациях  $N_m F$  запаздывает относительно пика в вариациях  $h_m F$ .

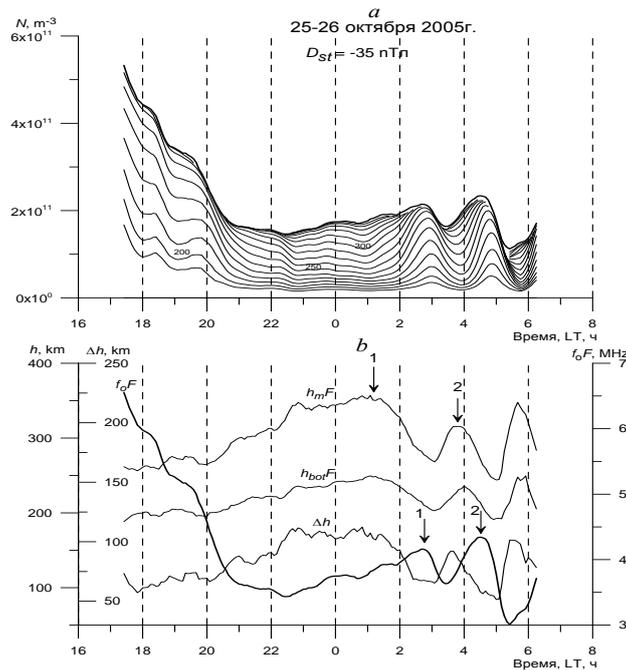


Рисунок 2 – Изменения параметров  $F2$ -слоя в ночь 25-26 октября 2005 г., интерпретируемое последовательностью эффектов повышения электронной концентрации и КМ ПИВ

Если сравнить фазовые соотношения между вариациями электронной плотности на соседних фиксированных высотах для двух рассматриваемых явлений (рис. 5а), то также можно обнаружить их заметное сходство, несмотря на различие механизмов, лежащих в их основе. В КМ ПИВ запаздывание фазы волны на меньшей высоте относительно фазы на большей высоте обусловлено наклоном фазового фронта, характерного для АГВ. В случае ночных увеличений электронной концентрации, подобное высотное фазовое запаздывание обусловлено направлением скорости

плазменного потока из протоносферы. Несмотря на сходство реакции параметров  $F2$ -слоя на рассматриваемые явления, в данном случае их идентификация представляет достаточно простую задачу, так как продолжительность увеличения  $N_mF$ , составляющая  $\sim 5$  ч заметно превышает период КМ ПИВ, составляющий  $\sim 2$  ч. Иная ситуация может создаться при сопоставимых продолжительностях того и другого явления. В таком случае, по-видимому, задача идентификации значительно осложнится. Заметим, что хотя, согласно статистическим исследованиям [20] продолжительности того и другого явления могут быть сопоставимы, однако большая часть событий ночных увеличений  $N_mF$  имеет продолжительность, превышающую максимальную величину периодов КМ ПИВ.

На рисунке 3 представлено поведение параметров слоя, которое можно интерпретировать как последовательность предполуночного и послеполуночного ночных увеличений электронной концентрации с наложением КМ ПИВ на второе увеличение  $N_mF$ . Ночь 22-23 января 2005 г. характеризовалась быстрым увеличением магнитной активности, при которой  $Dst$ - индекс в часы 20:00, 22:00, 24:00, 02:00 и 04:00 принимал значения -5, -6, -47, -58 и -67 нТл соответственно.

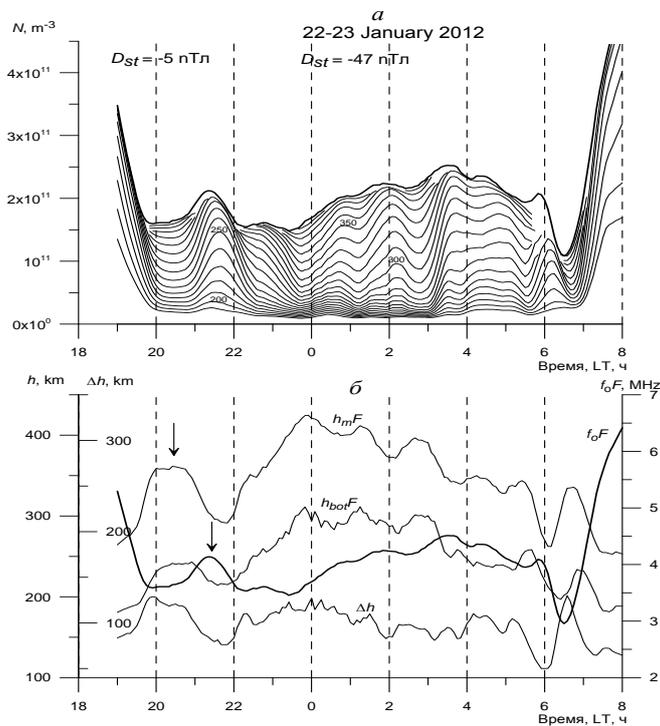


Рисунок 3 – Изменения параметров  $F2$ -слоя в ночь 22-23 января 2012 г., когда наблюдались предполуночное и послеполуночное повышения электронной концентрации с наложенным на последнее повышение КМ ПИВ

Поведение всех параметров слоя предполуночного увеличения электронной концентрации с пиком  $N_mF$  в  $t \sim 21:20$  соответствует механизму, рассмотренному на примере увеличения, представленного на рис. 1. На второе, послеполуночное продолжительное увеличение с пиком  $N_mF$  в  $t \sim 03:35$ , наложены периодические КМ ПИВ, вызванные процессами в полярных областях, связанными с увеличением магнитной активности. В данном случае КМ ПИВ представляет волновой процесс, который проявляется в квазипериодических колебаниях всех параметров  $F2$ -слоя. Период колебаний составляет  $\sim 1.5$  ч и, по меньшей мере, четыре колебания укладываются на интервале увеличения электронной концентрации  $N_mF$ , поэтому в данном случае разделение явлений осуществляется достаточно просто.

**Выводы.** Таким образом, основные результаты работы можно сформулировать так. По данным вертикального зондирования ионосферы получены характерные особенности поведения параметров  $F2$ -слоя, включающих электронную плотность на фиксированных высотах, плотность в максимуме слоя, истинные высоты максимума и основания слоя и его полутолщину, во время ночных увеличений электронной плотности максимума слоя. Представлены разные типы

увеличений, обусловленных различными механизмами. Установлено подобие реакции параметров F2-слоя на ночные увеличения, обусловленные подъемом слоя и потоком плазмы из протоносферы, и прохождением крупномасштабных ионосферных возмущений. Отмечены трудности при идентификации этих двух явлений в случае их одинаковой продолжительности.

*Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Исследовать роль нестационарных геофизических явлений в динамике нижней и верхней атмосферы» (Грант 0082/ГФ4, Регистрационный номер (РН) 0115PK00399).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Balan N., Bailey G.J., Nair R.B., Titheridge J.E. Nighttime enhancements in ionospheric electron content in the northern and southern hemisphere. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. Vol. 56. 1994. P. 67-79.
- [2] Mikhailov A.V., Förster M., Leschinskaya T.Yu. On the mechanism of post-midnight winter N<sub>m</sub>F2 enhancements: dependence on solar activity. *Annal. Geophysicae*. Vol. 18. 2000. P. 1422-1434.
- [3] Князева М.А., Намгаладзе А.А., Мартыненко О.В. Математическое моделирование ночных областей повышенной электронной концентрации в F2-слое ионосферы и в плазмосфере Земли. *Геомагнетизм и аэронавигация*. Т. 52. 2012. С. 390-400.
- [4] Карпачев А.Т., Гасилов Н.А., Карпачев О.А. Причины долготных вариаций NmF2 на средних и субавроральных широтах в летних ночных условиях. *Геомагнетизм и аэронавигация*. Т. 50. 2010. С. 507-513.
- [5] Павлов А.В., Павлова Н.М., Макаренко С.Ф., Шубин В.Н. Аномальные вариации структуры области F2 ионосферы средних геомагнитных широт южного и северного полушарий при переходе от летних к зимним условиям при высокой солнечной активности. *Геомагнетизм и аэронавигация*. Т. 48. 2008. 79-92.
- [6] Lin C.H., Liu C.H., Liu J.Y., Chen C.H., Burns A.G., and Wang W. Midlatitude summer nighttime anomaly of the ionospheric electron density observed by FORMOSAT-3/COSMIC. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 115. A03308. 2010. doi.: 10.1029/2009JA014084.
- [7] Liu L., Chen Y., Le H., Ning B., Wan W., Liu J., and Hu L. A case study of post-midnight enhancement in F-layer electron density over S0anya of China. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. Vol. 118. 2013. P. 4640-4648.
- [8] Mikhailov, A.V., Leschinskaya T.Yu., Förster M. Morphology of NmF2 nighttime increases in the Eurasian sector. *Ann. Geophysicae*. Vol. 18. 2000. P. 618-628.
- [9] Farello A.F., Herraiz M., Mikhailov A.V. Global morphology of night-time NmF2 enhancements. *Ann. Geophysicae*. Vol. 20.2002. P. 1795-1806.
- [10] Tzagouri I., Belehaki A. On the nature of nighttime ionization enhancements observed with the Athens Digisonde. *Ann. Geophysicae*. Vol. 20. 2002. P. 1225-1238.
- [11] Hunsucker R.D. Atmospheric gravity waves generated in the high latitude ionosphere: A review. *Rev. Geophys.* Vol. 20. 1982. P. 293-315.
- [12] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Ashkaliev Ya.F., Litvinov Yu.G., Akasov S.B. Response of the Nighttime Midlatitude Ionosphere to the Passage of an Atmospheric Gravity Wave. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 48. 2008. P. 511-517.
- [13] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Height Profiles of the Amplitudes of Large Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 53. 2013. P. 655-662.
- [14] Vadas S.L., Liu H. Generation of large scale gravity waves and neutral winds in the thermosphere from the dissipation of convectively generated gravity waves. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 114. A10310. 2009. doi:10.1029/2009JA014108.
- [15] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Andreev A.B., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Features of Statistical Distributions of Large-Scale Traveling Ionospheric Disturbances over Almaty. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 51. 2011. P. 640-645.
- [16] Fedorenko Y.P., Tyrnov O., Fedorenko V., Dorohov V. Model of traveling ionospheric disturbances. *J. Space Weather Space Clim*. Vol. 30. 2013. doi: 10.1051/swsc/2013052.
- [17] Titheridge J.E. Ionogram analysis with the generalized program Polan. Boulder. CO USA: National Geophys. Data Center. 1985. 189 p.
- [18] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Vertical Structure of the Midlatitude Winter F Region of the Ionosphere during Postmidnight Enhancements in NmF2. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 49. 2009. P. 490-496.
- [19] Thampi S.V., Balan N., Lin C., Liu H., and Yamamoto M. Mid-latitude Summer Nighttime Anomaly (MSNA) – observations and model simulations. *Ann. Geophysicae*. Vol. 29. 2011. P. 157-165.
- [20] Tsugawa T., Saito A., Otsuka Y. A statistical study of large scale traveling ionospheric disturbances using the GPS network in Japan. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 109. A06302. 2004. doi: 10.1029/2003JA010302.
- [21] Лоис Л., Перес Х., Лацо Б., Яковски Н., Ландрок Р. Ночные повышения ионизации в области F над Кубой: связь с солнечной активностью. *Геомагнетизм и аэронавигация*. Т. 30. 1990. С. 98-106.

#### REFERENCES

- [1] Balan N., Bailey G.J., Nair R.B., Titheridge J.E. Nighttime enhancements in ionospheric electron content in the northern and southern hemisphere. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. Vol. 56. 1994. P. 67-79.
- [2] Mikhailov A.V., Förster M., Leschinskaya T.Yu. On the mechanism of post-midnight winter N<sub>m</sub>F2 enhancements: dependence on solar activity. *Annal. Geophysicae*. Vol. 18. 2000. P. 1422-1434.
- [3] Knyazeva M.A., Namgaladze A.A., Martynenko O.V. Mathematical modeling the night regions of enhanced electron concentration in ionospheric F2 layer and plasmaspheric of the Earth. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 52. 2012. P. 390-400 (in Russ.).

- [4] Karpachev A.T., Gasilov N.A., Karpachev O.A. Reasons of longitude variations of NmF2 on middle and sub-auroral latitudes in summer nights. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 50. 2010. P. 507-513. (in Russ.).
- [5] Pavlov A.V., Pavlova N.M., Makarenko C.F., Shubin V. N. Anomaly variations of the F2 layer structure of the middle geomagnetic latitudes in south and north hemispheres under transfer from summer to winter states during high solar activity. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 48. 2008. P. 79-92. (In Russ.).
- [6] Lin C.H., Liu C.H., Liu J.Y., Chen C.H., Burns A.G., and Wang W. Midlatitude summer nighttime anomaly of the ionospheric electron density observed by FORMOSAT-3/COSMIC. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 115. A03308. 2010. doi: 10.1029/2009JA014084.
- [7] Liu L., Chen Y., Le H., Ning B., Wan W., Liu J., and Hu L. A case study of post-midnight enhancement in F-layer electron density over Soanya of China. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. Vol. 118. 2013. P. 4640–4648.
- [8] Mikhailov A.V., Leschinskaya T.Yu., Förster M. Morphology of NmF2 nighttime increases in the Eurasian sector. *Ann. Geophysicae*. Vol. 18. 2000. P. 618-628.
- [9] Farelo A.F., Herraiz M., Mikhailov A.V. Global morphology of night-time NmF2 enhancements. *Ann. Geophysicae*. Vol. 20. 2002. P. 1795-1806.
- [10] Tsagouri I., Belelaki A. On the nature of nighttime ionization enhancements observed with the Athens Digisonde. *Ann. Geophysicae*. Vol. 20. 2002. P. 1225-1238.
- [11] Hunsucker R.D. Atmospheric gravity waves generated in the high latitude ionosphere: A review. *Rev. Geophys.* Vol. 20. 1982. P. 293–315.
- [12] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Ashkaliev Ya.F., Litvinov Yu.G., Akasov S.B. Response of the Nighttime Midlatitude Ionosphere to the Passage of an Atmospheric Gravity Wave. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 48. 2008. P. 511–517.
- [13] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Height Profiles of the Amplitudes of Large Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and aeronomy*. Vol. 53. 2013. P. 655–662.
- [14] Vadas S.L., Liu H. Generation of large scale gravity waves and neutral winds in the thermosphere from the dissipation of convectively generated gravity waves. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 114. A10310. 2009. doi:10.1029/2009JA014108.
- [15] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Andreev A.B., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Features of Statistical Distributions of Large-Scale Traveling Ionospheric Disturbances over Almaty. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 51. . 2011. P. 640–645.
- [16] Fedorenko Y.P., Tyrnov O., Fedorenko V., Dorohov V. Model of traveling ionospheric disturbances. *J. Space Weather Space Clim*. Vol. 30. 2013. doi: 10.1051/swsc/2013052.
- [17] Titheridge J.E. Ionogram analysis with the generalized program Polan. Boulder. CO USA: *National Geophys. Data Center*. 1985. 189 p.
- [18] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Vertical Structure of the Midlatitude Winter F Region of the Ionosphere during Postmidnight Enhancements in NmF2. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 49. 2009. P. 490–496.
- [19] Thampi S.V., Balan N., Lin C., Liu H., and Yamamoto M. Mid-latitude Summer Nighttime Anomaly (MSNA) – observations and model simulations. *Ann. Geophysicae*. Vol. 29. 2011. P. 157-165.
- [20] Tsugawa T., Saito A., Otsuka Y. A statistical study of large scale traveling ionospheric disturbances using the GPS network in Japan. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 109. A06302. 2004. doi: 10.1029/2003JA010302.
- [21] Lois L., Peres X., Laco B., Jacovski N., Landrock R. Ionization night enhancements in F2 region of the ionosphere over Cuba: connection with solar activity. *Geomagnetism and Aeronomy*. Vol. 30. 1990. P. 98-106. (in Russ.).

## АЛМАТЫ ҮСТІНДЕ F2-ҚАБАТЫНДАҒЫ ЭЛЕКТРОНДЫҚ КОНЦЕНТРАЦИЯНЫҢ ТҮНГІ ҰЛҒАЮ МЕХАНИЗМІ

А. Ф. Яковец, Г. И. Гордиенко, Ю. Г. Литвинов

ЕЖШС «Ионосфера институты» акционерлік қоғамы «Ғарыштық зерттеулер мен технологиялар ұлттық орталығы», Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ионосфераның тік барлануы, электрондық концентрациясының түнгі ұлғаю механизмі, жылжымалы ионосфералық ұйтқулар

**Аннотация.** Жұмыста электрондық концентрацияларының (NmF2) ұлғаюының оның максимумында бірегейлендіруге және осы тік барлау бойынша ионосфераның үлкенмасштабты жылжымалы ұйтқуларындағы (КМ СЫРАЛАРДЫҢ) ионосфераның түнгі F2-қабатының тәртібінің белгілері қарастырылған. Алынған мәліметтер электрондық концентрациясының түнгі ұлғаюының пайда болу механизміне протоносфера плазмасының ағынының төменгі рекомбинация шығымын сипаттайтын F2-қабатын үлкен биіктіктерге көтеретін экваторлық термосфералық желге негізделген көшкін түріндегі процесс шеңберінде түсіндіріледі. КМ ПИВ өтуіндегі тәртіп пен қарастырылған механизммен қамтамасыз етілген қабаттар параметрлерінің тәртіптерімен салыстырулар жүргізіледі, олардың ұқсастығы көрсеткен. КМ ПИВ өту кезіндегі электрондық концентрациясының қабаттың максимумындағы шындық мәндері бірінші механизмдегі сияқты, қабаттың максимум биіктіктегі шындық мәндерін тудырады. фазалық байланыстары электрондық концентрациясының вариацияларымен көршілес биіктіктердегі арасында үлкен биіктіктерге қатысты төменгі биіктіктердегі вариациялардың тоқтатылуы байқалады, сонымен қатар F2-қабатындағы концентрациясының ұлғаюы кезіндегі реакцияларына ұқсас. Процесстердің теңестірулері туралы ықтимал әдістері қарастырылған.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 19 – 25

**STUDYING PARAMETERS OF WAVES GENERATED  
BY DAWN AND DUSK SOLAR TERMINATORS****B. T. Zhumabayev, A. F. Yakovets, G. I. Gordienko, Yu. G. Litvinov**

Institute of the Ionosphere, National Center for Space Research and Technology, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: beibit.zhu@mail.ru

**Key words:** vertical sounding of ionosphere, travelling ionospheric disturbances, solar terminator.

**Abstract.** On the basis of the vertical sounding of the ionosphere over Almaty a comparison of parameters of waves excited by the passage of the dawn and dusk solar terminators is carried out. Observations were carried out in a period of low solar and magnetic activities. Wave periods of the dawn and dusk terminators are distributed in the same intervals of 40 - 85 min. If for the dawn terminator, beginning the wave generation corresponded to the height of the sun above the horizon distributed in a narrow range of  $11^{\circ}$  -  $15^{\circ}$ , then for the dusk terminator its heights exhibit considerable variation in the band of from  $0^{\circ}$  to  $-14^{\circ}$  below the horizon. Their relative maximum amplitudes are also significantly different. The maximum of the wave amplitude of the dusk terminator being in the range 10 - 40% is substantially higher than the amplitude of the dawn terminator waves (4 - 16%). This proves that the dawn terminator more effectively generates waves in the neutral atmosphere than the dusk terminator. At the same time the height corresponding to the maximum amplitudes are at the same intervals as for dawn and dusk terminators (190 - 230 km).

УДК 550.383

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВОЛН,  
ГЕНЕРИРУЕМЫХ УТРЕННИМ И ВЕЧЕРНИМ ТЕРМИНАТОРАМИ****Б. Т. Жумабаев, А. Ф. Яковец, Г. И. Гордиенко, Ю. Г. Литвинов**

ДТОО «Институт ионосферы» Акционерного общества

«Национальный центр космических исследований и технологий», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** вертикальное зондирование ионосферы, перемещающиеся ионосферные возмущения, солнечный terminator.

**Аннотация.** На основе результатов вертикального зондирования ионосферы над Алматы проведено сравнение параметров волн, возбуждаемых утренним и вечерним прохождением солнечного терминатора. Наблюдения были проведены в период низкой солнечной и магнитной активностей. Периоды волн утреннего и вечернего терминатора распределены в одинаковых интервалах 40 – 85 мин. Если для утреннего терминатора высота Солнца над горизонтом распределена в узком интервале значений  $11^{\circ}$  –  $15^{\circ}$ , то для вечернего терминатора отрицательные высоты обнаруживают значительный разброс от  $0^{\circ}$  до  $-14^{\circ}$  ниже линии горизонта. Относительные максимальные амплитуды волн также значительно отличаются. Максимальные амплитуды вечерних волн, лежащие в интервале 10 – 40%, заметно превосходят амплитуды утренних терминаторных волн (4 – 16%). В то же время высоты, соответствующие максимальным амплитудам лежат в одинаковых интервалах, как для утреннего, так и для вечернего терминаторов (190 – 230 км).

**Введение.** Прохождение через термосферу атмосферных гравитационных волн (АГВ), приводит к появлению перемещающихся ионосферных возмущений (ПИВ), представляющих квазипериодические вариации различных параметров ионосферного F-слоя. Считают, что АГВ

генерируются в основном в полярных областях во время геомагнитных бурь и суббурь и затем распространяются на средние и низкие широты [1–3]. Однако еще в 1970 г. Chimonas and Hines [4] предсказали, что солнечное затмение должно генерировать гравитационные волны за счет перемещения охлаждения атмосферы в области лунной тени, движущейся со сверхзвуковой скоростью. Они показали, что гравитационные волны должны формироваться в виде головной волны, наподобие волны, создаваемой быстро двигающимся судном на водной поверхности. По аналогии с затмением, Веер [5] выдвинул идею, что солнечный терминатор может служить генератором гравитационных волн. Будучи регулярным и глобальным явлением, движущийся терминатор отличается от других источников генерации волн, как стабильный, повторяющийся и прогнозируемый источник. Дневная термосфера представляет выступ плотности и давления, двигающийся на запад с фазовой скоростью Солнца (около 450 м/сек на экваторе). Следует отметить, что число Маха превышает 1 на высотах ниже 120 км, где могут генерироваться акустические и гравитационные волны. Скорость звука на высотах F-области ионосферы составляет  $\sim 500$  м/с в минимуме солнечной активности и  $\sim 700$  м/сек в максимуме, и поэтому терминатор движется со скоростью меньшей скорости звука. Однако, Сомсиков [6–12] предложил теоретическую основу генерации гравитационных волн терминатором, двигающимся со субзвуковой скоростью. При этом длина генерируемой волны составляет  $\sim 1000$  км, а ее период превышает  $\sim 30$  мин. Опубликовано несколько экспериментальных работ [13–17], подтверждающих существование терминаторных волн в F-области ионосферы, однако приведенный в них анализ опирается на ограниченный объем экспериментальных данных. В работе [13] рассматриваются данные одного дня наблюдения, а в работе [14] рассматриваются данные вертикального зондирования ионосферы, полученные за несколько дней. Поэтому целью настоящего исследования является наблюдения и обработка данных наблюдений, проведенных непрерывно в течение промежутка времени, достаточного для получения статистических оценок параметров волн.

**Методы исследования.** Для получения различных параметров терминаторных волн был использован метод вертикального зондирования ионосферы, применяемый нами для получения ионосферных волн, разнообразной природы [18, 19]. Анализировались данные, полученные в марте 2010 г., в течение которого было проведено 18 сеансов измерений, каждый из которых захватывал вечернее переходное (день-ночь) время, ночные часы и утреннее переходное время. Выбор года и сезона наблюдений был обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, согласно теоретическим оценкам [16] максимальное проявление терминатора следовало ожидать в равноденственные сезоны и, во-вторых, чтобы исключить интерференцию волновой активности в ионосфере от других источников, связанных с процессами, происходящими в магнитосфере Земли, наиболее предпочтительными являются периоды низкой солнечной и магнитной активности. Мы провели наблюдения в период низкой солнечной активности (среднее значение потока радиоизлучения Солнца на волне 10.7 см в марте составило  $F_{10.7} = 85.0$ ) и при низкой магнитной активности (в марте для дат наблюдения индекс активности  $A_p \leq 10$ ).

**Анализ результатов.** На рисунке 1 представлены сглаженные вариации электронного содержания ионосферы  $N(t)$  с применением скользящего окна с длиной  $T = 30$  мин на серии высот с расстоянием между соседними высотами 10 км для трех сеансов наблюдений. Нижняя кривая соответствует высоте  $h=150$  км. Верхняя (жирная) кривая соответствует вариациям  $N(t)$  в максимуме области  $F$  ( $h_m F$ ). Представленные на рисунке примеры вариаций  $N(t)$  содержат особенности, характерные для большинства измерений этого цикла. Поведение  $N(t)$  в максимуме области  $F$ , представленное на панелях, отражает типичный суточный ход электронной плотности – уменьшение плотности в вечерние переходные часы при заходе Солнца и увеличение в утренние часы во время восхода Солнца. Среднее значение электронной плотности в максимуме области  $F$  менялось незначительно от ночи к ночи, и оно составляло  $N_e \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ . Поскольку измерения проводились в период равноденствия, то терминатор на анализируемых высотах располагался вблизи 18 час в вечернее и 06 час в утреннее время. Незначительные амплитуды вариаций  $N(t)$  в ночное время свидетельствовали об отсутствии в это время сторонних механизмов генерации волн, которые могли бы накладываться на терминаторные волны, проявляющиеся на графиках в вечернее и утреннее время. На рисунке 1 показаны три варианта комбинаций вечерних и утренних терминаторных волн, наблюдаемых нами во время цикла наблюдений. На верхней панели

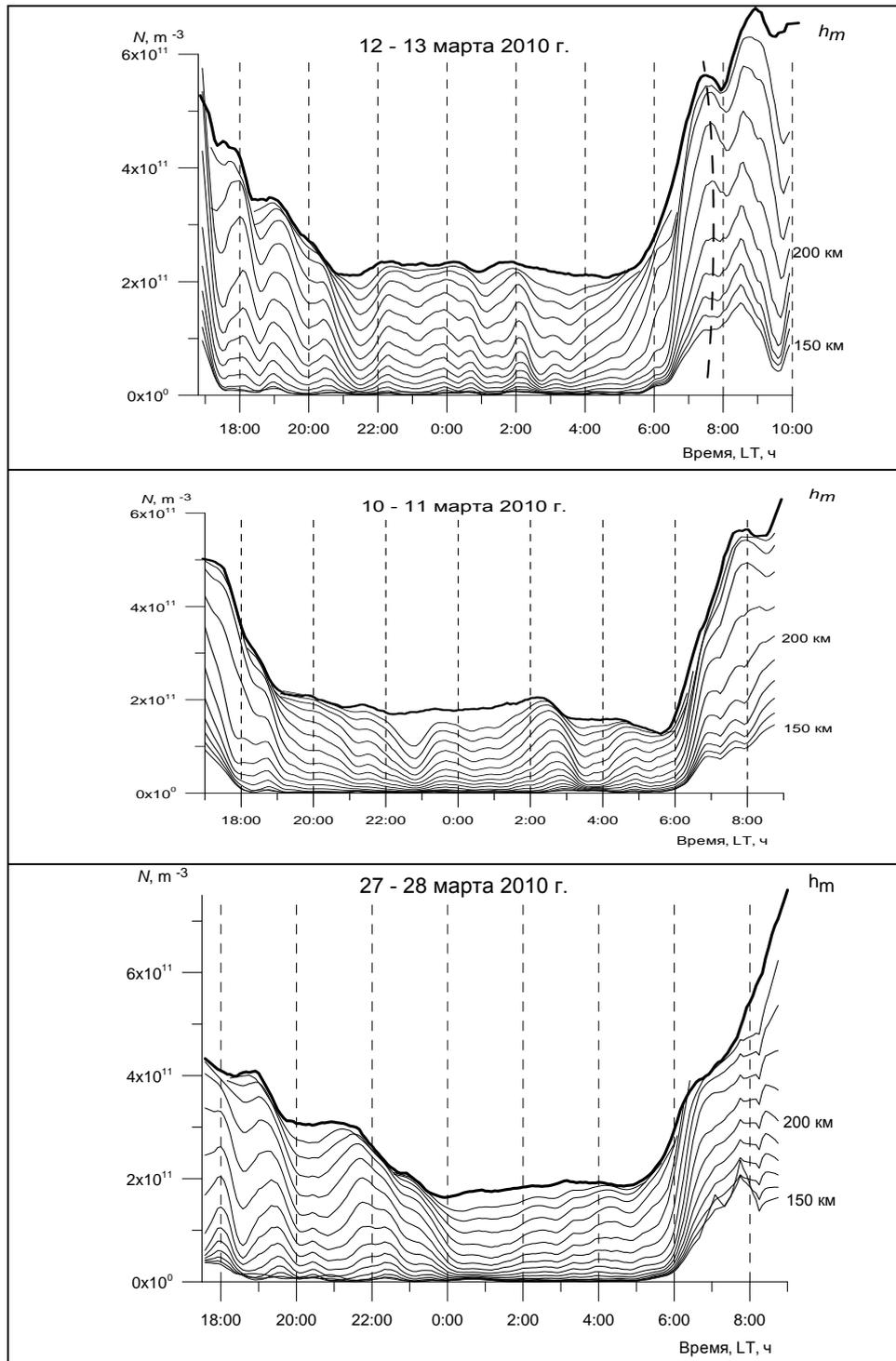


Рисунок 1 – Сглаженные вариации электронного содержания ионосферы на серии высот

представлен наиболее часто встречающийся вариант, когда волны были сгенерированы, после прохождения как вечернего, так и утреннего терминаторов (11 сеансов). На средней панели представлен вариант, когда волны были сгенерированы, после прохождения только утреннего терминатора (4 сеанса).

И на нижней панели представлен вариант, когда волны были сгенерированы, после прохождения только вечернего терминатора (3 сеанса). Высотная зависимость амплитуды волны, которую можно обнаружить на рисунках, имеет особенность, которая сохраняется в большинстве сеансов

наблюдения. Амплитуда волны, минимальная у основания рассматриваемой области ионосферы, растет с увеличением высоты, достигая максимума на некоторой высоте вблизи  $h \sim 200$  км, а затем снова уменьшается при приближении к высоте максимума области. В таблице 1 представлены даты наблюдения и ряд параметров наблюдаемой терминаторной волны. Здесь приняты следующие обозначения.

На рисунке 2 показаны гистограммы распределений параметров терминаторных волн, построенные по данным, приведенным в таблице. Для удобства сравнения параметров утреннего и вечернего терминаторов гистограммы помещены рядом. Периоды осцилляций утреннего и вечернего терминатора распределены в одинаковых интервалах 40 – 85 мин. Если для утреннего терминатора высота Солнца над горизонтом распределена в узком интервале значений  $11 - 15^{\circ}$ , то для вечернего терминатора отрицательные высоты обнаруживают значительный разброс – от  $0$  до  $-14^{\circ}$ . Относительные максимальные амплитуды также значительно отличаются. Максимальные амплитуды вечерних вариаций, лежащие в интервале 10 – 40%, заметно превосходят амплитуды утренних терминаторных волн (4 – 16%). В то же время высоты, соответствующие максимальным амплитудам лежат в одинаковых интервалах, как для утреннего, так и вечернего терминаторов (190 – 230 км).

Заметим, что большая часть высот для вечернего терминатора лежит в очень узком интервале 215 – 220 км.

Значения параметров наблюдаемой терминаторной волны

| Дата     | Заход Солнца |             |               |                               |           |                | Восход Солнца |             |               |                               |           |                |
|----------|--------------|-------------|---------------|-------------------------------|-----------|----------------|---------------|-------------|---------------|-------------------------------|-----------|----------------|
|          | T, ч         | $\phi$ , LT | $\chi$ , град | $A_m, 10^{11} \text{ м}^{-3}$ | $A_m, \%$ | $h_{A_m}$ , км | T, ч          | $\phi$ , LT | $\chi$ , град | $A_m, 10^{11} \text{ м}^{-3}$ | $A_m, \%$ | $h_{A_m}$ , км |
| 09-10.03 | N            | N           | n             | n                             | n         | N              | 1.3           | 7:30        | 12.8          | 0.3                           | 8.0       | 210            |
| 10-11.03 | N            | N           | n             | n                             | n         | N              | 0.85          | 7:00        | 7.9           | 0.15                          | 6.5       | 200            |
| 12-13.03 | 1.2          | 18:00       | -1.8          | 0.7                           | 26        | 220            | 1.0           | 7:30        | 13.8          | 0.35                          | 7.8       | 220            |
| 13-14.03 | 0.8          | 18:20       | -5.3          | 0.2                           | 12        | 220            | 0.8           | 7:30        | 13.6          | 0.27                          | 10.8      | 220            |
| 14-15.03 | 1.2          | 18:40       | -8.7          | 0.25                          | 20        | 200            | 0.92          | 7:25        | 13.5          | 0.45                          | 14.0      | 210            |
| 16-17.03 | 1.3          | 18:50       | -10           | 0.55                          | 46        | 220            | 0.76          | 7:15        | 12.5          | 0.17                          | 4.8       | 200            |
| 17-18.03 | 1.0          | 18:00       | -0.1          | 0.25                          | 20        | 210            | 1.17          | 7:25        | 14.5          | 1.15                          | 30.0      | 215            |
| 18-19.03 | 1.4          | 19:00       | -11           | 0.4                           | 25        | 220            | N             | n           | n             | n                             | N         | n              |
| 19-20.03 | 0.9          | 18:45       | -8.5          | 0.3                           | 14        | 220            | N             | n           | n             | n                             | N         | n              |
| 20-21.03 | 1.1          | 18:05       | -1.0          | 0.35                          | 35        | 210            | 0.93          | 7:00        | 11.1          | 0.25                          | 7.2       | 215            |
| 21-22.03 | 1.7          | 18:45       | -8.0          | 0.5                           | 31        | 220            | 1.08          | 7:15        | 14.1          | 0.35                          | 8.3       | 210            |
| 22-23.03 | 1.2          | 19:15       | -13           | 0.8                           | 36        | 230            | 0.75          | 7:15        | 14.4          | 0.25                          | 8.4       | 195            |
| 23-24.03 | N            | N           | n             | n                             | n         | N              | 1.15          | 7:10        | 13.5          | 0.45                          | 11.8      | 210            |
| 24-25.03 | 1.2          | 18:40       | -6.5          | 0.35                          | 27        | 220            | 0.83          | 7:00        | 12.4          | 0.50                          | 14.3      | 205            |
| 25-26.03 | N            | N           | n             | n                             | n         | N              | 1.4           | 7:10        | 14.2          | 0.32                          | 11.6      | 200            |
| 26-27.03 | 1.0          | 18:50       | -7.8          | 0.35                          | 20        | 220            | 1.33          | 6:55        | 12.2          | 0.75                          | 34.8      | 220            |
| 27-28.03 | 1.3          | 18:10       | -1.3          | 0.55                          | 36        | 220            | N             | n           | n             | n                             | N         | n              |
| 29-30.03 | 0.9          | 18:50       | -7.2          | 0.5                           | 28        | 230            | 0.95          | 6:50        | 12.2          | 0.40                          | 12.5      | 200            |

n – дни когда не было осцилляций.

T, ч – период осцилляций электронного содержания на фиксированных высотах,  $\phi$  – фаза осцилляций (местное время, на которое приходится первый максимум осцилляций),  $\chi$ , град – высота Солнца над горизонтом, соответствующая первому максимуму волны (положительный знак соответствует положению Солнца выше горизонта, отрицательный - ниже горизонта),  $A_m, 10^{11} \text{ м}^{-3}$  – максимальная абсолютная амплитуда осцилляций,  $A_m, \%$  – максимальная относительная амплитуда,  $h_{A_m}$ , км – высота соответствующая максимальной амплитуде.

Значения высоты Солнца для географических координат Алматы, конкретной даты и времени суток мы получали, используя свободный доступ на сайт <http://www.usno.navy.mil/USNO/astronomical-applications/data-services/altaz-world>, на котором проводится расчет высоты и азимута Солнца в интерактивном режиме.

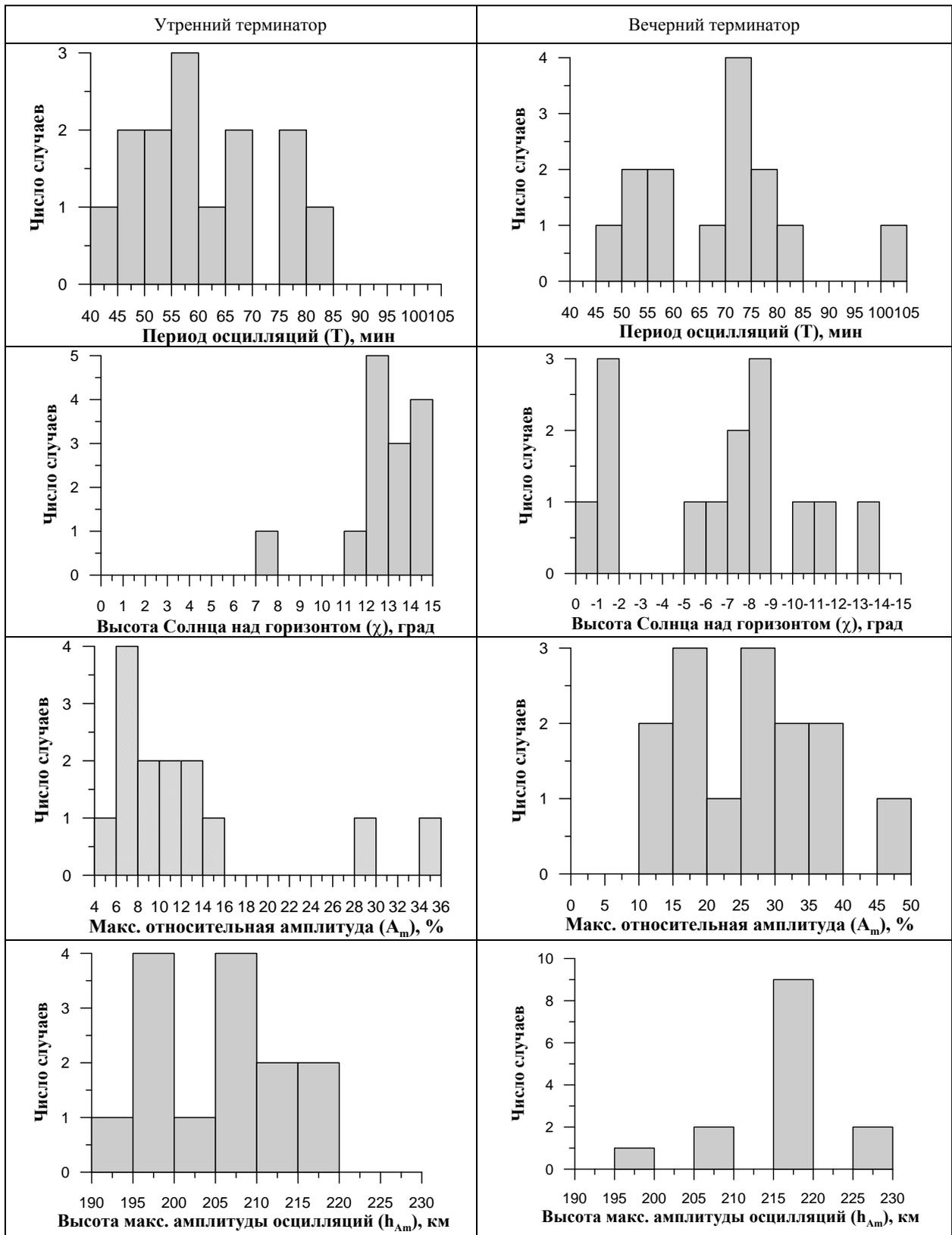


Рисунок 2 – Гистограммы распределений периодов, высоты Солнца над горизонтом, максимальной относительной амплитуды и высоты, соответствующей максимальной амплитуде

**Обсуждение и выводы.** Сравним значения полученных нами параметров с результатами измерений, известных в литературе. В работе [14] авторы нашли, что осцилляции с доминирующим периодом в диапазоне 60-74 мин существуют систематически, начинаясь на восходе и продолжаясь в течение нескольких часов. Измеренная максимальная амплитуда располагалась между высотами 180-200 км. Авторы утверждали, что процессы нагревания, связанные с быстрым увеличением солнечной радиации на восходе, могут действовать как источник турбулентности в F области и эта турбулентность проявляет себя, как AGW осцилляции электронной плотности. Видно, что значения периодов и высот максимальных амплитуд близки к значениям, полученным нами. В работе [20], в которой анализировались данные о плотности термосферы из измерений акселерометра на борту спутника CHAMP на высотах  $440 \pm 40$  км в течение 2001 г. и  $340 \pm 10$  км в течение 2006 г., было найдено, что вблизи вечернего терминатора волновые структуры оказались более выраженными. Это доказывает, что вечерний терминатор более эффективно генерирует волны в нейтральной атмосфере, чем утренний терминатор. Как граница неоднородного нагрева атмосферы, вечерний терминатор порождает больший горизонтальный градиент температуры и давления, чем утренний терминатор. Согласно теории [7, 14] резкая граница более эффективно генерирует волны. Поэтому вечерний терминатор работает более эффективно при возбуждении атмосферных волн. Наши данные, показывающие заметные превышения максимальных амплитуд вечерних терминаторных волн над утренними волнами, подтверждают эти выводы.

*Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Исследовать воздействие нестационарных явлений на среднеширотные атмосферу и ионосферу» (Грант 0040/ГФЗ, Регистрационный номер (РН) 0113РК00289).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yeh K.C., Liu C.H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space Phys.* Vol. 12. 1974. P. 193–216.
- [2] Hunsucker R.D. Atmospheric gravity waves generated in the high-latitude ionosphere: A review. *Rev. Geophys.* Vol. 20. 1982. P. 293–315.
- [3] Hocke K., Schlegel K. A review of atmospheric gravity waves and travelling ionospheric disturbances: 1982–1995. *Annal. Geophysicae.* Vol. 14. 1996. P. 917–940.
- [4] Chimonas G., Hines C.O. Atmospheric gravity waves induced by a solar eclipse. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 75. 1970. P. 875–882.
- [5] Beer T. Supersonic generation of atmospheric waves. *Nature.* Vol. 242. 1973. doi:10.1038/242034a0.
- [6] Somsikov V.M. On mechanism for formation of atmospheric irregularities in the solar terminator region. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 57. 1995. P. 75–83.
- [7] Somsikov V.M. Solar terminator and dynamical phenomena in the atmosphere (survey). *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 51. 2011. P. 723–735.
- [8] Somsikov V.M. Spherical model of solar terminator. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 49. 1984. P. 433–438.
- [9] Somsikov V.M. Atmospheric waves caused by the solar terminator: a review. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 31. 1991. 1–12.
- [10] Somsikov V.M. On the atmospheric turbulence generation by the solar terminator. *Geomagnism and Aeronomy.* Vol. 32. 1992. P. 55–60.
- [11] Somsikov V.M., Ganguly B. On the formation of atmospheric inhomogeneities in the solar terminator region. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 57. 1995. P. 1513–1523.
- [12] Somsikov V.M., Troitskii B.V. Generation of disturbances in the atmosphere at the passage time of Solar Terminator through it. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 15. 1975. P. 856–860.
- [13] Galushko V.G., Paznukov V.V., Yampolski Y.M. and Foster J.C. Incoherent scatter radar observations of AGW/TID events generated by the moving solar terminator. *Annal. Geophysicae.* Vol. 16. 1998. P. 821–827.
- [14] Boska J., Sauli P., Altadill D., Sole J. Diurnal variation of gravity wave activity at midlatitudes in the ionospheric F region. *Stud. Geophys. Geod.* Vol. 47. 2003. P. 569–576.
- [15] Afraimovich E.L. First GPS-TEC evidence for the wave structure excited by the solar terminator. *Earth Planets Space.* Vol. 60. 2008. P. 895–900.
- [16] Chernysheva S.N., Sheftel' V.M., Shcharenskaya E.G. Wavelike disturbances of electron density in the ionosphere near the morning terminator. *Geomagnetism and Aeronome.* Vol. 25. 1985. P. 143–146.
- [17] Forbes J.M., Bruinsma S.L., Miyoshi Y., Fujiwara H. A solar terminator wave in thermosphere neutral densities measured by the CHAMP satellite. *Geophys. Res. Lett.* Vol. 35. L14802. 2008. doi:10.1029/2008GL034075.
- [18] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Height Profiles of the Amplitudes of Large Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 53. 2013. P. 655–662.
- [19] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Thermospheric Wind Oscillations during the Propagation of Large-Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 54. 2014. P. 480–487.
- [20] Liu H., Lühr H., Watanabe Sh. A solar terminator wave in thermospheric wind and density simultaneously observed by CHAMP. *Geoph. Res. Letters.* Vol. 36. L10109. 2009. doi: 10.1029/2009GL038165.

## REFERENCES

- [1] Yeh K.C., Liu C.H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space Phys.* Vol. 12. 1974. P. 193–216.
- [2] Hunsucker R.D. Atmospheric gravity waves generated in the high-latitude ionosphere: A review. *Rev. Geophys.* Vol. 20. 1982. P. 293–315.
- [3] Hocke K., Schlegel K. A review of atmospheric gravity waves and travelling ionospheric disturbances: 1982–1995. *Annal. Geophysicae.* Vol. 14. 1996. P. 917–940.
- [4] Chimonas G., Hines C.O. Atmospheric gravity waves induced by a solar eclipse. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 75. 1970. P. 875–882.
- [5] Beer T. Supersonic generation of atmospheric waves. *Nature.* Vol. 242. 1973. doi:10.1038/242034a0.
- [6] Somsikov V.M. On mechanism for formation of atmospheric irregularities in the solar terminator region. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 57. 1995. P. 75–83.
- [7] Somsikov V.M. Solar terminator and dynamical phenomena in the atmosphere (survey). *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 51. 2011. P. 723–735.
- [8] Somsikov V.M. Spherical model of solar terminator. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 49. 1984. P. 433–438.
- [9] Somsikov V.M. Atmospheric waves caused by the solar terminator: a review. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 31. 1991. P. 1–12.
- [10] Somsikov V.M. On the atmospheric turbulence generation by the solar terminator. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 32. 1992. P. 55–60.
- [11] Somsikov V.M., Ganguly B. On the formation of atmospheric inhomogeneities in the solar terminator region. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 57. 1995. P. 1513–1523.
- [12] Somsikov V.M., Troitskii B.V. Generation of disturbances in the atmosphere at the passage time of Solar Terminator through it. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 15. 1975. P. 856–860.
- [13] Galushko V.G., Paznukov V.V., Yampolski Y.M. and Foster J.C. Incoherent scatter radar observations of AGW/TID events generated by the moving solar terminator. *Annal. Geophysicae.* Vol. 16. 1998. P. 821–827.
- [14] Boska J., Sauli P., Altadill D., Sole J., Diurnal variation of gravity wave activity at midlatitudes in the ionospheric F region. *Stud. Geophys. Geod.* Vol. 47. 2003. P. 569–576.
- [15] Afraimovich E.L. First GPS-TEC evidence for the wave structure excited by the solar terminator. *Earth Planets Space.* Vol. 60. 2008. P. 895–900.
- [16] Chernysheva S.N., Sheftel' V.M., Shcharenkaya E.G. Wavelike disturbances of electron density in the ionosphere near the morning terminator. *Geomagnetism and Aeronome.* Vol. 25. 1985. P. 143–146.
- [17] Forbes J.M., Bruinsma S.L., Miyoshi Y., Fujiwara H. A solar terminator wave in thermosphere neutral densities measured by the CHAMP satellite. *Geophys. Res. Lett.* Vol. 35. L14802. 2008. doi:10.1029/2008GL034075.
- [18] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Height Profiles of the Amplitudes of Large Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 53. 2013. P. 655–662.
- [19] Yakovets A.F., Vodyannikov V.V., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G. Thermospheric Wind Oscillations during the Propagation of Large-Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and Aeronomy.* Vol. 54. 2014. P. 480–487.
- [20] Liu H., Luhr H., Watanabe Sh. A solar terminator wave in thermospheric wind and density simultaneously observed by CHAMP. *Geoph. Res. Letters.* Vol. 36. L10109. 2009. doi: 10.1029/2009GL038165.

## КЕШКІ ТЕРМИНАТОРЛАРДАН ШЫҒАРЫЛАТЫН ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ПАРАМЕТРЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

Б. Т. Жумабаев, А. Ф. Яковец, Г. И. Гордиенко, Ю. Г. Литвинов

ЕЖШС «Ионосфера институты» акционерлік қоғамы  
«Ғарыштық зерттеулер мен технологиялар ұлттық орталығы», Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ионосфераның тік барлануы, жылжымалы ионосфералық ұйтқулар, күн терминаторы.

**Анотация.** Алматы үстінде ионосфераның тік барлану нәтижелерінің негізін күн терминаторынан өтетін теңертеңгі және кешкі коздырушы толқындардың параметрлерімен салыстырулар жүргізіледі. Бақылаулар төменгі күннің және магнитті белсенділіктер периодында өткізілді. Таңртеңгі және кешкі терминаторлардың толқындарының периодтары бірдей 40 – 85 мин интервал аралықтарында таралған. Егер таңртеңгі терминатор үшін Күннің горизонталь үстіндегі биіктігі 110 – 150 мәндерінің қысқа интервал аралығында таралған болса, онда кешкі терминатор үшін теріс мәнді биіктік горизонт сызығынан төмен 00–140 дейінгі айтарлықтай шашылуларда байқалып жатыр. Сонымен қатар толқындардың салыстырмалы амплитудаларында едәуір айырмашылықтар болып жатыр. 10 – 40% интервал аралығында жататын кешкі толқындардың максимал амплитудалары ертеңгі толқындардың терминаторлардың амплитудаларынан асып кететіні байқалады (4 – 16%). Биіктіктің сол уақыты үшін, сәйкесінше ертеңгі және кешкі терминаторлар үшін амплитудалары бірдей интервал аралықтарында жатады (190 –230 км).

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 26 – 32

**THE CONTROL OF REGISTRATION OF EXPERIMENTAL DATA  
OF GEOMAGNETIC FIELD  
IN THE "ALMA-ATA" MAGNETIC OBSERVATORY**

**O. I. Sokolova, A. B. Andreev, G. V. Burlakov, O. L. Kachusova,  
O. N. Kryakunova, Yu. N. Levin, N. F. Nikolaevskiy**

Institute of the Ionosphere, National Center for Space Research and Technology, Almaty, Kazakhstan.  
E-mail: olgsokolova@yandex.ru

**Key words:** system of registration, geomagnetic observation, control of data.

**Abstract.** Currently, studies of Earth's magnetic field are engaged in special satellites and international network of INTERMAGNET Magnetic Observatories. The developed system of terrestrial magnetic observatories is an effective way to solve many problems of geophysics, such as the study of the main magnetic field of the Earth and its dynamics to study the internal structure of the Earth, as well as for practical use in navigation and orientation. Such studies require highly stable geomagnetic measurements, and can only be performed in well-equipped stationary observatories. The modern state of the equipment allows to obtain rather good monitoring data of a geomagnetic field in INTERMAGNET Magnetic Observatories. However many INTERMAGNET Magnetic Observatories have various problems of technogenic character, that has negative impact on geomagnetic observation: various interference in the registered data or breaks of registration because of hardware or a program has failures, etc. We present the system allowing to start and control remotely the measuring equipment and parameters of registration of a magnetic field of the Earth at the "Alma-Ata" magnetic observatory. This system gives the possibility to improve quality of our geomagnetic observation.

УДК 550.385

**КОНТРОЛЬ РЕГИСТРАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ  
ДАННЫХ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В МАГНИТНОЙ ОБСЕРВАТОРИИ «АЛМА-АТА»**

**О. И. Соколова, А. Б. Андреев, Г. В. Бурлаков, О. Л. Качусова,  
О. Н. Крякунова, Ю. Н. Левин, Н. Ф. Николаевский**

ДТОО «Институт ионосферы» Акционерного общества  
«Национальный центр космических исследований и технологий», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** система регистрации, наблюдения геомагнитного поля, контроль данных.

**Аннотация.** В настоящее время исследованиями магнитного поля Земли занимаются специальные спутники и международная сеть магнитных обсерваторий INTERMAGNET. Развитая система наземных магнитных обсерваторий является эффективным средством для решения многих задач геофизики, таких как исследование главного магнитного поля Земли и его динамики для изучения внутреннего строения Земли, а также для практического применения в навигации и ориентации. Такие исследования требуют высокостабильных абсолютных измерений и могут выполняться только в хорошо оборудованных стационарных обсерваториях. Современное состояние геомагнитного оборудования позволяет получать достаточно хорошие мониторинговые данные геомагнитного поля в магнитных обсерваториях. Однако многие магнитные обсерватории международной сети INTERMAGNET сталкиваются с различными проблемами техногенного

характера в процессе регистрации и обработки экспериментальных данных, что оказывает негативное влияние на качество геомагнитных наблюдений. Это различные помехи в регистрируемых данных, перерывы в регистрации по причине аппаратного или программного сбоев и др. Мы представляем систему, позволяющую дистанционно запускать и контролировать измерительную аппаратуру и параметры регистрации магнитного поля Земли в магнитной обсерватории Алма-Ата. Эта система дает возможность улучшить качество геомагнитных наблюдений.

**Введение.** В настоящее время исследованиями магнитного поля Земли (МПЗ) занимаются специальные спутники и международная сеть магнитных обсерваторий INTERMAGNET. Развитая система наземных магнитных обсерваторий является эффективным средством для решения многих задач геофизики, таких как исследование главного магнитного поля Земли и его динамики для изучения внутреннего строения Земли, а также для практического применения в навигации и ориентации. Большое внимание в наземных обсерваториях уделяют изучению вариаций магнитного поля, служащих индикатором воздействия Солнца и солнечной активности на околоземное космическое пространство (ОКП). Изучение характеристик вариаций геомагнитного поля остается актуальной задачей, так как знание процессов происходящих в МПЗ позволяет давать оценку свойств и состояний электромагнитных полей в ОКП [1-4]. Известно, что магнитные возмущения оказывают сильное негативное воздействие на современные технологические системы, вызывая аварийные ситуации на трубопроводах, в электрических сетях, на транспорте и т.п. В связи с этим, необходимо контролировать магнитные возмущения, для обеспечения службы защиты электросетей и газопроводов [5-11]. Так как геомагнитные данные имеют большой спрос, то в сети Интернет можно найти данные практически всех магнитных обсерваторий. Эти данные используют при создании различных международных моделей геомагнитного поля, например IGRF (Международная глобальная модель поля), WMM2015 (Всемирная магнитная модель) [12-14]. Все эти исследования требуют высокостабильных геомагнитных измерений и могут выполняться только в хорошо оборудованных стационарных обсерваториях. [15-18]. Современное состояние геомагнитного оборудования позволяет получать достаточно хорошие мониторинговые данные геомагнитного поля в магнитных обсерваториях. INTERMAGNET предъявляет строгие требования к качеству данных, получаемых из магнитных обсерваторий сети [19]. На сегодняшний день порядка 100 обсерваторий по всему миру работают в непрерывном режиме и передают свои данные в INTERMAGNET. С ноября 2005 года магнитная обсерватория «Алма-Ата» (международный код – AAA; географические координаты: 43.25N, 76.95E; геомагнитные координаты: 34.3N, 152.7E) является полноправным членом этой международной организации. Многие магнитные обсерватории международной сети INTERMAGNET сталкиваются с различными проблемами техногенного характера в процессе регистрации и обработки экспериментальных данных, что оказывает негативное влияние на качество геомагнитных наблюдений [20]. Это различные помехи в регистрируемых данных, перерывы в регистрации по причине аппаратного или программного сбоев и др. Мы представляем систему, позволяющую дистанционно запускать и контролировать измерительную аппаратуру и параметры регистрации магнитного поля Земли в магнитной обсерватории «Алма-Ата». Эта система дает возможность улучшить качество геомагнитных наблюдений.

**Удаление помех при регистрации модуля вектора геомагнитного поля  $F$  в магнитной обсерватории «Алма-Ата».** Для измерения и регистрации модуля вектора геомагнитного поля  $F$  в магнитной обсерватории «Алма-Ата» используется протонный магнитометр на базе процессорного Оверхаузеровского датчика POS-1. Он состоит из сенсора и электронного блока, который через интерфейс RS-232 подключен к регистрирующему персональному компьютеру (ПК) (рисунок 1). На компьютере ведется регистрация 5 секундных данных модуля вектора геомагнитного поля  $F$  в автоматическом режиме и непрерывно. Полученные данные систематизируются и отправляются на хранение в базу данных.

Опыт работы по регистрации и обработке данных модуля вектора геомагнитного поля  $F$  показал, что в результате высокой чувствительности датчика POS-1 кроме полезной информации о состоянии магнитного поля регистрируются и помехи, привносимые различными источниками электромагнитного излучения окружающими обсерваторию, а так же помехи, попадающие на датчик и аппаратуру по цепям питания. Основная часть помех задерживается входными цепями источника бесперебойного питания и электрическим заземлением аппаратуры. Наиболее мощные



Рисунок 1 – Схема соединения аппаратуры

помехи все же проникают в аппаратуру и вызывают искажение регистрируемых данных  $F$ . Для решения проблемы по удалению импульсных помех в регистрируемых данных был использован метод программной фильтрации. В основе реализованного метода фильтрации лежит оценка уровня  $QMC$  (среднеквадратичная ошибка определения частоты прецессии сигнала). Нужно отметить, что аппаратура POS-1 кроме модуля вектора геомагнитного поля  $F$  регистрирует еще и  $QMC$ . Величина  $QMC$  позволяет оценить есть ли внешние посторонние помехи (наводки) на сенсор датчика. Если  $QMC$  минимальна, и её значение лежит в пределах 10-50 единиц, то помехи (внешние наводки) практически отсутствуют. Если  $QMC \geq 50$  помехи есть, и чем больше это значение, тем сильнее помеха. Программа фильтрации использует этот признак для анализа выброса в значениях данных магнитного поля. Если выброс есть, то программа убирает его из числового ряда данных и вместо него подставляет средневзвешенное значение. Программа работает в полуавтоматическом режиме и запускается вручную после того как системой регистрации сформирован суточный массив данных (файл). Далее файл с исправленными значениями автоматически записывается в базу данных на сервере обсерватории. Графический интерфейс программы фильтрации данных от импульсных помех приведен на рисунке 2.

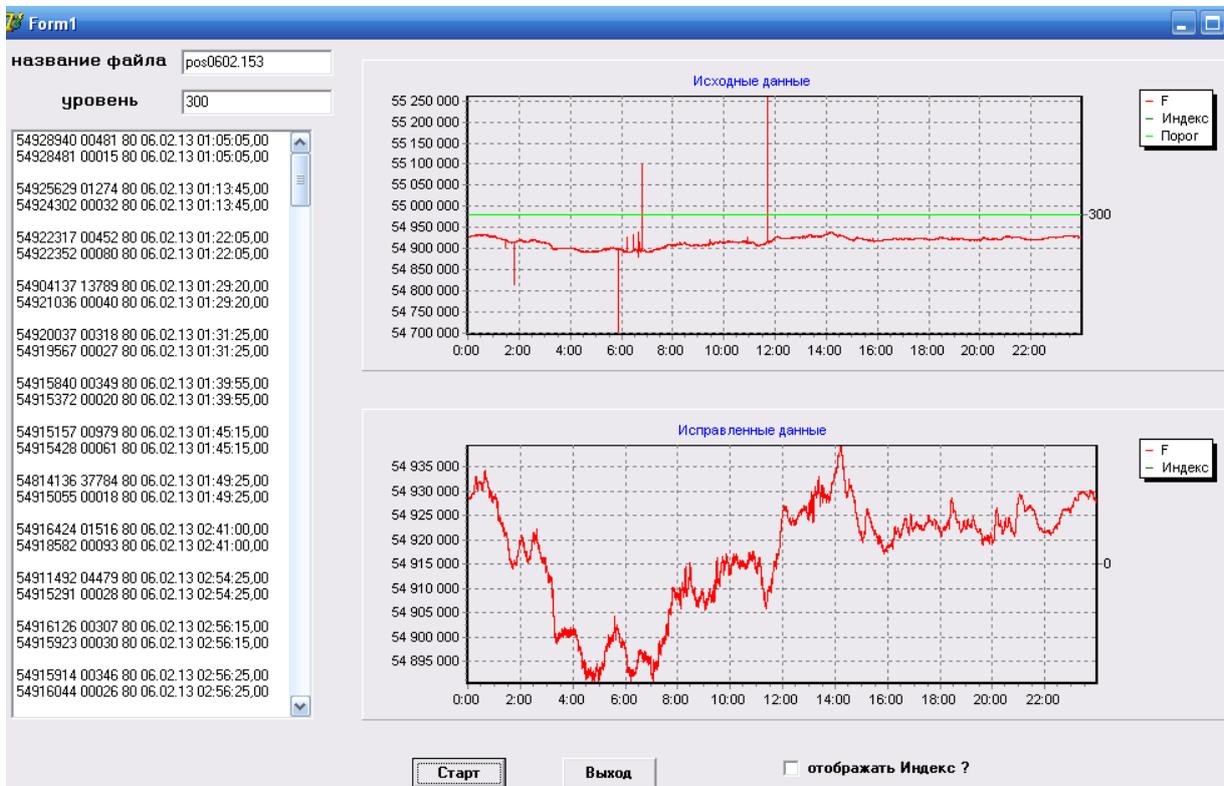


Рисунок 2 – Графический интерфейс программы

На верхнем графике отображен вид суточного массива данных с помехами, на нижнем графике показан вид массива после фильтрации данных от помех. Производить фильтрацию геомагнитных данных можно запуская программу непосредственно на регистрирующем ПК, но кроме этого организован защищенный удаленный доступ к этому компьютеру с любого компьютера подключенного к Internet. Это позволяет запускать программу фильтрации удаленно и более оперативно управлять процессами регистрации данных. В случае «зависания» программного обеспечения имеется возможность его перезагрузить. Кроме того возможна перезагрузка и самого регистрирующего ПК.

**Дистанционный запуск цифровой магнитовариационной станции магнитной обсерватории «Алма-Ата».** В магнитной обсерватории «Алма-Ата» для регистрации (X,Y,Z)-вариаций магнитного поля Земли используется магнитовариационная станция на базе цифрового трехкомпонентного феррозондового магнитометра LEMI-008 (рисунок 3). Он состоит из феррозондового датчика (сенсора) и электронного блока, который обеспечивает преобразование, обработку и накопление информации о вариациях геомагнитного поля, а также передачу этой информации на регистрирующий компьютер (ПК) через интерфейс RS232. Встроенный GPS приемник корректирует время внутренних часов и определяет координаты расположения магнитометра. На регистрирующем компьютере ведется накопление односекундных данных (X,Y,Z)-компонент измеряемого геомагнитного поля в автоматическом режиме и непрерывно. Полученные данные систематизируются и отправляются на сервер в базу данных для хранения.

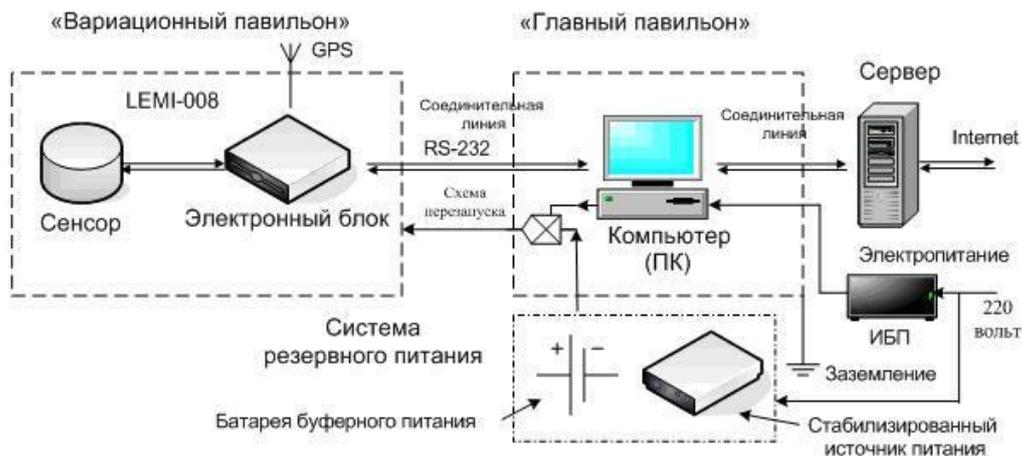


Рисунок 3 – Схема магнитовариационной станции

В ходе эксплуатации выяснилось, что периодически в регистрации данных возникают перебои по причине аппаратного сбоя в электронном блоке или вследствие «зависания» программного модуля «Lemi Manager». Восстановить процесс регистрации возможно путем перезапуска программы или самого электронного блока. Было также замечено, что встроенный GPS приемник иногда теряет связь со спутником, что приводит к потере синхронизации с «точным временем». Для решения вопроса оперативного перезапуска электронного блока LEMI-008 был выбран способ перезапуска путем кратковременного отключения питающего напряжения (12 вольт). Электронной схемой управляет специальная программа, написанная на Delphi 7. В программе реализована защита от случайного запуска процесса перезагрузки электронного блока LEMI-008. Для санкционированного запуска программы перезагрузки предварительно вводится соответствующий код в окне программы перезапуска и нажатием кнопки «START» и инициируется процесс перезапуска LEMI-008.

**Дистанционный контроль работы измерительной аппаратуры и системы регистрации магнитного поля Земли в магнитной обсерватории «Алма-Ата».** Предложенный метод дистанционного контроля функционирования аппаратуры магнитной обсерватории «Алма-Ата» основан на информировании сотрудников обсерватории при помощи СМС сообщений об остановке записи геомагнитных данных. Если данные от магнитометров POS-1 или LEMI-008 не поступают в базу

данных обсерватории более чем 10 минут, то на сервере подготавливается соответствующее информационное сообщение. Специальная программа `imagAlert.exe`, написанная на Delphi7, формирует и отправляет это информационное сообщение в виде электронного письма на специальный адрес электронной почты на почтовом сервере Mail.ru рисунок 4.

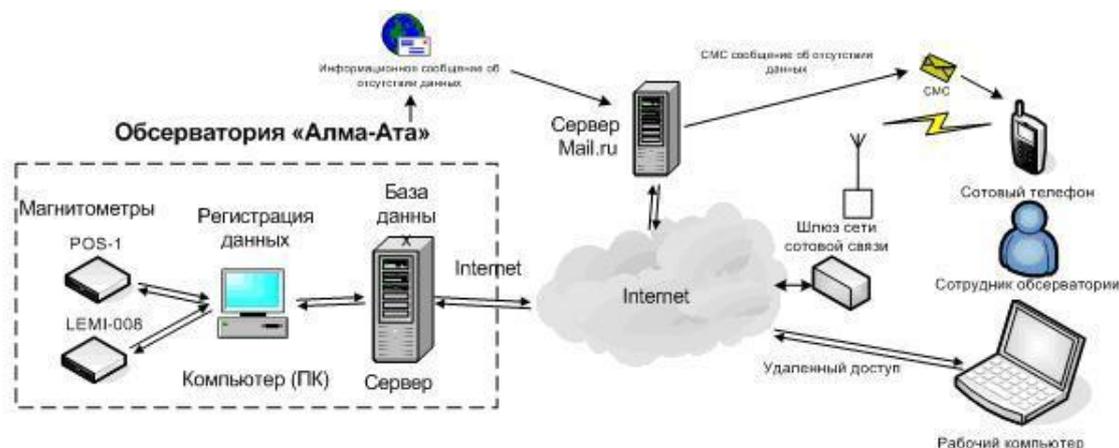


Рисунок 4 – Система дистанционного контроля

На «почтовом ящике» этого адреса сделаны специальные настройки, которые позволяют ресурсу Mail.ru формировать СМС сообщение о поступлении электронного письма на этот адрес. СМС отправляется на сотовый телефон сотрудника обсерватории, который после получения оповещения о проблеме с данными имеет возможность при наличии Internet открыть защищенный удаленный доступ на сервер или регистрирующий ПК. Далее магнитолог в онлайн режиме может выяснить причину остановки передачи данных и при необходимости перезапустить сам магнитометр или программное обеспечение (`POS_manager` или `LEMI_manager`). Кроме того программное обеспечение «Удаленный доступ» позволяет сделать и полную перезагрузку регистрирующего компьютера.

**Выводы.** Таким образом, полученная система позволяет не только оперативно удалять помехи, но и производить более полную непрерывную запись геомагнитных данных в магнитной обсерватории «Алма-Ата». Получена возможность дистанционно перезапускать цифровую магнитовариационную станцию на базе трехкомпонентного феррозондового магнитометра LEMI-008 и протонный магнитометр POS-1 при различных технических сбоях. Кроме того, удаленный перезапуск позволяет это делать, не приближаясь к сенсору регистратора, что уменьшает количество возможных электромагнитных помех и ускоряет процесс перезапуска, а так же уменьшает количество потерянных данных. Созданная система позволяет управлять запускать и контролировать измерительную аппаратуру и параметры регистрации магнитного поля Земли в геомагнитной обсерватории «Алма-Ата». Эта система дает возможность улучшить качество геомагнитных наблюдений в магнитных обсерваториях, которые используют измерительные приборы стандарта INTERMAGNET такие как LEMI-008 и POS-1.

*Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Создание системы сбора экспериментальных геофизических данных на базе современных информационных технологий и ее использование в исследовании ближнего космоса» (Грант 0080/ГФ4, регистрационный номер (РН) 0115PK00400).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Будько Н., Зайцев А., Карпачев А., Козлов А., Филипов Б. Космическая среда вокруг нас. Троицк: ТРОВАНТ, 2005, С.158-173.
- [2] Амиантов А.С., Зайцев А.Н., Одинцов В.И., Петров В.Г. Вариации магнитного поля Земли. М.: ИЗМИРАН, 2001, 53с.
- [3] Sokolova O. I., Krasnov V. M., and Nikolaevskii N. F. Changes in the Geomagnetic Field under the Effect of Rocket Launches from the Baikonur Spaceport. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2003, Vol. 43, No. 4, PP. 1-5.

- [4] Mursula K., Holappa L., and Karinen A. Correct normalization of the Dst index. *Astrophys. Space Sci. Trans.* N4, 2008, PP. 41-45.
- [5] Vodyannikov V. V., Gordienko, Nechaev S.A., Sokolova O.I., Khomutov S.Yu., and Yakovets A.F. Induced Currents in Power Lines according to Data on Geomagnetic Variations. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2006, Vol. 46, No. 6, PP. 809-813.
- [6] Beamish C., Clark T.D.G., Clarke E., Thomson A.W. Geomagnetically induced currents in the UK: geomagnetic variations and surface electric field *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.*, 2002, V. 64, PP.1779-1792.
- [7] Bolduc L., Langlois P., Boteler D., and Pirjola R. A study of geoelectromagnetic disturbances in Quebec 2. Detailed analysis of a large event *IEEE Trans. Power Delivery*, 2000, V.15, PP.272-285.
- [8] Koen J., Gaunt C.T. Geomagnetically induced currents at mid-latitudes. The 27 General Assembly of URSI. 17 - 24 August. Netherlands. Maastricht. 2002.
- [9] Kappenman J. G. Storm sudden commencement events and associated geomagnetically induced current risks to ground-based systems at low-latitude and mid-latitude locations. *Space weather*. 2003, V. 1, N3, 1016. doi:10.1029/2003SW000009.
- [10] Lathinen M. and Elovraa J. GIC occurrences and GIC test for 400 kV system transformer. *IEEE Trans. Power Delivery*. 2002, V. 17, PP.555-561.
- [11] Pirjola R., Pulkkinen A., and Viljanen A. Studies of space weather effects on the Finnish natural gas pipeline and on the Finnish high-voltage power system. *Adv. Space Res.*, 2003, V. 31, PP. 795-805.
- [12] Maus S., Macmillan S., McLean S., Hamilton B., Thomson A., Nair M., and Rollins C. The US/UK World Magnetic Model for 2010-2015. NOAA Tech. Report NESDIS/NGDC, 2010.
- [13] Olsen, N., H. Lühr, Sabaka T. J., Manda M., Rother M., Tøffner-Clausen L., and Choi S. CHAOS—A model of Earth's magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data. *Geophys. J. Int.*, 166, 2006, PP.67-75.
- [14] Finlay C. C., Maus S., Beggan C. D., Bondar T. N., Chambodut A., Chernova T. A., Chulliat A., Golovkov V. P., Hamilton B., Hamoudi M., Holme R., Hulot G., Kuang W., Langlais, V. Lesur, F. J. Lowes, H. Luhr, S. Macmillan, M. Manda, S. McLean, C. Manoj, M. Menvielle B., Michaelis I., Olsen N., Rauberg J., Rother M., Sabaka T. J., Tangborn A., Toffner-Clausen L., Thebault E., Thomson A. W. P., Wardinski I., Wei Z., Zvereva T. I. International Geomagnetic Reference Field: the eleventh generation. *Geophys. J. Int.*, 2010, December, Vol.183, Issue 3, PP. 1216-1230.
- [15] Гордин В.М. Очерки по истории геомагнитных измерений. М.: ИФЗ РАН, 2004, С.9-51.
- [16] Нечаев С.А. Руководство для стационарных геомагнитных наблюдений. Иркутск: Издательство института географии им. В.Б. Сочавы СО РАН, 2006, С.35-71.
- [17] Okada M. Report of Measurement Session – Intercomparisons and Tests of Geomagnetic Instruments and Measurement Training at the Kakioka Magnetic Observatory, Japan, in 2004. Workshop on Geomagnetic Observatory Instruments, Data Acquisition and Processing, Proceedings November 9-17, 2004, Japan, PP. 6-23.
- [18] Rasson J.L., Potapov A.S., Korepanov U.E., Khomutov S.Y., Krasnov V.M., Bitterly J. Report on Upgrade of NIS Magnetic Observatories by the INTAS Infrastructure Action CRENEGON Workshop on Geomagnetic Observatory Instruments, Data Acquisition and Processing, Proceedings November 9-17, 2004, Japan, PP. 141-146.
- [19] INTERMAGNET Technical Reference Manual. Ver. 4.5 Edinburg, UK, 2011.
- [20] Okawa T., Tokumoto T., Nakajima S., Owada T., Toya T., Muromatsu F., Kumasaka N. and Koike T. Development of artificial Geomagnetic disturbances monitoring system.// *Publ. INST. GEOPHYS. POL. ACAD. SC.*, Warszawa, 2007, p.-99.

## REFERENCES

- [1] Bud'ko N., Zaitsev A., Karpachev A., Kozlov A., Filipov B. The space environment around us. Troitsk: TROVANT, 2005, PP. 158-173. (in Russ.).
- [2] Amiantov A.S., Zaitsev A.N., Odintsov V.I., Petrov V.G. Variations in Earth's magnetic field. М.: IZMIRAN, 2001, p.53. (in Russ.).
- [3] Sokolova O. I., Krasnov V. M., and Nikolaevskii N. F. Changes in the Geomagnetic Field under the Effect of Rocket Launches from the Baikonur Spaceport. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2003, Vol. 43, No. 4, PP. 1-5.
- [4] Mursula K., Holappa L., and Karinen A. Correct normalization of the Dst index. *Astrophys. Space Sci. Trans.* N4, 2008, PP. 41-45.
- [5] Vodyannikov V. V., Gordienko, Nechaev S.A., Sokolova O.I., Khomutov S.Yu., and Yakovets A.F. Induced Currents in Power Lines according to Data on Geomagnetic Variations. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2006, Vol. 46, No. 6, PP. 809-813.
- [6] Beamish C., Clark T.D.G., Clarke E., Thomson A.W. Geomagnetically induced currents in the UK: geomagnetic variations and surface electric field *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.*, 2002, V. 64, PP.1779-1792.
- [7] Bolduc L., Langlois P., Boteler D., and Pirjola R. A study of geoelectromagnetic disturbances in Quebec 2. Detailed analysis of a large event *IEEE Trans. Power Delivery*, 2000, V.15, PP.272-285.
- [8] Koen J., Gaunt C.T. Geomagnetically induced currents at mid-latitudes. The 27 General Assembly of URSI. 17 - 24 August. Netherlands. Maastricht. 2002.
- [9] Kappenman J. G. Storm sudden commencement events and associated geomagnetically induced current risks to ground-based systems at low-latitude and mid-latitude locations. *Space weather*. 2003, V. 1, N3, 1016. doi:10.1029/2003SW000009.
- [10] Lathinen M. and Elovraa J. GIC occurrences and GIC test for 400 kV system transformer. *IEEE Trans. Power Delivery*. 2002, V. 17, PP.555-561.
- [11] Pirjola R., Pulkkinen A., and Viljanen A. Studies of space weather effects on the Finnish natural gas pipeline and on the Finnish high-voltage power system. *Adv. Space Res.*, 2003, V. 31, PP. 795-805.
- [12] Maus S., Macmillan S., McLean S., Hamilton B., Thomson A., Nair M., and Rollins C. The US/UK World Magnetic Model for 2010-2015. NOAA Tech. Report NESDIS/NGDC, 2010.

[13] Olsen, N., H. Lühr, Sabaka T. J., Manda M., Rother M., Tøffner-Clausen L., and Choi S. CHAOS—A model of Earth's magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data. *Geophys. J. Int.*, 166, 2006, PP.67–75.

[14] Finlay C. C., Maus S., Beggan C. D., Bondar T. N., Chambodut A., Chernova T. A., Chulliat A., Golovkov V. P., Hamilton B., Hamoudi M., Holme R., Hulot G., Kuang W., Langlais, V. Lesur, F. J. Lowes, H. Luhr, S. Macmillan, M. Manda, S. McLean, C. Manoj, M. Menvielle B., Michaelis I., Olsen N., Rauberg J., Rother M., Sabaka T. J., Tangborn A., Toffner-Clausen L., Thebault E., Thomson A. W. P., Wardinski I., Wei Z., Zvereva T. I. International Geomagnetic Reference Field: the eleventh generation. *Geophys. J. Int.*, 2010, December, Vol.183, Issue 3, PP. 1216–1230.

[15] Gordin V.M. Essays on the history of the geomagnetic measurements. M.: IPE RAS, 2004. PP. 9-51. (in Russ.).

[16] Nechaev S. Guide to stationary geomagnetic observations. Irkutsk: Publishing House of the Institute of Geography SB RAS, 2006, PP.35-71.

[17] Okada M. Report of Measurement Session – Intercomparisons and Tests of Geomagnetic Instruments and Measurement Training at the Kakioka Magnetic Observatory, Japan, in 2004. Workshop on Geomagnetic Observatory Instruments, Data Acquisition and Processing, Proceedings November 9-17, 2004, Japan, PP. 6-23.

[18] Rasson J.L., Potapov A.S., Korepanov U.E., Khomutov S.Y., Krasnov V.M., Bitterly J. Report on Upgrade of NIS Magnetic Observatories by the INTAS Infrastructure Action CRENEGON Workshop on Geomagnetic Observatory Instruments, Data Acquisition and Processing, Proceedings November 9-17, 2004, Japan, PP. 141-146.

[19] INTERMAGNET Technical Reference Manual. Ver. 4.5 Edinburg, UK, 2011.

[20] Okawa T., Tokumoto T., Nakajima S., Owada T., Toya T., Muromatsu F., Kumasaka N. and Koike T. Development of artificial Geomagnetic disturbances monitoring system. *Publ. INST. GEOPHYS. POL. ACAD. SC.*, Warszawa, 2007, p.-99.

### **«АЛМА-АТА» МАГНИТТІК ОБСЕРВАТОРИЯСЫНДА ГЕОМАГНИТТІК ӨРІСТІҢ ЭКСПЕРИМЕНТТІК ДЕРЕКТЕРДІҢ ТІРКЕЛУІН БАҚЫЛАУ**

**О. И. Соколова, А. Б. Андреев, Г. В. Бурлаков, О. Л. Качусова,  
О. Н. Крякунова, Ю. Н. Левин, Н. Ф. Николаевский**

ЕЖШС «Ионосфера институты» акционерлік қоғамы  
«Ғарыштық зерттеулер мен технологиялар ұлттық орталығы», Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** тіркеу жүйесі, геомагниттік өрісті бақылау, деректерді бақылау.

**Аннотация.** Қазіргі уақытта, зерттеулер Жердің магниттік өрісін зерттеуде арнайы серіктер және халықаралық желісіндегі INTERMAGNET магниттік обсерваториясы айналысады. Жердің магнит обсерваториясының дамыған жүйесі болып, сондай-ақ шарлау және бағдарлаудың іс жүзінде пайдалануы үшін осындай Жердің негізгі магнит өрісін және Жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін оның динамикасын зерттеу ретінде геофизиканың көптеген мәселелерін шешу үшін тиімді тәсіл болып табылады. Мұндай зерттеулерге жоғары тұрақты және абсолютті өлшеуді талап етеді, яғни тек жақсы жабдықталған стационарлы обсерваториясында орындауға болады. Заманауи жабдықталған геомагниттік жабдықтар магниттік обсерваториясында геомагниттік өрісінің жеткілікті жақсы мониторингті деректерін алуға мүмкіндік береді. Алайда, көптеген магниттік обсерваторияларында INTERMAGNET халықаралық желісінде геомагниттік бақылау сапасына кері әсер етеді, ол эксперименттік деректерді тіркеу және өңдеу процесінде техногендік сипаттағы түрлі проблемаларға тап. Бұл әртүрлі кедергілер ретінде деректерді тіркеудегі, аппараттық немесе бағдарламалық кемшіліктерінен болатын тіркеу үзілістері және басқа да себептер болып табылады. Біз «Алма-Ата» обсерваториясындағы Жердің магниттік өрісін параметрлерін тіркеуге және өлшеуіш аппаратураны қашықтықтан іске қосуға және бақылауға мүмкіндік беретін жүйені ұсынамыз. Бұл жүйе геомагнитных бақылау сапасын жақсартуға мүмкіндік береді.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 33 – 39

**PECULIARITIES OF SEASONAL BEHAVIOR  
OF WAVE DISTURBANCES IN THE MESOSPHERE ACCORDING  
TO SATI AND SATELLITE OBSERVATIONS****V. M. Somsikov, A. B. Andreev, B. T. Zhumabaev**

"Institute of Ionosphere", JSC "National Center of Space Research and Technology

" National Space Agency of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: vmsoms@rambler.ru

**Keywords:** acoustic-gravity waves, mesosphere, infrared glow of the sky.

**Abstract.** Results of experimental studies of the seasonal behavior of acoustic-gravity waves on the heights of the mesosphere are presented. The observations were made using the spectrometer SATI (Spectral Airglow Temperature Imager) in the Institute of Ionosphere, Almaty. This spectrometer allows to measure the temperature of the hydroxyl at an altitude of about 87 km. on spatially spaced areas of the night sky by measuring the spectrum of the radiation hydroxyl own night in the near infrared region (wavelength 836 nm). Results of optical ground-based observations are compared with data of satellite optical observations MLS (Microwave Limb Sounder).

УДК 551.511

**ОСОБЕННОСТИ СЕЗОННОГО ПОВЕДЕНИЯ  
ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ МЕЗОСФЕРЫ ПО ДАННЫМ SATI  
И ПО СПУТНИКОВЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ****В. М. Сомсиков, А. Б. Андреев, Б. Т. Жумабаев**

ДТОО "Институт ионосферы", АО «НЦКИТ»

Национального космического агентства Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** акустико-гравитационные волны, мезосфера, инфракрасное свечение неба.

**Аннотация.** Представлены результаты экспериментальных исследований сезонного поведения акустико-гравитационных волн (АГВ) на высотах мезосферы. Наблюдения АГВ выполнялись при помощи спектрометра SATI (Spectral Airglow Temperature Imager) в ДТОО Институт ионосферы, г. Алматы. Данный спектрометр позволяет выполнять измерения температуры гидроксидов на высоте около 87 км на пространственно разнесённых участках ночного неба, посредством измерения спектра собственного ночного излучения гидроксидов в ближней инфракрасной зоне (длина волны 836 нм). Результаты оптических наземных наблюдений сопоставляются с данными спутниковых оптических наблюдений MLS (Microwave Limb Sounder).

**Введение.** Интерес к волновым возмущениям атмосферы, в частности, к изучению акустико-гравитационных волн (АГВ), прежде всего, продиктован тем, что эти исследования позволяют раскрывать взаимосвязанные механизмы динамических процессов в открытой неравновесной Солнечно-Земной системе. Интерес к исследованиям этих динамических процессов существенно возрос в связи с проблемами изменения климата, сейсмоактивности, возрастания катастрофических явлений в атмосфере [1-3]. К примеру, сегодня является актуальным поиск предвестников землетрясений в вариациях параметров различных слоев атмосферы, включая ионосферу [4-6]. Но

для выделения атмосферных эффектов, обусловленных различными проявлениями сейсмоактивности и других катастрофических событий, необходимо знание сезонно-суточных особенностей поведений волновых возмущений, связанных с регулярными источниками волн, к которым относятся приливы, солнечный терминатор и др. [7-9].

**Методы исследования.** Для выявления характера распространения АГВ на высотах мезосферы, в работе используются данные измерений температуры и эмиссии гидроксила, полученные с помощью инструмента SATI (Spectral Airglow Temperature Imager). Измерения выполняются на высокогорном комплексе Института ионосферы - радиополигоне «Орбита» на высоте 2730 метров над уровнем моря (43°03'30" с. ш., 76°58'24" в. д.). В инструменте SATI применяется спектральный метод регистрации собственного теплового излучения гидроксила в слое максимума излучения, расположенного на высоте примерно 87 км в ночное время [10-13]. Определение температуры в данном слое мезосферы осуществляется путем сравнения измеренного спектра излучения полос гидроксила OH(6-2) на длине волны 836 nm с модельными спектрами рассчитанными для различной колебательно-вращательной температуры молекул гидроксила. Регистрация собственного излучения атмосферного гидроксила производится с пространственно разнесенных участков ночного неба – на горизонтальном кольце диаметром около 100 км и шириной 14-16 км (рисунок 1).

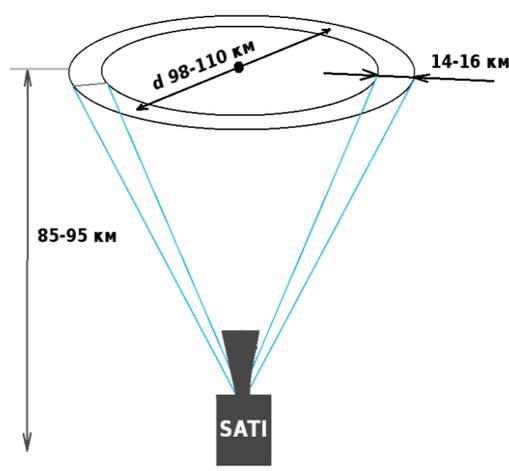


Рисунок 1 – Схема работы SATI

Прибор работает в регулярном автоматическом режиме, время экспозиции спектрометра, а значит и периодичность измерений составляет 1 минуту, измерения проводятся непрерывно, в течение ночи.

Такие характеристики SATI позволяют как производить мониторинг среднего значения температуры в данном слое мезосферы, так и осуществлять регистрацию волновых возмущений в мезосфере, таких как приливные, планетарные и акустико-гравитационные волны (АГВ), определяя направление распространения волны, ее скорость, период колебания и амплитуду.

К настоящему времени уже накоплены непрерывные ряды наблюдений за период более 5 лет. Это позволяет выявлять статистически значимые закономерности в сезонной зависимости параметров АГВ на высоте мезопаузы.

**Особенности обработки экспериментальных данных.** Для проведения анализа данных оптических измерений SATI (значений температуры и эмиссии гидроксила) и с целью определения поведения перемещающихся волновых возмущений в мезосфере, было создано необходимое программное обеспечение, позволяющее обрабатывать данные SATI с помощью модифицированного алгоритма преобразования Фурье, известного, как техника *co-phase* [14]. Это программное обеспечение позволяет автоматически выявлять перемещающиеся волновые возмущения, определять направление распространения, период волны, скорость распространения и длину волны. С помощью данных программ были обработаны результаты измерений SATI за период с 2010 по 2015 год.

На рисунке 2 приведен типичный пример регистрации АГВ 11 мая 2010 года. По оси ординат отложены сектора на кольце, с которого SATI производит регистрацию излучения. Значения температуры представляют собой вариации температуры, после удаления постоянной составляющей, и гармоник с периодами более 90 минут. Так, для данной ночи измерений, основная волновая мода представляет горизонтально распространяющееся волновое возмущение,двигающееся в юго-восточном направлении. В течении 6 часов наблюдений направление распространения изменилось не более чем на 30 градусов, скорость волны составляет 140-160 км/ч, период колебания 40-50 минут, и длина волны определена как 90-130 км.

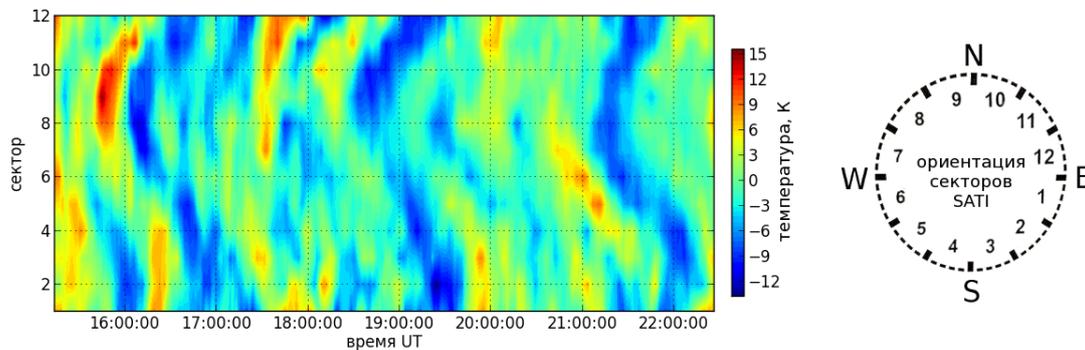


Рисунок 2 – Волновая структура температуры гидроксила, значения для различных точек на плоскости «кольца» диаметром  $\approx 100$  км в течение ночи, по данным наблюдения на SATI 11.05.2010 г.

**Результаты наблюдений и их анализа.** Анализ зарегистрированных волновых возмущений за весь период наблюдения показал распределение по длинам волн, характерное для АГВ (рисунок 3).

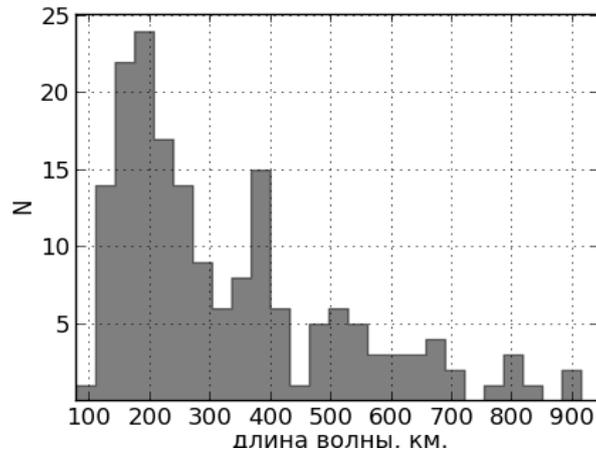


Рисунок 3 – Распределение длин волн горизонтальных перемещающихся волновых возмущений по данным SATI за 5 лет (2010-2015)

Как следует из рисунка 3, максимальное количество зарегистрированных возмущений имеет длину около 100-200 км. Так же наблюдается заметный отдельный пик для длин волн около 350-400 км.

Для выявления сезонных особенностей поведения АГВ в мезосфере по данным SATI весь период данных наблюдений за 5 лет (2010-2015) разбивался по сезонам. На рисунке 4 приведено распределение зарегистрированных АГВ по направлению распространения за 4 года для разных сезонов. Как видно из рисунков, полученные направления имеют сезонную зависимость, особенно это касается возмущений,двигающихся в восточном и западном направлении. Можно выделить западный и юго-юго-западный и восточно-северо-восточный максимумы. Западный максимум в направлениях распространения наблюдается во все сезоны. Юго-юго-западный представлен в основном только зимой и осенью. Восточно-северо-восточный наоборот, имеет максимальную величину в весенне-летние месяцы, хотя и присутствует во все сезоны. В целом большинство волн

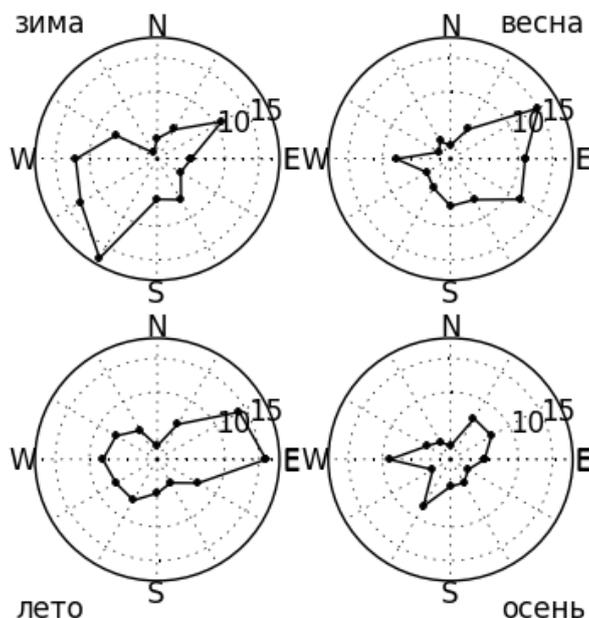


Рисунок 4 – Сезонная зависимость направлений распространения волновых возмущений за 5 лет

имеют зимой западное, а летом восточное направление. Полученные таким образом характеристики волновых возмущений можно считать наблюдающимися регулярно, на протяжении 5 лет измерений на SATI.

**Совместный анализ наземных и спутниковых данных.** Наземные оптические измерения параметров мезосферы проводимые на SATI, позволяют получать длину волны, скорость и направление распространения волновых возмущений в мезосфере, но только в одной географической точке (в зоне видимости SATI). Спутниковые измерения параметров атмосферы на высотах мезопаузы проводятся на низкопролётных спутниках посредством оптических или радиозатменных измерений. Среди современных спутниковых экспериментов по исследованию параметров атмосферы, наилучшим пространственным разрешением обладает эксперимент MLS. Как было показано в работе [15], измерения значений средней зональной температуры на MLS и SATI находятся в хорошем согласии друг с другом.

Одним из недостатков спутниковых экспериментов является низкое горизонтальное пространственное разрешение, так, эксперимент MLS производит измерения профиля параметров атмосферы вдоль траектории полёта спутника через промежутки примерно 150 км. Такое пространственное разрешение является недостаточным для регистрации акустико-гравитационных волн, длиной менее 300 км. Совместное использование наземных и спутниковых измерений представляется очень перспективным, это давало бы возможность получать параметры волновой картины на значительно большей площади, чем позволяют наземные измерения и гораздо более полные, чем позволяют отдельные спутниковые методы. Далее приводится попытка идентифицировать волну, наблюдаемую на SATI со срезом волновой картины в мезосфере по данным спутникового эксперимента MLS.

Анализ данных эксперимента MLS показал наличие волновой картины вдоль траектории измерений на высотах мезосферы. На рисунке 5 приведены значения температуры для трёх дней, 7, 8, 9 мая 2010 года, после удаления постоянного тренда. Значения приведены для высоты 91 км или 0.00215 мбар. Как видно, в данных присутствуют волновые возмущения, с амплитудой до 10 градусов. Такие возмущения могут быть вызваны акустико-гравитационными волнами, регистрируемыми на SATI. Однозначно установить это не представляется возможным, по причине недостаточного пространственного разрешения MLS.

Однако анализ отдельных наблюдений АГВ позволяет утверждать, что в данных MLS наблюдаются именно АГВ. Так, в случае распространения АГВ под углом к траектории измерений MLS близком к прямому, проекция длины АГВ на траекторию MLS превышает предел Найквиста,

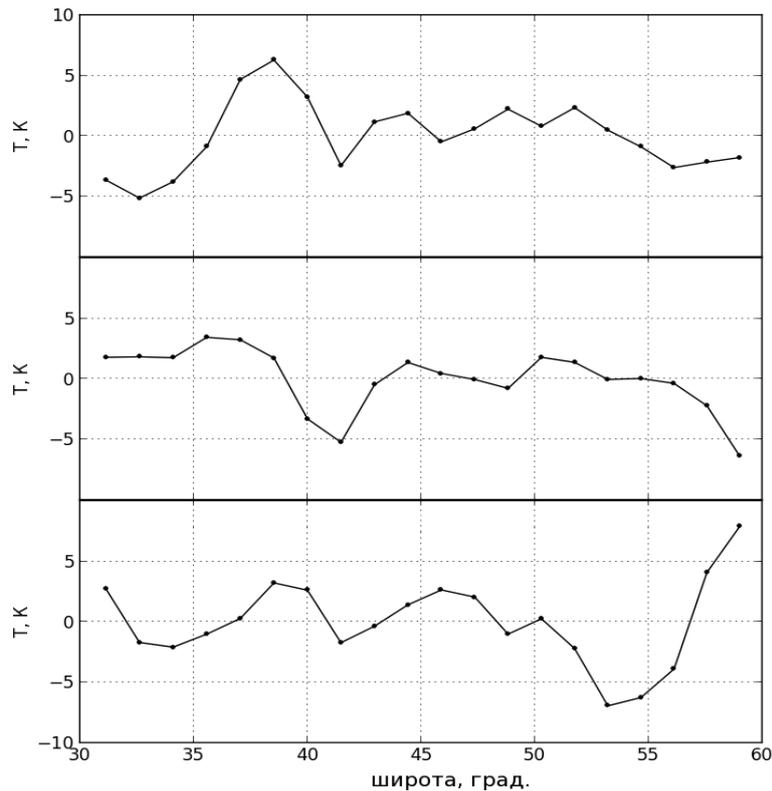


Рисунок 5 – Значения температуры для трех дней, 7, 8, 9 мая 2010 года вдоль траектории измерения MLS на долготе Алматы, 20:40-20:50 UT

и можно ожидать наличие в данных MLS достаточно гладкой волновой картины. Такие случаи действительно наблюдаются, в количестве достаточном для того, чтобы сделать вывод о единой природе этих возмущений. На рисунке 6 приведена схематичное расположение траектории измерений MLS и положение SATI, а так же продолженная в пространстве АГВ наблюдавшаяся на SATI, для данных 16 мая 2010г. (а), а так же график температуры по данным MLS вдоль траектории (в) и данные температуры SATI (б). Траектория для этого дня проходит мимо точки расположения SATI на расстоянии 80 км, в 20:55 UT. Согласно измерениям SATI, в эту ночь наблюдалась четкая АГВ, двигавшаяся в юго-восточном направлении, имевшая период 70 минут, скорость горизонтального распространения 140 км/ч, длину волны около 160 км. Как видно из рисунка, при таком взаимном расположении траектории измерения MLS и направления распространения АГВ, и при предположении ширины фронта АГВ не менее 1000 км, в данных MLS должна быть зафиксирована волна с длиной 600-800 км, что и наблюдается в данных MLS (рисунок бв). Амплитуда изменения температуры согласно SATI при этом примерно вдвое выше, чем по данным MLS, что можно объяснить тем, что спутниковые измерения дают осреднённые значения температуры на горизонтальном участке размером несколько десятков километров из-за чего она оказывается более сглажена, нежели в измерениях SATI. С учетом этого обстоятельства, амплитуда волновых возмущений по данным SATI находится в хорошем согласии с измерениями MLS.

Как видно из этого сопоставления, волновая картина наблюдаемая в данных измерений MLS вдоль траектории спутника может являться акустико-гравитационной волной с высокой долей вероятности. Стоит отметить, что в другие сезоны, когда направления распространения АГВ по данным SATI лежат под меньшим углом к траектории MLS, в данных последнего не наблюдается столь четкой волновой картины, что согласуется с приведённым предположением о том, в измерениях MLS наблюдается срез плоской акустико-гравитационной волны.

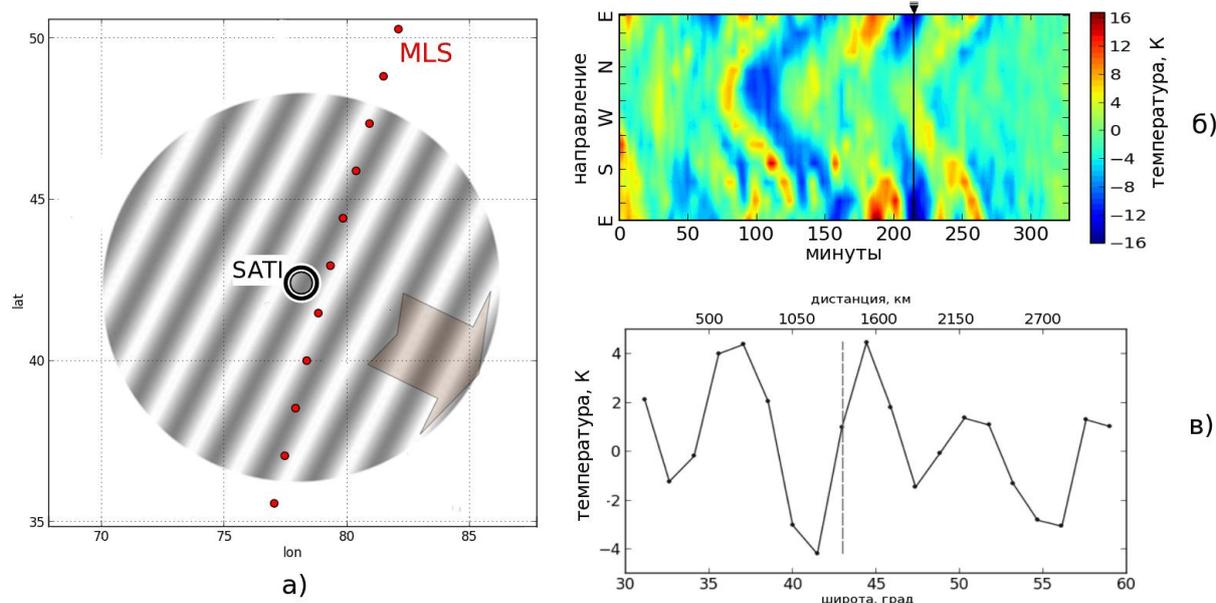


Рисунок 6 – Схематичное расположение траектории измерений MLS, положения SATI и продолженной в пространстве АГВ наблюдавшаяся на SATI, для данных 16 мая 2010г. (а); данные температуры SATI (б), линией отмечен момент измерения MLS; график температуры по данным MLS вдоль траектории измерений (в)

**Закключение.** Долгосрочные измерения вариаций температуры гидроксила на высотах мезосферы, выполненные путем регистрации свечения неба с использованием SATI и спутниковыми измерениями, свидетельствуют о наличии явно выделенного сезонного хода параметров, характеризующих АГВ на высотах мезосферы.

Четко проявляется сезонный ход направлений перемещения волн. Во всех сезонах явно преобладают восточно-западные направления движений. Причем летом и весной преобладают направления АГВ восточного направления, а зимой западного.

Совместное использование данных наземных и спутниковых измерений параметров мезосферы возможно не только на среднесезональных масштабах или масштабах планетарных приливных атмосферных волн, но и для исследования короткопериодных волновых возмущений масштабов АГВ. Совместный анализ данных SATI и MLS показал, что в этих экспериментах регистрируются одни и те же короткопериодные волновые процессы.

*Работа выполнена в рамках проекта РБП-076: «Изучить механизмы взаимосвязи вариаций геофизических параметров на земной поверхности и в верхних слоях атмосферы, обусловленных источниками земного и космического происхождения», Регистрационный номер (РН) 0115PK01274.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hao, Y. Q., Xiao Z., and Zhang D. H. Multi-instrument observation on co-seismic ionospheric effects after great Tohoku earthquake. *J. Geophys. Res.* 2012. – № 117. P.2305. doi:10.1029/2011JA017036.
- [2] Золотов А.Н., Петров А.Е., Синютин А.С. Разработка каталога электромагнитных предвестников землетрясений. Труды VI Всероссийской конференции по атмосферному электричеству. – Нижний Новгород, 2007. – С. 281-282.
- [3] Hegai, V.V., Legenka A.D., Kim V. P., and Georgieva K. Wavelike perturbations in the ionospheric F2-layer observed after the M8.1 Samoa earthquake of September 29, 2009. *Adv. Space Res.* – 2011. – № 47. –pp. 1979–1982. doi:10.1016/j.asr.2011.01.011.
- [4] Liu, J.-Y., Chen C.-H., Lin C.-H., Tsai H.-F., Chen C.-H. and Kamogawa M. Ionospheric disturbances triggered by the 11 March 2011 M9.0 Tohoku earthquake. *J. Geophys. Res.* – 2011. – № 116, – P. 6319. doi:10.1029/2011JA016761.
- [5] Otsuka, Y., et al. GPS detection of total electron content variations over Indonesia and Thailand following the 26 December 2004 earthquake. *Earth Planets Space.* –2006. № 58, –pp.159–165.
- [6] Pulnits, S.A, K.A. Boyarchuk. *Ionospheric Precursors of Earthquakes.* Berlin - New York, «Springer», 2004, 316 p.
- [7] Somsikov V.M. Solar Terminator and Dynamic Phenomena in the Atmosphere: a review. *Geomagnetizm and Aeronomiya.* – 2011. –Vol. 51.– P. 707–71.
- [8] Afraimovich, E.L., First GPS TEC Evidence for the Wave Structure Excited by the Solar Terminator, *Lett. Earth Planet. Space*, 2008, pp. 895–900.
- [9] Krasnov V.M., Drobzheva Ya.V. and Laštovička J. Recent advances and difficulties of infrasonic wave investigation in the ionosphere. *Surveys in Geophysics* – 2006 – 27: 169-209. DOI 10.1007/s10712-005-6203-4.

- [10] S.I. Sargoytchev, S.Brown, B. H. Solheim, Y-M. Cho, G. G. Shepherd, and M. J. López-González. Spectral airglow temperature imager SATI: A ground-based instrument for the monitoring of mesosphere temperature. *Applied optics*, 43, 30, 2004.
- [11] Aushev V.M., Fedulina I.N., Gordienko G.I., López-González M.J., Pogoreltsev A.I., Ryazapova S.Sh. and Shepherd M.G. Effects in the mesosphere and ionosphere observed at northern midlatitudes. *Journal of Planetary and Space Science*, 2006, V. 54.-pp. 559-571.
- [12] Семенов А.И., Баканас В.В., Перминов В.И., Железнов Ю.А., Хомич В.Ю. Спектр излучения ночной верхней атмосферы Земли в ближней инфракрасной области. *Геомагнетизм и аэронавигация*. 2002. Т. 42. № 3. С. 407-414.
- [13] G. Shepherd. *Spectral Imaging of the Atmosphere*, Vol. 82 of the International Geophysics Series Academic, San Diego, Calif., 2002.
- [14] Hernan A. Montes, Eric S. Posmentier. Co-Phase Analysis of Atmospheric Wave Data. *Geophys. J. R. astr. Soc.* (1971) 26, pp.271-278.
- [15] Перцев Н.Н., Андреев А.Б., Мерзляков Е.Г., Перминов В.И. Мезосферно-термосферные проявления стратосферных потеплений: совместное использование спутниковых и наземных измерений. *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2013. Т.10, №1. С.93-100

## REFERENCES

- [1] Hao, Y. Q., Xiao Z., and Zhang D. H. Multi-instrument observation on co-seismic ionospheric effects after great Tohoku earthquake. *J. Geophys. Res.* 2012. – № 117. P.2305. doi:10.1029/2011JA017036.
- [2] Zolotov A.N., Petrov A.E., Sinjutin A.S. Razrabotka kataloga elektromagnitnyh predvestnikov zemletrjasenij. *Trudy VI Vserossijskoj konferencii po atmosfernomu elektrichestvu. Nizhnij Novgorod*, 2007. – P. 281-282. (in Russ.)
- [3] Hegai, V.V., Legenka A.D., Kim V. P., and Georgieva K. Wavelike perturbations in the ionospheric F2-layer observed after the M8.1 Samoa earthquake of September 29, 2009. *Adv. Space Res.* – 2011. – № 47. –pp. 1979–1982. doi:10.1016/j.asr.2011.01.011.
- [4] Liu, J.-Y., Chen C.-H., Lin C.-H., Tsai H.-F., Chen C.-H. and Kamogawa M. Ionospheric disturbances triggered by the 11 March 2011 M9.0 Tohoku earthquake. *J. Geophys. Res.* – 2011. – № 116, – P. 6319. doi:10.1029/2011JA016761.
- [5] Otsuka, Y., et al. GPS detection of total electron content variations over Indonesia and Thailand following the 26 December 2004 earthquake. *Earth Planets Space.* –2006. № 58, –pp.159–165.
- [6] Pulnits, S.A, K.A. Boyarchuk. *Ionospheric Precursors of Earthquakes*. Berlin - New York, «Springer», 2004, 316 p.
- [7] Somsikov V.M. Solar Terminator and Dynamic Phenomena in the Atmosphere: a review. *Geomagnetizm and Aeronomiya.* – 2011. –Vol. 51.– P. 707–71.
- [8] Afraimovich, E.L., First GPS TEC Evidence for the Wave Structure Excited by the Solar Terminator, *Lett. Earth Planet. Space*, 2008, pp. 895–900.
- [9] Krasnov V.M., Drobzheva Ya.V. and Laštovička J. Recent advances and difficulties of infrasonic wave investigation in the ionosphere. *Surveys in Geophysics – 2006 – 27*: 169-209. DOI 10.1007/s10712-005-6203-4.
- [10] S.I. Sargoytchev, S.Brown, B. H. Solheim, Y-M. Cho, G. G. Shepherd, and M. J. López-González. Spectral airglow temperature imager SATI: A ground-based instrument for the monitoring of mesosphere temperature. *Applied optics*, 43, 30, 2004.
- [11] Aushev V.M., Fedulina I.N., Gordienko G.I., López-González M.J., Pogoreltsev A.I., Ryazapova S.Sh. and Shepherd M.G. Effects in the mesosphere and ionosphere observed at northern midlatitudes. *Journal of Planetary and Space Science*, 2006, V. 54.-pp. 559-571.
- [12] Semenov A.I., Bakanas V.V., Perminov V.I., Zheleznov Ju.A., Homich V.Ju. *Spektr izlucheniya nochnoj verhnjej atmosfery Zemli v blizhnjej infrakrasnoj oblasti. Geomagnetizm i aeronomiya*. 2002. Т. 42. № 3. P. 407-414. (in Russ.)
- [13] G. Shepherd. *Spectral Imaging of the Atmosphere*, Vol. 82 of the International Geophysics Series Academic, San Diego, Calif., 2002.
- [14] Hernan A. Montes, Eric S. Posmentier. Co-Phase Analysis of Atmospheric Wave Data. *Geophys. J. R. astr. Soc.* (1971) 26, pp.271-278.
- [15] N.N.Percev, A.B.Andreev, E.G.Merzljakov, V.I.Perminov *Mezoferno-termsfernye projavlenija stratosfernyh potepelenij: sovmestnoe ispol'zovanie sputnikovyh i nazemnyh izmerenij. Sovremennye problemy distancionnogo zondirovanija Zemli iz kosmosa*. 2013. Т.10, №1. P.93-100 (in Russ.)

**SATI МӘЛІМЕТТЕРІНІҢ МЕЗОСФЕРАДА ТОЛҚЫН АШЫНУЫНЫҢ МЕРЗІМ  
ЕРЕКШЕЛІКТЕРІН ЖҮРГІЗУ ЖӘНЕ ЖЕРСЕРІКТЕРМЕН БАҚЫЛАУ**

**В. М. Сомсиков, А. Б. Андреев, Б. Т. Жумабаев**

ЕЖШС «Ионосфера институты» акционерлік қоғамы  
«Ғарыштық зерттеулер мен технологиялар ұлттық орталығы», Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** акустико-гравитациялық толқын, мезофера, аспанның инфрақызыл сәуле таратуы.

**Аннотация.** Мезосфера биіктігінде акустико-гравитациялық толқынның (АГТ) зерттеу мерзіміндегі мінезі тәжірибе нәтижесінде ұсынылған. Алматы қ. ЕЖШС ионосфера институты SATI спектометр көмегімен АГТ бақылаулары орындалды. Температуралық гидроксил 87 кмдей кеңістік биіктігінде түнгі аспанды тікеу аумағын өлшеу спектометр мәліметін рұхсат етуін орындау, түгі сәулелену гидроксилды жақын инфрақызыл аймақтың спектр тәуелділігі арқылы өлшеу (836nm толқын ұзындығы). MLS мәліметтер оптикалық жерсерігін бақылау оптикалық жер беті қорытынды бақылауына теңестіріледі.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 40 – 45

**SOLAR FLARES AND PROPAGATION  
OF RADIO WAVES**

**I. D. Kozin, I. N. Fedulina**

Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: IDKozin@yandex.ru

**Key words:** solar flare, a radiowave, propagation, reflection, absorption, power variations.

**Abstract.** Experimental data on propagation of radiowaves from VLF range to VHF range during the periods of solar flares are considered and analyzed. It is shown that a resultant field of radiowave is influenced by different types of ionospheric disturbances, variation of altitudes of the reflection, nondeviative absorption and interference of different modes of propagation. In low-frequency ranges of radiowaves an increase of received signal power is observed in the most cases during solar flares, in high-frequency ranges the power of propagating radio signal decreases. It is shown also that strongly pronounced patterns of radiowave reaction on solar flares are detected in VLF range, as well as in VHF range.

УДК 523.9-1:629.78, 621.029

**СОЛНЕЧНЫЕ ВСПЫШКИ  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

**И. Д. Козин, И. Н. Федулina**

Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** солнечная вспышка, радиоволна, распространение, отражение, поглощение, вариации мощности.

**Аннотация.** Рассмотрены и проанализированы экспериментальные данные по возмущениям радиоволн от СВД до УКВ диапазонов в периоды солнечных вспышек. Показано, что на результирующее поле радиоволн оказывают различные типы ионосферных возмущений, вариации высот отражения, неотклоняющее поглощение и взаимодействие различных мод распространения. В низкочастотных диапазонах радиоволн в большинстве случаев при солнечных вспышках наблюдается возрастание мощности принимаемых сигналов, в высокочастотных диапазонах при этом распространяющийся сигнал теряет свою мощность. Показано также, что эксклюзивные, ярко выраженные формы реакции радиоволн на солнечные вспышки имеют не только радиоволны СДВ, но и УКВ диапазона.

**Введение.** Воздействие солнечных вспышек на условия распространения радиоволн до сих пор является явлением, интересующим научный мир. Можно отметить наиболее известные эффекты такого воздействия: это полное поглощение энергии радиоволн коротковолнового диапазона, названное эффектом Делинджера [1, 2], а также амплитудные и фазо-частотные возмущения радиосигналов СДВ диапазона [3-7]. Наблюдаемые эффекты в указанных диапазонах частот, как правило, объясняются возникновением внезапных ионосферных возмущений SID. Изменения высотного профиля электронной концентрации, связанные с рентгеновским излучением солнечной вспышки приводят к возрастанию поглощения коротких и к уменьшению высоты отражения сверхдлинных радиоволн.

Целью работы является выявление характерных особенностей реакции радиоволн различных диапазонов на солнечные вспышки и создание предпосылок для выработки прогностических характеристик в функционировании телекоммуникационных и навигационных систем.

При анализе воздействия возмущений космической погоды на распространение радиоволн различных частотных диапазонов будем исходить модели, которая включает многолучевость и, следовательно, интерференцию, поглощение мощности средой, а также изменение длины пути распространения. Изменение мощности принимаемого радиосигнала, в первом приближении, происходит по двум параметрам  $L_0$  и  $\Delta L$ .

$$P_{\text{эсп}} = \frac{P_{\text{изл}}}{L_0 \cdot \Delta L}.$$

Здесь  $L_0$  – поглощение за счёт изменения длины пути (поглощение в свободном пространстве), а  $\Delta L$  – дополнительное поглощение за счёт изменения характеристик среды распространения. Общее поглощение энергии радиоволны будет складываться из изменений обеих составляющих  $L_0$  и  $\Delta L$ .

Коэффициент затухания мощности радиоволны - фактор  $L_0$  - вычисляется в предположении, что распространение радиоволн происходит в свободном пространстве, то есть между передающей и приёмной антеннами не имеется атмосферы и никаких физических препятствий. Вычисление это проводится очень легко, если известны основные свойства приёмной и передающей антенн.

Поскольку при изменении высотного профиля электронной концентрации основные свойства приёмно-передающего тракта не меняются, можно записать

$$L_0 \approx \frac{(4\pi d)^2}{\lambda^2}.$$

То есть, изменения  $L_0$  и, следовательно, мощности принимаемого радиосигнала для выбранной частоты, будут пропорциональны изменению квадрата длины пути –  $d^2$ .

На величину принимаемых сигналов также будет действовать местное время, приходящееся на середину трассы, географическая широта, направление трассы распространения относительно вектора магнитного поля и зенитный угол приходящей радиации. Вид ожидаемых эффектов поглощения электромагнитной энергии радиоволны, вклад каждой из составляющих  $L_0$  и  $\Delta L$  можно оценить на моделях, но окончательный и истинный результат можно получить только в экспериментальных измерениях.

Схематические представления реакции радиоволн на изменения условий распространения, связанные с возмущениями космической погоды, приведены на рисунке 1.

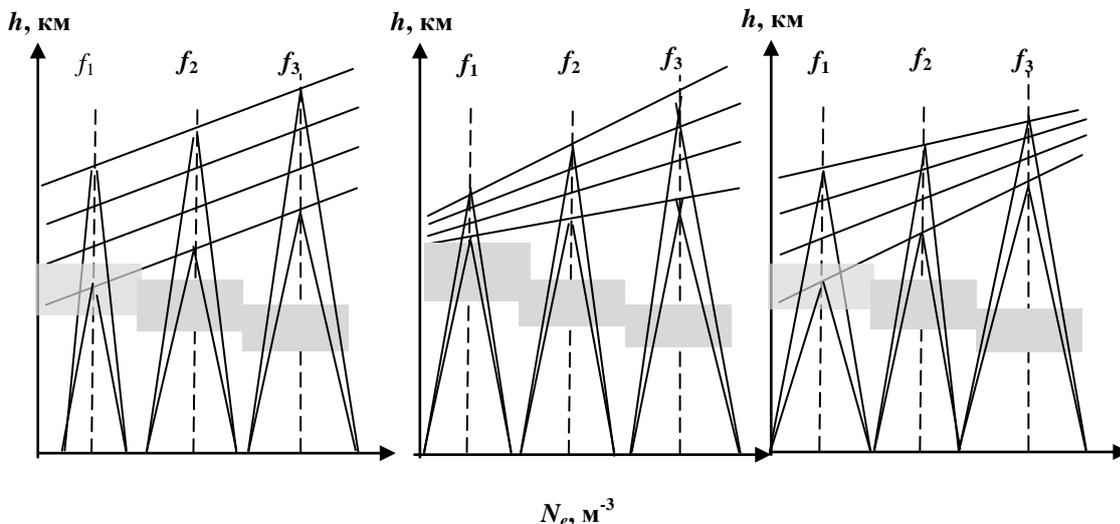


Рисунок 1 – Принципиальные схемы воздействия вариаций профиля электронной концентрации на траекторию и поглощение радиоволн различных диапазонов

Здесь представлены три условных варианта изменения высотного профиля электронной концентрации  $N_e(h)$ ,  $\text{м}^{-3}$ . Вертикальная штриховая линия относится к условиям середины радиотрассы. Первый вариант изменений профиля электронной концентрации имеет вид параллельного смещения по вертикали. Второй вариант имеет вид веера вверх, то есть на больших высотах изменения величины электронной концентрации значительней, чем на более низких высотах. Третий вариант вариаций  $N_e(h)$  имеет вид веера вниз, когда на меньших высотах электронная концентрация изменяется быстрее, чем на больших высотах.

Показаны опять-таки условно, траектории распространения радиоволн с частотами  $f_1 < f_2 < f_3$ . Полагается, что для определённых частот радиоволны необходима столь же определённая и неизменная на разных высотах электронная концентрация  $N_e$ .

В работе [8] показаны условия отражения радиоволны в ионосфере. Отражение радиоволны происходит в точке, в которой плазменная частота ионосферы  $\omega_0$  равна круговой частоте радиоволны  $\omega$ . В свою очередь плазменная частота определяется величиной электронной концентрации

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \cdot N_e}{m}} = \sqrt{3,18 \cdot 10^9 \cdot N_e},$$

где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона.

Как видно, чем выше излучаемая частота  $\omega$ , тем большая электронная концентрация  $N_e$  требуется ее отражения. При изменениях высотного профиля электронной концентрации меняется и высота отражения.

Для оценки вклада ионосферной части поглощения  $\Delta L$  введем в вертикальный профиль области неотклоняющего поглощения амплитуды напряжённости поля радиоволны. Эта область, также условно, обозначена на рисунке 1 серым цветом.

Известно, что величина неотклоняющего поглощения энергии радиоволн пропорциональна

$$E = E_0 \exp \left\{ - \int_s^{s_1} \alpha ds \right\}.$$

Необходимо принять во внимание характер изменения эффективной частоты соударений в зависимости от тепловой скорости электронов.

При расчетах характеристик радиосигналов, распространяющихся в ионосфере, необходимы вычисления не только электронной концентрации, но и эффективной частоты соударений электронов с нейтральными молекулами атмосферного газа. Величина частоты соударений рассчитывается по формуле П. Бэнкса [9], которая имеет вид:

$$\nu(h) = 2.33 \cdot 10^{-11} \cdot N_2(h) [1 - 1.24 \cdot 10^{-4} \cdot T(h)] \cdot T(h) + \\ + 1.82 \cdot 10^{-10} \cdot O_2(h) [1 + 3.6 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{T(h)}] \cdot \sqrt{T(h)},$$

где  $N_2$  и  $O_2$  – концентрации молекул азота и кислорода;  $h$  – высота атмосферы;  $T$  – температура.

Таким образом, для волны данной частоты показатель поглощения увеличивается с высотой в более низких областях, достигает максимума, а затем уменьшается с высотой. Следовательно, имеются значения  $\nu = \nu'$ , для которых показатель  $\alpha$  является максимальным, как это показано на

рисунке 2. Это значение получается путем дифференцирования выражения  $\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2}$  по  $\nu$  и приравнивания его производной нулю.

При этом получим, что показатель поглощения  $\alpha$  максимален на уровне, на котором частота соударений равна круговой частоте волны. Отсюда, чем выше частота волны  $f$ , тем ниже уровень  $h$  максимума показателя поглощения.

Для выделения периодов солнечных вспышек рассмотрим вариации рентгеновского излучения, которые изображены на рисунке 3.

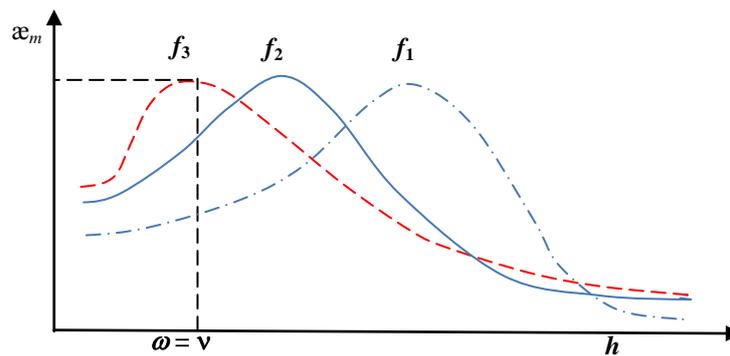


Рисунок 2 – Изменение показателя неотклоняющего поглощения ( $\alpha_m$  – предельное значение  $\alpha$ ) в зависимости от высоты  $h$  для различных частот

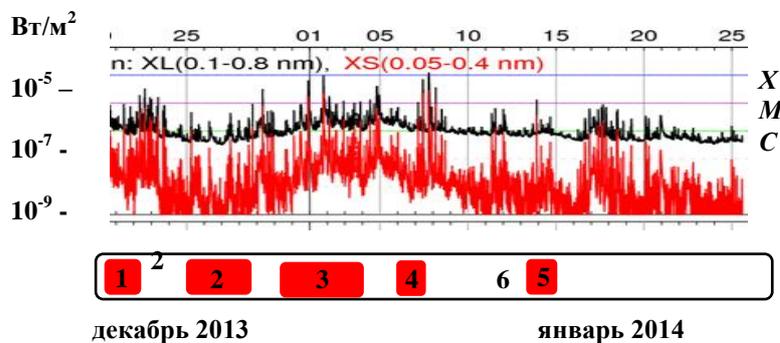


Рисунок 3 – Вариации потока энергии рентгеновского излучения в диапазонах: а) 0,1–0,8 нм и б) 0,05–0,4 нм для периода 21 декабря 2013 г. ÷ 26 января 2014 г. [10]

На рисунке 3 выделены три уровня плотности потока X, M и C. Вариации рентгеновского излучения Солнца приведены по данным GOES Space Environment Monitor (GOES - Geostationary Operational Environmental Satellites) [10]. Внизу рисунка отмечены временные интервалы, в которых плотность потока энергии излучения в обоих диапазонах превышала уровень M. Таких периодов отмечено 5.

Для исследований вариаций мощности радиоволн, регистрируемых в г. Алматы, рассмотрим временной интервал 21 декабря 2013 года – 26 января 2014 года. Для мониторинга поведения радиоволн в выбранный период использовался многоканальный анализатор радиоспектра «БАРС». В качестве модулей измерителей спектра в устройстве используются изделия SA44B (1Гц–4,4 ГГц). В пяти каналах анализатора «БАРС» проводились измерения мощности сигналов в дБм относительно 1Вт в широком СДВ - УКВ диапазоне частот.

На рисунке 4а приведены вариации сигнала 16 кГц, излучаемого станцией Регби (Великобритания). В рассматриваемый период наблюдалось два мощных всплеска мощности принимаемого сигнала, по времени совпадавшие с периодами вспышек рентгеновского излучения на Солнце, обозначенных на рисунке 3 цифрами 2 и 5.

Повышение мощности принимаемых сигналов составило 17 и 8 дБм соответственно. Такое поведение СДВ сигналов хорошо известно и объясняется внезапными ионосферными возмущениями SID. События 3 и 4 совпали с возмущениями иной природы и чётко не проявились.

Представляет интерес поведение радиосигналов в других диапазонах частот. На рисунке 4б представлены вариации дБ сигналов на частоте 280 кГц и на рисунке 4в – 2 МГц.

На этих записях хорошо просматриваются суточный ход и множество как положительных, так и отрицательных возмущений мощности сигнала. Большое число кратковременных возмущений

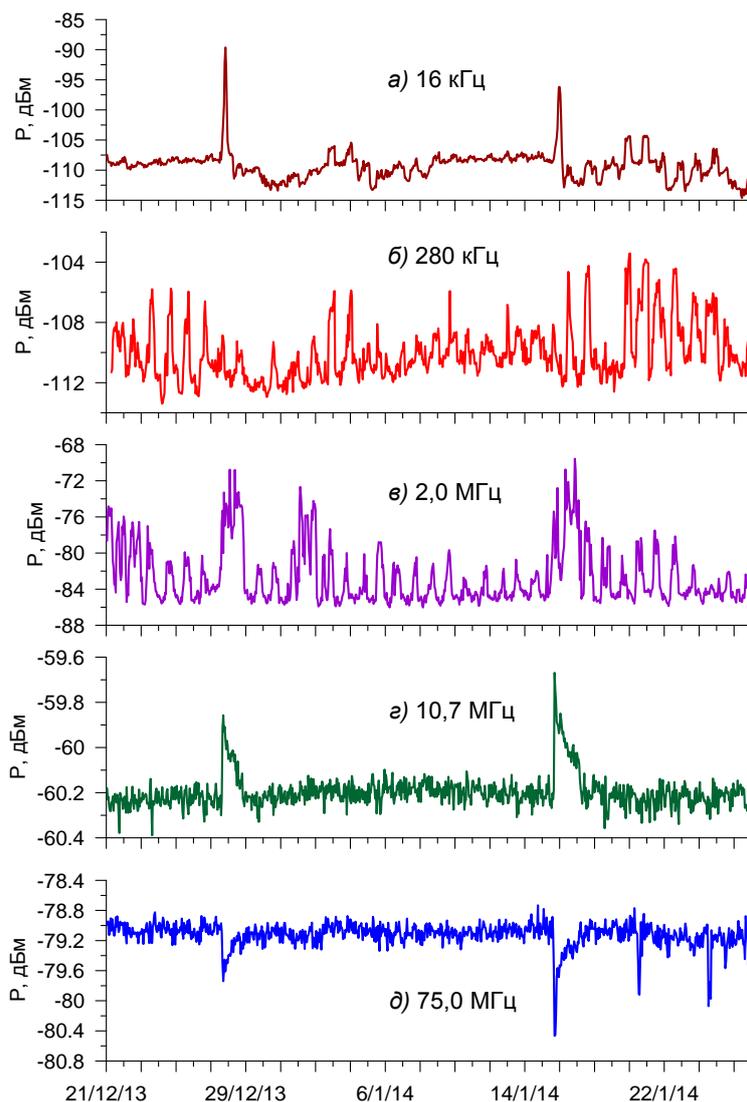


Рисунок 4 – Вариации мощности радиосигналов на частотах от 16 кГц до 75,0 МГц

можно объяснить воздействием всплесков маломощных рентгеновских вспышек. Их проникновение на более низкие высоты ионосферы затруднительно. И хотя часть этих возмущений совпадает по времени с всплесками рентгеновского излучения на Солнце делать конкретные выводы преждевременно.

На следующем рисунке 4г и 4д представляем изменения мощности радиосигнала на частотах 10,7 и 75,0 МГц. На обеих частотах демонстрируется отсутствие суточного хода. Для частоты 10,7 МГц это может быть объяснено превышением максимально применимых частот для этого сезона и близким расположением к приёмному пункту. Удивительно, но всплески потока рентгеновского излучения под номерами 3 и 4, приведенными на рисунке 3, нашли отклик, хотя и с разным знаком, на исследуемых частотах. Отсюда вытекает, что наземный способ фиксации мощных рентгеновских вспышек можно производить не только в СДВ, но и в УКВ диапазонах.

Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Исследование воздействия космической погоды на распространение радиоволн» (Грант 0038/ГФ1, Регистрационный номер (РН) 0112РК02388).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Goodman J.M. Space Weather & Telecommunications. Springer Science+Business Media - 2005. - 382 p.
- [2] ITU-R HDBK ПЕ: The Ionosphere and its Effects on Radiowave Propagation. A Guide with Background to ITU-R Procedures for Radio Planners and Users. Geneva: Radiocommunication Bureau, ITU. - 1998.

- [3] *Кашпар Ю.В., Козин И.Д., Никитин А.А.* О возможностях различных методов контроля и диагностики внезапных ионосферных возмущений // Низкочастотный волновод «Земля-ионосфера»: сб. науч. ст. Алматы: Наука Каз ССР. - 1991. - С. 21-23.
- [4] *Кашпар Ю.В., Козин И.Д., Никитин А.А.* О связи поглощения КВ и фазовой аномалии СДВ при солнечных вспышках // Динамика ионосферы: сб. науч. ст. Алматы: Ғылым. - 1991. - т. 2. - С. 34-36.
- [5] *De Canck M.H.* Radiowave propagation. vol. 6. Antenne X Online Magazine. - 2009. - 410 p.
- [6] *Contreira D.B., Rodrigues F.S., Makita K., Brum C.G.M., Gonzalez W., Trivedi N.B., da Silva M.R., Schuch N.J.* An experiment to study solar flare effects on radio-communication signals // *Advances in Space Research*. - 2005. - Vol. 36. - P. 2455-2459.
- [7] *Davies K.* Ionospheric Radio waves. London: Peter Peregrinus Ltd. - 1990. - 506 p.
- [8] *Козин И.Д., Федулina И.Н.* Распространение радиоволн: Учебное пособие. Алматы: АУЭС. - 2014. - 80 с.
- [9] *Banks P.M.* Collision frequencies and energy transfer Planet // *Space Sci*. - 1966. - Vol 14. - P. 1085-1122.
- [10] National Geophysical Data Center: Solar - Terrestrial Physics Division. Direct Access to GOES Space Environment Monitor Data & Plots [Электронный ресурс]. URL: <http://satdat.ngdc.noaa.gov/sem/goes/data/> (дата обращения: 18.05.2014).

## REFERENCES

- [1] Goodman J.M. *Space Weather & Telecommunications*. Springer Science+Business Media, 2005. 382 p. (in Eng.).
- [2] ITU-R HDBK IIE: *The Ionosphere and its Effects on Radiowave Propagation*. A Guide with Background to ITU-R Procedures for Radio Planners and Users. Geneva: Radiocommunication Bureau, ITU, 1998 (in Eng.).
- [3] *Kashpar Ju.V., Kozin I.D., Nikitin A.A.* *Nizkochastotnyj volnovod «Zemlja-ionosfera»*: sb. nauch. st. Алматы: Nauka Kaz SSR, 1991, 21-23 (in Russ.).
- [4] *Kashpar Ju.V., Kozin I.D., Nikitin A.A.* *Dinamika ionosfery*: sb. nauch. st. Алматы: Gylym, 1991, 2, 34-36 (in Russ.).
- [5] *De Canck M.H.* *Radiowave propagation*. vol. 6. Antenne X Online Magazine, 2009, 410 p. (in Eng.).
- [6] *Contreira D.B., Rodrigues F.S., Makita K., Brum C.G.M., Gonzalez W., Trivedi N.B., da Silva M.R., Schuch N.J.* An experiment to study solar flare effects on radio-communication signals. *Advances in Space Research*, 2005, 36, 2455-2459. (in Eng.).
- [7] *Davies K.* *Ionospheric Radio waves*. London: Peter Peregrinus Ltd, 1990, 506 p. (in Eng.).
- [8] *Kozin I.D., Fedulina I.N.* *Propagation of Radiowaves*: Алматы: AUPET, 2014, 80 p. (in Russ.).
- [9] *Banks P.M.* Collision frequencies and energy transfer Planet. *Space Sci*, 1966, 14, 1085-1122. (in Eng.).
- [10] National Geophysical Data Center: Solar - Terrestrial Physics Division. Direct Access to GOES Space Environment Monitor Data & Plots. URL: <http://satdat.ngdc.noaa.gov/sem/goes/data/> (in Eng.).

## КҮН ЖАРҚЫЛДАРЫ ЖӘНЕ РАДИОТӨЛҚЫННЫҢ ТАРАЛУЫ

И. Д. Козин, И. Н. Федулina

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** күн жарқылдары, радиотөлқын, таралу, шағылысу, жұту, қуаттың вариациясы.

**Аннотация.** Күн жарқылдары кезінде төменгіжиілікті төлқындардан ультрақысқа төлқынға дейінгі радиотөлқынның ауытқулары бойынша тәжірибелік мәліметтер қарастырылған және анализ жасалған. Радиотөлқынның қорытқы өрісіне ионосфералық ауытқулары, шағылысудың өсуінің вариациясы, ауып кетпейтін жұтылу және әртүрлі таралу модаларының әсері көрсетілген. Төменгіжиілікті диапазондардағы радиотөлқын көп жағдайда күн жарқылдарында өзінің қуатын жоғалтатын, бірақ дабылды тарататын жоғарғыжиілікті диапазондардағы дабылдарды қабылдайтын қуаттың өсуі бақыланады. Сонымен қатар күн жарқылдарында радиотөлқынның эксклюзивті, анық көрсетілген реакциясының түрлерінде тек қана төменгіжиілікті төлқынды ғана емес, және де ультрақысқа төлқынның диапазоны да болатыны зерттелген.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 46 – 49

## THE DEVICE FOR MONITORING OF RADIOCHANNEL OCCUPANCY

**I. D. Kozin<sup>1</sup>, I. N. Fedulina<sup>1</sup>, I. V. Vasiliev<sup>2</sup>, V. A. Protsenko<sup>2</sup>, V. V. Kirpun<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>JSC Special Design and technology Bureau “Granite”, Almaty, Kazakhstan,

<sup>3</sup>RTS Engineering LTD, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: IDKozin@yandex.ru

**Key words:** radiosignal, power, phase, spectrum.

**Abstract.** The description of operating principles of developed and implemented multichannel analyzer of a radiowave spectrum is given. The device works in ranges from 1 Hz to 12,4 GHz and is used for study of conditions of electromagnetic signal propagation at various perturbations of space weather. The objectives of research are elaboration of measures on improving stability of radio communications in different systems of telecommunications and navigations.

УДК 621.351.819

## ПРИБОР КОНТРОЛЯ ЗАНЯТОСТИ РАДИОЭФИРА

**И. Д. Козин<sup>1</sup>, И. Н. Федулina<sup>1</sup>, И. В. Васильев<sup>2</sup>, В. А. Проценко<sup>2</sup>, В. В. Кирпун<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>ТОО «СКТБ «Гранит», Алматы, Казахстан,

<sup>3</sup>ТОО «РТС Инжиниринг», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** радиоволна, спектр мощности, многочастотная регистрация.

**Аннотация.** Дано описание принципов работы разработанного и введенного в эксплуатацию многоканального анализатора спектра радиоволн. Прибор работает в диапазонах от 1 Гц до 12,4 ГГц и используется для исследований условий распространения электромагнитных сигналов при различных возмущениях космической погоды. К задачам исследований относится разработка мер по повышению устойчивой связи в различных системах телекоммуникаций и навигации.

**Введение.** Одновременный мониторинг большого числа радиостанций всегда привлекал внимание исследователей [1, 2], поскольку имеет явное превосходство над одночастотным зондированием.

Для лабораторных испытаний и научных исследований в Казахстане компанией «РТС инжиниринг» был разработан и введен в действие многоканальный анализатор радиоспектра «БАРС», предназначенный для измерения характеристик радиосигналов в широком диапазоне частот.

Целью работы является расширение мониторинговых возможностей измерительной аппаратуры в исследованиях воздействия космической погоды на функционирование и качество работы телекоммуникационных и навигационных систем.

Основными техническими характеристиками данного анализатора являются:

- диапазон частот 1 Гц – 4.4 (12.4) ГГц;
- динамический диапазон  $-151 \pm 10$  дБм;

- |                               |                   |
|-------------------------------|-------------------|
| - разрешение по частоте (RBW) | 0.1 Гц - 250 кГц; |
| - точность измерения уровней  | 0.25 дБ;          |
| - скорость сканирования       | 140 МГц/с;        |
| - количество каналов          | 5                 |

Конструктивно «БАРС» выполнен в виде переносного моноблока, объединяющего в одном корпусе модули анализаторов спектра, а также ноутбук. Внешний вид устройства «БАРС» показан на рисунке 1.



Рисунок 1 – Внешний вид изделия «БАРС»

В качестве модулей измерителей спектра в анализаторе используются изделия SA44B (1 Гц – 4,4 ГГц) и SA124B (100 кГц – 12,4 ГГц).

Изделие «БАРС» может периодически снимать спектрограммы заданных оператором участков спектра, через интервалы времени, которые можно задавать с точностью до 1 секунды с записью результатов в базу данных на всех имеющихся каналах независимо друг от друга.

Блок мониторинга спектров представляет собой набор измерительных модулей типа SA44B и SA124B, подключаемых к компьютеру через USB интерфейс. Каждый модуль имеет свой уникальный идентификационный номер, по которому компьютер идентифицирует входные каналы.

В качестве опорных генераторов используются встроенные в модули кварцевые генераторы, обеспечивающие относительную точность измерения частотных составляющих не хуже чем  $10^{-8}$  и выше.

После подключения антенн к тем каналам, которые готовы для работы, устанавливаются требуемые значения начальной и конечной частоты, а также полоса анализа в герцах и темп регистрации в секундах. Конкретные значения этих параметров определяются целями исследований. Результаты измерений записываются в базу данных.

Пример регистрации занятости радиодиапазона 100 кГц – 1 МГц, проведенной 12 января 2014 года в 18.00 местного времени в г. Алматы приведен на рисунке 2.

Установка «БАРС» позволяет осуществить следующие измерения и исследования:

- измерение занятости диапазона в выбранном диапазоне частот, то есть определение частот, на которых работают излучатели;
- временные интервалы работы исследуемых излучателей;
- соответствие частоты и ширины полосы излучателей присвоенным характеристикам;
- выполнение условий электромагнитной совместимости.

На представленном рисунке 2 отчетливо просматривается ряд всплесков, относящийся к радиосигналам средневолнового вещательного диапазона. Формируемая база данных может быть использована для анализа вариаций принимаемой мощности любой станции в любых заданных временных интервалах [3]. Пример таких вариаций на частоте 238 кГц за период с 21 декабря 2013 г. по 17 февраля 2014 г. приведен на рисунке 3.

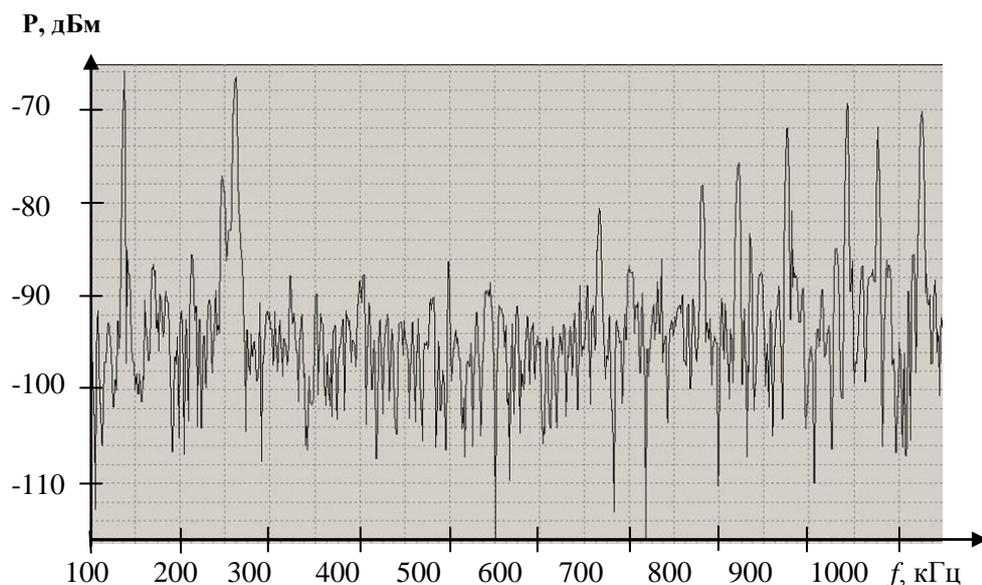


Рисунок 2 – Спектр занятости радиодиапазона, зарегистрированный устройством «БАРС» в г. Алматы

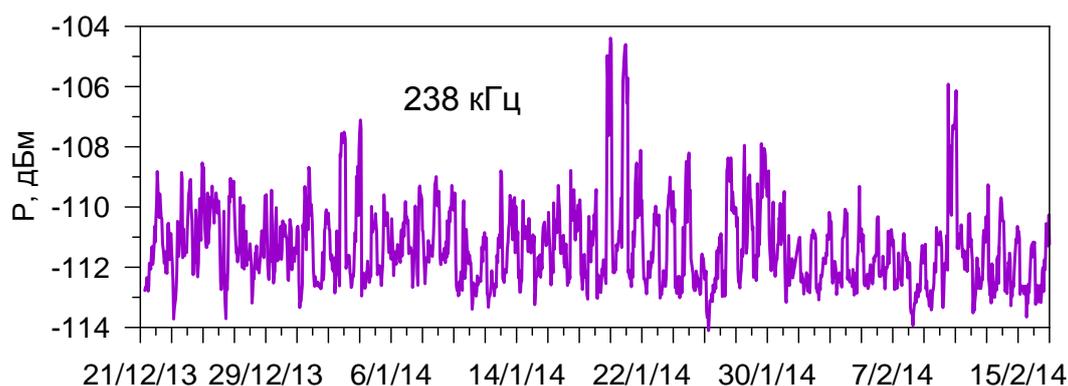


Рисунок 3 – Временные вариации мощности принимаемого сигнала на частоте 238 кГц

Установка по заданию исследователей в автоматическом режиме позволяет проводить измерения фазового шума во всем анализируемом диапазоне (по желанию в усредненном варианте), а также квадратурных составляющих выбранных для анализа частот.

Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Исследование воздействия космической погоды на распространение радиоволн» (Грант 0038/ГФ1, Регистрационный номер (РН) 0112РК02388).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козин И.Д. Измерение напряженности дальнего поля СДВ на многих частотах // Ионосфера и солнечно-земные связи. Алматы: Наука КазССР. - 1972. – С. 14-16.
- [2] Бычков С.Г., Зеленков В.Е., Козин И.Д. и др. Система контроля занятости радиозфира. Алматы: Редакционно-издательский отдел КазГосИНТИ. – 1997. - С. 23-25.
- [3] Козин И.Д., Васильев И.В., Федulina И.Н., Троицкая Н.И. Инновационный патент РК на изобретение «Способ измерения удалённости источника радиоизлучения» от 15.09.2014 г. (19)KZ(13)A4(11)28948: (51) G01S 5/04 (2006/01).

#### REFERENCES

- [1] Kozin I.D. *Ionosfera i solnechno-zemnye svyazi*. Almaty: Nauka KazSSR, 1972, 14-16. (in Russ.)
- [2] Bychkov S.G., Zelenkov V.E., Kozin I.D. i dr. *Almaty: Redakcionno-izdatel'skij otdel KazGosINTI, 1997, 23-25.* (in Russ.)
- [3] Kozin I.D., Vasilev I.V., Fedulina I.N., Troickaja N.I. *Innovacionnyj patent RK na izobrenie «Sposob izmerenija udaljonosti istochnika radioizlucheniya»*, 15.09.2014, (19)KZ(13)A4(11)28948: (51) G01S 5/04 (2006/01). (in Russ.)

**РАДИОЭФИРДІҢ БОС ЕМЕСТІГІН БАҚЫЛАУ ҚҰРЫЛҒЫСЫ****И. Д. Козин<sup>1</sup>, И. Н. Федулina<sup>1</sup>, И. В. Васильев<sup>2</sup>, В. А. Проценко<sup>2</sup>, В. В. Кирпун<sup>3</sup>**<sup>1</sup>Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан<sup>2</sup>«Гранит» АКТБ» ЖШС, Алматы, Қазақстан,<sup>3</sup>«РТС Инжиниринг» ЖШС, Алматы, Қазақстан**Тірек сөздер:** радиодабыл, қуат, фаза, спектр.

**Аннотация.** Радиотолқын спектрінің көпарналы анализаторын эксплуатацияға енгізілген және ойлап шығарылған жұмыс қағидаларының сипаттамасы берілген. Құрылғы 1 Гц тен 12,4 ГГц дейінгі аралықта жұмыс істейді және космостық ауа райының әртүрлі ауытқуларындағы электормагниттік дабылдардың таралу күйлерін зерттеу үшін қолданылады. Зерттеу мақсатына телекоммуникация және навигацияның әртүрлі жүйелеріндегі байланыстың тұрақтылығын жоғарлату бойынша шараларды жасау жатады.

*Поступила 07.07.2015 г.***NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 49 – 53

**TRANSIONOSPHERIC PROPAGATION OF RADIO WAVES****I. D. Kozin, I. N. Fedulina**

Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: IDKozin@yandex.ru

**Key words:** cut-off frequency of the ionosphere, low-frequency electromagnetic oscillations, artificial Earth satellite, earthquake.

**Abstract.** New models of transionospheric radiowave propagation are considered. From a set of theoretical investigations it is known that radiowaves with frequencies below ionospheric cut-off frequencies generated at underlying layers, are reflected downward and do not transit upward. Experiments published in scientific literature have shown that during periods prior to earthquakes electromagnetic oscillations with frequencies 0,1-20 kHz are generated near the ground. In the experimental measurements conducted on satellite-based instruments it was detected that these oscillations penetrates the ionosphere. We offer descriptions of possible mechanisms explaining a penetration through the ionosphere of radiowaves with frequencies below ionospheric plasma frequency.

УДК 621.029

**ТРАНСИОНОСФЕРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН****И. Д. Козин, И. Н. Федулina**

Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** критическая частота ионосферы, низкочастотные электромагнитные колебания, искусственный спутник земли, землетрясение.

**Аннотация.** Рассматриваются новые модели транссионосферного распространения радиоволн. Из множества теоретических разработок известно, что радиоволны с частотами ниже критических частот ионосферы, генерируемые в нижележащих областях, отражаются вниз и не проходят выше. Эксперименты показали, что в периоды подготовки землетрясений у поверхности генерируются электромагнитные колебания с

частотами 0,1-20 кГц. В экспериментальных измерениях, проводимых на Искусственных Спутниках Земли – ИСЗ, обнаружено, что эти колебания проникают сквозь ионосферу. Предложены описания возможных механизмов, объясняющих проникновение через ионосферу радиоволн, частота которых ниже плазменной частоты ионосферы.

**Введение.** Наука развивается очень быстро и не каждому по силам угнаться за всевозрастающим потоком информации. Ведь читать надо всё, а на это не хватает времени. Ещё труднее задача в выборе истины. Наши поколения настолько привыкли верить слову, сказанному или написанному, что при встрече различных мнений наступает растерянность – кому верить. Понятно, что верить нужно себе, своим знаниям, способностям анализировать ситуации. Авторы не стали придерживаться только общепризнанных и своих собственных представлений, но дали право присутствовать альтернативным понятиям и гипотезам.

Целью работы является представление физических механизмов, способствующих проникновению низкочастотных электромагнитных волн сквозь ионосферу. Цель достигается разработкой физических моделей трансionoсферного распространения низкочастотных электромагнитных волн.

Обилие авторитетных теоретических и экспериментальных исследований и устоявшихся мнений о природе и физике распространения электромагнитных волн в ионосфере, например, [1-4] не способствуют развитию каких-либо новых направлений в этой области. Но есть подтверждения тому, что существуют явления и эффекты в трансionoсферном распространении радиоволн, реалии которых не могут объяснить существующие теории электромагнетизма.

Из нескольких неопубликованных источников известна информация о том, что радиоволны с частотами ниже плазменной частоты ионосферы проникают сквозь эту среду и регистрируются на Искусственных Спутниках Земли. Конкретно нам известны сообщения о том, что по личным просьбам повествующих космонавты СССР брали обычные карманные радиоприёмники на борт ИСЗ и, находясь на орбитах выше 600-700 км, прослушивали радиостанции длинноволнового диапазона.

Однако имеются достоверные и публикуемые факты, подтверждающие указанную выше информацию о прохождении низкочастотных электромагнитных волн через ионосферу. Основная суть публикаций на эту тему состоит в следующем. При подготовке землетрясений в его эпицентре генерируются низкочастотные электромагнитные колебания. Частота этих колебаний лежит в диапазоне 0,1 – 20 кГц [5, 6]. Обнаружение и многократная регистрация этих колебаний проводилась на низкоорбитальных ИСЗ [6-10]. Отмечается особенность распространения таких волн, заключающаяся в том, что они перемещаются от ожидаемого очага землетрясений в космос по силовым линиям напряжённости магнитного поля Земли, то есть вдоль линий равной напряжённости магнитного поля Земли.

Второй особенностью районов повышенной сейсмической активности является понижение электронной концентрации ионосферы над их эпицентрами. Полагаем, что оба вида указанных особенностей ионосферы и распространения низкочастотных радиоволн взаимосвязаны, и мы попытаемся это подтвердить.

Из исследований на эту тему можно отметить монографию [11], в которой полагалось, что вдоль магнитных силовых линий могут распространяться электромагнитные волны очень низких и ультранизких частот. Источниками таких волн являются грозовые разряды и искусственные излучатели, роль которых играют наземные передатчики связи ОНЧ диапазона. Исследовать характер распространения таких волн представлялось важной практической задачей, так как волны этих диапазонов могут распространяться на большие расстояния, даже многократно огибать земную поверхность, а также проникать достаточно глубоко под поверхность морей, что позволяет организовать на этих частотах связь с подводными лодками. Для исследования свойств этих волн в ИЗМИРАН была разработана специальная аппаратура для установки её на спутниках. Один из первых и удачных пусков был произведен 7 августа 1970 года, когда с космодрома Капустин Яр был запущен спутник «Интеркосмос-3», на котором впервые были установлены приёмники ОНЧ-излучений для регистрации сигналов как естественного, так и искусственного происхождения. Спутник вышел на орбиту с перигеем 206 км и апогеем 1315 км, наклоном 48,4° и начальным периодом обращения 99,8 мин. Спутник работал вплоть до конца 1970 года. В течение всего

времени работы спутника бортовая аппаратура работала нормально, и за четырёхмесячный период был получен большой объём научной информации. По данным экспериментов, проведенных на ИСЗ «Интеркосмос-3», удалось определить интенсивность и спектральные свойства ОНЧ-излучений в ионосферной плазме.

Эта информация могла бы стать предметом изучения и обоснования обнаруженного факта трансионосферного распространения длинных радиоволн, но такого не произошло.

Авторы в данной статье делают попытку такого обоснования.

Что представляет собой ионосфера. Иногда её называют частью атмосферы, в которой атомы находятся в ионизированном состоянии и имеются свободные электроны. Ближе к истине такое определение. Ионосфера – это область атмосферы, расположенная на высотах 50÷1000 км, в которой *часть* атомов и молекул находится в ионизированном состоянии. Какова же эта часть? В максимуме электронной концентрации даже в дневное время суток отношение концентраций заряженных и нейтральных компонент не превышает величины  $10^{-4}$  [12].

Условием отражения вертикально падающей на ионосферу радиоволны в простейшем случае является, согласно [1], равенство частоты радиоволны  $\omega$  плазменной частоте  $\omega_0$ , то есть  $\omega = \omega_0$ , где в системе CGSE

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \cdot N_e}{m}} = \sqrt{3,18 \cdot 10^9 \cdot N_e}.$$

$e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона;  $N_e$  – электронная концентрация в ионосфере,  $\text{см}^{-3}$ .

Что же способствует проникновению низкочастотных радиоволн сквозь ионосферу?

Первым механизмом, ответственным за прохождение энергии радиоволны через ионосферу, можно принять возможную зависимость величины отражённой и проходящей сквозь ионосферу энергии от мощности падающей волны.

Абсолютность условия отражения радиоволны  $\omega = \omega_0$  вызывает некоторые сомнения. В любой ситуации движения электромагнитной волны в точке скачка показателя преломления энергия падающей радиоволны разделяется на части, ответственные за поглощение, отражение и преломление (с прохождением части энергии). Условие  $\omega = \omega_0$  говорит о полном отражении всей энергии радиоволны вне зависимости от её величины. Теория не даёт ответа на этот вопрос. Скорее всего, есть предел отражаемой энергии, ведь электроны в точке отражения лишь переизлучают падающую энергию. По аналогии, магнитное поле радиационных поясов может удерживать лишь определённую часть захваченных зарядов.

Вторым механизмом (может быть главным), способствующим прохождению энергии радиоволны выше уровня, где  $\omega = \omega_0$ , может быть следующий.

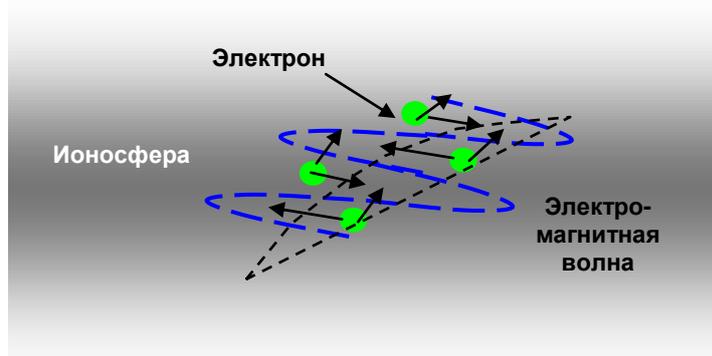
Суть этого механизма заключается в механическом воздействии электромагнитных волн на свободные электроны ионосферы (законы А.-М. Ампера и Лоренца), приводящие к их принудительному смещению. Если в магнитном поле скорость заряженной частицы направлена под некоторым углом к направлению магнитной силовой линии (питч-угол), где находится частица, то вектор ее скорости можно разложить на две составляющие: по касательной к магнитной силовой линии и перпендикулярно к ней. Если в пространстве существуют одновременно и магнитное и электрическое поля, то сила, действующая на заряд, по закону Лоренца равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Здесь  $q$  - величина заряда;  $v$  - скорость его движения;  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  - величины электрической и магнитной напряжённости поля. При этом электроны, с одной стороны, закручиваются вокруг магнитной силовой линии и, с другой стороны, приходят в движение вдоль вектора магнитного поля Земли [13], как показано на рисунке.

Таким образом, ионосферные электроны модулированы в своём движении закономерностями изменений радиоволны. В свою очередь движущиеся в магнитном поле под воздействием электромагнитной волны электроны сами генерируют новое поле, сохраняющее прежнюю частоту и модуляцию.

Аналогичную реакцию электронов вызовут акустические волны. Важно присутствие силы, приводящей к движению электронов.



Движение электрона в магнитном поле под действием радиоволны

Как видим, рассмотренный механизм проникновения энергии низкочастотных волн через ионосферу физически обоснован. Он объясняет не только проникновение волн, но и деградацию концентрации электронов в ионосфере. Оба эти эффекта наблюдаются в районах подготавливаемых землетрясений [6,7].

Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Исследование воздействия космической погоды на распространение радиоволн» (Грант 0038/ГФ1, Регистрационный номер (РН) 0112РК02388).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука. – 1967. - 683 с.
- [2] Брюнелли Б.Е., Намгаладзе А.А. Физика ионосферы. М.: Наука. - 1988. - 528 с.
- [3] Альперт Я.Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М.: Наука. – 1972. - 564 с.
- [4] Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир. - 1973. – 504 с.
- [5] Кузнецов В.Д., Ружин Ю.Я. Изучение ионосферных явлений, предшествующих землетрясениям и другим природным и техногенным катастрофам (проект Вулкан) // Распространение радиоволн: сб. докл. XXI Всероссийская научная конференция 25-27 мая 2005 г., Йошкар-Ола. – 2005. – Том 1. – С. 27-39.
- [6] Cicerone R.D., Ebel J.E., Britton J. A systematic compilation of earthquake precursors // *Tectonophysics*. – 2009. – Vol. 476. – P. 371–396.
- [7] Маркина В.И., Наливайко А.В., Гершензон Н.И. и др. Наблюдения на спутнике «Интеркосмос-19» ОНЧ-излучений, связанных с сейсмической активностью // *Геомагнетизм и аэрономия*. – 1983. - Том 23. - С. 842.
- [8] Молчанов О.А. Прохождение электромагнитных полей от сейсмических источников в верхнюю ионосферу Земли // *Геомагнетизм и аэрономия*. – 1991. - Том 31. – С. 111-119.
- [9] Larkina V.I., Migulin V.V., Mogilevsky M.M. et al. Earthquake Effects in the Ionosphere according to the Intercosmos 19 and Aureol 3 Satellite Data // *Results of the ARCAD 3 Project and of the Recent Programmes in Magnetospheric Physics. Proceeding of International Conf., Toulouse, May 1984 / Ed. by CNES, CEPADUES-EDITIOS*. - 1985. - P. 685-699.
- [10] Parrot M. Satellite Study of ELF-VLE Emissions Recorder by a Low Altitude Satellite during Seismic Events // *J. Geophys. Res.* - 1994. - Vol. 99. - № A12. - P. 23339-23347.
- [11] Будько Н., Зайцев А., Карпачев А., Козлов А., Филиппов Б. Космическая среда вокруг нас / под ред. д. ф.-м. н. А.Н. Зайцева. М.: ТРОВАНТ, ИЗМИРАН. – 2005. - 321 с.
- [12] Козин И.Д., Федупина И.Н. Космическая погода и ее влияние на распространение радиоволн: Учебное пособие. Алматы: АУЭС. – 2012. - 79 с.
- [13] Гальпер А.М., Дмитриенко В.В., Никитин Н.В. и др. Взаимосвязь потоков высокоэнергичных заряженных частиц в радиационном поясе с сейсмичностью Земли // *Космич. исследования*. – 1989. - Том 27. - № 5. - С. 789-792.

#### REFERENCES

- [1] Ginzburg V.L. *Rasprostranenie jelektronnym voln v plazme*. M.: Nauka, 1967, 683 p. (in Russ.)
- [2] Brjunelli B.E., Namgaladze A.A. *Fizika ionosfery*. M.: Nauka, 1988, 528 p. (in Russ.)
- [3] Alpert Ja.L. *Rasprostranenie jelektronnym voln i ionosfera*. M.: Nauka, 1972, 564 p. (in Russ.)
- [4] Davies K. *Ionospheric Radio waves*. London: Blaisdell Publishing Company, 1969, 504 p. (in Eng.)
- [5] Kuznecov V.D., Ruzhin Ju.Ja. Propagation of radiowaves: *Proced. XXI Vserossijskaja nauchnaja konferencija 25-27 May 2005, Joshkar-Ola, 2005, 1, 27-39* (in Russ.)
- [6] Cicerone R.D., Ebel J.E., Britton J. A systematic compilation of earthquake precursors. *Tectonophysics*, 2009, 476, 371–396 (in Eng.)

- [7] Markina V.I., Nalivajko A.V., Gershenson N.I. et. al. *Geomagnetism and aeronomy*, 1983, 23, 842 (in Russ.)
- [8] Molchanov O.A. *Geomagnetism and aeronomy*, 1991, 31, 111-119 (in Russ.).
- [9] Larkina V.I., Migulin V.V., Mogilevsky M.M. et al. Earthquake Effects in the Ionosphere according to the Intercosmos 19 and Aureol 3 Satellite Data. *Results of the ARCAD 3 Project and of the Recent Programmes in Magnetospheric Physics. Proceeding of International Conf., Toulouse, May 1984*. Ed. by CNES, CEPADUES-EDITIOS, 1985, 685-699 (in Eng.).
- [10] Parrot M. Satellite Study of ELF-VLE Emissions Recorder by a Low Altitude Satellite during Seismic Events. *J. Geophys. Res.*, 1994, 99, A12, 23339-23347 (in Eng.).
- [11] Budko N., Zajcev A., Karpachev A., Kozlov A., Filippov B. *Kosmicheskaja sreda vokrug nas*. M.: TROVANT, IZMIRAN, 2005, 321 p. (in Russ.)
- [12] Kozin I.D., Fedulina I.N. *Kosmicheskaja pogoda i ee vlijanie na rasprostranenie radiovoln*. Almaty: AUPET, 2012, 79 p. (in Russ.)
- [13] Galper A.M., Dmitrienko V.V., Nikitin N.V. et. al. *Kosmicheskie issledovanija*, 1989, 27, 5, 789-792 (in Russ.).

## РАДИОТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТРАНСИОНОСФЕРАЛЫҚ ТАРАЛУЫ

И. Д. Козин, И. Н. Федулina

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ионосфераның критикалық жиілігі, төменгіжиілікті электромагниттік тербелістер, жасанды жер серігі, жер сілкінуі.

**Аннотация.** Радиотолқындардың транссионсфералық таралуының жаңа содельдері қарастырылады. Төменгі жақта орналасқан жерлердегі туындайтын ионосфераның критикалық жиіліктерінен төмен жиіліктерінің радиотолқындары төмен қарай сәулеленетіні және жоғары өтпейтіні көптеген теориялық зерттеулерден белгілі. Тәжірибеде жер сілкінуінің болар уақытында жер бетінде 0,1-20 кГц жиілігімен электромагниттік тербелістері пайда болатыны көрсетілген. Жасанды Жер Серіктерінде – ЖЖС жүргізілген тәжірибелік өлшеулерде бұл тербелістердің ионосфера арқылы өтетінін анықтайды. Мұнда ионосфераның плазмалық жиіліктерінен төмен болатын радиотолқынның жиілігі ионосфера арқылы өтуін түсіндіретін кейбір механизмдердің сипаттамасы ұсынылады.

Поступила 07.07.2015 г.

# Наземно-космические методы исследования геодинамических процессов в земной коре

---

---

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 54 – 63

## MUONS IN COSMIC RAYS AND PROCESSES IN EARTH'S CRUST

Zh. Sh. Zhantayev<sup>1</sup>, N. G. Breusov<sup>1</sup>, G. Ya. Khachikyan<sup>2</sup>, K. M. Mukashev<sup>3</sup>, T. Kh. Sadykov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>JSC "National Centre for Space Research and Technology", Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Institute of Ionosphere, " JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan,

<sup>3</sup>National Pedagogical University after Abaya, MES, Almaty, Kazakhstan,

<sup>4</sup>Physics and Technical Institute of "NNTH" Parasat " MES, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: galina.khachikyan@gmail.com

**Keywords:** cosmic ray muons, solar activity, earthquakes.

**Abstract.** The results of the model calculations and experimental observations of muon component of cosmic rays in the atmosphere and under a layer of rock as well, collected by the international community of scientists, are considered. It is revealed that cosmic ray muons, depending on their energy, can penetrate to a depth of up to 100 km. water equivalent. The results are presented which show that the strongest earthquakes occurred in the Japan and in the North Tien Shan as well, have a tendency to be confined to the periods of minimum in solar activity, when the increased flux of galactic cosmic rays is expected. It is shown that the crust in areas where the seismicity found an association with variations in solar activity and/or the intensity of the cosmic rays flux, have a higher electrical conductivity as compared with neighboring areas. It is concluded that the results support the idea of the implementation on the basis of a complex «ATHLET» the new cosmophysical method of short-term prediction of strong earthquakes, named as the muon beam.

УДК 551.24; 550.34

## МЮОНЫ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ И ПРОЦЕССЫ В ЗЕМНОЙ КОРЕ

Ж. Ш. Жантаев<sup>1</sup>, Н. Г. Бреусов<sup>1</sup>, Г. Я. Хачикян<sup>2</sup>, К. М. Мукашев<sup>3</sup>, Т.Х. Садыков<sup>3</sup>

<sup>1</sup>АО "Национальный Центр космических исследований и технологий» АКК МИР РК, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>ДТОО «Институт ионосферы», АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,

<sup>3</sup>Национальный Педагогический Университет им. Абая МОН РК. Алматы, Казахстан,

<sup>4</sup>Физико-Технический Институт АО «ННТХ «Парасат» МОН РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** космические лучи, мюоны, солнечная активность, землетрясения.

**Аннотация.** Приведены результаты модельных расчетов и экспериментальных наблюдений мюонной компоненты космических лучей в атмосфере и под толщей горной породы, полученные к настоящему времени международным сообществом ученых. Показано, что мюоны космических лучей, в зависимости от их энергии, могут проникать на глубины до 100 км водного эквивалента. Проанализированы данные, показывающие, что сильнейшие землетрясения в районе Японии, а также на Северном Тянь-Шане, имели

тенденцию быть приуроченными к периодам минимума солнечной активности, когда ожидается максимальным поток галактических космических лучей. Приведены результаты, демонстрирующие, что земная кора тех районов, где обнаружена связь тектонических процессов с вариациями солнечной активности и/или интенсивностью потока космических лучей, обладает более высокой электрической проводимостью по сравнению с соседними районами. Сделан вывод, что результаты поддерживают идею реализации на базе комплекса «ATHLET» нового космофизического метода краткосрочного прогноза сильных землетрясений «мюонный луч».

**Введение.** В последние годы обсуждается вопрос о реализации вблизи г. Алматы (на базе высокогорного комплекса «ATHLET») космофизического метода краткосрочного прогноза сильных землетрясений [1-5]. В этом методе требуется проводить одновременный мониторинг потока мюонов в космических лучах и акустических, а возможно и сейсмических сигналов, которые предположительно должны возникать в напряженной сейсмоактивной среде при воздействии на нее проникающих мюонов. К настоящему времени в [6] разработано теоретическое обоснование космофизического метода прогноза землетрясений (образно названного «мюонный луч»), теоретические расчеты подкреплены результатами компьютерного моделирования [1] и первой серией пробных измерений [2]. Однако, реализация нового метода потребует определенных финансовых затрат, поэтому, для большей убедительности в их целесообразности, имеет смысл провести дополнительные исследования, результаты которых, пусть даже косвенно, но поддержали бы данную идею. При обсуждении метода «мюонный луч» одними из первых возникают вопросы о глубине проникновения мюонов в земную кору и о наличии экспериментально обнаруженных эффектов соответствия между вариациями космических лучей и характеристик геодинамической активности. Поэтому в данной статье приведены результаты международных исследований концентрации подземных мюонов, и результаты о соответствии между вариациями солнечной активности, модулирующей поток космических лучей, и сейсмической активности Земли.

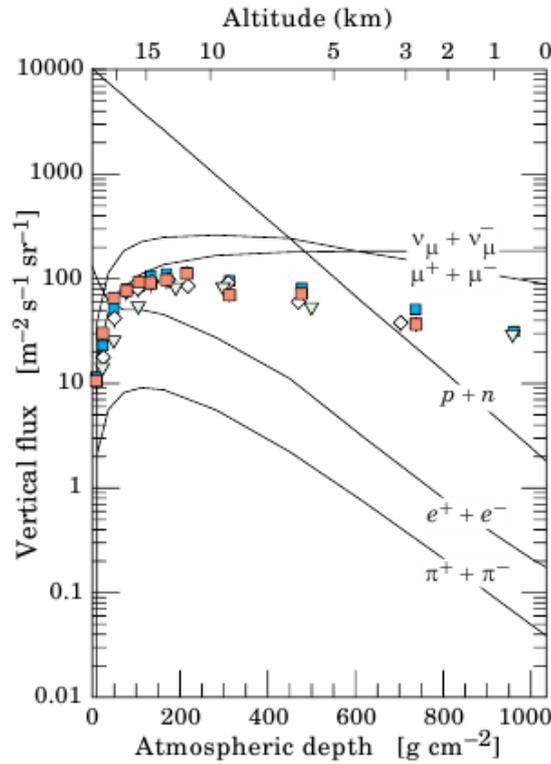
**Результаты исследования.** Космические лучи – это поток частиц высокой энергии (ядер различных атомов от водорода до урана, но преимущественно протонов), приходящих на Землю из мирового пространства (первичное излучение). Большинство частиц первичного космического излучения имеет энергию больше  $10^9$  эв ( $1$  Гэв), а энергия отдельных частиц достигает  $10^{20}$ — $10^{21}$  эв и выше [7]. Первичные космические лучи в результате взаимодействия с ядрами атмосферы порождают вторичные частицы (вторичные космические лучи) в реакциях:

$$N + N = N + N + \sum(\pi^0, \pi^+, \pi^-).$$

Затем нейтральные и заряженные пионы ( $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ ) распадаются на мюоны ( $\mu$ ), нейтрино ( $\nu$ ) и фотоны ( $\gamma$ ) по схеме:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu + \nu_\mu, \pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Основная масса вторичных космических лучей образуется в максимуме широких атмосферных ливней (ШАЛ) на высоте вокруг  $\sim 15$  км. Доминирующей здесь является электронно-фотонная компонента, и только  $\sim 10\%$  от числа электронов составляют мюоны, количество которых зависит от энергии первичной частицы. В [1] проводилось компьютерное моделирование для мюонов с энергией  $E \geq 3$  ТэВ, рождаемых в ШАЛ при энергиях первичных частиц  $E_0$  от  $10^{16}$  эВ до  $10^{19}$  эВ. Получено, что при  $E_0 = 10^{16}$  эВ, в центре ШАЛ может содержаться примерно 4 мюона с энергией  $E \geq 3$  ТэВ, а при  $E_0 = 10^{19}$  эВ, - более 1500 мюонов с энергией  $E \geq 3$  ТэВ. Проходя через атмосферу и приближаясь к земной поверхности, вторичные космические лучи теряют свою энергию в основном в процессе ионизации, тормозного излучения, образования пар, фотоядерных взаимодействий. Поскольку масса мюона почти в 200 раз больше массы электрона, эффективность взаимодействия мюонов с атмосферными газами в 40000 раз меньше, чем у электронов и на уровне земной поверхности поток мюонов становится доминирующим. Этот эффект демонстрирует рисунок 1 из работы [8], где сплошными кривыми показаны рассчитанные концентрации пионов, электронов, протонов, нейтронов, мюонов и нейтрино, а цветными символами показаны экспериментальные измерения концентрации отрицательных мюонов с энергиями  $E_\mu > 10^9$  эВ, полученные разными авторами в разных экспериментах, реализованных, как на уровне земной поверхности, так и на высотах атмосферы с использованием баллонов и самолетов [8].



Кривые – модельные расчеты, символы – измеренные концентрации отрицательных мюонов.

Рисунок 1 – Вертикальные потоки различных частиц космических лучей с энергией  $E > 1$  GeV на разных высотах [8]

Как показывает рисунок 1, только мюоны и нейтрино достигают земной поверхности и могут проникнуть в земную кору. Проходя через горную породу, мюоны будут терять энергию в ионизационных и радиоактивных процессах (тормозное излучение, прямое рождение пар  $e^+e^-$ , и фотоядерные взаимодействия). Полная потеря энергии мюона может быть выражена в виде функции от массы пройденного вещества в виде [8]:

$$-dE_\mu/dX = a + bE_\mu, \tag{1}$$

где  $a$  – ионизационные потери,  $b$  - потери за счет трех перечисленных выше радиоактивных процессов. Оба параметра в (1) изменяются с изменением энергии. Отношение  $a/b$ , равное ( $\approx 500$  GeV в стандартной горной породе) определяет критическую энергию, ниже которой ионизационные потери становятся преобладающими над радиоактивными потерями. В таблице 1 приведены данные о среднем пути пробега мюона в стандартной горной породе [9] и значения параметров  $a$ ,  $b$  в зависимости от энергии мюона.

Значения параметров в таблице 1 несколько изменяются в зависимости от химического состава горной породы и должны оцениваться для конкретно исследуемого района. Интенсивность подземных мюонов зависит от энергии мюона в атмосфере и его потерь в горной породе. Если

Таблица 1 – Средний путь пробега  $R$  (в километрах водного эквивалента или в  $10^5$  г  $\text{см}^{-2}$ ) мюона с энергией  $E_\mu$ , и значения коэффициентов потерь в ионизационных и радиоактивных процессах ( $a$ ,  $b$ , соответственно) по данным [9]

| $E_\mu$ , ГэВ | $R$ , км в.э. | $a$ , МэВ $\text{г}^{-1} \text{см}^2$ | $b$ , $10^{-6} \text{г}^{-1} \text{см}^2$ |
|---------------|---------------|---------------------------------------|---|
| 10            | 0,05          | 2,17                                  | 1,90                                      |
| 100           | 0,41          | 2,44                                  | 3,04                                      |
| 1000          | 2,45          | 2,68                                  | 3,92                                      |
| 10000         | 6,09          | 2,93                                  | 4,35                                      |

пренебречь зависимостью коэффициентов  $a$ ,  $b$  от энергии мюона, то проинтегрировав уравнение (1) можно получить соотношение связи между энергией мюона в атмосфере ( $E_{\mu,0}$ ) и его энергией ( $E_{\mu}$ ) после пробега слоя горной породы толщиной  $X$  в виде [8]:

$$E_{\mu,0} = (E_{\mu} + a/b) \exp(bX) - a/b \quad (2)$$

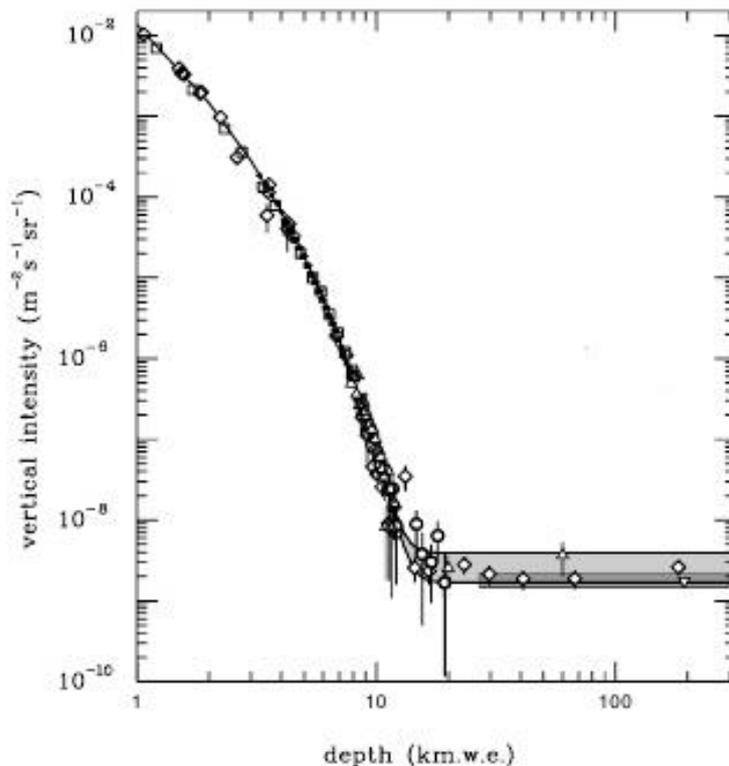
В общем, спектр мюонов на глубине  $X$  можно представить в виде [8]:

$$dN_{\mu}(X)/dE_{\mu} = (dN_{\mu}/dE_{\mu,0}) \times (dE_{\mu,0}/dE_{\mu}) = dN_{\mu}/dE_{\mu,0} \exp(bX) \quad (3)$$

где  $E_{\mu,0}$  есть решение уравнения (2) для случая, когда можно пренебречь флуктуациями.

На рисунке 2 показаны результаты расчета и измерения мюонов до глубин более 100 км водного эквивалента из работы [8]. Линиями на рисунке 2 показаны результаты модельных расчетов, а символами результаты измерений в разных экспериментах: черные ромбы – компиляция данных в экспериментах Crouch [10] и Vaksan [11], светлые круги – данные эксперимента LVD [12], темные круги – компиляция данных в экспериментах MACRO [13] и Frejus [14], треугольники – данные эксперимента SNO [15]. Серая область на больших глубинах представляет мюоны с энергией более 2 ГэВ, которые индуцируются при взаимодействии с нейтрино. Верхняя линия – для горизонтальных потоков индуцированных мюонов, нижняя – для мюонов, распространяющихся вертикально вверх. Более темно закрашенная область показывает мюонный поток, измеренный установкой SuperKamiokande, расположенной в горных районах Японии на глубине 1 км под землей и с детектором в виде резервуара из нержавеющей стали размером 40м x 40м) который заполнен 50 000 тонн чистой воды, что есть мишень для нейтрино.

Результаты модельных расчетов, а также непосредственная регистрация мюонов на глубинах до нескольких км в.э. (рисунок 2), поднимают вопрос о возможности их влияния на процессы в земной коре, и к настоящему времени уже получены свидетельства такого влияния как на вулканическую, так и на сейсмическую деятельность планеты. Например, в работе [16] проанализированы



Ромбы, светлые и темные круги, треугольники – данные в экспериментах: Crouch и Vaksan, LVD, MACRO и Frejus, SNO, соответственно.

Рисунок 2 – Интенсивность потока мюонов в зависимости от глубины в единицах водного эквивалента (1 км в.э. =  $10^5$  г см<sup>-2</sup> стандартной горной породы) из работы [8]

извержения четырех вулканов на территории Японии (Fuji, Usu, Myojinsho, Satsuma-Iwo-jima) за период 306 лет (1700–2005 гг.). Обнаружено, что 9 из 11 извержений произошли на фазе минимума солнечной активности, когда интенсивность потока космических лучей, в том числе мюонов, ожидается быть максимальной [7]. Дополнительно к анализу вулканов, в работе [16] обращено внимание, что из 12 сильнейших землетрясений (с магнитудой более 7.5), произошедших в регионе Японии, 9 событий были приурочены к периодам низкой солнечной активности. Данные для этих землетрясений приведены в таблице 2, а время их возникновения на фоне вариаций солнечной активности показаны на рисунке 3 (красные звездочки).

Таблица 2 – Землетрясения с магнитудой более 7.5, произошедшие в регионе Японии с 1700 по 2010 гг. по данным [16] (год, число солнечных пятен, магнитуда, регион)

| №  | Год  | Число солнечных пятен | Магнитуда | Регион, название                             |
|----|------|-----------------------|-----------|--|
| 1  | 1703 | 23                    | 7.9-8.2   | Kanto (Genroku Earthquake)                   |
| 2  | 1707 | 20                    | 8,4       | Tokai and Nankai (Houei Earthquake)          |
| 3  | 1769 | 106.1                 | 7,75      | East Kyushu                                  |
| 4  | 1883 | 27,5                  | 7,5       | Yamagata, Akita, and Niigata                 |
| 5  | 1847 | 98.5                  | 7.5       | Nagano and Niigata (Zenkoji Earthquake)      |
| 6  | 1854 | 20.6                  | 8.4       | Tokai and Nankai (Ansei Tokai Earthquake)    |
| 7  | 1854 | 20.6                  | 8.4       | Nankai (Ansei Earthquake)                    |
| 8  | 1891 | 35.6                  | 8,0       | Aichi and Gifu (Nobi Earthquake)             |
| 9  | 1923 | 5,8                   | 7,9       | Kanto (Great Kanto Earthquake)               |
| 10 | 1944 | 15                    | 7,9       | Tokai and Nankai (Showa Tonankai Earthquake) |
| 11 | 1946 | 92,6                  | 8,0       | Nankai (Showa Nankai Earthquake)             |
| 12 | 1964 | 10,2                  | 7,5       | Niigata                                      |

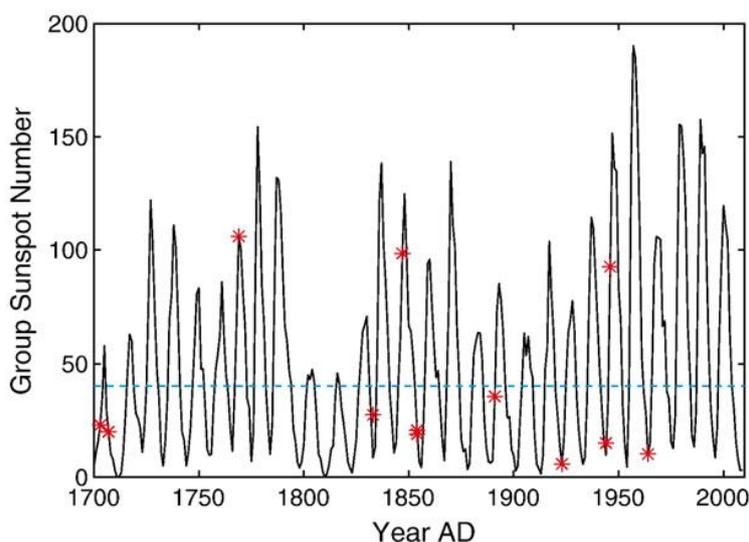


Рисунок 3 – Вариации солнечной активности (черная кривая) и даты (красные звездочки) возникновения сильных землетрясений ( $M > 7.5$ ) в регионе Японии (таблица 2) из работы [16]

Из рисунка 3 видно, что основное количество сильных землетрясений в регионе Японии произошло в годы с числом солнечных пятен менее 40 (синяя линия). К этому результату можно добавить, что аналогичная ситуация - возникновение сильнейших землетрясений в годы низкой солнечной активности, характерна и для сейсмоопасных районов Северного Тянь-Шаня. А именно, в недалеком прошлом здесь произошли землетрясения: Верненское 1887 г.,  $M=7.3$ , Чиликское,

1889г.,  $M=8.3$  и Кеминское, 1911г.,  $M=8.2$ , каждое из которых наносило ущерб г. Алматы. Ранее, в 1807г на этой территории также произошло сильное землетрясение, по поводу которого отмечено ([http://portal.kazntu.kz/files/publicate/2013-11-13-11621\\_0.pdf](http://portal.kazntu.kz/files/publicate/2013-11-13-11621_0.pdf)): «Мы практически ничего не знаем о землетрясении, разрушившем г. Алматы в 1807 г., кроме упоминания в каталоге И. В. Мушкетова и А. П. Орлова, составленном в 1893г., где сказано: "В 1807 году в Алматах произошла страшная катастрофа". На рисунке 4 показаны даты возникновения этих землетрясений (красные звездочки) также на фоне вариаций солнечной активности (черная кривая). Период времени 1755-2014 гг. включает 23.5 одиннадцатилетних солнечных циклов (цифры на рисунке).

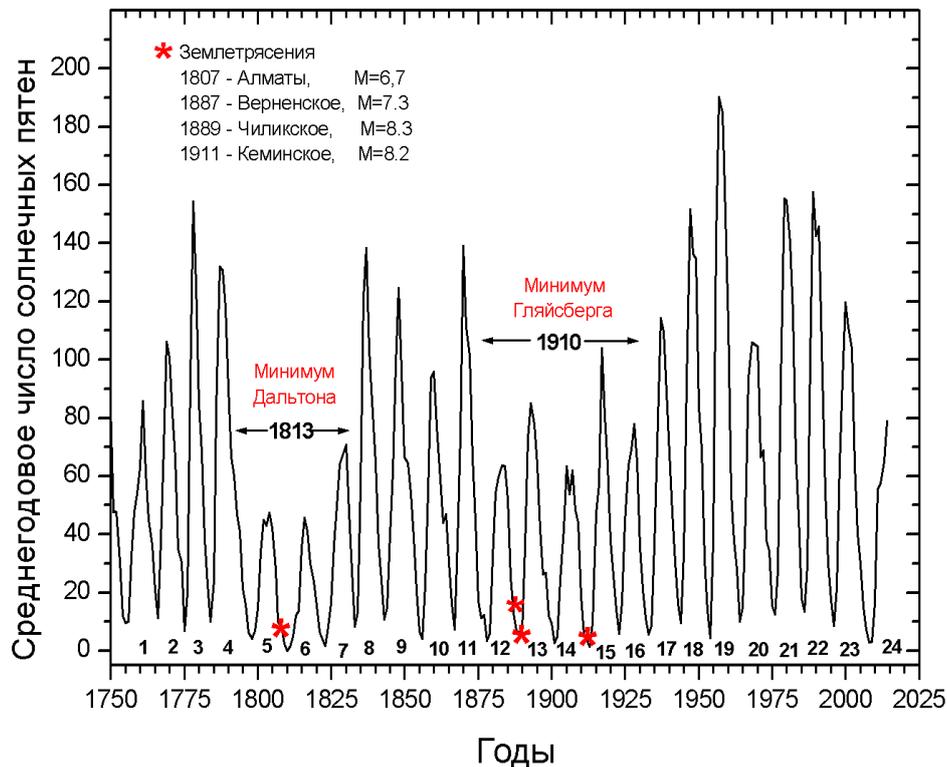


Рисунок 4 – Среднегодовые числа солнечных пятен в 1750-2014 гг (1-24 циклы) и даты сильнейших исторических землетрясений на Северном Тянь-Шане [17]

Рисунки 3 и 4 демонстрируют, что амплитуда 11 летних солнечных циклов не постоянная, что обусловлено более долгопериодными вариациями солнечной активности. За инструментальный период солнечных наблюдений зафиксировано два долговременных минимума в солнечной активности [18, 19]: минимум Дальтона, середина которого пришлась на ~1813г (5-7 солнечных циклы), и Гляйсберга, середина которого пришлась примерно на ~1910 г., а самыми низкоамплитудными были 12-ый и 14-ый солнечные циклы. Из рисунка 4 следует, что четыре землетрясения, каждое из которых наносило ущерб г. Алматы, произошли в периоды долговременных солнечных минимумов Дальтона и Гляйсберга, причем в те годы, которые завершали низкоамплитудные 11-ти летние солнечные циклы (5, 12, и 14-ый).

**Обсуждение результатов.** В [16] отмечено, что приуроченность извержений японских вулканов к минимумам солнечной активности, когда максимален поток космических лучей [7], имела место не для всех вулканов, а только для тех, магма которых обогащена кремнеземом ( $\text{SiO}_2$ ). Для другого японского вулкана - Izu-Ohshima, магма которого бедна кремнеземом, такая закономерность отсутствует. Это говорит о том, что земные породы могут избирательно реагировать на воздействие солнечной активности и/или потока космических лучей. Аналогичная ситуация характерна и для территории Северного Тянь-Шаня. Так, результаты почти десятилетнего изучения связи сейсмостектонической деформации земной коры на Северном Тянь-Шане с вариациями солнечной активности, обзор которых приведен в недавней работе [20], показали, что только на локальной территории, расположенной в высокогорной части хребтов Заилийский и

Кунгей Алатау, между Алматинской впадиной на севере и Иссыкульской – на юге, Аксайским и Тургеньским разломами – на западе и востоке, режим сейсмотектонической деформации по данным о механизмах очагов землетрясений, реагирует на вариации солнечной активности. В этом локальном районе земная кора находится в состоянии одноосного сжатия в годы низкой солнечной активности, но одноосного растяжения в годы высокой солнечной активности [20 и ссылки внутри]. Анализ геологического строения этой территории показал [21], что здесь земная кора подстилается мощным слоем активной мантии (горячим мантийным потоком), а магнитотеллурическое зондирование [22] обнаружило низкоомные (высокопроводящие) объемы земных пород территориально совпадающие с горячим мантийным потоком. Как следует из работ [16, 23-25], в районе расположения четырех японских вулканов, магма которых обогащена кремнеземом, электрическая проводимость земной коры и верхней мантии также повышена. В работе [16] не предложен физический механизм, способный объяснить приуроченность сильных землетрясений Японии к периодам солнечных минимумов, но предположено, что эта корреляция может быть связана неким образом с циркуляцией воды из субдуцирующего слэба под Японской островной дугой [23-25]. При этом, в [23] показано, что циркуляция воды из субдуцирующего слэба приводит к увеличению электрической проводимости земной коры и верхней мантии в данном регионе. То есть, как в Японии, так и на Северном Тянь-Шане, в тех регионах, которые реагируют на вариации солнечной активности и/или потока космических лучей, электрическая проводимость земных пород повышена.

По поводу связи сейсмичности с космическими лучами можно добавить, что несколько лет назад академик РАН Голицин Г.С. обратил внимание на соответствие между энергией космических лучей и частотой, с которой они приходят на Землю, и между энергией землетрясений и частотой их возникновения [26]. Он попытался найти то общее, что типично для столь разных процессов и показал, что если в систему вводится энергия, то начинают действовать определенные закономерности, типичные как для звездных систем, так и для Земли. В результате были получены достаточно схожие зависимости между энергией и частотой прихода к Земле космических частиц, а также между энергией и частотой возникновения землетрясений. В целом, в [26] продемонстрирована необходимость и полезность общего взгляда на окружающий нас мир, однако, конкретный вопрос о вкладе энергии космических лучей в активизацию сейсмических процессов в [26] не затрагивался. Этому вопросу посвящена работа [6], выполненная почти 30 лет назад, где показано, что при взаимодействии мюонов космических лучей с земными породами, в последних могут возникать микротрещины, раскрытие которых должно сопровождаться генерацией акустических шумов, а если поток мюонов попадет в сейсмически активную среду, напряжение в которой близко к порогу разрушения горной породы, то проникающие мюоны могут привести к генерации не только акустической, но и сейсмической волны, то есть, к землетрясению. Как отметили авторы работы [6], подтверждение их теоретическим оценкам следует искать в эксперименте – одновременном мониторинге потока мюонов и акустических, а возможно и сейсмических сигналов, то есть в эксперименте «мюонный луч».

**Выводы:**

- Мюоны космических лучей, в зависимости от их энергии, могут проникать на глубины до 100 км. водного эквивалента (рисунки 1, 2).
- Сильнейшие землетрясения в Японии, а также на Северном Тянь-Шане, имели тенденцию быть приуроченными к периодам минимума солнечной активности, когда максимален поток галактических космических лучей.
- Земная кора тех районов, где обнаружена связь тектонических процессов с вариациями солнечной активности и/или интенсивностью потока космических лучей, обладает более высокой электрической проводимостью по сравнению с соседними районами.
- Полученные результаты поддерживают идею реализации на базе комплекса «ATHLET» нового космофизического метода краткосрочного прогноза сильных землетрясений «мюонный луч».

*Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Разработка методов прогноза сейсмической активности на основе мониторинга акустических сигналов, генерируемых мюонами космических лучей на примере алматинского прогностического полигона» (Грант 0032/ГФЗ), Регистрационный номер (РН) 0113РК00288).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гусев Г.А., Жуков В.В., Мерзон Г.И., Митько Г.Г., Степанов А.С., Рябов В.А., Чечин В.А., Чубенко А.П., Щепетов А.Л. Космические лучи как новый инструмент сейсмологических исследований, Краткие сообщения по физике ФИАН, 2011, №12, С. 43-51.
- [2] Вильданова Л. И., Гусев Г. А., Жуков В. В., Мерзон Г. И., Митько Г. Г., Наумов А. С., Рябов В. А., Степанов А. В., Чечин В. А., Чубенко А. П., Щепетов А. Л. Первые результаты наблюдения акустических сигналов, генерируемых мюонами космических лучей в сейсмически-напряженной среде, Краткие сообщения по физике ФИАН, 2013, №12, С. 31-39.
- [3] Sadykov T.Kh., Zhukov V.V., Breusov N.G., Mukashev K.M., Khachikyan G.Ya., Zastrozhnova N.N. Seismic stations for short-term prediction of earthquakes by means of the cosmic rays, Материалы VIII международной научно-практической конференции «Новости научной мысли – 2013», 28-30 October 2013, Чехия, Прага: Publishing House «Education and Science» (Чехия, Прага), С. 78-81.
- [4] Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Курманов Б.К., Хачикян Г.Я., Садыков Т.Х., Мукашев К.М., Жуков В.В. О космогеофизическом методе прогноза сильных землетрясений, Известия НАН РК, Серия физико-математическая, 2014, № 4 (296), С.140-149.
- [5] Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Курманов Б.К., Хачикян Г.Я., Мукашев К.М., Садыков Т.Х., Жуков В.В. Вероятность инициирования сейсмической волны проникающими компонентами космических лучей, Мировой научный потенциал: матер. 10-ой междунар. науч.-практ. конф., Болгария, София, 2014, Т.6 (Физика), С. 33-38.
- [6] Царев В.А., Чечин В.А. Атмосферные мюоны и высокочастотные сейсмические шумы, Препринт ФИАН, 1988, № 179, 21с.
- [7] Дорман Л. И. Вариации космических лучей и исследование космоса, М.: Изд. АН СССР, 1963, 1028с.
- [8] Beringer J., et al. (Particle Data Group), PR D86, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition, 2013, December 18, URL: <http://pdg.lbl.gov>.
- [9] Groom D.E., N.V. Mokhov, and S.I. Striganov. Muon stopping-power and range tables, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2001, 78, 183 p.
- [10] Adamson P. et al. Measurement of the atmospheric muon charge ratio at TeV energies with MINOS, Phys. Rev., 2007, Vol. D76, P. 052003, hep-ex/0705.3815.
- [11] Crouch M. An Improved World Survey Expression for Cosmic Ray Vertical Intensity VS. Depth in Standard Rock, Proc. 20th Int. Cosmic Ray Conf., Moscow, 1987, V. 6, P. 165, <http://adsabs.harvard.edu/abs/1987ICRC....6..165C>
- [12] Andreev Yu.M., Gurentzov V.I., and Kogai I.M.. Muon Intensity from the Baksan Underground Scintillation Telescope, Proc. 20th Int. Cosmic Ray Conf. Moscow, 6, P. 200, [<http://adsabs.harvard.edu/abs/1987ICRC....6..200A>].
- [13] Aglietta M. et al. (LVD Collab. Neutrino-induced and atmospheric single-muon fluxes measured over five decades of intensity by LVD at Gran Sasso Laboratory, Astropart. Phys., 1995, 3, P. 311-320.
- [14] Ambrosio M. et al. (MACRO Collab.), Vertical muon intensity measured with macro at the Ggran Sasso laboratory, Phys. Rev., 1995, D52, P. 3793-3802.
- [15] Berger Ch. et al. (Frejus Collab.), Experimental study of muon bundles observed in the Fréjus detector, Phys. Rev., 1989, D40, P. 2163
- [16] Ebisuzaki T., Miyahara H., Katoaka R., Sato T., Ishimine Y. Explosive volcanic eruptions triggered by cosmic rays: Volcano as a bubble chamber, Gondwana Research, 2011, V.19, P. 1054 – 1061.
- [17] Хачикян Г.Я. Солнечно - литосферные связи: глобальный и региональный эффекты. Шестой международный симпозиум «Проблемы геодинамики и геоэкологии внутриконтинентальных орогенов» г. Бишкек, Киргизская республика (23-29 июня 2014), Абстракт, - С.
- [18] Feynman J., Ruzmaikin A. The Sun's Strange Behavior: Maunder Minimum or Gleissberg Cycle?, Solar Phys., 2011 V, 272, P. 351–363, DOI 10.1007/s11207-011-9828-0.
- [19] Feynman, J., Ruzmaikin A. The Centennial Gleissberg Cycle and its association with extended minima, J. Geophys. Res. Space Physics., 2014, V. 119, P. 6027–6041, doi:10.1002/2013JA019478
- [20] Абаканов Т.Д., Садыкова А.Б., Хачикян Г.Я. Современное сеймотектоническое состояние земной коры на Северном Тянь-Шане, Доклады Национальной Академии Наук Республики Казахстан, ISSN 2224-5227, 2015, № 2, С. 98-110.
- [21] Тимуш А.В., Садыкова А.Б., Степаненко Н.П., Хачикян Г.Я. Строение литосферы как фактор вариаций сеймотектонических деформаций в связи с солнечной активностью на Северном Тянь-Шане, Известия НАН РК, серия геологии и технических наук, 2013, № 1, С. 55-66.
- [22] Рыбин А.К., Баталев В.Ю., Щелочков Г.Г. и др. На пути к 3D структуре земной коры и верхней мантии Тянь-Шаня: результаты глубинной магнитотеллурики, Геодинамика и геоэкологические проблемы высокогорных регионов (2-й международный симпозиум; тезисы), Бишкек, 2002. С.25-27.
- [23] Ichiki M., Baba K., Toh H., Fuji-ta K., 2009. An overview of electrical conductivity structures of the crust and upper mantle beneath the northwestern Pacific, the Japanese islands, and continental East Asia Gondwana Research 16, P. 545–562
- [24] Hasegawa A., Nakajima J., Uchida N., Okada T., Zhao D., Matsuzawa T., Umino N., 2009, Plate subduction, and generation of earthquakes and magmas in Japan as inferred from seismic observations: an overview, Gondwana Research 16, P. 370–400.
- [25] Maruyama S., Hasegawa A., Santosh M., Kogiso T., Omori S., Nakamura H., Kawai H., Zhao D., 2009, The dynamics of big mantle wedge, magma factory, and metamorphic- metasomatic factory in subduction zones, Gondwana Research 16, P. 414–430.
- [26] Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты. Серия: Синергетика: от прошлого к будущему, 2013, № 68, ISBN 978-5-396-00502-0, 400 с.

REFERENCES

- [1] Gusev G.A., Zhukov V., G.I. Merzon, Mitko G.G., A.S. Stepanov, V.A. Ryabov, V.A. Chechin, Chubenko A.P., Shchepetov A.L. Cosmic rays as a new tool of seismological research in physics Brief FIAN, 2011, №12, P. 43-51. (in Russ.).
- [2] Vildanova L.I., Gusev G.A., Zhukov V.V., Merzon G.I., Mitko G.G., Naumov A.S., Ryabov V.A., Stepanov A.V., Chechin V.A., Chubenko A.P., Shchepetov A.L. The first results of surveillance of acoustic signals generated by cosmic-ray muons in a seismically-stressful environment Brief Communic. in Physics FIAN, 2013, №12, P.31-39. (in Russ.).
- [3] Sadykov T. Kh., Zhukov V.V., Breusov N.G., Mukashev K.M., Khachikyan G.Ya., Zastrozhnova N.N. Seismic stations for short-term prediction of earthquakes by means of the cosmic rays, Proceedings of the VIII international scientific-practical conference "The News of scientific thought - 2013", 28-30 October 2013, Czech Republic, Prague: Publishing House «Education and Science», C. 78-81.
- [4] Zhantayev Zh.Sh., Breusov N.G., Kurmanov B.K., Khachikyan G.Ya., Sadykov T.Kh., Mukhashev K.M., Zhukov V.V. About cosmogeophysical method of prediction of strong earthquakes, Izvestiya NAN RK Series Physics and Mathematics, 2014, № 4 (296), P.140-149. (in Russ.).
- [5] Zhantayev Zh.Sh., Breusov N.G., Kurmanov B.K., Khachikyan G.Ya., Mukhashev K.M., Sadykov T.Kh., Zhukov V.V. The probability of initiating a seismic wave of the penetrating component of cosmic rays, the world's scientific potential: mater. 10th Intern. scientific and practical. Conf., Bulgaria, Sofia, 2014, V.6 (Physics), P. 33-38. (in Russ.).
- [6] Tsarev V.A., V.A. Chechin. Atmospheric muons and high-frequency seismic noise, Preprint FIAN, 1988, № 179, 21p. (in Russ.).
- [7] Dorman L.I. Cosmic ray variations and space exploration, M.: USSR Academy of Sciences, 1963, 1028s. [8] Beringer J., et al. (Particle Data Group), PR D86, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition, 2013, December 18, URL: [http://pdg.lbl.gov]. (in Russ.).
- [9] Groom D.E., N.V. Mokhov, and S.I. Striganov. Muon stopping-power and range tables, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2001, V.78, 183 p.
- [10] Adamson P. et al. Measurement of the atmospheric muon charge ratio at TeV energies with MINOS, Phys. Rev., 2007, Vol. D76, P. 052003, hep-ex/0705.3815.
- [11] Crouch M. An Improved World Survey Expression for Cosmic Ray Vertical Intensity VS. Depth in Standard Rock, Proc. 20th Int. Cosmic Ray Conf., Moscow, 1987, V. 6, P. 165, [http://adsabs.harvard.edu/abs/1987ICRC....6..165C].
- [12] Andreev Yu. M., Gurentzov V.I., and Kogai I.M.. Muon Intensity from the Baksan Underground Scintillation Telescope, Proc. 20th Int. Cosmic Ray Conf. Moscow, 6, P. 200, [http://adsabs.harvard.edu/abs/1987ICRC....6..200A].
- [13] Aglietta M. et al. (LVD Collab. Neutrino-induced and atmospheric single-muon fluxes measured over five decades of intensity by LVD at Gran Sasso Laboratory, Astropart. Phys., 1995, 3, P. 311-320.
- [14] Ambrosio M. et al. (MACRO Collab.), Vertical muon intensity measured with macro at the Ggran Sasso laboratory, Phys. Rev., 1995, D52, P. 3793-3802.
- [15] Berger Ch. et al. (Frejus Collab.), Experimental study of muon bundles observed in the Fréjus detector, Phys. Rev., 1989, D40, P. 2163.
- [16] Ebisuzaki T., Miyahara H., Katoaka R., Sato T., Ishimine Y. Explosive volcanic eruptions triggered by cosmic rays: Volcano as a bubble chamber, Gondwana Research, 2011, V.19, P. 1054 – 1061.
- [17] Khachikyan G.Ya. Solar - lithospheric connection: global and regional effects. Sixth International Symposium "Problems of geodynamics and geocology inland orogens", Bishkek, Kyrgyz Republic (23-29 June 2014), Abstract – P.394. (in Russ.).
- [18] Feynman J., Ruzmaikin A. The Sun's Strange Behavior: Maunder Minimum or Gleissberg Cycle?, Solar Phys., 2011, V 272, P. 351–363, DOI 10.1007/s11207-011-9828-0.
- [19] Feynman, J., Ruzmaikin A. The Centennial Gleissberg Cycle and its association with extended minima, J. Geophys. Res. Space Physics., 2014, V.119, P. 6027–6041, doi:10.1002/2013JA019478.
- [20] Abakanov TD, Sadykov AB, GY Khachikian Modern seismotectonic state of the crust in the North Tien Shan, Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, ISSN 2224-5227, 2015, № 2, P. 98-110. (in Russ.).
- [21] Timush A.V., Sadykov A.B., Stepanenko N.P., G.Ya. Khachikyan. The structure of the lithosphere as a factor in the variations of seismotectonic deformations due to solar activity in the North Tien Shan, Izvestia NAN RK, series geology and engineering sciences, 2013, № 1, P. 55-66. (in Russ.).
- [22] Rybin A.K., Batalev V.Y, Shchelochkov G.G. et al. On the way to the 3D structure of the crust and upper mantle of the Tien Shan: the results of deep magnetotelluric, Geodynamics and geocological problems of mountainous regions (2-nd International Symposium, abstracts), Bishkek, 2002, P. 25-27. (in Russ.).
- [23] Ichiki M., Baba K., Toh H., Fujita K., 2009. An overview of electrical conductivity structures of the crust and upper mantle beneath the northwestern Pacific, the Japanese islands, and continental East Asia Gondwana Research 16, P. 545–562.
- [24] Hasegawa A., Nakajima J., Uchida N., Okada T., Zhao D., Matsuzawa T., Umino N., 2009, Plate subduction, and generation of earthquakes and magmas in Japan as inferred from seismic observations: an overview, Gondwana Research 16, P. 370–400.
- [25] Maruyama S., Hasegawa A., Santosh M., Kogiso T., Omori S., Nakamura H., Kawai H., Zhao D., 2009, The dynamics of big mantle wedge, magma factory, and metamorphic- metasomatic factory in subduction zones, Gondwana Research 16, P.414–430.
- [26] Golitsyn G.S. Statistics and dynamics of natural processes and phenomena: Methods, tools, results. Series: Synergetics: from past to future, 2013 Number 68, ISBN 978-5-396-00502-0, 400. (in Russ.).

## ҒАРЫШТЫҚ СӘУЛЕЛЕРДЕГІ МЮОНДАР ЖӘНЕ ЖЕР ҚЫРТЫСЫНДАҒЫ ПРОЦЕСТЕР

Ж. Ш. Жантаев<sup>1</sup>, Н. Г. Бреусов<sup>1</sup>, Г. Я. Хачикян<sup>2</sup>, Қ. М. Мұқашев<sup>3</sup>, Т.Х. Садықов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> «Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы» АҚ АҒК ИДМ ҚР, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup> ДТОО «Институт ионосферы» ЕЖШС, «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы, Қазақстан,

<sup>3</sup> Абай атындағы Ұлттық Педагогикалық Университеті БҒМ ҚР, Алматы, Қазақстан,

<sup>4</sup> Физикалық-Техникалық Институты АҚ ««Парасат» ҰҒТХ» БҒМ ҚР Алматы, Қазақстан,

**Тірек сөздер:** ғарыштық сәулелер, мюондар, күн белсенділігі, жер сілкінісі.

**Аннотация.** Атмосферада және таулы жартасты қабатының астындағы ғарыштық сәулелерінің мюонды компоненттерінің қазіргі уақыттағы халықаралық қоғамдастықтың ғалымдарының алған модельдік есептеулері мен эксперименттік бақылаулар нәтижелері келтірілді. Ғарыштық сәулелерінің мюондары, олардың энергиясына байланысты 100 км су баламасына дейінгі тереңдікке енуі мүмкін екендігі көрсетілген. Жапония және Солтүстік Тянь-Шань аймақтарындағы күшті жер сілкіністерінің талданылған деректері күн белсенділігінің минимумына, яғни галактикалық ғарыштық сәулелердің күтілетін максималды ағынының периодымен шектелетін үрдісі көрмегілген. Келтірілген нәтижелер тектоникалық процестердің күн белсенділігінің вариацияларымен және/немесе ғарыштық сәулелер ағынының қарқындылығымен байланысы табылған осы аймақтардың жер қыртысы көршіліс аймақтармен салыстырғанда неғұрлым жоғары электр-өткізгіштігі бар екендігі көрсетіледі. Бұл нәтижелер «ATHLET» кешенінде күшті жер сілкінісін «мюонды сәулелерінің» қысқа мерзімді болжау ғарышфизикасының жаңа әдісі негізінде жүзеге асыру идеясын қолдап отырғандығы туралы қорытынды жасалынды.

*Поступила 07.07.2015 г.*

### NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 63 – 70

## VARIATIONS OF SOLAR AND GLOBAL SEISMIC ACTIVITY IN 21–24 SOLAR CYCLES

Zh. Sh. Zhantayev<sup>1</sup>, B. T. Zhumabayev<sup>2</sup>, G. Ya. Khachikyan<sup>2</sup>, N. Toishiev<sup>2</sup>, D. Kairatkyzy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>JSC "National Centre for Space Research and Technology", Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Institute of Ionosphere, " JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan.

E-mail: galina.khachikyan@gmail.com

**Key words:** earthquake, seismic energy, 11 year solar cycle.

**Abstract.** Using the global seismic catalog NEIC for the period from 1973 to 2014, we investigated the variation frequency of earthquake recurrence and released seismic energy on the planet in connection with variations in solar activity. First, using the Gutenberg-Richter law, a lower level representative of the magnitude of this catalog has been defined, it is equal to  $M = 4.5$ . For the period 1973-2014, the global NEIC catalog contains information about 205,311 earthquakes with magnitudes  $M \geq 4.5$ . It is shown that during this time period the long-term trends in the solar and seismic activity were in opposition: the number of sunspots on the average decreased from 1973 to 2014, while the number of earthquakes, including strongest ones ( $M \geq 8.0$ ) increased. The analyzed period included the three and a half 11 year solar cycles: 21, 22, 23 and a first half of 24 cycle. It is shown that into the 11 year solar cycle, the fewest earthquakes occur during moderate solar activity, but their number is increased by about 10% during solar minima and ~ 3-5% during solar maxima. The amount of released seismic energy of the planet changes in 11 year solar cycle in more than double, rising during the solar minimum. Possible reasons of solar-lithosphere relationships are discussed.

## ВАРИАЦИИ СОЛНЕЧНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ В 21–24 СОЛНЕЧНЫХ ЦИКЛАХ

Ж. Ш. Жантаев<sup>1</sup>, Б. Т. Жумабаев<sup>2</sup>, Г. Я. Хачикян<sup>2</sup>, Н. Тойшиев<sup>2</sup>, Д. Кайраткызы<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО "Национальный Центр космических исследований и технологий» АКК МИР РК, Алматы, Казахстан,  
<sup>2</sup>ДТОО «Институт ионосферы», АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** землетрясение, сейсмическая энергия, 11 летний солнечный цикл.

**Аннотация.** По данным глобального сейсмологического каталога NEIC за период с 1973 по 2014 гг. исследованы вариации частоты повторяемости землетрясений и выделяющейся на планете сейсмической энергии в связи с вариациями солнечной активности. Вначале, с использованием закона Гуттенберга-Рихтера определен нижний уровень представительной магнитуды данного каталога, который оказался равным  $M = 4.5$ . За период 1973-2014гг каталог NEIC содержит данные о 205311 землетрясениях с магнитудами  $M \geq 4.5$ . Исследования показали, что в этот период долговременные тренды в солнечной и сейсмической активности находились в противофазе: число солнечных пятен в среднем уменьшалось от 1973 к 2014 гг., а число землетрясений, в том числе сильных ( $M \geq 8.0$ ), увеличивалось. Анализируемый период времени включал три с половиной 11 летних циклов солнечной активности (21, 22, 23 и первую половину 24). Показано, что в 11 летних солнечных циклах наименьшее количество землетрясений происходит в годы умеренной солнечной активности, но их количество возрастает на ~10% в годы солнечных минимумов, и на ~3-5% в годы солнечных максимумов. Величина выделяющейся на планете сейсмической энергии изменяется в 11 летнем солнечном цикле в два с лишним раза, повышаясь в годы солнечных минимумов. Обсуждаются возможные механизмы солнечно-литосферных связей.

**Введение.** Интерес к вопросу о возможной связи между солнечной и сейсмической активностью возник еще в 19 веке, когда всемирно известный астроном Рудольф Вольф предположил [1], что активизация пятно-образовательной деятельности Солнца может влиять на активизацию сейсмичности Земли. За прошедшие более чем полтора столетия был выполнен не один десяток работ, например [2-16], где изучалась корреляция между изменением характеристик солнечной и сейсмической активности, однако, по сей день этот вопрос носит дискуссионный характер. Физический механизм солнечно-земных связей пока не разработан, а экспериментально обнаруженные корреляции между характеристиками Солнца и земной коры имеют, как правило, низкую статистическую значимость [17]. Одна из причин тому – отсутствие долговременных статистически надежных сейсмологических каталогов. Если инструментальные данные о пятно-образовательной деятельности Солнца имеются уже для 24-ех солнечных циклов, начиная с 1755 г., то глобальные сейсмологические каталоги стали формироваться в последние примерно 50 лет. Национальным Центром Информации о Землетрясениях Национальной Геологической Службы США формируется глобальный сейсмологический каталог (NEIC) с 1973 г. (<http://earthquake.usgs.gov/neic.world.epic>). В настоящей работе данные этого каталога использованы для изучения вариаций числа произошедших на планете землетрясений и выделившейся сейсмической энергии в связи с вариациями уровня солнечной активности.

**Метод исследования.** С января 1973 г. по декабрь 2014 г. глобальный сейсмологический каталог NEIC содержит данные о 739 703 землетрясениях с магнитудой от 1.0 до 9.1. С использованием закона Гуттенберга-Рихтера [18], который описывает зависимость между магнитудой ( $M$ ) и числом землетрясений ( $N$ ) в виде:

$$\text{Log } N = a - bM,$$

был определен нижний уровень представительной магнитуды данного каталога. На рисунке 1а по горизонтальной оси отложены значения магнитуд (с дискретностью 0.2), а по вертикальной –  $\log N$ . Согласно закону Гуттенберга-Рихтера, количество землетрясений должно уменьшаться с ростом магнитуды, и рисунок 1а показывает, что такое распределение начинается с интервала магнитуд 4.4–4.6. Этот результат позволяет заключить, что нижний уровень магнитуды представительных

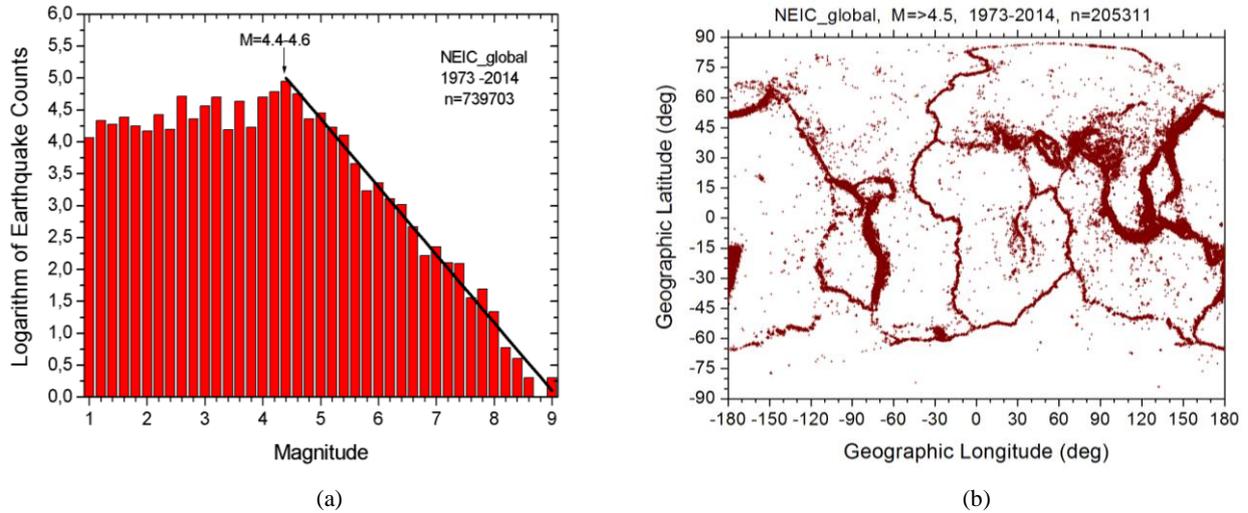


Рисунок 1 – (a) - зависимость между магнитудой и количеством землетрясений; (b) - пространственное распределение землетрясений с  $M \geq 4.5$

землетрясений в глобальном сейсмологическом каталоге NEIC составляет  $M=4.5$ . График повторяемости землетрясений (черная линия на рисунке 2a) имеет вид:

$$\text{Log}(N) = (9,7 \pm 0,2) - (1,07 \pm 0,03) M$$

с коэффициентом корреляции  $R=0.99$ , среднеквадратическим отклонением  $SD=0.22$ , и вероятностью  $P=95\%$ . Основываясь на этом результате, дальнейший анализ проведен для землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$ , число которых в 1973-2014 гг. составило 205311 событий. Планетарное распределение этих землетрясений показано на рисунке 1b. В качестве характеристики солнечной активности использованы числа солнечных пятен (Sunspot numbers- SSN) (<http://www.ngdc.noaa.gov/stp/SOLAR/ftpsunspotnumber>).

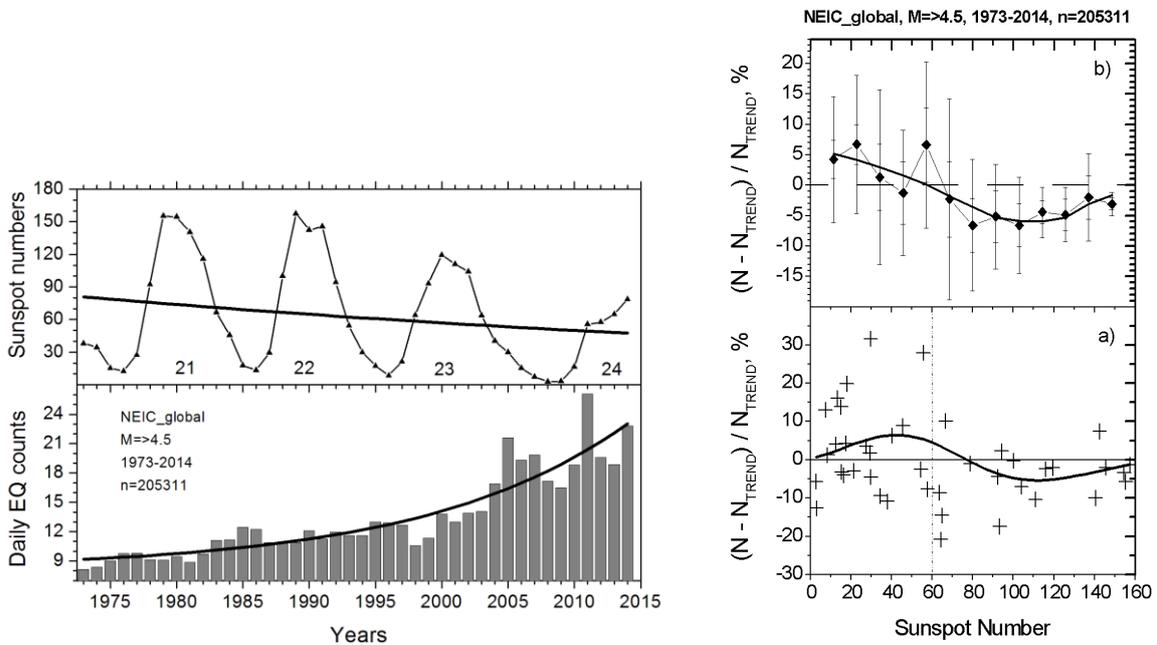


Рисунок 2 – Левая панель: сопоставление вариаций солнечной и сейсмической активности в 1973-2014 гг.; правая панель: внизу – отклонения (в процентах) числа землетрясений от долговременного тренда в зависимости от числа солнечных пятен (крестики) и результат низкочастотной фильтрации с  $f_c=0.0125$  Гц (кривая); верху – те же отклонения, но усредненные для бинов солнечных пятен, равных 20 (ромбики) и их аппроксимация функцией Гаусса (кривая)

**Результаты исследования.** На нижней панели рисунка 2 приведено среднесуточное количество землетрясений с  $M \geq 4.5$  для каждого года с 1973 по 2014, а на верхней панели - среднегодовое число солнечных пятен. Черные кривые – долговременные экспоненциальные тренды в исходных данных, которые показывают, что число солнечных пятен уменьшается от 1973 к 2014 г., а количество происходящих на планете землетрясений - увеличивается. Чтобы изучить вариации числа землетрясений на более коротких временных интервалах (внутри 11 летнего солнечного цикла), для каждого года было подсчитано относительное отклонение (в процентах) среднесуточного числа землетрясений от долговременного тренда по выражению:

$$\Delta N\% = (N - N_{TREND}) / N_{TREND} \cdot 100\%.$$

На рисунке 3а крестиками показано распределение  $\Delta N\%$  в зависимости от SSN. Черная кривая - результат обработки данных низкочастотным фильтром с частотой  $f_c = 0.0125$  Гц. Несмотря на существенный разброс данных можно заметить, что самые большие отрицательные значения  $\Delta N\%$  приходятся на средний уровень солнечной активности, когда  $60 < SSN < 100$ . При низкой солнечной активности ( $SSN < 60$ ), параметр  $\Delta N\%$  имеет самые большие положительные значения, а при высокой активности ( $SSN \geq 140$ ), значения  $\Delta N\%$  остаются преимущественно отрицательными, как и при умеренной активности, но величина их становится существенно меньшей. Этот результат сохраняется и при ином способе статистической обработки данных - при усреднении значений  $\Delta N\%$  внутри последовательных SSN-бинов, равных 20 (ромбики на верхней правой панели рисунка 2, где длинные и короткие вертикальные отрезки показывают величину среднеквадратического отклонения и среднеквадратической ошибки, соответственно). Жирная кривая на этой панели представляет аппроксимацию зависимости  $\Delta N\%$  от SSN функцией Гаусса в виде:

$$y(x) = y_0 + [A/w \cdot (\pi/2)^{1/2}] \cdot \exp[-2 \cdot (x - x_c)^2 / w^2] \quad (1)$$

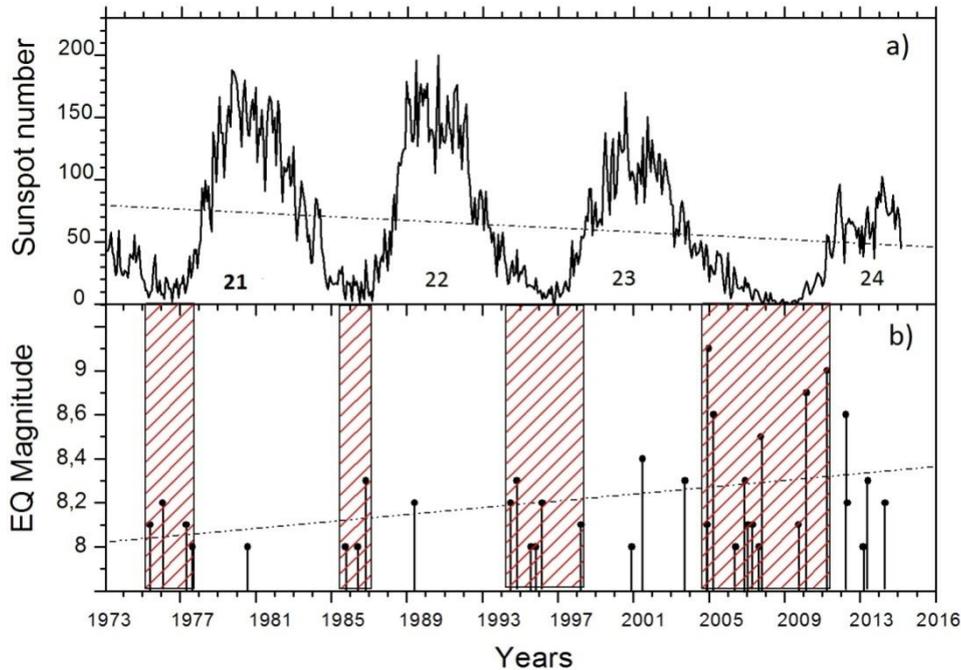


Рисунок 3 – Распределение во времени землетрясений с  $M \geq 8.0$  (b) в сопоставлении с числами солнечных пятен (a), пунктирные линии - долговременные тренды в числе солнечных пятен и магнитуде землетрясений

где  $y_0 = 7.9$ ,  $A = -1848$ ,  $w = 106.2$ ,  $\pi = 3.14$ ,  $x_c = 107.4$ , с коэффициент корреляции  $R = 0.85$ . В соответствии с данными на рисунке 2 можно заключить, что в 21-23 и первой половине 24 солнечного цикла наименьшее число землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$  происходило в годы умеренной солнечной активности и увеличивалось относительно этого уровня примерно на 10% в годы низкой солнечной активности, и примерно на 3-5% - в годы высокой.

Рисунок 3 демонстрирует распределение очень сильных землетрясений ( $M \geq 8.0$ ) внутри 11 летних солнечных циклов. В 1973–2014 гг. на планете произошло 35 таких событий, из которых 25, то есть, более 71%, было приурочено к солнечным минимумам (заштрихованные интервалы на рисунке 3) и менее 29% произошло вблизи солнечных максимумов. Пунктирные линии на рисунке 3 показывают долговременные тренды в числе солнечных пятен и магнитуде землетрясений. Видно, что магнитуда увеличивается с уменьшением солнечной активности. Три наиболее сильные землетрясения последнего десятилетия: вблизи о. Суматра в 2004г ( $M=9.1$ ), Индонезии в 2010г ( $M=8.8$ ) и Японии в 2011г ( $M=9.0$ ) произошли в период аномально низкой солнечной активности, наблюдаемой на фазе спада 23 солнечного цикла и на фазе подъема 24 цикла.

Согласно [23], сейсмическая энергии ( $E_s$ ), выделяемая при землетрясении, может быть определена из соотношения:

$$E_s = 10^{11.8 + 1.5M}$$

где  $M$  – магнитуда, а энергия выражена в эргах. Используя это соотношение, были рассчитаны значения  $E_s$  для каждого из 205311 событий с  $M \geq 4.5$ , а затем определена суммарная величина сейсмической энергии (в Джоулях), выделившаяся на планете в каждом году с 1973 по 2014. Для большей наглядности результатов, представляем далее энергию в логарифмическом масштабе. На левой панели рисунка 4 приведены значения логарифма годового количества выделившейся энергии ( $\text{Log } E_{s\_yr}$ ) в сопоставлении с годовыми числами солнечных пятен.

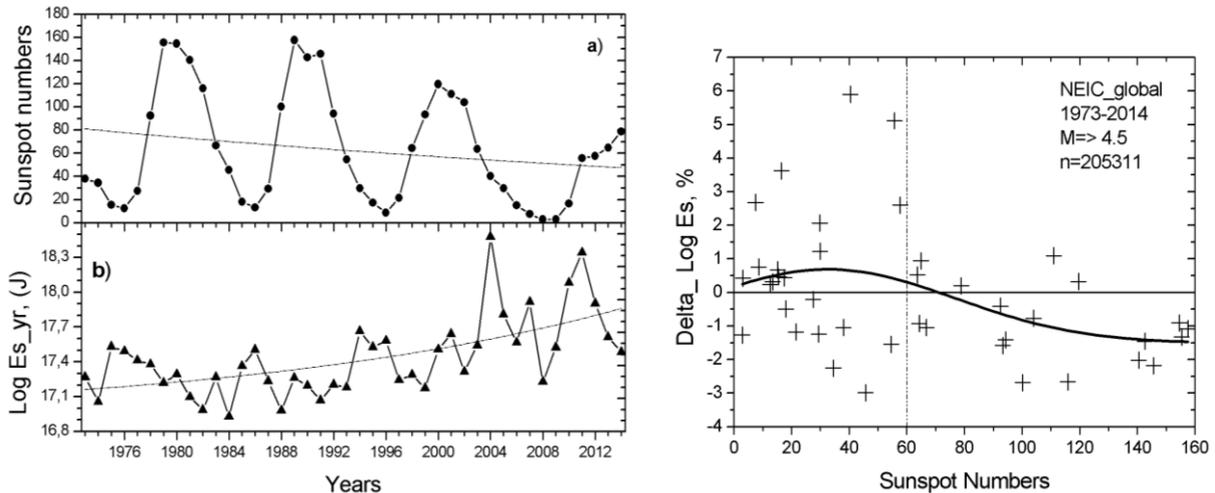


Рисунок 4 – Вариации в 1973-2014 гг. среднегодовых чисел солнечных пятен (а) и логарифма годового количества выделившейся на планете энергии (б)

Пунктирные линии на рисунке 4 показывают долговременные тренды в исходных данных. В среднем, выделившаяся на планете сейсмическая энергия возрастала с уменьшением числа солнечных пятен. На правой панели рисунка 4 показаны относительные изменения (в процентах) логарифма годового количества выделившейся энергии ( $\text{Delta\_Log } E_{s\_yr} \%$ ) в зависимости от числа солнечных пятен (крестики). Видно, что в 1973-2014 гг. годовое выделение на планете сейсмической энергии увеличивалось при низкой солнечной активности ( $\text{SSN} < 60$ ). Жирная кривая на рисунке представляет аппроксимацию зависимости ( $\text{Delta\_Log } E_{s\_yr} \%$ ) от  $\text{SSN}$  функцией Гаусса в виде:

$$y(x) = y_0 + [A/w \cdot (\pi/2)^{1/2}] \cdot \exp[-2 \cdot (x - x_c)^2 / w^2] \quad (2)$$

где  $y_0 = -1,5$ ,  $A = 244$ ,  $w = 88,5$ ,  $\pi = 3,14$ ,  $x_c = 32,6$ , с коэффициент корреляции  $R=0,42$ . Аппроксимационная кривая на правой панели рисунка 4 говорит о том, что внутри 11 летнего цикла солнечной активности, когда число солнечных пятен изменяется в пределах от 0 до 160, значение ( $\text{Log } E_{s\_yr}$ ) может изменяться в пределах 2%. Подсчитаем на сколько при этом будет измениться величина выделяемой сейсмической энергии. По данным глобального сейсмологического каталога для периода 1973-2011 г. среднее годовое значение ( $\text{Log } E_{s\_yr}$ ) = 17,44, что соответствует средней годовой сейсмической энергии  $E_s = 10^{17,44} = 2,75 \cdot 10^{17}$  Джоулей. При значении  $\text{Log } E_{s\_yr} = 17,79$

(увеличенном на 2%), сейсмическая энергия будет иметь величину  $E_s = 10^{17.79} = 6,166 \cdot 10^{17}$  Джоулей. Таким образом, внутри 11 летнего солнечного цикла величина выделяющейся на планете за год сейсмической энергии может изменяться в два с лишним раза ( $6,166 \cdot 10^{17}$  Дж /  $2.75 \cdot 10^{17}$  Дж = 2.24)

**Обсуждение результатов.** В течение последних 42 лет (1973-2014 гг.) наблюдалось общее понижение уровня солнечной активности и сопутствующее ему повышение сейсмической активности планеты. Повышение проявилось как в частоте повторяемости землетрясений с  $M \geq 4.5$  (рисунок 2), так и в количестве выделившейся на планете сейсмической энергии (рисунки 3, 4). Этот результат качественно совпадает с теми, что были получены ранее [7, 9, 11, 13, 14, 16]. Новым являются количественные результаты об изменении частоты повторяемости землетрясений и выделяющейся сейсмической энергии на более коротких временных интервалах – внутри 11 летнего солнечного цикла (рисунки 2–4) и эмпирические соотношения (1, 2). Интерпретация результатов может быть проведена на основе новой идеи [19], что землетрясение является элементом глобальной электрической цепи (ГЭЦ), токи проводимости которой могут стать триггером землетрясения. В [20] показано, что ток проводимости ГЭЦ коррелирует положительно с потоком галактических космических лучей, которые, как хорошо известно, изменяются внутри 11 летнего солнечного цикла в среднем на  $\sim 10\%$ , повышаясь в годы солнечных минимумов. Этот механизм позволяет объяснить и качественно, и количественно активизацию планетарной сейсмичности в минимуме солнечной активности, когда поток космических лучей максимален. Интерпретацию некоторого повышения сейсмичности в годы высокой солнечной активности, можно провести, во-первых, в рамках ГЭЦ, с привлечением информации о солнечных космических лучах, поток которых возрастает в максимуме солнечной активности, а во-вторых, можно рассмотреть другой возможный механизм активизации сейсмичности - геомагнитные бури [21], частота повторения которых, особенно самых сильных (с внезапным началом), возрастает в годы высокой солнечной активности [22]. В работе [21] показано, что геомагнитные вариации с периодами от нескольких секунд до часа, сопутствующие главной фазе геомагнитной бури, индуцируют теллурические токи (закачивают энергию в литосферу), что может стать триггером землетрясения. Эмпирические соотношения (1, 2), связывающие частоту повторяемости и энергию землетрясений с числом солнечных пятен, могли бы быть использованы на практике для долгосрочного прогноза планетарной сейсмичности, однако, эти соотношения получены на базе только трех с половиной 11 летних солнечных циклов и столь короткая статистика очевидно пока не позволяет принять этот вывод как руководство к сейсмическому прогнозу. Поэтому, требуются дальнейшие исследования в этом направлении.

#### **Выводы:**

- В течение последних 42 лет (1973-2014 гг.), долговременные тренды в солнечной и сейсмической активности находились в противофазе: число солнечных пятен в среднем уменьшалось от 1973 к 2014 гг., а число землетрясений, в том числе сильных ( $M \geq 8.0$ ), увеличивалось.

- Внутри 11 летних солнечных циклов наименьшее количество землетрясений происходило в годы умеренной солнечной активности, возрастало на  $\sim 10\%$  в годы солнечных минимумов, и на  $\sim 3-5\%$  в годы солнечных максимумов.

- Величина годовой выделяющейся на планете сейсмической энергии изменялась в 11 летних солнечных циклах в два с лишним раза, повышаясь в периоды солнечных минимумов.

*Работа выполнена по РБП-076 «Прикладные научные исследования в области космической деятельности, транспорта и коммуникаций» в рамках целевой программы «Развитие космических технологий мониторинга процессов на земной поверхности и в литосфере, создание элементной базы и аппаратуры для его проведения, разработка приборов, аппаратно-программных средств и подсистем космической техники» (Шифр О.0673), подпрограмма 1. «Развитие технологий наземно-космического геодезического мониторинга территории Казахстана», тема «Разработать методические основы оценки сейсмической опасности на основе данных о вариациях солнечной активности, геомагнитного поля и скорости вращения Земли», Регистрационный номер (РН) 0115PK01276.*

#### **ЛИТЕРАТУРА**

[1] Wolf R. On the periodic return of the minimum of sun-spots: The agreement between those periods and the variations of magnetic declination. Philos. Magazine. 1853, № 5, P. 67.

[2] Simpson J. F. Solar activity as a triggering mechanism for earthquakes, Earth Planet. Sci. Lett. 1967, Vol. 3, P. 417–425.

- [3] Лурсманашвили О.В. О возможности влияния активности Солнца на распределение землетрясений Кавказа. Сообщения Академии наук Грузии, 1972, т.65, №2, С.309-312.
- [4] Сьтинский А.Д. О влиянии солнечной активности на сейсмичность Земли. ДАН СССР, т. 208. 1973, № 5. С. 1078-1081.
- [5] Калинин Ю.Д. Солнечная обусловленность изменения длины суток и сейсмической активности. Красноярск, Институт Физики Сибирского Отделения АН СССР, 1974, 23 с.
- [6] Соболев Г.А., Шестопалов И.П., Харин Е.П. Геоэффективные солнечные вспышки и сейсмическая активность Земли, Физика Земли, 1998, № 7, С. 85-90.
- [7] Zhang, Gui-Qing. Relationship between global seismicity and solar activities, Acta Seismologica Sinica, 1998, V. 11, Issue 4, P.495-500.
- [8] Han Yanben, Guo Zengjian, Wu Jinbing and Ma Lihua Possible triggering of solar activity to big earthquakes ( $MS \geq 8$ ) in faults with near west-east strike in China, Science in China Ser. G Physics, Mechanics and Astronomy, 2004, P. 173-181.
- [9] Shestopalov I.P., Kharin E.P. Secular variations of solar activity and seismicity of the earth, Geophysical Journal, 2006, V. 28, N. 4, P.59-70.
- [10] Odintsov S. , K. Boyarchuk, K. Georgiva, B. Kirov and D. Atanasov Long-period trends in global seismic and geomagnetic activity and their relation to solar activity, Physics and Chemistry of the Earth, 2006, P. 88-93.
- [11] Рогожин Ю.А., Шестопалов И.П. Вековые циклы сейсмичности Земли и сейсмическая безопасность АЭС, Атомная стратегия, 2007, № 29.
- [12] Khain V.E and Khalilov E.N About Possible influence of solar activity upon seismic and volcanic activities: long-term forecast, Transactions of the International Academy of Science N&E, 2007/2008, P. 217-240.
- [13] Белов С.В., Шестопалов Л.П., Харин Е.П. О взаимосвязях эндогенной активности Земли с солнечной и геомагнитной активностью, Доклады Академии Наук, 2009, Т. 428, № 1, С. 104–108.
- [14] Хачикян Г.Я, Кадырханова Н.Ж., Калиева Л.С., Джанабилова С.О. Вариации солнечной активности и сейсмичность Земли, Известия Научно-технического общества «КАХАК», 2011, №3(33), С. 103-108.
- [15] Huzaimy, J. M., and Yumoto K. Possible correlation between solar activity and global seismicity, Proc. 2011 IEEE Int. Conf. Space Sci. Comm. Penang Malaysia, 2011, P. 138–141.
- [16] Хачикян Г.Я., Садыкова А.Б., Джанабилова С. Связь частоты повторяемости землетрясений и сейсмической энергии Земли с вариациями солнечной активности. Научный журнал-приложение международного журнала «Высшая школа Казахстана», Поиск-Izdenis, 2014, № 2, С. 55-61.
- [17] Love, J., and Thomas J. N. Insignificant solar-terrestrial triggering of earthquakes, Geophys. Res. Lett. 2013, V. 40, P. 1165–1170, doi:10.1002/grl.50211.
- [18] Gutenberg B., Richter C. F. Seismicity of the Earth and Associated Phenomena, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton, 1954, 273 p.
- [19] Pulinets S.A. Physical mechanism of the vertical electric field generation over active tectonic faults, Advances in Space Research, 2009, V.44 (6), P.767–773.
- [20] Harrison, R.G. and Usoskin I. Solar modulation in surface atmospheric electricity, J. Atmos. Sol. Terr. Phys., 2010, Vol. 72, P. 176-182.
- [21] Соболев Г.А., Закржевская Н.А., Харин Е.П. О связи сейсмичности с магнитными бурями, Физика Земли, 2001, № 11, С. 62–72.
- [22] Обридко В. Н., Х. Д. Канониди, Т. А. Митрофанова, Шельтинг Б. Д. Солнечная активность и геомагнитные возмущения. Геомагнетизм и аэрномия, 2013, том 53, № 2, С. 157–166.
- [23] Kanamori H. The energy released in great earthquakes, J. Geophysical Research, 1977, V. 82, P. 2981-2987.

## REFERENCES

- [1] Wolf R. On the periodic return of the minimum of sun-spots: The agreement between those periods and the variations of magnetic declination. Philos. Magazine. 1853, № 5, P. 67.
- [2] Simpson J. F. Solar activity as a triggering mechanism for earthquakes, Earth Planet. Sci. Lett. 1967, Vol. 3, P. 417–425.
- [3] Lursmanashvili O.V. On the possibility of the effect of solar activity on the distribution of Caucasian earthquakes. Posts Georgian Academy of Sciences, 1972, т.65, №2, S.309-312.
- [4] Sytinskyi A.D. On the influence of solar activity on the Earth's seismic activity. Akad, V.208. 1973, № 5.
- [5] Kalinin Y.D. Solar-driven changes in the length of day and seismic activity. Krasnoyarsk, Institute of Physics, Siberian Branch of the USSR, 1974, 23 p.
- [6] Sobolev G.A., Shestopalov I.P., Harin E.P. Geoeffectiveness solar flares and seismic activity of the Earth Physics of the Earth, 1998, № 7, pp 85-90.
- [7] Zhang, Gui-Qing. Relationship between global seismicity and solar activities, Acta Seismologica Sinica, 1998, V. 11, Issue 4, P.495-500.
- [8] Han Yanben, Guo Zengjian, Wu Jinbing and Ma Lihua Possible triggering of solar activity to big earthquakes ( $MS \geq 8$ ) in faults with near west-east strike in China, Science in China Ser. G Physics, Mechanics and Astronomy, 2004, P. 173-181.
- [9] Shestopalov I.P., Kharin E.P. Secular variations of solar activity and seismicity of the earth, Geophysical Journal, 2006, V. 28, N. 4, P.59-70.
- [10] Odintsov S. , K. Boyarchuk, K. Georgiva, B. Kirov and D. Atanasov Long-period trends in global seismic and geomagnetic activity and their relation to solar activity, Physics and Chemistry of the Earth, 2006, P. 88-93.
- [11] Rogozhin Y. A., Shestopalov I.P. The age-old cycles of the Earth's seismicity and seismic safety of nuclear power plants, Nuclear strategy, 2007, № 29. P. 1-7.

- [12] Khain V.E and Khalilov E.N About Possible influence of solar activity upon seismic and volcanic activities: long-term forecast, Transactions of the International Academy of Science H&E, 2007/2008, P. 217-240.
- [13] Belov S.V., Shestopalov L.P., E.P. Harin. On the relationship of endogenous activity of the Earth with solar and geomagnetic activity, reports the Academy of Sciences, 2009 T. 428, № 1, pp 104-108.
- [14] Khachikyan G.Ya, Kadyrhanova N. J, Kalieva L.S., Dzhanelilova S.O. Variations in solar activity and seismicity of the Earth, the Scientific and Technical Proceedings of the Society "КАКНАС", 2011, №3 (33), pp 103-108.
- [15] Huzaimy, J. M., and Yumoto K. Possible correlation between solar activity and global seismicity, Proc. 2011 IEEE Int. Conf. Space Sci. Comm. Penang Malaysia, 2011, P. 138–141.
- [16] Khachikyan G.Y, Sadykova A.B., Dzhanelilova C. Communication recurrence frequency of earthquakes and seismic energy of the Earth and variations in solar activity, the scientific journal application of the international journal "Higher School of Kazakhstan" Search-Izdenis, 2014, № 2, pp 55-61.
- [17] Love, J., and Thomas J. N. Insignificant solar-terrestrial triggering of earthquakes, Geophys. Res. Lett. 2013, V. 40, P. 1165–1170, doi:10.1002/grl.50211.
- [18] Gutenberg B., Richter C. F. Seismicity of the Earth and Associated Phenomena, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton, 1954, 273 p.
- [19] Pulnits S.A. Physical mechanism of the vertical electric field generation over active tectonic faults, Advances in Space Research, 2009, V.44 (6), P.767–773.
- [20] Harrison, R.G. and Usoskin I. Solar modulation in surface atmospheric electricity, J. Atmos. Sol. Terr. Phys., 2010, Vol. 72, P. 176-182.
- [21] Sobolev G.A., Zakrzhevskaya N.A., Harin E.P. On the relationship between seismicity and magnetic storms, Physics of the Earth, 2001, № 11, P. 62-72.
- [22] Obridko V.N., H. D. Kanonidi, T.A. Mitrofanov, Shelting B.D. Solar activity and geomagnetic disturbances. Geomagn, 2013, Volume 53, № 2, P.. 157-166
- [23] Kanamori H. The energy released in great earthquakes, J. Geophysical Research, 1977, V. 82, P. 2981-2987.

## 21–24 КҮН ЦИКЛІНІҢ КҮННІҢ ЖӘНЕ ГЛОБАЛДІ СЕЙСМИКАЛЫҚ БЕЛСЕНДІЛІКТЕРІНІҢ ВАРИАЦИЯСЫ

Ж. Ш. Жантаев<sup>1</sup>, Б. Т. Жұмабаев<sup>2</sup>, Г. Я. Хачикян<sup>2</sup>, Н. Тойшиев<sup>2</sup>, Д. Қайратқызы<sup>2</sup>

<sup>1</sup>«Ұлттық Ғарыштық Зерттеулер мен Технологиялар Орталығы» АҚ, АҒК ИДМ ҚР, Алматы, Қазақстан,  
<sup>2</sup>«Ионосфера институты» ЕЖШС, «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жер сілкінісі, сейсмикалық энергия, 11 жылдық күн циклі.

**Аннотация.** Мерзімнің NEIC глобалді сейсмологиялық каталог бойынша 1973-2014 жж. период ішінде жер сілкіністерінің қайталанғыштық жиіліктерінің вариацияларымен қатар ғаламшарда таралған сейсмикалық энергияларының күн белсенділігінің вариацияларымен байланысы зерттелді. Бастапқыда, Гуттенберг-Рихтер заңын пайдалана отырып тең осы каталогтан ұсынылған төменгі деңгейдегі магнитудалар  $M=4.5$  анықталды. 1973-2014 жж. осы NEIC каталогынан  $M \geq 4.5$  магнитудасымен 205311 жер сілкіністерді құрап жатыр. Зерттеулер көрсетті, күн және сейсмикалық белсенділікте ұзақ мерзімді ағым ішінде бұл периодта қарама-қарсы фазада болды: күн дақтарының саны 1973 ж-дан 2014 ж-ға дейін орташа азаюда, ал жер сілкіністердің саны, соның ішінде күшті жер сілкіністер саны ( $M \geq 8.0$ ), ұлғайды. Уақыт периодына талдау жасасақ, күн белсенділігінің үш жарым 11 жылдық циклі кіретіні анықталды (21, 22, 23 және 24-ң бірінші жартысы). Тебетейған, күннің 11 жылдық циклінде қалыпты күн белсенділігінің жылдарында жер сілкіністердің ең аз сандары байқалады, бірақ олардың сандары күн белсенділігінің минимум жылдарында  $\sim 10\%$ -ға, ал күн белсенділігінің максимум жылдарында  $\sim 3\text{-}5\%$ -ға өсетіні көрсетілді. Ғаламшарда таралған сейсмикалық энергияның 11 жылдық күн циклінің өзгерісінің шамасы күн белсенділігінің минимум жылдарынан екі еседен артық жоғары. Күн-литосфералық байланыстардың ықтималды механизмдері талқыланды.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 71 – 78

**SEISMO-IONOSPHERIC RELATIONSHIPS:  
VARIATIONS IN ELECTRON TEMPERATURE AND  
ELECTRON DENSITY MEASURE BY THE DEMETER SATELLITE****G. Ya. Khachikyan<sup>1</sup>, A. S. Kim<sup>1</sup>, A. S. Inchin<sup>2</sup>, A. Lozbin<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Institute of Ionosphere, JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan,<sup>2</sup>Institute of space technics and technology JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan.

E-mail: galina.khachikyan@gmail.com

**Key words:** earthquake, ionosphere, electron density, electron temperature.

**Abstract.** According to the satellite DEMETER, the variations of electron temperature and electron density of the ionosphere above the main peak due to a strong earthquake ( $M = 7.7$ ) occurred on July 5, 2008 in the Sea of Okhotsk have been performed. The DEMETER was flying over the area of the epicenter of the June 22, 2008 (13 days before the event), July 5, 2008 (after  $\sim 9$  hours the seismic shock), and 18 July 2008 (13 days after the event). Over the area of the epicenter, the satellite moved along ascending part of the orbits from the southeast to the northwest for about 8 minutes at almost the same interval of the universal time ( $\sim 11$ h.10 min. to about 11h.18 min.). Local time along this part of orbit was changed from 21h 39 min to 20 h 44 min. The percentage change in the electron temperature and the electron density on July 5 with respect to June 22 was estimated along orbit. These results are consistent with the predictions of the mathematical model (Kuo CL, Huba JD, Joyce G., LC Lee, J. Geophys. Res., 2011, V.116, A10317), and show that on the day of the earthquake on July 5, the electron temperature was lowered by compared to June 22 on the east side of the projection of the epicenter at the height of the satellite orbit, but it raised on the west. The electron density, on the contrary, was raised on the east side, but reduced to the west.

УДК 550.348

**СЕЙСМО-ИОНОСФЕРНЫЕ СВЯЗИ:  
ВАРИАЦИИ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И  
ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПО ДАННЫМ ИСЗ DEMETER****Г. Я. Хачикян<sup>1</sup>, А. С. Ким<sup>1</sup>, А.С. Инчин<sup>2</sup>, А. Лозбин<sup>2</sup>**<sup>1</sup>ДТОО «Институт ионосферы», АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,<sup>2</sup>ДТОО «Институт космической техники и технологий», АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан**Ключевые слова:** землетрясение, ионосфера, электронная концентрация, электронная температура.

**Аннотация.** По данным спутника DEMETER проанализированы вариации электронной температуры и электронной концентрации выше главного максимума ионосферы в связи с сильным землетрясением ( $M=7.7$ ), произошедшим 5 июля 2008 г. в Охотском море. Спутник пролетал над районом эпицентра 22 июня 2008 г. (за 13 дней до события), 5 июля 2008 г. (спустя  $\sim 9$  часов после сейсмического толчка), и 18 июля 2008 г. (через 13 дней после события). Над районом эпицентра спутник двигался на восходящих витках орбиты с юго-востока на северо-запад в течение примерно 8 минут, практически в один и тот же промежуток мирового времени (с  $\sim 11$  ч 10 мин до  $\sim 11$  ч 18 мин). Местное время вдоль участка трассы изменялось от 21 ч 39 мин до 20 ч 44 мин. Рассчитано процентное изменение электронной температуры и электронной концентрации вдоль трассы пролета 5 июля относительно 22 июня. Полученные результаты согласуются с

предсказаниями математической модели (Kuo C.L., Huba J.D., Joyce G., L.C Lee, J. Geophys. Res., 2011, V.116, A10317) и показывают, что в день землетрясения 5 июля электронная температура была понижена по сравнению с 22 июня с восточной стороны от проекции эпицентра на высоту орбиты спутника, и повышена с западной, а электронная концентрация, наоборот, была повышена с восточной стороны, но понижена с западной.

**Введение.** Изучение сейсмо-ионосферных связей проводится уже более 50 лет – со времени землетрясения на Аляске в 1964 г., когда впервые был обнаружен отклик ионосферных параметров на разрушительный процесс в земной коре [1]. Вместе с тем, общепринятого теоретического механизма, ответственного за такую связь, пока не существует, хотя в гипотезах–претендентах на такой механизм недостатка нет. Например, в [2] предложена «резонансная» модель электромагнитной связи, которая предполагает, что передача энергии из литосферы в ионосферу происходит через нагрев E-области ионосферы при возбуждении гипотетического резонатора в системе литосфера–ионосфера. В другой гипотезе [3] предполагают, что связь ионосферных возмущений с литосферными процессами осуществляется посредством серии импульсов электромагнитного поля с характерными временами  $\tau = 0.1 \div 1$  с. После обнаружения спутниками эффекта возбуждения аномального ОНЧ-излучения над областями землетрясений, была предложена гипотеза [4], согласно которой при смещении и разрушении блоков земной коры вдоль активных разломов в окрестности очага готовящегося землетрясения генерируется широкополосное электромагнитное излучение. Это излучение проходит через земную среду, атмосферу и ионосферу, трансформируется по спектру, в результате взаимодействия с заряженными частицами околоземной плазмы, и приводит к возбуждению в плазме верхней атмосферы и магнитосфере альфвеновских волн в диапазоне частот  $0.3 \div 10$  Гц, где зона возбуждения имеет размер  $100 \div 150$  км. Также, рассматривается «акустико-электрическая» гипотеза [5], согласно которой акустические импульсы, распространяющиеся от области подготовки землетрясения до ионосферных высот, генерируют электрические токи в спорадических слоях.

В работе [6] предполагается, что в области подготовки землетрясения происходит импульсное выделение радона и возникают локальные генераторы и мини-токовые системы, что приводит, с одной стороны, к всплескам инфракрасного излучения и, с другой стороны, к передаче соответствующих возмущений вверх, в ионосферу. На базе экспериментального факта - эманации литосферных газов в приземную атмосферу на стадии подготовки землетрясения, разрабатывается гипотеза [7] в которой полагают, что в результате выхода литосферных газов в приземную атмосферу, могут генерироваться внутренние гравитационные волны (ВГВ), которые распространяются через атмосферу и, доходя до ионосферных высот, приводят к возмущению ионосферы, благодаря столкновениям ионов с нейтралами. Согласно [7], могут существовать, по меньшей мере, три механизма генерации ВГВ в сейсмически активных регионах, связанные с 1) "поршневым" движением земной коры, имеющей блоковую структуру; 2) нестабильными тепловыми аномалиями, вызванными выходом газов в атмосферу в разломных зонах земной коры; 3) нестабильным поступлением массы литосферных газов в атмосферу. В последние годы идея возмущения нейтральной атмосферы и ионосферы, основанная на выходе литосферных газов в приземную атмосферу, получила значительное развитие, но с несколько иной точки зрения. Эта новая точка зрения заключается в предположении, что эманация литосферных газов может привести к росту ионизации в приповерхностном атмосферном слое, что приведет к росту проводимости и, следовательно, к росту вертикального тока между земной поверхностью и ионосферой. В настоящее время эта точка зрения активно развивается разными авторами [8-18], причем с учетом новой парадигмы, полагающей, что землетрясение является элементом глобальной электрической цепи (ГЭЦ), поскольку предположение о росте вертикального электрического тока между земной поверхностью и ионосферой автоматически предполагает замыкание и функционирование ГЭЦ [19, 20].

В основе электродинамических моделей [8-18] лежит предположение, что изменение околоземной космической плазмы обусловлено возмущением электрического поля на этих высотах за счет изменения тока проводимости в замкнутой атмосферно-ионосферной электрической цепи, что, в свою очередь, обусловлено генерацией приземного вертикального электрического поля над районом подготовки землетрясения. Моделирование процесса возникновения вертикального

электрического поля над районом подготовки землетрясения и его проникновения на высоты ионосферы проведено в [16]. При этом использованы современные знания [21], что при деформации кристаллической решетки горной породы в ней появляются положительные проводники зарядов (положительные дырки). По мере того, как возрастает напряжение в горной породе, в ней активизируются дырочные проводники зарядов и генерируются электрические токи, что приводит к аккумуляции положительных зарядов на земной поверхности, образованию вертикального электрического поля и направленного вверх электрического тока. Расчеты [16] показали, что величина плотности тока является наиболее важным параметром для развития возмущений в ионосфере вдоль протяженности всей магнитной силовой линии (трубки), содержащей эпицентр будущего землетрясения. На центральной высоте динамо-области, равной примерно 85 км, электрическое поле величиной  $\sim 1$  мВ/м, может быть создано плотностью корового тока порядка  $1.4 \mu\text{A}/\text{m}^2$  в условиях дневной проводимости и порядка  $0.1 \mu\text{A}/\text{m}^2$  в условиях ночной проводимости. Проникающее снизу в ионосферу электрическое поле вызывает перенос плазмы  $[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]$  дрейф, направленный перпендикулярно вектору магнитного и электрического поля со скоростью  $\mathbf{V} = \mathbf{E} \mathbf{B} / B^2$ , что приводит в итоге к вариациям электронной концентрации, электронной температуры и полного электронного содержания ионосферы. Результаты моделирования [16] над областью напряженной геологической среды длиной 200 км в направлении север-юг и шириной 30 км в направлении восток-запад показали, что выше главного максимума ионосферы (250–350 км),  $[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]$  дрейф приводит к увеличению электронной концентрации с восточной стороны от точки-проекции эпицентра на эти высоты вдоль магнитной силовой линии, но уменьшению электронной концентрации с западной стороны. Для электронной температуры ситуация противоположная, температура повышается с западной стороны, но понижается с восточной. Ниже максимума ионосферы – ситуация для электронной концентрации и электронной температуры будет противоположной той, что имеет место выше ионосферного максимума. В данной статье проверяются результаты этих модельных расчетов по данным спутника DEMETER для случая сильного землетрясения ( $M=7.7$ ), произошедшего в Охотском море 5 июля 2008 г.

**Метод исследования.** Спутник DEMETER работал с 2004 по 2010 гг. и измерения его приборов были нацелены специально на изучение эффектов литосферно-ионосферных связей. Измерения электронной температуры ( $T_e$ ) и электронной концентрации ( $N_e$ ) проводились вдоль трассы полета спутника с интервалом 1 секунда. Очевидно, что изменения  $N_e$  и  $T_e$ , обусловленные сейсмогенным электрическим полем, будут накладываться на естественные пространственно-временные вариации этих параметров обусловленные, в первую очередь, пространственно-временными вариациями поступающего ультрафиолетового излучения Солнца. Поэтому представляется, что тестирование результатов математического моделирования [16] будет более продуктивным для условий, когда поток ультрафиолетовых лучей отсутствует. Анализ базы данных спутника показал, что одним из удачных событий для такого тестирования может быть сильное землетрясение ( $M=7.7$ ), произошедшее в Охотском море 5 июля 2008 г. в 02:12:04 UT с координатами эпицентра  $53.882^\circ\text{N}$ ,  $152.886^\circ\text{E}$  (рисунок 1).

DEMETER пролетал вблизи эпицентра землетрясения в вечернее время (после 21 часа местного времени) на восходящих витках орбиты. Трасса спутника проходила в наибольшей близости к району эпицентра 22 июня 2008 г (за 13 дней до события), 5 июля 2008 г (спустя  $\sim 9$  часов после сейсмического толчка), и 18 июля 2008 г (через 13 дней после события). На рисунке 2 показаны трассы пролета спутника для этих трех дней. Место положения эпицентра на земной поверхности обозначено кружком, номер магнитной силовой линии, проходящей через эпицентр равен  $L=2.2$ . Проекция эпицентра вдоль магнитной силовой линии  $L=2.2$  на высоту спутника  $h = 665$  км обозначена звездочкой. Номер геомагнитной силовой линии, проходящей через эпицентр, и координаты проекции эпицентра на высоту 665 км ( $51.3^\circ\text{N}$ ,  $153.4^\circ\text{E}$ ) были определены с помощью компьютерных кодов программы GEOPACK [22]. Движение спутника вдоль указанных трасс происходило с юго-востока на северо-запад в течение примерно 8 минут, практически в один и тот же промежуток мирового времени (с  $\sim 11$  ч 10 мин до  $\sim 11$  ч 18 мин). Местное время вдоль этого участка трассы изменялось от 21 ч 39 мин до 20 ч 44 мин.

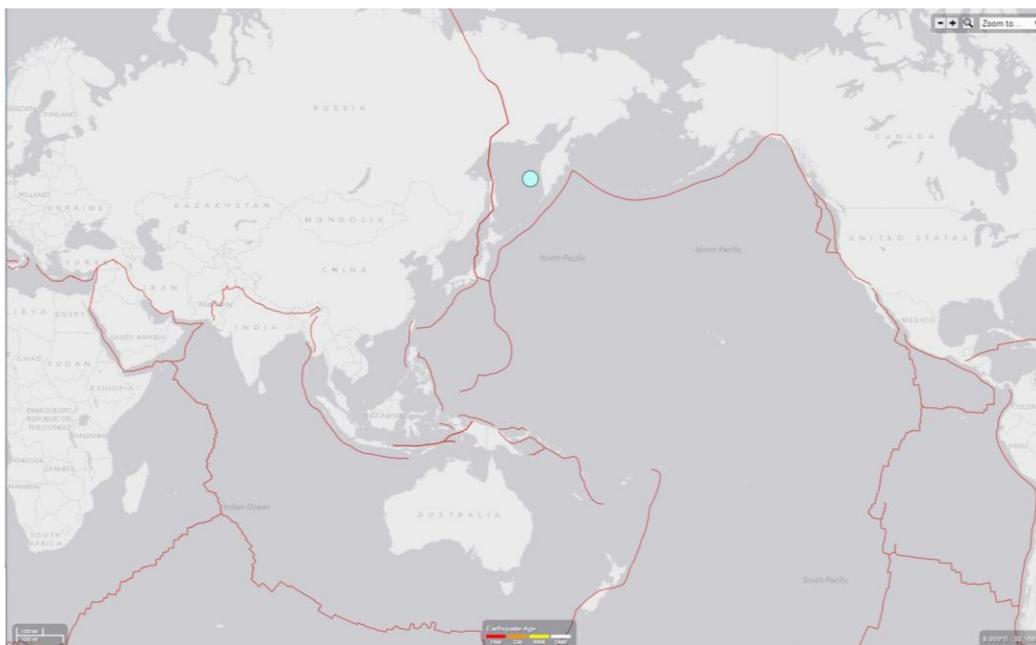
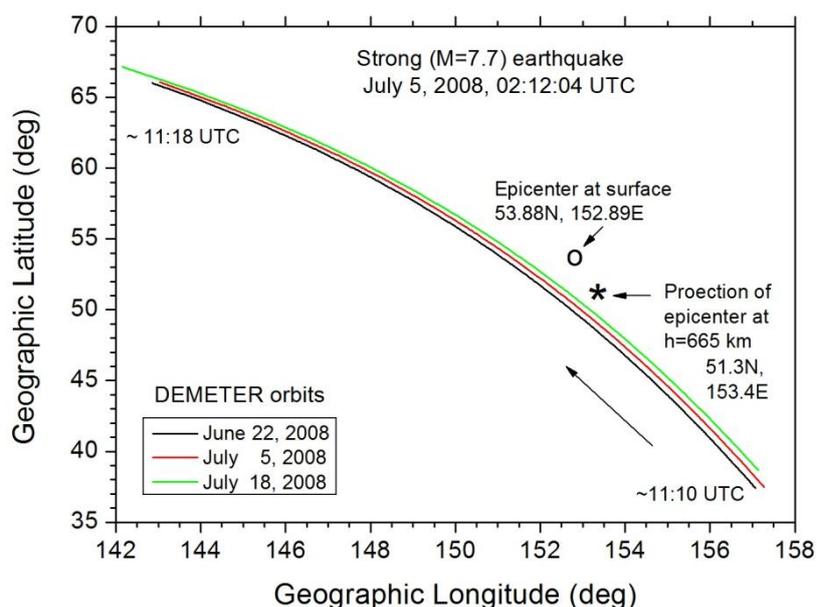


Рисунок 1 – Месторасположения землетрясения с магнитудой  $M=7.7$  (зеленый кружок), произошедшего 5 июля 2008 г. в 02:12:04 UT с координатами эпицентра  $53.882^{\circ}\text{N}$ ,  $152.886^{\circ}\text{E}$ .



Обозначения: круг – эпицентр землетрясения на земной поверхности, звездочка – проекция эпицентра на высоту 665 км.

Рисунок 2 – Трассы спутника DEMETER 22 июня, 5 и 18 июля 2008 г. вблизи эпицентра землетрясения с магнитудой  $M=7.7$  (кружок), произошедшего 5 июля 2008 г.

**Результаты исследования.** Высота орбиты спутника составляла  $\sim 665$  км, что выше максимума ионосферного слоя. Данные спутника для трех пролетов показали, что вариации электронной температуры и концентрации вдоль данного участка трассы были достаточно схожи для 22 июня и 18 июля, но отличались для 5 июля. В соответствии с результатами модельных расчетов [16], в день землетрясения (5 июля) должно наблюдаться понижение электронной температуры относительно 22 июня с восточной стороны от проекции эпицентра на высоту орбиты спутника, и повышение – с западной стороны. Для электронной концентрации ситуация должна быть

обратной – повышение с восточной стороны и понижение – с западной. Чтобы проверить результаты модельных расчетов, для значений  $Te$  и  $Ne$ , измеренных вдоль трассы полета спутника, была подсчитана относительная разница (в процентах) между 5 июля 2008г (день землетрясения) и 22 июня 2008 г. (день наиболее близкого пролета спутника к зоне эпицентра) по выражениям:

$$\Delta Te\% = [(Te_{5 \text{ июля}} - Te_{22 \text{ июня}}) / Te_{22 \text{ июня}}] \times 100\% ,$$

$$\Delta Ne\% = [(Ne_{5 \text{ июля}} - Ne_{22 \text{ июня}}) / Ne_{22 \text{ июня}}] \times 100\% .$$

На рисунке 3 показаны вариации  $\Delta Te\%$  (верхняя панель) и  $\Delta Ne\%$  (нижняя панель) вдоль данного участка трассы. Вертикальные красные линии отмечают проекцию эпицентра землетрясения вдоль геомагнитной силовой линии на высоту орбиты спутника 665 км. Напомним, что координаты проекции составляют:  $51.3^{\circ}N$ ,  $153.4^{\circ}E$ , в то время как координаты эпицентра равны:

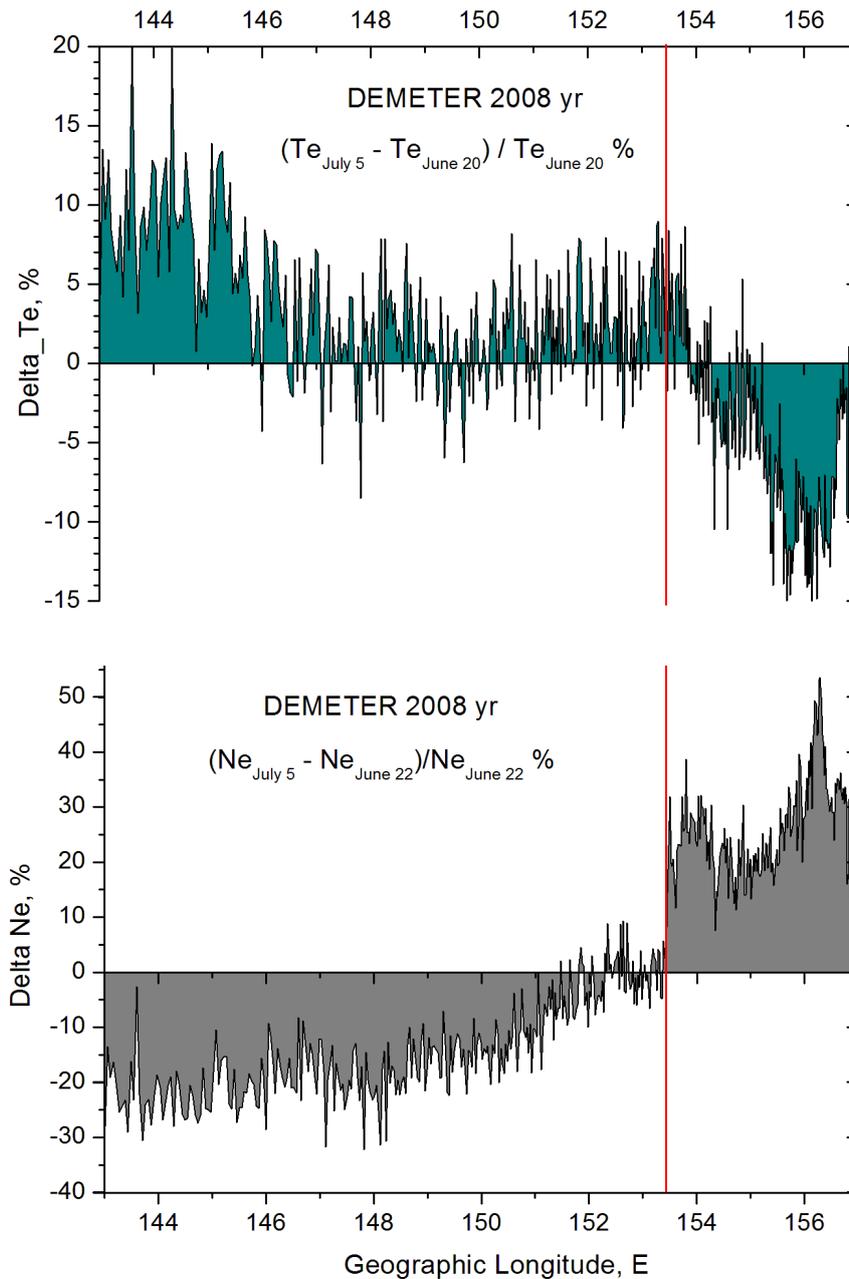


Рисунок 3 – Долготные вариации разницы (в процентах) электронной температуры (верхняя панель) и электронной концентрации (нижняя панель) по данным спутника ДЕМЕТЕР 5 июля и 22 июня 2008 г. Вертикальные линии маркируют долготу проекции эпицентра землетрясения с  $M = 7.7$  на высоту полета спутника 665 км

53.882<sup>0</sup>N, 152.886<sup>0</sup>E. Расхождение координат обусловлено тем, что эпицентр проецируется на высоту орбиты спутника вдоль геомагнитных силовых линий, наклоненных к земной поверхности на угол геомагнитного наклоения. Из рисунка 3 видно, что в день землетрясения 5 июля 2008 г, электронная температура (верхняя панель) была понижена с восточной стороны от эпицентра и повышена с западной, а электронная концентрация (нижняя панель), наоборот, была повышена с восточной стороны, но понижена с западной. В среднем, изменения для электронной температуры составили примерно 7-10%, и изменения в электронной концентрации находились в пределах 25-30%.

**Обсуждение результатов.** Результаты математического моделирования связи в системе литосфера-ионосфера [16, и ссылки внутри], предсказывают, что при возрастании напряжения в геологической среде, активизируются дырочные проводники зарядов и генерируются электрические токи, что приводит к аккумуляции положительных электрических зарядов на земной поверхности, образованию вертикального электрического поля и вертикального тока, обеспечивающих появление электрического поля в ионосфере, которое вызывает перенос ионосферной плазмы [ExB] дрейф, направленный перпендикулярно к вектору магнитного и электрического полей. Дрейф ионосферной плазмы порождает разные эффекты выше и ниже высоты главного максимума ионосферного слоя. В частности, выше максимума ионосферного слоя ожидается увеличение (уменьшение) электронной концентрации восточнее (западнее) проекции эпицентра на ионосферные высоты, а электронная температура будет возрастать в магнитной силовой трубке, расположенной западнее проекции эпицентра на ионосферные высоты, но уменьшаться в магнитной силовой трубке, расположенной восточнее проекции эпицентра на ионосферные высоты.

Результаты моделирования [16] были протестированы по данным спутника DEMETER, орбита которого привязана к высоте ~665 км, что выше главного максимума ионосферы. Исследовались пространственные изменения электронной температуры и концентрации в связи с сильным землетрясением ( $M = 7.7$ ), произошедшим в Охотском море 5 июля 2008 г. Результаты измерений подтвердили модельные расчеты, показав, что в день землетрясения 5 июля (спустя примерно 9 часов после основного толчка) электронная температура была понижена по сравнению с 22 июня с восточной стороны от проекции эпицентра на высоту орбиты спутника, и повышена с западной стороны, а электронная концентрация, наоборот, была повышена с восточной стороны, но понижена с западной. В среднем, изменения в значениях электронной температуры составили примерно 7–10%, а изменения в электронной концентрации находились в пределах 25–30%, что также согласуется с предсказаниями модели [16].

**Вывод.** Результаты измерения спутником DEMETER электронной температуры и электронной концентрации вблизи эпицентра сильного ( $M=7.7$ ) землетрясения, произошедшего 5 июля 2008 г. в Охотском море, подтвердили предсказания математической модели [16], показав, что в день землетрясения электронная температура была понижена с восточной стороны от проекции эпицентра на высоту орбиты спутника, и повышена с западной, а электронная концентрация, наоборот, была повышена с восточной стороны, но понижена с западной; в среднем, изменения электронной температуры составили ~7-10%, а электронной концентрации ~ 25-30%, что согласуется с предсказаниями модели.

*Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Математическое моделирование очаговых зон и литосферно-ионосферных связей с использованием геоинформационных спутниковых технологий» (Грант 0079/ГФ4, Регистрационный номер (РН) 0115РК00398).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Davies K., and Baker D., Ionospheric effects observed around the time of the Alaska earthquake of March, J. Geophys. Res, 1964, 70 (9), P. 2251-2253.
- [2] Гохберг М.Б., Булошников А.М., Гуфельд И.Л., Липеровский В.А. Резонансные явления при сейсмоионосферном взаимодействии, Изв. АН СССР, Физика Земли, 1985, № 6, С. 5–8.
- [3] Колоколов Л.Е., Липеровская Е.В., Липеровский В.А. и др. Резкие расплывания спорадических слоев E среднеширотной ионосферы в периоды подготовки землетрясений, Изв. АН СССР, Физика Земли, 1992, № 7, С. 101–109.
- [4] Молчанов О.А. Прохождение электромагнитных полей от сейсмических источников в верхнюю ионосферу Земли, Геомагнетизм и аэронавигация, 1991, Т, 31, № 1, С. 111–119.

- [5] Липеровский В.А. Физические модели связи в системе литосфера–атмосфера–ионосфера, Лекции байкальской школы по фундаментальной физике (БШФФ-2006), С.58–65, [bsfp.iszf.irk.ru/bsfp2006/proceed2006/58-65.pdf](http://bsfp.iszf.irk.ru/bsfp2006/proceed2006/58-65.pdf)
- [6] Liperovsky, V.A., Meister, C.-V., Liperovskaya E.V., et al. On Es-spread effects in the ionosphere before earthquakes, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2005, V. 5, P. 1–4.
- [7] Гохберг М. Б., С. Л. Шалимов Литосферно-ионосферная связь и ее моделирование, *Российский журнал наук о Земле*, 2000, Том 2, № 2, Апрель 2000, [elpub.wdcb.ru/journals/rjes/rus/v02/rje00032/rje00032.htm](http://elpub.wdcb.ru/journals/rjes/rus/v02/rje00032/rje00032.htm).
- [8] Pulinets S.A., Alekseev V.A., Legen'ka A.D., Hegai V.V. Radon and metallic aerosols emanation before strong earthquakes and their role in atmosphere and ionosphere modification, *Adv. Space Res.*, 1997, V. 20, № 11, P. 2173–2176.
- [9] Sorokin V.M., and Chmyrev V. M., The physical model of electromagnetic and plasma response of the ionosphere on the pre-earthquake processes, in: *Atmospheric and ionospheric electromagnetic phenomena associated with earthquakes*, Ed. M. Hayakawa, Terra Sci. Publ., Co., Tokyo, 1999, P. 819-828.
- [10] Sorokin V.M., Chmyrev V.M. Modification of the Ionosphere by Seismic Related Electric Field, *Seismo-Electromagnetics*, Tokyo: Terra Scientific Publishing Company, 1998, P. 805–818.
- [11] Sorokin V.M., Chmyrev V.M., Yaschenko A.K. Theoretical model of DC electric field formation in the ionosphere stimulated by seismic activity, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2005, 67, P.1259-1268.
- [12] Sorokin V.M., Yaschenko A.K., Hayakawa M. A perturbation of DC electric field caused by light ion adhesion to aerosols during the growth in seismic-related atmospheric radioactivity, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2007, V.7, P.155-163.
- [13] Pulinets S.A. Natural radioactivity, Earthquakes, and the Ionosphere, *EOS, Transactions, AGU*, 2007, V 88, No 20, P.217-218.
- [14] Pulinets S.A., Physical mechanism of the vertical electric field generation over active tectonic faults, *Advances Space Research*. – 2009, V.44, P. 767-773.
- [15] Harrison, R. G., Aplin, K. and Rycroft, M. Atmospheric electricity coupling between earthquake regions and the ionosphere, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2010, 72 (5-6), P.376-381 .
- [16] Kuo C. L., Huba J. D., Joyce G., Lee L. C. Ionosphere plasma bubbles and density variations induced by pre-earthquake rock currents and associated surface charges, *J. Geophys. Res.* -2011, V.116, A10317, doi:10.1029/2011JA016628.
- [17] Karpov M.I., Zolotov O.V., Namgaladze A.A. Modeling of the ionosphere response on the earthquake preparation, *Proceedings of the MSTU*, 2012, V. 15, 2, P. 471-476.
- [18] Harrison R. G., K. L. Aplin, and M. J. Rycroft. Earthquake–cloud coupling through the global atmospheric electric circuit, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 2014, P. 773–777, doi:10.5194/nhess-14-773-2014. [www.nat-hazards-earth-syst-sci.net/14/773/2014/](http://www.nat-hazards-earth-syst-sci.net/14/773/2014/).
- [19] Bering E.A., A.A. Few, and J.R. Benbrook The Global Electric Circuit, *Physics Today*, October, 1998, P. 24-30.
- [20] Markson R. Solar modulation of atmospheric electrification and possible implications for the Sun-weather relationship, *Nature*, 1978, V.273, P. 103-109.
- [21] Freund F. Toward a unified solid state theory for pre-earthquake signals, *Acta Geophys*, 2010, V.58, P. 719–766.
- [22] Tsyganenko N.A., 2008. Geopack: A Set of Fortran Subroutines for Computations of the Geomagnetic Field in the Earth's Magnetosphere. Available from: <http://geo.phys.spbu.ru/~tsyganenko/Geopack-2008.html>.

#### REFERENCES

- [1] Davies K., and Baker D., Ionospheric effects observed around the time of the Alaska earthquake of March, *J. Geophys. Res.*, 1964, 70 (9), P. 2251-2253.
- [2] Gochberg M.B., Buloshnikov A.M., Gufeld I.L., V.A. Liperovsky. Resonant phenomena at seismoionospheric interaction, *Math. USSR Academy of Sciences, Physics of the Earth*, 1985, № 6, P. 5-8.
- [3] Bells L.E., Liperovskaya E.V., Liperovsky V.A., et al. Sudden blurring of sporadic E layer of the ionosphere in the middle-period earthquake preparation, *Math. USSR Academy of Sciences, Physics of the Earth*, 1992, № 7, P. 101-109.
- [4] Molchanov O.A. Passage of electromagnetic fields from seismic sources in the Earth's upper ionosphere, *Geomagn.*, 1991, T, 31, № 1, P. 111-119.
- [5] Liperovsky V.A. Physical models of communication in the lithosphere-atmosphere-ionosphere. Lectures Baikals School on Fundamental Physics (BSFP 2006) S.58-65, [bsfp.iszf.irk.ru/bsfp2006/proceed2006/58-65.pdf](http://bsfp.iszf.irk.ru/bsfp2006/proceed2006/58-65.pdf)
- [6] Liperovsky V.A., Meister, C.V., Liperovskaya E.V., et al. On Es-spread effects in the ionosphere before earthquakes, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2005, V. 5, P. 1–4.
- [7] Gochberg M.B., S.L. Shalimov. Lithosphere-ionosphere relationship and its modeling, *Russian Journal of Earth Sciences*, 2000, Volume 2, № 2, April 2000. [elpub.wdcb.ru/journals/rjes/rus/v02/rje00032/rje00032.htm](http://elpub.wdcb.ru/journals/rjes/rus/v02/rje00032/rje00032.htm).
- [8] Pulinets S.A., Alekseev V.A., Legen'ka A.D., Hegai V.V. Radon and metallic aerosols emanation before strong earthquakes and their role in atmosphere and ionosphere modification, *Adv. Space Res.*, 1997, V. 20, № 11, P. 2173–2176.
- [9] Sorokin V.M., and Chmyrev V. M., The physical model of electromagnetic and plasma response of the ionosphere on the pre-earthquake processes, in: *Atmospheric and ionospheric electromagnetic phenomena associated with earthquakes*, Ed. M. Hayakawa, Terra Sci. Publ., Co., Tokyo, 1999, P. 819-828.
- [10] Sorokin V.M., Chmyrev V.M. Modification of the Ionosphere by Seismic Related Electric Field, *Seismo-Electromagnetics*, Tokyo: Terra Scientific Publishing Company, 1998, P. 805–818.
- [11] Sorokin V.M., Chmyrev V.M., Yaschenko A.K. Theoretical model of DC electric field formation in the ionosphere stimulated by seismic activity, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2005, 67, P.1259-1268.
- [12] Sorokin V.M., Yaschenko A.K., Hayakawa M. A perturbation of DC electric field caused by light ion adhesion to aerosols during the growth in seismic-related atmospheric radioactivity, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2007, V.7, P.155-163.

- [13] Pulinets S.A. Natural radioactivity, Earthquakes, and the Ionosphere, EOS, Transactions, AGU, 2007, V 88, No 20, P.217-218.
- [14] Pulinets S.A., Physical mechanism of the vertical electric field generation over active tectonic faults, Advances Space Research. – 2009, V.44, P. 767-773.
- [15] Harrison, R. G., Aplin, K. and Rycroft, M. Atmospheric electricity coupling between earthquake regions and the ionosphere, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 2010, 72 (5-6), P.376-381 .
- [16] Kuo C. L., Huba J. D., Joyce G., Lee L. C. Ionosphere plasma bubbles and density variations induced by pre-earthquake rock currents and associated surface charges, *J. Geophys. Res.* -2011, V.116, A10317, doi:10.1029/2011JA016628.
- [17] Karpov M.I., Zolotov O.V., Namgaladze A.A. Modeling of the ionosphere response on the earthquake preparation, Proceedings of the MSTU, 2012, V. 15, 2, P. 471-476.
- [18] Harrison R. G., K. L. Aplin, and M. J. Rycroft. Earthquake–cloud coupling through the global atmospheric electric circuit, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2014, P. 773–777, doi:10.5194/nhess-14-773-2014. www.nat-hazards-earth-syst-sci.net/14/773/2014/
- [19] Bering E.A., A.A. Few, and J.R. Benbrook The Global Electric Circuit, Physics Today, October, 1998, P. 24-30.
- [20] Markson R. Solar modulation of atmospheric electrification and possible implications for the Sun-weather relationship, Nature, 1978, V.273, P. 103-109.
- [21] Freund F. Toward a unified solid state theory for pre-earthquake signals, Acta Geophys, 2010, V.58, P. 719–766.
- [22] Tsyganenko N.A., 2008. Geopack: A Set of Fortran Subroutines for Computations of the Geomagnetic Field in the Earth's Magnetosphere. Available from: <http://geo.phys.spbu.ru/~tsyganenko/Geopack-2008.html>.

**СЕЙСМО-ИОНОСФЕРАЛЫҚ БАЙЛАНЫС:  
ДЕМЕТЕР ЖЖС ДЕРЕКТЕРІ БОЙЫНША ЭЛЕКТРОНДЫ ТЕМПЕРАТУРАСЫНЫҢ  
ЖӘНЕ ЭЛЕКТРОНДЫ КОНЦЕНТРАЦИЯСЫНЫҢ ВАРИАЦИЯСЫ**

**Г. Я. Хачикян<sup>1</sup>, А. С. Ким<sup>1</sup>, А.С. Инчин<sup>2</sup>, А. Лозбин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> «Институт ионосферы» ЕЖШС, «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup> «Ғарыштық техника мен технологиялар институты», ЕЖШС, «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жер сілкінісі, ионосфера, электронды концентрация, электронды температура

**Аннотация.** Demeter ЖЖС деректері бойынша ионосфераның негізгі жоғары қабатының Охот теңізіндегі 2008 жылы 5 шілде күні орын алған күшті жер сілкінісімен ( $M = 7.7$ ) байланысты электронды температура мен электронды концентрациясының вариациясы талданылды. Жасанды серік 2008 жылы 22 маусым, (оқиғаға дейін 13 күн), 2008 жылы 5 шілде, (сейсмикалық соқтығысудан кейін ~ 9 сағатта) және 2008 жылы 18 шілде (оқиғадан кейін 13 күн) күндері аталмыш аймақ эпицентрі үстінен ұшып өтті. Жасанды серік аталмыш аймақ эпицентрі үстінен шамамен 8 минут, әлемдік уақыттан дерлік бірдей аралықпен (~11 сағ. 10 минуттан 11сағ.18 минутқа дейін) оңтүстік-шығыстан солтүстік-батысқа қарай қозғалды. Бағыттың бөлімі бойымен жергілікті уақыт 20 сағ 44 мин-тан 21сағ 39 мин-қа дейін өзгерді. Ұшу бағыты бойынша 22 маусымнан 5 шілдеге қатысты электронды температура мен электронды концентрациясының өзгерісінің пайыздық мөлшері есептелінді. Алынған нәтижелер (Kuo C.L., Huba J.D., Joyce G., L.C Lee, J. Geophys. Res., 2011, V.116, A10317) математикалық моделінің болжауына сәйкес, 5 шілде жер сілкінісі күні 22 маусыммен салыстырғанда, электронды температурасының эпицентрінің проекциясына шығыс жағынан жерсерігінің орбитасының шығысына қарай төмендегені, ал батысқа қарай өсетіні көтерілген, және электронды концентрациясы керісінше, шығыс жағынан өсіп, батыс жағынан төмендеді.

*Поступила 07.07.2015 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 79 – 86

**FREQUENCY OF EARTHQUAKE OCCURRENCE DEPENDING  
ON SIDEREAL TIME (FOR ALMATY REGION)****G. Ya. Khachikyan<sup>1</sup>, B. I. Demchenko<sup>2</sup>, L. I. Shestakova<sup>2</sup>, A. B. Sadykova<sup>3</sup>**<sup>1</sup>Institute of Ionosphere, JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan,<sup>2</sup>Astrophysical Institute, JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan,<sup>3</sup>Institute of seismology NSTC «Parasat», Almaty, Kazakhstan.

E-mail: galina.khachikyan@gmail.com

**Key words:** sidereal time, frequency of earthquake occurrence.

**Abstract.** The data on earthquakes with energy class  $K \geq 7.0$  occurred in 1970-2010 years in the local territory of Northern Tien-Shan  $42.8 - 43.5^{\circ}N$ ,  $76-78^{\circ}E$  (1061 events) have been analyzed. For each earthquake epicenter, the local sidereal time was calculated for the moment of earthquake occurrence. It is shown that the largest number of earthquakes occurs during 7-8 h of the local sidereal time. The amplitude of the diurnal sidereal variation in earthquake occurrence is  $\sim 9\%$ , and a lag is equal to about 2 hours with respect to the diurnal sidereal variation in the intensity of high-energy cosmic rays flux measured at the Observatory of Tibet, which is spaced longitudinally from the studied region of the Northern Tien-Shan less than 15 degrees. The results indirectly support theoretical prediction, that cosmic ray muons, which can penetrate into the crust, can be a trigger of earthquakes in seismically active region when its stress has reached a critical level, close to the threshold of breaking rock.

УДК 550.2

**ЧАСТОТА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ  
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗВЕЗДНОГО ВРЕМЕНИ  
(НА ПРИМЕРЕ АЛМАТИНСКОГО РЕГИОНА)****Г. Я. Хачикян<sup>1</sup>, Б. И. Демченко<sup>2</sup>, Л. И. Шестакова<sup>2</sup>, А. Б. Садыкова<sup>3</sup>**<sup>1</sup>ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ» НКА РК, Алматы, Казахстан,<sup>2</sup>ДТОО «Астрофизический институт» АО «НЦКИТ» НКА РК, Алматы, Казахстан,<sup>3</sup>ТОО «Институт сейсмологии» АО «ННТХ «Парасат» МОН РК, Алматы, Казахстан**Ключевые слова:** местное звездное время, частота возникновения землетрясений.

**Аннотация.** Проанализированы данные о землетрясениях с энергетическим классом  $K \geq 7.0$ , произошедших в 1970-2010 гг. на локальной территории Северного Тянь-Шаня  $42.8 - 43.5^{\circ}N$ ,  $76-78^{\circ}E$  (1061 событие). Для эпицентра каждого землетрясения рассчитано местное звездное время в момент возникновения события. Показано, что наибольшее число землетрясений возникает в период 7-8 час. звездного времени. Амплитуда звездной суточной вариации числа землетрясений составляет примерно 9% и запаздывает по фазе примерно на 2 часа относительно звездной суточной вариации в интенсивности высокоэнергичных космических лучей, измеряемых на обсерватории Тибет, которая отстоит по долготе от изучаемого региона Северного Тянь-Шаня менее чем на 15 градусов. Результаты косвенно поддерживает теоретические расчеты, предсказывающие, что проникающие в земную кору мюоны высокоэнергичных космических лучей могут стать триггером землетрясения в сейсмоактивной среде, напряжение в которой достигло критического уровня, близкого к порогу разрушения горной породы.

**Введение.** Юго-восточные районы территории Казахстана расположены в сейсмоопасных районах Северного Тянь-Шаня, где уже происходили, и впредь будут происходить катастрофические землетрясения [1]. Этот факт обуславливает высокий социальный спрос на надежные методы сейсмического прогноза, которые пока отсутствуют из-за недостатка знаний о физических причинах, запускающих землетрясение. Несколько лет назад академик РАН Голицин Г.С. обратил внимание на соответствие между энергетическими характеристиками галактических космических лучей (ГКЛ) и землетрясений [2] и получил достаточно схожие зависимости между энергией и частотой прихода космических частиц, а также между энергией и частотой возникновения землетрясений. Вопрос о возможном вкладе космических лучей в активизацию сейсмических процессов рассмотрен в работе [3], где получены количественные оценки отклика литосферы на энергию мюонной компоненты космических лучей, способной проникать в земную кору на глубину, по крайней мере, до первого десятка километров. Было показано [3], что при взаимодействии проникающих мюонов с напряженной (сейсмически активной) геологической средой, в последней могут возникать микротрещины, раскрытие которых должно сопровождаться акустическим шумом. Чем больше напряжение в среде, тем больше амплитуда шума, а если напряжение достигает критического уровня (близкого к порогу разрушения горной породы) то проникающий поток мюонов может стать триггером землетрясения. В настоящее время, с учетом теоретических результатов [3], обсуждается вопрос о возможной реализации на территории Северного Тянь-Шаня нового, *космофизического* метода прогноза сильных землетрясений [4-8], суть которого состоит в том, чтобы проводить одновременный мониторинг потока мюонов космических лучей в широких атмосферных ливнях (ШАЛ) и амплитуды акустических сигналов в окрестности оси ШАЛ. Результаты такого мониторинга могли бы обеспечивать исследователей чрезвычайно важной информацией о вариациях объемного напряженного состояния геологической среды на глубине формирования очагов землетрясений, что стало бы основой для разработки краткосрочного метода сейсмического прогноза. Поскольку для реализации нового метода потребуется дополнительное оборудование, человеческие ресурсы, способные обеспечить непрерывный мониторинг, анализ данных, их экспертную оценку и принятие решения, то желательно получить (дополнительно к теоретическим оценкам) экспериментальные свидетельства в поддержку предлагаемого метода. В настоящее время надежно установлено, что галактические космические лучи в широком диапазоне энергий (от 150 ГэВ до 10 ТэВ) характеризуются наличием звездной суточной анизотропии [9-21]. Следовательно, если мюоны космических лучей действительно вносят вклад в генерацию землетрясений, то можно предположить, что частота возникновения последних на конкретной сейсмоопасной территории, может изменяться с изменением местного звездного времени. В статье приведены результаты, подтверждающие это предположение.

**Метод исследования.** На рисунке 1 представлена карта распределения относительной интенсивности звездной суточной анизотропии галактических космических лучей (ГКЛ) с энергией  $\sim 5$  ТэВ ( $5 \times 10^{15}$  эВ), полученная в работе [9] по данным измерений широких атмосферных ливней на высокогорной обсерватории Тибет ( $30.102^{\circ}\text{N}$ ,  $90.522^{\circ}\text{E}$ ) с ноября 1999 г. по декабрь 2008 г. По горизонтальной оси отложено местное звездное время, по вертикальной – значения  $\delta$  (склонение в небесных координатах), цветом отображена относительная интенсивность звездной суточной анизотропии ГКЛ. Регистрация ШАЛ на обсерватории Тибет проводилась с периодичностью 8 минут и с ноября 1999 г. по декабрь 2008 г. было зарегистрировано  $4.91 \times 10^{10}$  событий. Из рисунка 1 видно, что максимальная интенсивность ГКЛ приходится примерно на 5 часов местного звездного времени, а в общем, временной интервал повышенных значений ГКЛ (красно-желтое поле) простирается от  $\sim 22$  до 9 час, а интервал пониженных значений (сине-зеленое поле) - от  $\sim 10$  до 21 час. В работе [9] показано, что эта закономерность сохранялась для каждого из девяти проанализированных лет.

Изучаемая сейсмоактивная территория Северного Тянь-Шаня (Алматинский регион) расположена в долготной зоне  $76-78^{\circ}\text{E}$  и сдвинута относительно долготы обсерватории Тибет ( $90.5^{\circ}\text{E}$ ) менее чем на 15 градусов. Было предположено, что характер звездной суточной анизотропии космических лучей на этой территории будет близок к тому, что имеет место на Тибете [9], и сейсмичность может иметь суточную звездную вариацию. Для проверки этого предположения были использованы данные о землетрясениях с энергетическим классом  $K \geq 7.0$ , зарегистрированных

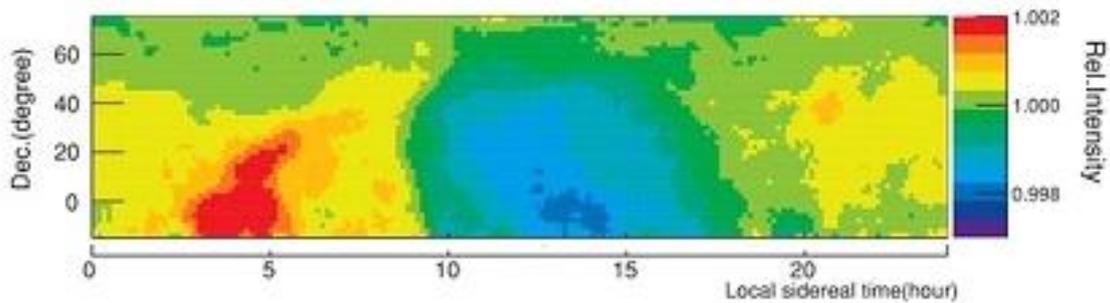


Рисунок 1 – Двумерная карта относительной интенсивности звездной суточной анизотропии галактических космических лучей с энергией  $\sim 5$  ТэВ, полученная в работе [2] по данным измерений широких атмосферных ливней на высокогорной обсерватории Тибет ( $30^{\circ}102$  N;  $90^{\circ}522$  E) с ноября 1999 г. по декабрь 2008 г. [9].

на территории с координатами  $\varphi=42.83^{\circ}$ - $43.5^{\circ}$ N и  $\lambda=76.0^{\circ}$ - $78.0^{\circ}$ E в период 1970-2010 гг. (1061 событие). Для каждого землетрясения было рассчитано местное звездное время в момент возникновения события по выражению:

$$S = S_0 + k \times UT + L,$$

где  $S_0$  – звездное время на гринвичском меридиане в 0.0 час гринвичского времени, коэффициент  $k = 1.0027379093$ ,  $L$  – долгота эпицентра землетрясения. Координаты географического пункта в небесной системе координат представляются через (alfa, delta), где «alfa» соответствует звездному времени ( $\text{alfa} = S$ ), а delta – есть геоцентрическая широта пункта.

**Результаты исследования.** На рисунке 2 приведена гистограмма распределения числа землетрясений в зависимости от рассчитанного звездного времени. Видно, что максимальное число землетрясений приходится на 7-8 час (очерчено красным кругом). Две красные штрих-пунктирные линии представляют среднее значение числа землетрясений для 22-9 и 10-21 час местного звездного времени, соответственно. Для первого временного интервала среднее число землетрясений составляет 48 событий, а для второго – 40. То есть, с качественной стороны наблюдается соответствие между характером суточной звездной вариации интенсивности высокоэнергичных космических лучей на обсерватории Тибет (рисунок 1) и суточной звездной вариации числа землетрясений на территории Алматинского региона (рисунок 2). Что касается количественной стороны, то не трудно подсчитать, что амплитуда суточной звездной вариации числа землетрясений на территории Алматинского региона составляет  $\sim 9\%$ .

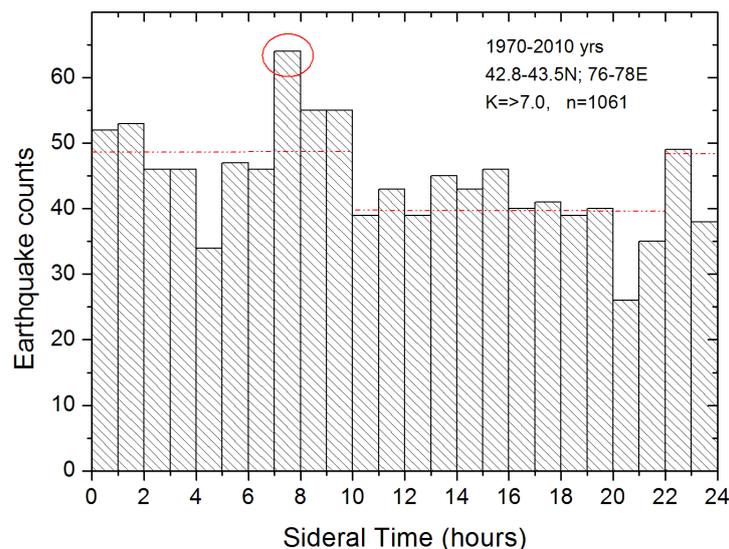


Рисунок 2 – Гистограмма распределения числа землетрясений с энергетическим классом ( $K \geq 7.0$ ), произошедших на территории Алматинского региона в зависимости от местного звездного времени по данным 1970-2010 гг., красный круг маркирует пик в числе землетрясений, а горизонтальные штрих-пунктирные линии отображают среднее число землетрясений для интервалов звездного времени 22-9 и 10-21 час, соответственно

Наблюдаемый на рисунке 2 характер зависимости числа землетрясений от звездного времени сохраняется и для отдельных более коротких временных периодов: 1970-1989, 1990-1998 и 1999-2010 гг. (рисунок 3). Красные круги на рисунке 3 маркируют пики в числе землетрясений, видно, что для каждого отдельного временного периода максимальное число землетрясений приходится на те же часы местного звездного времени, что и для всего периода 1970-2010 гг.

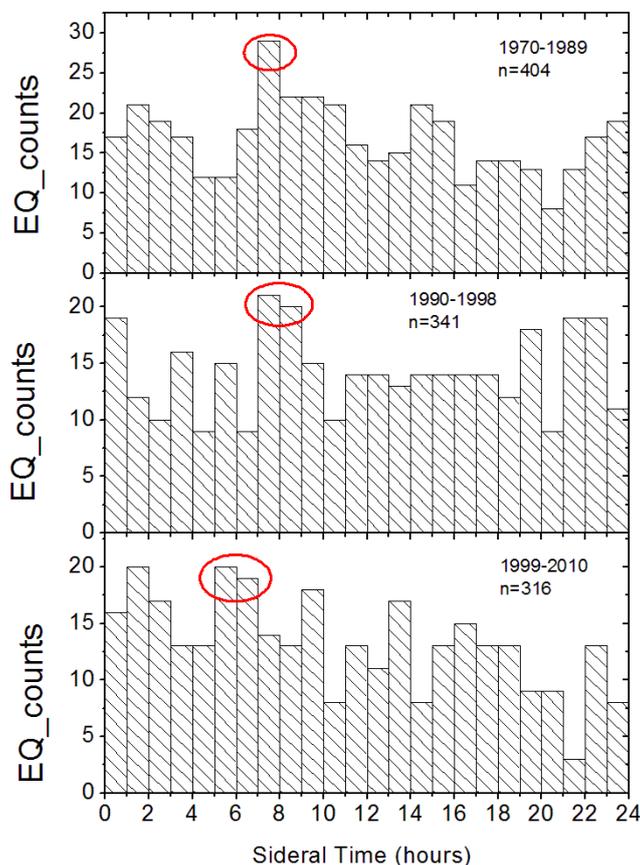


Рисунок 3 – То же, что на рисунке 2, но отдельно для 1970-1989, 1990-1998 и 1999-2010 гг.

На рисунке 4 показана связь между местным солнечным и местным звездным временем на долготе г. Алматы ( $76^{\circ}54'E$ ) для разных месяцев 2010 года по результатам расчетов с использованием компьютерной программы <http://astro.prao.ru/utilities/utilstar.html>. Видно, что звездное время постоянно смещается относительно солнечного, а промежуток звездного времени 7-8 час (выделенная зона на рисунке 4), когда наблюдается максимум в частоте возникновения землетрясений, приходится для одной половины года (октябрь-март) на  $\sim 20-06$  час местного солнечного времени, а для другой половины (апрель-сентябрь) на  $\sim 07-19$  час. Если сейсмичность региона действительно регулируется звездным временем, то в соответствии с рисунком 4, можно предположить, что в период с апреля по сентябрь максимальная частота возникновения землетрясений в этом регионе будет наблюдаться примерно в 07-19 час, т.е. вокруг местного полдня, а с октября по март максимальная частота возникновения землетрясений будет наблюдаться примерно в 20-06 час, т.е. вокруг местной полночи. Чтобы проверить это предположение, были построены гистограммы распределения числа землетрясений в зависимости от местного солнечного времени отдельно для периодов с апреля по сентябрь, и с октября по март, рисунок 5a,b, соответственно. Видно, что в апреле-сентябре (5a) наибольшее число землетрясений наблюдалось действительно вблизи полуденных часов, а в октябре-марте (5b) – вблизи полуночных часов.

**Обсуждение результатов.** Исследования проведены для сейсмоактивной территории Северного Тянь-Шаня, расположенной в высокогорной части хребтов Заилийский и Кунгей Ала-тау, между Алматинской впадиной на севере и Исыкульской – на юге, Аксайским и Тургенским

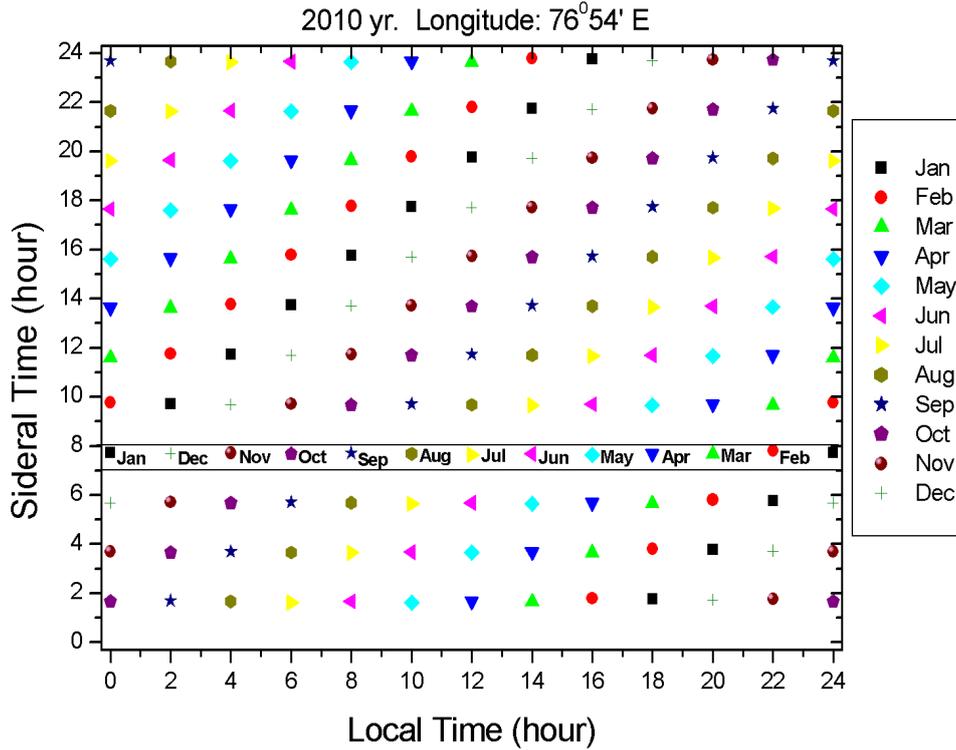


Рисунок 4 – Связь между значениями местного солнечного и местного звездного времени на долготе г. Алматы (76°54'E) для разных месяцев 2010 г.

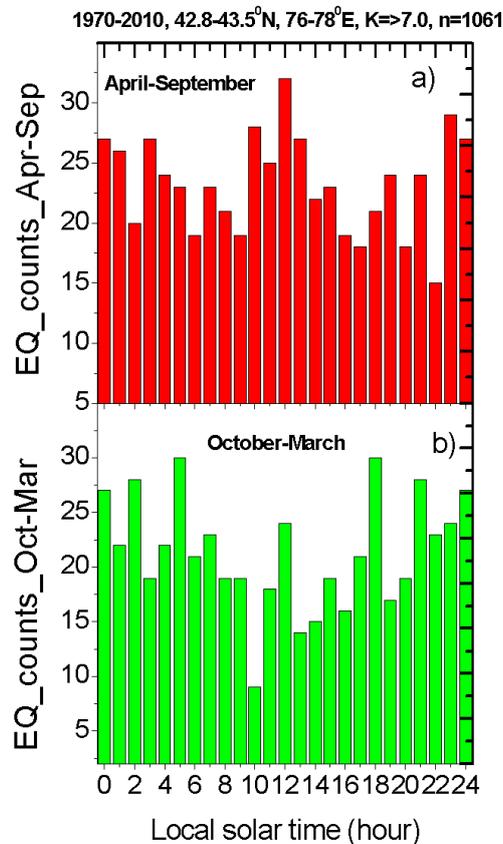


Рисунок 5 – Гистограммы распределения числа землетрясений на территории с координатами  $\varphi=42.83^{\circ}-43,5^{\circ}N$ ;  $\lambda=76.0^{\circ}-78.0^{\circ}E$  в зависимости от местного солнечного времени для периодов: апрель-сентябрь (а) и октябрь-март (б)

разломами – на западе и востоке. Эта территория представляет серьезную сейсмическую угрозу для г. Алматы - в прошлом здесь произошли катастрофические землетрясения: Верненское (1887г., 43.1N, 76.8E,  $M=7.3$ ) и Кеминское (1911 г., 42,9N, 76.9E,  $M=8.2$ ). Результаты исследований по данным 1970-2010 гг. показали, что частота возникновения землетрясений на этой территории изменяется в зависимости от местного звездного времени (рисунок 2), причем эта особенность сохраняется при анализе отдельных, более коротких временных интервалов (рисунок 3). Амплитуда звездной суточной вариации в частоте повторяемости землетрясений составляет примерно 9%, а фаза (время максимума) приходится на 7-8 часов местного звездного времени. Максимум звездной суточной вариации в частоте повторяемости землетрясений запаздывает относительно времени максимума в суточной звездной вариации интенсивности потока космических лучей (рисунок 1) на 2-3 часа. Поскольку местное звездное время монотонно изменяется в течении года относительно местного солнечного времени (рисунок 4), приуроченность пика в числе землетрясений к 7-8 часам звездного времени приводит к тому, что пик сейсмичности в местном солнечном времени изменяется от месяца к месяцу и в среднем, наблюдается вблизи полуденных часов в апреле-сентябре (рисунок 5a), но вблизи полуночных часов в октябре-марте (рисунок 5b).

**Вывод.** По данным о землетрясениях с энергетическим классом  $K \geq 7.0$ , произошедших в 1970-2010 гг. на локальной территории Северного Тянь-Шаня 42.8 – 43.5<sup>0</sup>N, 76-78<sup>0</sup>E (1061 событие) показано, что частота повторяемости землетрясений в этом регионе изменяется с изменением местного звездного времени, достигая максимума в 7-8 часов звездного времени, что запаздывает на 2-3 часа относительно пика в звездной суточной вариации интенсивности потока высокоэнергичных космических лучей по данным обсерватории на Тибете. Этот экспериментальный факт косвенно поддерживают результат теоретических расчетов о влиянии высокоэнергичных космических лучей на состояние сейсмически активной среды, что, в свою очередь, поддерживает идею реализации на базе высокогорного комплекса ATHLET нового космофизического метода краткосрочного прогноза сильных землетрясений.

*Работа выполнена по программе 101 «Грантовое финансирование научных исследований» в рамках темы «Разработка методов прогноза сейсмической активности на основе мониторинга акустических сигналов, генерируемых мюонами космических лучей на примере алматинского прогностического полигона» (Грант 0032/ГФ3), Регистрационный номер (РН) 0113РК00288).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Садыкова А.Б. Сейсмическая опасность территории Казахстана, Алматы: Хай Текнолоджи, 2012, 268 с.
- [2] Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты, Серия: Синергетика: от прошлого к будущему, 2013, № 68, ISBN 978-5-396-00502-0, 400 с.
- [3] Царев В.А., Чечин В.А. Атмосферные мюоны и высокочастотные сейсмические шумы, Препринт ФИАН, 1988, № 179, 21с.
- [4] Гусев Г.А., Жуков В.В., Мерзон Г.И., Митько Г.Г., Степанов А.С., Рябов В.А., Чечин В.А., Чубенко А.П., Щепетов А.Л. Космические лучи как новый инструмент сейсмологических исследований, Краткие сообщения по физике ФИАН, 2011, №12, С. 43-51.
- [5] Вильданова Л.И., Гусев Г.А., Жуков В.В., Мерзон Г.И., Митько Г.Г., Наумов А.С., Рябов В.А., Степанов А.В., Чечин В. А., Чубенко А. П., Щепетов А. Л. Первые результаты наблюдения акустических сигналов, генерируемых мюонами космических лучей в сейсмически-напряженной среде, Краткие сообщ. по физике ФИАН, 2013, №12, С.31-39.
- [6] Sadykov T.Kh., Zhukov V.V., Breusov N.G., Mukashev K.M., Khachikyan G.Ya., astrozhnova N.N. Seismic stations for short-term prediction of earthquakes by means of the cosmic rays, Материалы VIII международной научно-практической конференции «Новости научной мысли – 2013», 28-30 October 2013, Чехия, Прага: Publishing House «Education and Science» (Чехия, Прага), С. 78-81.
- [7] Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Курманов Б.К., Хачикян Г.Я., Садыков Т.Х., Мукашев К.М., Жуков В.В. О космогеофизическом методе прогноза сильных землетрясений, Известия НАН РК, Серия физико-математическая, 2014, № 4 (296), С.140-149.
- [8] Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Курманов Б.К., Хачикян Г.Я., Мукашев К.М., Садыков Т.Х., Жуков В.В. Вероятность инициирования сейсмической волны проникающими компонентами космических лучей, Мировой научный потенциал: матер. 10-ой междунар. науч.-практ. конф., Болгария, София, 2014, Т.6 (Физика), С. 33-38.
- [9] Fenton A.G., Jacklyn R.M., Taylor R.B. Cosmic ray observations at 42 m.w.e. underground at Hobart. Tasmania, V. II. Nuovo Cimento. 22 (1961) 3985–3996.
- [10] Jacklyn R.M. Cosmic ray observations at 42 m.w.e. in the charged primary cosmic radiation, Nature, 1966, 211, P. 690–693.
- [11] Nagashima K., Mori S., in: Proceedings of the ICRS on High Energy CR Modulation, Tokyo University, Japan, 1976, pp. 326–360.

- [12] Nagashima K., Fujimoto K., Jacklyn R. M. Galactic and heliotail-in anisotropies of cosmic rays as the origin of sidereal daily variation in the energy region  $< 10^4$  GeV, *J. Geophys. Res.*, 1998, vol. 103, P.17429–17440.
- [13] Antoni T., et al., Large scale cosmic - ray anisotropy with KASCADE, *Astrophys. J.*, 2004, V.604 P. 687-692.
- [14] Nagashima K., Kondo I., and Fujii Z. Sharply concentrated cosmic-ray excess fluxes from heliomagnetospheric nose and tail boundaries observed with neutron monitors on the ground, *Earth Planets Space*, 2005, V.57, P. 1083–1091.
- [15] Amenomori M., et al. Anisotropy and Corotation of Galactic Cosmic Rays, *Science*, 2006, vol. 314, P. 439–443.
- [16] Guillian G. and for the Super-Kamiokande Collaboration, Observation of the anisotropy of 10 TeV primary cosmic ray nuclei flux with the Super-Kamiokande-I detector, *Phys. Rev. D*, 2007, D, 75, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.75.062003>
- [17] Abdo A. A., et al. The large-scale cosmic-ray anisotropy as observed with Milagro, *The Astrophysical Journal*, 2009, V. 698, P.2121–2130, doi:10.1088/0004-637X/698/2/2121
- [18] Amenomori M., et al. On temporal variations of the multi-teV cosmic ray anisotropy using the Tibet -III air shower array, *The Astrophysical Journal*, 2010, V. 711, V. 1, doi:10.1088/0004-637X/711/1/119
- [19] Karapetyan G.G. Investigation of cosmic ray anisotropy based on Tsumeb neutron monitor data, *Astroparticle Physics*, 2010, V. 33, P. 146–150.
- [20] Abbasi R. et al. Measurement of the anisotropy of cosmic-ray arrival directions with Icecube, *Astrophysical Journal Letters* Vol. 718, L194, doi:10.1088/2041-205/718/2/L194
- [21] Abdo A.A., Huentemeyer P.H., et al, "Spectrum and Morphology of the Two Brightest Milagro Sources in the Cygnus Region: MGRO J2019+37 and MGRO J2031+41", *Astrophysical Journal*, 2012, P. 753-759.

## REFERENCES

- [1] Sadykov A.B. Seismic hazard in Kazakhstan, *Almaty: High Technology*, 2012, 268 p.
- [2] Golitsyn G.S. Statistics and dynamics of natural processes and phenomena: Methods tools, results Series: Synergetics: from past to future, 2013, № 68, ISBN 978-5-396-00502-0, 400.
- [3] Tsarev V.A., Chechin V.A. Atmospheric muons and high-frequency seismic noise, Preprint FIAN, 1988, № 179, 21c.
- [4] Gusev G.A., Zhukov V.V., Merzon G.I., Mitko G.G., Stepanov A.S., Ryabov V.A., Chechin V.A., Chubenko A.P., Shchepetov A.L. Cosmic rays as a new tool of seismological research in physics Brief FIAN, 2011, №12, pp 43-51.
- [5] Vildanova L.I., Gusev G.A., Zhukov V.V., Merzon G.I., Mitko G.G., Naumov A.S., Ryabov V.A., Stepanov A.V., Chechin V.A., Chubenko A.P., Shchepetov A.L. The first results of surveillance of acoustic signals generated by cosmic-ray muons in a seismically-stressful environment Brief Communications in Physics FIAN, 2013, №12, pp 31-39 .
- [6] Sadykov T.Kh., Zhukov V.V., Breusov N.G., Mukashev K.M., Khachikyan G.Ya., Zastrozhnova N.N. Seismic stations for short-term prediction of earthquakes by means of the cosmic rays, materials VIII international scientific-practical conference "The News of scientific thought - 2013», 28-30 October 2013, the Czech Republic, Prague: Publishing House «Education and Science» (Czech Republic Prague), pp 78-81.
- [7] Zhintayev Zh.Sh., Breusov N.G., Kurmanov B.K., Khachikyan G.Y., Sadykov T.H., Mukhashev K.M., Zhukov V.V. About cosmogeophysical method of prediction of strong earthquakes, *Izvestiya NAN RK Series Physics and Mathematics*, 2014, № 4 (296), S.140-149.
- [8] Zhintayev Zh..Sh., Breusov N.G., Kurmanov B.K., Khachikyan G.Y., Mukhashev K.M., Sadykov T.H., Zhukov V.V. The probability of initiating a seismic wave of the penetrating component of cosmic rays, the world's scientific potential: mater. 10th Intern. scientific and practical. Conf., Bulgaria, Sofia, 2014, V.6 (Physics), pp 33-38.
- [9] Fenton A.G., Jacklyn R.M., Taylor R.B. Cosmic ray observations at 42 m.w.e. underground at Hobart. Tasmania, V. II. *Nuovo Cimento*. 22 (1961) 3985–3996.
- [10] Jacklyn R.M. Cosmic ray observations at 42 m.w.e. in the charged primary cosmic radiation, *Nature*, 1966, 211, P. 690–693.
- [11] Nagashima K., Mori S., in: Proceedings of the ICRS on High Energy CR Modulation, Tokyo University, Japan, 1976, pp. 326–360.
- [12] Nagashima K., Fujimoto K., Jacklyn R. M. Galactic and heliotail-in anisotropies of cosmic rays as the origin of sidereal daily variation in the energy region  $< 10^4$  GeV, *J. Geophys. Res.*, 1998, vol. 103, 17429–17440.
- [13] Antoni T., et al., Large scale cosmic - ray anisotropy with KASCADE, *Astrophys. J.*, 2004, V.604 P. 687-692.
- [14] Nagashima K., Kondo I., and Fujii Z. Sharply concentrated cosmic-ray excess fluxes from heliomagnetospheric nose and tail boundaries observed with neutron monitors on the ground, *Earth Planets Space*, 2005, V.57, P. 1083–1091.
- [15] Amenomori M., et al. Anisotropy and Corotation of Galactic Cosmic Rays, *Science*, 2006, vol. 314, P. 439–443.
- [16] Guillian G. and for the Super-Kamiokande Collaboration, Observation of the anisotropy of 10 TeV primary cosmic ray nuclei flux with the Super-Kamiokande-I detector, *Phys. Rev. D*, 2007, D, 75, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.75.062003>
- [17] Abdo A. A., et al. The large-scale cosmic-ray anisotropy as observed with Milagro, *The Astrophysical Journal*, 2009, V. 698, P.2121–2130, doi:10.1088/0004-637X/698/2/2121
- [18] Amenomori M., et al. On temporal variations of the multi-teV cosmic ray anisotropy using the Tibet -III air shower array, *The Astrophysical Journal*, 2010, V. 711, V. 1, doi:10.1088/0004-637X/711/1/119
- [19] Karapetyan G.G. Investigation of cosmic ray anisotropy based on Tsumeb neutron monitor data, *Astroparticle Physics*, 2010, V. 33, P. 146–150.
- [20] Abbasi R. et al. Measurement of the anisotropy of cosmic-ray arrival directions with Icecube, *Astrophysical Journal Letters* Vol. 718, L194, doi:10.1088/2041-205/718/2/L194
- [21] Abdo A.A., Huentemeyer P.H., et al, "Spectrum and Morphology of the Two Brightest Milagro Sources in the Cygnus Region: MGRO J2019+37 and MGRO J2031+41", *Astrophysical Journal*, 2012, P. 753-759.

**ЖЕР СІЛКІНІСІНІҢ ПАЙДА БОЛУ СЕБЕПТЕРІНЕ ЖИЛІГІН  
ЖҰЛДЫЗДЫ УАҚЫТЫНА БАЙЛАНЫСЫ (МЫСАЛЫ РЕТІНДЕ АЛМАТЫ ОБЛЫСЫ)**

**Г. Я. Хачикян<sup>1</sup>, Б. И. Демченко<sup>2</sup>, Л. И. Шестакова<sup>2</sup>, А. Б. Садыкова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>«Ионосферы институты» ЕЖШС «ҰҒЗТО» АҚ ҰҒА ҚР, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>«Астрофизикалық институты» ЕЖШС «ҰҒЗТО» АҚ ҰҒА ҚР, Алматы, Қазақстан,

<sup>3</sup>«Сейсмология институты» ЖШС ««Парасат» ҰҒТХ» БҒМ ҚР, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жер сілкінісі, жұлдызды уақыт, маусымдық-тәуліктік ауытқуы.

**Аннотация.** Жұмыста 1970-2010 жж. аралығында  $K \geq 7.0$  энергетикалық класымен жергілікті Солтүстік Тянь-Шань  $42.8 - 43.5^{\circ}N$ ,  $76-78^{\circ}E$  (1061 оқиға) аумағында болған жер сілкінісінің деректері бойынша талдау жасалынды. Әрбір жер сілкінісінің эпицентрі үшін оқиғаның жергілікті жұлдызды уақыты есептелінді. Жер сілкінісінің ең көп саны жұлдызды уақыттың 7-8 сағаты кезінде пайда болатыны көрсетілді. Жұлдыздық тәуліктік вариациясының амплитудасы жер сілкінісінің шамамен 9% құрайды, және ғарыштық сәулелерінің жоғары энергиялы қарқындылығындағы жұлдыздық тәуліктік вариациясынан шамамен фазасы бойынша 2 сағатқа кешіретіні зерттелетін Солтүстік Тянь-Шань облысының бойлық қашықтықтан 15 градустан аз орналасқан Тибет обсерваториясында өлшелінді. Нәтижелер жанама түрде теориялық есептеулерді қолдайды, яғни жоғары энергиялы ғарыштық сәулелердің мюондарының жер қыртысына енуі сейсмикалық белсенді ортада кернеуі сындық деңгейге жететін, таулы жартастың бұзылу шегіне жақын болатын триггерлі жер сілкінісін тудыра алатынын болжайды.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 86 – 92

**METHODS OF DIAGNOSIS AND EVALUATION TECHNICAL STATE  
OF HYDRAULIC STRUCTURES BY GPR**

**A. Zh. Bibossinov, D. T. Shigaev, A. B. Kairanbayeva**

«Institute of Ionosphere» JSC «NCSRT», Almay6 Kazakhstan.

E-mail: dashigaev@gmail.com

**Key words:** ionosphere, GPR waterworks, GPR, multiagent system, unmanned vehicles, modeling, agent approach, control.

**Abstract.** This article describes the principles and advantages of GPR, as well as the technique of diagnosis and evaluation of technical condition waterworks of GPR methods. GPR survey shows waterworks as nondestructive testing devices. Purpose of the survey the technical condition of hydraulic structures is to identify the degree of physical deterioration, the reasons that lead them to state the actual elements of performance and development of actions to ensure their operational parameters, as well as the technical condition.

The technical condition of waterworks during the operational monitoring instruments is determined using non-destructive testing "GPR OKO-2." This device used to determine the geometrical characteristics of the defect and damage of the dam body.

Using the GPR technique in combination with the available data on the structure of the soil enabled non-destructive methods of control from the surface to obtain specific information on the isolated structure and layer boundaries, set the distribution of the different materials in the construction. You can also say that the information obtained can quickly detect, track and measure potentially dangerous manifestation in concrete and earthen structures, and to undertake the necessary measures to eliminate possible accidents and emergencies.

## МЕТОДЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ И ОЦЕНКИ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ ГЕОРАДИОЛОКАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

А. Ж. Бибосинов, Д. Т. Шигаев, А. . Кайранбаева

ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** ионосфера, гидротехнические сооружения, георадар.

**Аннотация.** В статье описаны принцип работы и преимущество георадара, а так же показана методика диагностирования и оценка технического состояния гидротехнических сооружений георадиолокационными методами. Приведены георадарные обследования гидротехнических сооружений приборами неразрушающего контроля.

Целью обследования технического состояния гидротехнических сооружений являются выявление степени физического износа, причин, обуславливающих их состояние, фактической работоспособности элементов и разработка мероприятий по обеспечению их эксплуатационных параметров, а также описание технического состояния. Техническое состояние гидротехнических сооружений при проведении эксплуатационного мониторинга определяется с применением приборов неразрушающего контроля «георадар ОКО-2». Данный прибор служит для определения геометрических дефектных характеристик и повреждений самого тела плотины.

Использование георадарного метода и в сочетании с имеющимися данными о структуре грунтов позволила неразрушающими методами контроля с поверхности получить специализированную информацию по изолированным структурам и границам слоев, установить распределение различных материалов в сооружении. Так же можно сказать что, полученная информация позволяет оперативно обнаружить, отследить и измерить потенциально опасные проявления в бетонных и земляных конструкциях сооружений, а также провести необходимые мероприятия по ликвидации возможных аварий и чрезвычайных ситуаций.

**Введение.** На сегодняшний день благодаря использованию одним из самых уникальных и современных геофизических приборов – георадаром, который предоставляет уникальный шанс работать, так называемый, экологичный «неразрушающий» метод подпочвенного исследования в различных структурах [1]. Изобретение георадара и его применение в различных сферах деятельности человека позволило значительно снизить производственные затраты [2].

Успешность решения широкого круга задач георадаром заложена в принципе его действия. Геофизические измерения позволяют определить физические характеристики слоев грунта и сделать выводы об их строении и структуре материала с поверхности земли и/или воды. Принцип же работы георадара основан на использовании классических принципов радиолокации [3, 4].

Выбор длительности импульса определяется необходимой глубиной зондирования и разрешающей способностью прибора. Излучаемый в исследуемую среду импульс отражается от находящихся в ней предметов или неоднородностей среды, имеющих отличную от среды диэлектрическую проницаемость или проводимость, принимается приемной антенной, усиливается в широкополосном усилителе, преобразуется в цифровой вид при помощи аналого-цифрового преобразователя и запоминается для последующей обработки [6]. Скорость распространения волн записывается через равные промежутки вдоль одной линии [7]. На основании таких радарограмм рассчитывается 2-D-отображение подземных слоев, которое показывает картину расположения границ слоев и положение изолированных объектов. Исследуемой средой для георадара может быть любой материал: грунт, железобетон, бетон, кирпичная стена и др [8].

Исследования георадара активно и успешно проводит и в сфере обследования гидротехнических сооружений (ГТС). Достоинством метода является высокая производительность и высокая разрешающая способность, как в плане, так и по глубине [9]. Глубинность исследования - от первых десятков сантиметров до первых десятков метров [10].

Проблема безопасности гидротехнических сооружений тесно связана с историей отечественной и мировой гидротехники, проектированием и строительством гидроузлов, плотин, каналов, гидроэлектростанций [11].

**Методы и результаты исследования.** Несвоевременно выявленные и не устраненные дефекты и повреждения нередко перерастают в серьезные конструктивные нарушения гидротехнических сооружений и невозможность их дальнейшей эксплуатации. Поэтому важно правильно и своевременно оценить состояние сооружения и предусмотреть мероприятия по ремонту их повреждений на ранней стадии развития. Существующие на сегодняшний день методы определения эксплуатационной надежности подобных гидротехнических сооружений относятся к визуальным и используют разрушающие методы ударного воздействия, точность измерения которых недостаточна [12].

Общей целью обследования технического состояния гидротехнических сооружений являются выявление степени физического износа, причин, обуславливающих их состояние, фактической работоспособности элементов и разработка мероприятий по обеспечению их эксплуатационных параметров, а также описание технического состояния [13].

Техническое состояние гидротехнических сооружений при проведении эксплуатационного мониторинга определяется с применением приборов неразрушающего контроля на основе выявления таких факторов, как:

- геометрические размеры конструкций и их сечений;
- наличие трещин, а также отколов и разрушений;
- количественные параметры прогибов и деформаций конструкций;
- фактические значения сцепления арматуры с бетоном после длительной эксплуатации элементов сооружения;
- наличие разрыва арматуры;
- степень коррозии бетона и арматуры.

Эксплуатационный мониторинг длительно эксплуатируемых гидротехнических сооружений включает проведение следующих этапов.

- 1) Информационное и техническое обеспечение.
- 2) Подготовительный этап.
- 3) Визуальный осмотр обследуемых гидротехнических сооружений.
- 4) Обследование гидротехнических сооружений приборами неразрушающего контроля.
- 5) Анализ материалов проведенного эксплуатационного мониторинга технического состояния гидротехнических сооружений с применением приборов неразрушающего контроля [14, 15].

Основными параметрами, подвергаемыми неразрушающему контролю в железобетонах, являются прочность, величина защитного слоя, влажность, морозоустойчивость, влагонепроницаемость и ряд других. Так же на долговечность железобетонной конструкции существенное влияние оказывают величина защитного слоя бетона и наличие на нем дефектов – трещин, раковин, пор, и т.д. Защитный слой предохраняет арматуру от доступа влаги, кислорода, агрессивных веществ и газов. Арматурные стержни, имеющие небольшой защитный слой или значительные дефекты в нем, подвергаются коррозии в первую очередь [16].

При проведении оценки технического состояния гидротехнических сооружений использовались приборы неразрушающего контроля, приборы по определению геометрических характеристик их дефектов и повреждений, георадар ОКО-2 [17].

Георадар имеет в своем составе антенный блок, в который входят приемная и передающая антенны, блок управления (БУ) и устройство отображения, в качестве которого используются портативный компьютер или специализированный блок обработки (БО), предназначенный для работы в сложных климатических условиях (мороз, дождь, снег, яркое солнце) и защищенный от механических воздействий [18].

Для точной пространственной привязки профилей наблюдения используются датчики перемещения [19].

Исследование состояния грунтов, залегающие в основании гидротехнических сооружений, в том числе динамические изменения свойств грунтов в процессе многолетней эксплуатации, представляет собой актуальную и весьма важную задачу. Одними из интересных и информативных результатов обследования мы покажем Каратомарское водохранилище которое расположена на реке Тобол,

При выполнении георадарного профилирования на Каратомарском водохранилище были проведены 8 продольных профилей по 200-250 метров в длину по гребню и верхнему бьефу плотины, глубиной зондирования свыше 10 метров (рисунок 1).

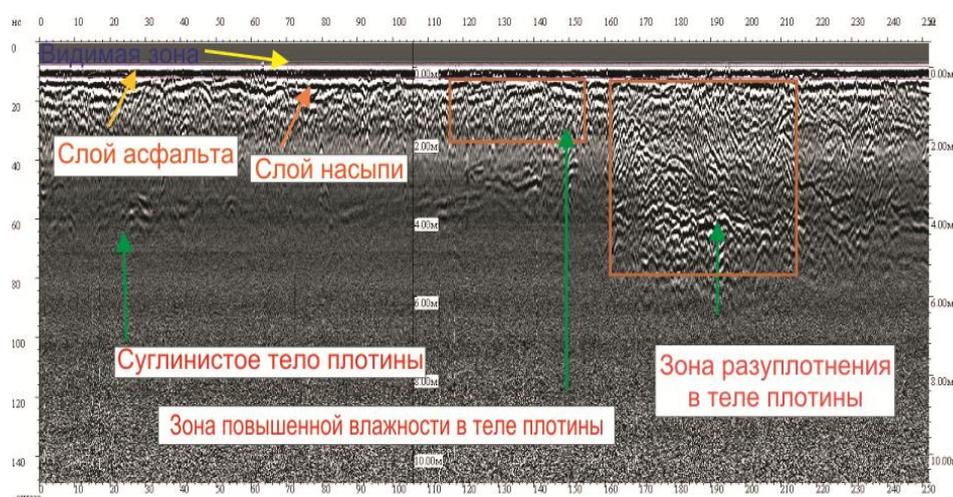


Рисунок 1 – Продольный профиль № 0003 по геофизическому исследованию с водохранилища Каратомар

Так же как и Каратомарское водохранилище, очень интересным является и Шардаринское водохранилище в близ города Шардара на реке Сырдария. И здесь используется профилирование с применением цветовой гаммы, и контрастности (рисунок 2).

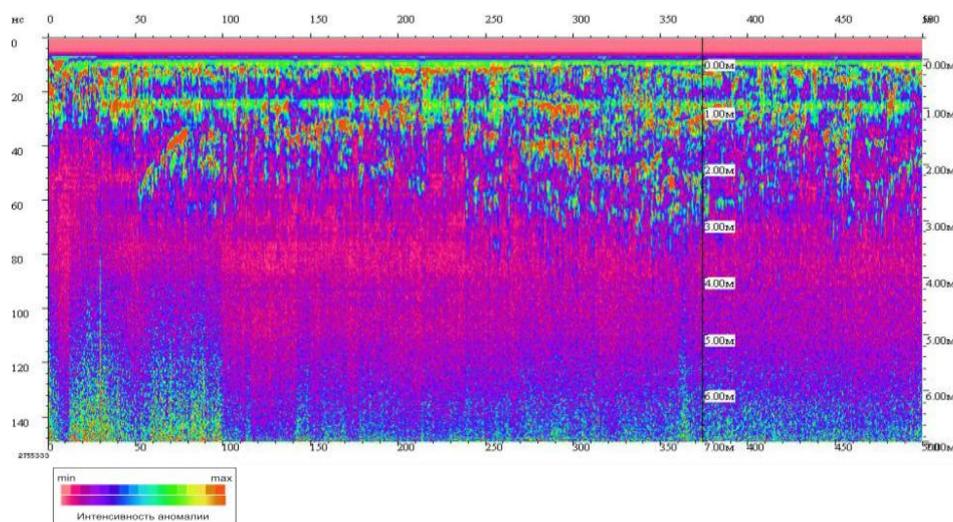


Рисунок 2 – Продольный профиль № 0001 по геофизическому исследованию с водохранилища Шардара

**Обсуждение результатов.** В результате обработки и интерпретации георадарного профиля № 0003 на Каратомарском водохранилище была обнаружена зона разуплотнения и зоны повышенной влажности в теле плотины. На георадарном профиле четко проявляются геологические слои и границы разуплотнения в точках от 160 до 215 метров на глубине до 6 метров от уровня гребня дамбы. Зафиксирована граница зоны распределения, при котором в грунтах происходит перераспределение напряженного состояния, приводящее к развитию трещин разрыва в поперечном направлении, относительно продольной оси дамбы. Понятие «зона разуплотнения» в данной терминологии означает, что грунт в этой зоне менее плотен, чем в окружающих слоях. Полости (пустоты) в основании отсутствуют, так как они имеют характерный «радиообраз» - неоднократно повторяющийся сигнал из-за переотражения волн в полости, чего при выполнении работ не обнаружено. Также зафиксирована особо повышенная зона влажности в теле плотины на отметке

115-155 метрах глубиной проницаемости до 2 метров, что может так же привести к образованию аномальных зон в теле плотины.

В результате обработки и интерпретации георадарного профиля 0001 на Шардаринском водохранилище были обнаружены аномальные зоны в теле плотины. На георадарном профиле в интенсивной цветовой гамме четко проявляется степень аномальных зон по глубине и длине их залегания. Зафиксированы участки аномальных зон и возможные зоны влагонасыщения естественной фильтрации, указанные в нижней части георадодорограммы [4].

**Выводы.** Использование георадарного метода и в сочетании с имеющимися данными о структуре грунтов позволила неразрушающими методами контроля с поверхности получить специализированную информацию по изолированным структурам и границам слоев, а так же установить распределение различных материалов в сооружении. При этом усовершенствована технология наземно-космического мониторинга ГТС и ИС, позволяющая оперативно обнаружить, отследить и измерить потенциально опасные проявления в бетонных и земляных конструкциях сооружений, а также провести необходимые мероприятия по ликвидации возможных аварий и чрезвычайных ситуаций [20].

Используя георадарные технологии в оценке современного состояния ГТС и ИС мы можем получить максимально точные и достоверно характеризующие обследованные сооружения, в соответствии с современными мировыми требованиями к исследованию водохозяйственных объектов.

Работа выполнена по РБП 076 «Разработать методы математического моделирования деформационных процессов верхней части разреза земной коры урбанизированных территорий на основе данных дистанционного зондирования Земли».

«Разработать методологию выполнения комплексных мониторинговых наблюдений для предупреждений техногенных и геоэкологических катастроф на гидротехнических сооружениях с использованием спутниковых данных и методов математического моделирования».

*Работа выполнена по РБП 076 «Разработать методы математического моделирования деформационных процессов верхней части разреза земной коры урбанизированных территорий на основе данных дистанционного зондирования Земли».*

*«Разработать методологию выполнения комплексных мониторинговых наблюдений для предупреждений техногенных и геоэкологических катастроф на гидротехнических сооружениях с использованием спутниковых данных и методов математического моделирования».*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колосов М.А., Моргунов К.П., Коган Г.В. Использование георадарных методов исследования грунтов в основании камеры шлюза, Журнал университета водных коммуникаций. - 2009 - №4. - С. 29-33.
- [2] Саламов А.М., Габибов Ф.Г. Изучение оползневых процессов на Баиловском склоне в г. Баку методом вертикального электрического зондирования. А.М. Саламов, Ф.Г. Габибов, Инженерные изыскания. - 2010 - №11. - С. 36-41.
- [3] Белозеров А.А., Кулижников А.М. Применение георадаров для обследования оползневых участков автомобильных дорог, Георадары-дороги - 2002. Материалы Межд. научн.-практ. конф., АГТУ, г. Архангельск, 2002, с. 67-73.
- [4] Бандурин М.А. Обследование состояния оросительных лотковых каналов азовской оросительной системы неразрушающими методами. Научный журнал КубГАУ, №24(8), 2006г.
- [5] Амур А., Старовойтов А.В., Владов М.Л. Опыт применения георадиолокации для выявления зон развития провалов в городе. Вестник МГУ, сер.Геология, 1999.
- [6] Василенко Е.В., Глазовский А.Ф., Мачерет Ю.Я., Наварро Ф.Х., Токарев М.Ю., Калашников А.Ю., Мирошниченко Д.Е., Резников Д.Е. Радиофизические исследования ледника Альдегонда на Шпицбергене в 1999 году. Матер. гляциолог. исслед., вып. 90.
- [7] Владов М.Л., Старовойтов А.В. Георадиолокационные исследования верхней части разреза. 2002, Изд-во МГУ.
- [8] Фимова Н.Н. Применение георадиолокации при решении задач инженерной геофизики. Автореферат дисс.канд.техн.наук, 1999, Санкт-Петербург.
- [9] Зыков Ю.Д. Геофизические методы исследования криолитозоны. 1999, Изд-во МГУ.
- [10] Калинин А.В., Владов М.Л., Старовойтов А.В., Шалаева Н.В. Высокоразрешающие волновые методы в современной геофизике. Разведка и охрана недр, 2002, №1.
- [11] Калинин А.В., Владов М.Л., Шалаева Н.В. Оценка глубинности георадиолокационных исследований на основе классической теории. Вестник МГУ, сер.Геология, №3.
- [12] Омеляненко А.В. Георадиолокация мерзлых рыхлых отложений. Автореферат дисс.канд.техн.наук, М., 1989.
- [13] Старовойтов А.В., Владов М.Л. Интерпретация данных георадиолокационных наблюдений. Разведка и охрана недр, 2001, №3.
- [14] Финкельштейн М.И., Мендельсон В.А., Кутев В.А. Радиолокация слоистых земных покровов. Москва, Сов.Радио, 1977.

- [15] Финкельштейн М.И., Кутев В.А., Золотарев В.П. Применение радиолокационного подповерхностного зондирования в инженерной геологии. Москва, Недра, 1986.
- [16] Финкельштейн М.И., Карпухин В.И., Кутев В.А., Метелкин В.Н. Подповерхностная радиолокация. Москва, Радио и Связь, 1994.
- [17] Фролов А.Д. Электрические и упругие свойства мёрзлых пород и льдов. 1998.
- [18] Einsatzmöglichkeiten ingenieurgeophysikalischer Methoden zum Feststellen der Verdichtungen bei Erd- und Felsarbeiten im Strassenbau / M. M. Guckelhorn, T. Dorrer, K. Frohlich [et al.] // Forschung Strassenbau und Strassenverkehrstechnik. 2000. № 792. P. 1–37.
- [19] Кулижников А. М. Применение георадарных технологий в проектно-изыскательских работах / А. М. Кулижников. М., 2004. 76 с.
- [20] Кулижников А. М. Экспериментальные исследования состояния дорожных конструкций в период весенней распутицы на федеральных дорогах Московской области / А. М. Кулижников // Новости в дорожном деле. М., 2008. Вып. 5. С. 1–24

## REFERENCES

- [1] Kolosov M.A. Morgounov K.P., Kogan G.V., Use GPR soil testing methods vosnovany lock chamber, Journal of University of Water Communications. - 2009 - № 4. - P. 29-33. (in Russ.).
- [2] Salamov AM, Gabibov FG The study of landslide processes Bail slope in Baku by vertical electrical sounding. AM Salaam, FG Gabibov, Surveying. - 2010 - № 11. - P. 36-41. (in Russ.).
- [3] Beloseroov A.A., Kulizhnikov A.M., Application of ground penetrating radar survey for landslide road sections, GPR-road - 2002. Proceedings of Int. nauchn. Conf. conf., ASTU, Arkhangelsk, 2002, P. 67-73. (in Russ.).
- [4] Bandurin M.A., Survey of irrigation channels launder Azov irrigation system by non-destructive methods. KubGAU scientific journal, № 24 (8), 2006, P. 17-20. (in Russ.).
- [5] Anhur A., Starovoytov A.V., Vlad M.L., Experience of using GPR to detect failures of development zones in the city. Bulletin of the Moscow State University, ser.Geologiya, 1999, P. 18-22. (in Russ.).
- [6] Vasilenko E.V., Glazov A.F., Macheret Y.Y., Navarro F.H., Tokarev M.Y., Kalashnikov A.Y., Miroshnichenko D.E., Reznikov D.E., Radiophysical study Aldegonda glacier on Spitsbergen in 1999. Mater. glaciologist. Issled., vol. 90. , P. 37-40. (in Russ.).
- [7] Vladov M.L., Starovoytov A.V. GPR study the upper section. 2002 MGU., P. 67-71. (in Russ.).
- [8] Fimova N.N. Application of GPR in solving engineering geophysics. Abstract of diss.kand.tehn.nauk, 1999, St. Petersburg., P. 17-20. (in Russ.).
- [9] YD Zykov Geophysical methods of research permafrost zone. 1999 MGU. P. 90-95. (in Russ.).
- [10] Kalinin A.V., Vlad M.L., Starovoytov A.V., Shalaeva N.V., High-resolution wave techniques in modern geophysics. Exploration and conservation of mineral resources, 2002, №1. P. 88-93. (in Russ.).
- [11] Kalinin A.V., Vlad M.L., Shalaev N.V. Evaluation GPR depth research on the basis of the classical theory. Bulletin of the Moscow State University, ser.Geologiya, №3. P. 56-60. (in Russ.).
- [12] Omelyanenko A.V. GPR frozen unconsolidated sediments. Abstract of, M., 1989. P. 17-20. (in Russ.).
- [13] Starovoytov A.V., Vlad M.L. Interpretation of GPR observation. Exploration and conservation of mineral resources, 2001, vol.№3. P. 66-70. (in Russ.).
- [14] Finkelstein M., Mendelssohn V.A., Kutev V.A. Radar layered earth covers. Moscow, Sov.Radio 1977. P. 44-49. (in Russ.).
- [15] Finkelstein M., Kutev V.A., Zolotarev V.P. The use of radar subsurface probing in engineering geology. Moscow, Nedra, 1986. P. 17-20. (in Russ.).
- [16] M. Finkelstein, Karpuhin VI, Kutev VA, VN Metelkin Subsurface radar. Moscow, Radio and Communications, 1994. P. 146-150. (in Russ.).
- [17] Frolov AD The electrical and elastic properties of frozen rocks and ldov. 1998. P. 117-120. (in Russ.).
- [18] Einsatzmöglichkeiten ingenieurgeophysikalischer Methoden zum Feststellen der Verdichtungen bei Erd- und Felsarbeiten im Strassenbau / M. M. Guckelhorn, T. Dorrer, K. Frohlich [et al.] // Forschung Strassenbau und Strassenverkehrstechnik. 2000. № 792. P. 1–37.
- [19] Kulizhnikov A.M. Application of GPR technology in the design and survey work / AM Kulizhnikov. M., 2004. P 76. (in Russ.).
- [20] Kulizhnikov AM Experimental studies of the state of road construction peri- od spring thaw on federal roads Moscow Region / AM Kulizhnikov // news published in a traffic case. Moscow, 2008. Vol. 5. P. 1-24 (in Russ.).

**ГЕОРАДИОЛОКАЦИЯ АРҚЫЛЫ ГИДРОТЕХНИКАЛЫҚ ҒИМАРАТЫНЫҢ  
ТЕХНИКАЛЫҚ КҮЙІНІҢ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ САРАПТАМА ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНУ**

**А. Ж. Бибосинов, Д. Т. Шигаев, А. Б. Қайранбаева**

«Ионосфера институты» ЕЖШС «Ұлтық Ғарыштық Зерттеулер мен технологиялар орталығы» АО,  
Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ионосфера, гидротехникалық ғимараттар, георадар.

**Аннотация.** Мақалада георадардың жұмыс істеу ұстанымдары мен артықшылықтары қарастырылған, және диагностикалаудың әдістемесі мен гидротехникалық ғимараттың техникалық қалпын бақылаудың тәсілі көрсетілген. Тікелей жерді қазбай, бетінен аспаптармен тексерілген гидротехникалық ғимараттардың георадарлық зертеулері берілген.

Жасалған жұмыстың зерттеу мақсаты гидротехникалық құрылыстарын техникалық жағдайын, олардың жұмыс параметрлерін, сондай-ақ техникалық жағдайын қамтамасыз ету үшін іс-шаралардың орындалуын және оларды дамытудың өзекті элементтерін әкелуі себептері, бөгеттің нашарлау дәрежесін анықтау болып табылады. Георадар ОКО-2 жедел мониторинг құралдарының кезінде гидротехникалық техникалық жағдайы бұзбайтын тестілеу пайдалана отырып айқындалады. Бұл құрылғы ақау және бөгеттің органның залалдың геометриялық сипаттамаларын анықтау үшін пайдаланылады.

Әдістің георадарногосы пайдалану және топырақ құрылым туралы дерек болатындармен қатар бет мамандандырылған ақпаратты алудан оңаша құрылымдарғана дейін бүлдірмей тексеру және қабаттардың шектеріне, әр түрлі материалдарды құрылымда үлестіру орнатылу. Ақпарат дәл осылай алынған табылып, іздеп табуға шапшаң рұқсат беруге айтуға болады және әлеуетті қауіпті көрініс бетон алынған өлше және құрылымдардың топырақ құрылымдары, сонымен бірге төтенше жағдайлар алдын алу шараларын өткізу мүмкіндігін бере алады.

*Поступила 07.07.2015 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 92 – 98

## MAPPING OF MODERN GEODYNAMIC PROCESSES IN URBAN AREAS USING REMOTE SENSING DATA

**A. Zh. Bibossinov, S. M. Nurakynov**

«Institute of Ionosphere» JSC «NCSRT», Almaty, Kazakhstan.

E-mail: nurakynov@gmail.com

**Key words:** synthetic aperture radar, displacement earth surface, remote sensing, Geographic information system.

**Abstract.** Mapping and monitoring of modern movements of the Earth's surface, buildings and structures to be the most relevant and meaningful in the framework of the rapid growth of urban infrastructure. Less labor-intensive and cost effective for remote monitoring of deformation processes are advanced methods of processing satellite radar images have been successfully used to monitor cities of Europe. This method is well suited to solve the task of definition of the relative small displacements of the Earth surface with the use of radio wave with a short wavelength. At the present time to detect subsidence in urban areas used technique of interferometric analysis of satellite images. As part of the work construction of displacements maps and deformations of earth surface for territory of Astana are provided. Initial data for mapping of displacements were space image with groups of radar satellites COSMO-SkyMed-1-4.

УДК 528.7

## КАРТОГРАФИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОВРЕМЕННОЙ ГЕОДИНАМИКИ НА УРБАНИЗИРОВАННЫХ ТЕРРИТОРИЯХ ПО ДАННЫМ ДЗЗ

**А. Ж. Бибосинов, С. М. Нуракинов**

ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** радарная интерферометрия, смещения земной поверхности, дистанционное зондирование земли, географическая информационная система.

**Аннотация.** Картирование и мониторинг современных движений земной поверхности, зданий и сооружений представляется наиболее актуальным и значимым в рамках быстрого роста городской инфраструктуры. Наименее трудозатратным и экономически эффективным для проведения дистанционного мониторинга деформационных процессов являются современные методы обработки спутниковых радарных снимков, которые успешно применяются для мониторинга городов Европы. Этот метод хорошо подходит для решения задач по определению небольших относительных смещений земной поверхности с применением радиоволн с короткой длиной волны сантиметрового порядка. В настоящее время для выявления оседаний урбанизированных территорий используются техника интерферометрического анализа спутниковых съемок. В рамках проведения работ предусматривалось построение карт смещений и деформаций земной поверхности на территории г. Астаны (в виде файла устойчивых отражателей радарного сигнала, содержащего информацию о смещениях по состоянию на каждую дату съемки). Исходными данными для построения карт смещений служили снимки с группировки радарных спутников COSMO-SkyMed-1-4 для территории г. Астаны.

**Введение.** Антропогенное влияние на земную поверхность может сопровождаться как обычными проседаниями земной поверхности, так и аномальными деформациями и проявлениями сейсмической активности, что может вызвать значительный экономический и экологический ущерб, особенно в районах промышленно-гражданской застроенной территории [4]. В этой связи возникает необходимость проведения мониторинга за состоянием земной поверхности. Геодинамический мониторинг выполняется методами как наземных наблюдений, так и по данным ДЗЗ. В последнее время все более широкое применение находят метод радарной интерферометрии SAR, которые дают возможность оценить смещение земной поверхности с точностью до миллиметра. В отличие от геометрического нивелирования и GPS-измерений, которые позволяют по смещениям отдельных точек, судить о динамике всего участка исследования, радарные снимки покрывают значительные территории и дают достоверную информацию о смещении всего геодинамического поля (ГДП). Также, большую роль играет возможность представления ГДП в трехмерной матричной форме, с достаточной плотностью точек, как в пространстве, так и во времени. Получение таких результатов позволит выявить закономерности пространственного распределения смещений земной поверхности [13] и определить природу их происхождения – техногенную или естественную (тектоническую).

**Исходные данные.** Исходными данными для обработки служили снимки с группировки радарных спутников COSMO-SkyMed-1-4 (в период с 18.06.2011 года по 20.04.2014 года). Снимки были выполнены в режиме съемки Nimage (пространственное разрешение 3 метра, размеры сцены 40x40 км, поляризация HH) (рисунок 1).

В данной работе для проведения интерферометрических расчетов и анализа результатов использовано программное обеспечение ENVI с модулем SARscape.



| Даты съемки | Поляризация | Даты съемки | Поляризация |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 2011-06-18  | HH          | 2012-09-08  | HH          |
| 2011-07-04  | HH          | 2012-09-24  | HH          |
| 2011-07-20  | HH          | 2012-10-26  | HH          |
| 2011-08-05  | HH          | 2012-11-27  | HH          |
| 2011-08-21  | HH          | 2012-12-29  | HH          |
| 2011-09-06  | HH          | 2013-02-19  | HH          |
| 2011-09-22  | HH          | 2013-03-19  | HH          |
| 2011-10-08  | HH          | 2013-04-04  | HH          |
| 2011-10-24  | HH          | 2013-04-20  | HH          |
| 2012-01-12  | HH          | 2013-05-22  | HH          |
| 2012-02-03  | HH          | 2013-06-07  | HH          |
| 2012-02-29  | HH          | 2013-07-25  | HH          |
| 2012-04-01  | HH          | 2013-08-26  | HH          |
| 2012-04-25  | HH          | 2013-09-27  | HH          |
| 2012-05-19  | HH          | 2013-10-29  | HH          |
| 2012-06-04  | HH          | 2013-11-30  | HH          |
| 2012-06-20  | HH          | 2013-12-16  | HH          |
| 2012-07-06  | HH          | 2014-01-17  | HH          |
| 2012-07-22  | HH          | 2014-03-06  | HH          |
| 2012-08-07  | HH          | 2014-04-07  | HH          |
| 2012-08-23  | HH          | 2014-04-23  | HH          |

Рисунок 1 – Карта покрытия и даты съемок COSMO-SkyMed для территорий г. Астана, зеленый контур – для более детального анализа

В процессе составления и подготовки карт широко использованы программные комплексы Quantum GIS. С их помощью выполнены все графические материалы: макет компоновки, экспериментальные проекты, легенды и специальные тематические карты. Для хранения и отображения картографической информации в цифровом виде использованы принципиально различные методы представления графической информации: растровый и векторный.

**Результаты обработки данных радарной съемки.** Сначала программой SARscape с помощью функции Automatic Reference Selection было выбрано основное изображение, от которого построены интерферограммы со всеми остальными снимками более 40-проходной серий для территории г. Астана [2, 3, 5]. Затем для всех 39 пар снимков был выполнен полный цикл интерферометрической обработки, после чего проведен поиск устойчиво отражающих точечных целей с когерентностью выше 0.7 и для каждой из этих точек вычислен замер смещений.

Результаты обработки космоснимков методом PS – получены более 500 000 точек для территорий Астана со шкалой для среднегодовой скорости смещений земной поверхности (рисунок 2).

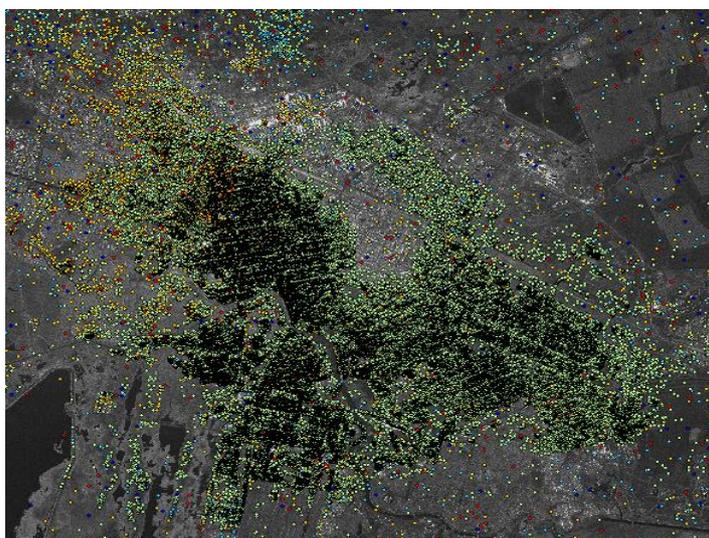


Рисунок 2 – Постоянные рассеиватели радарного сигнала, выявленные по методу PS – увеличение на застроенную территорию Астаны.

Рассеиватели покрашены по величине смещений с 2011 по 2014 гг.: от желтого цвета к красному – возрастающие оседания, голубой цвет – стабильные участки, синий цвет – поднятия.

Для каждой точки вычислены величины смещений в миллиметрах по состоянию на каждую дату съемки. Дополнительно рассчитаны среднегодовая скорость смещений в миллиметрах в год, а также высота в метрах над эллипсоидом WGS-84 [1, 17]. Результат визуально выглядит качественно, зашумленность низкая, четко отделяются стабильные точки от смещающихся. Весь векторный файл точек – постоянных рассеивателей радарного сигнала, рассчитанных на участок 10x10 км территории г. Астаны, содержится в цифровом виде в форматах \*.shp и \*.kmz.

**Картирование результатов.** Для достижения конечной цели работ были созданы цифровые географические основы масштаба 1:50 000 и составлены карты разломов, отражающих геодинамические процессы в земной коре региона (рисунок 3).

Полученные материалы по разломам позволяют говорить о том, что, несмотря на различия в истории развития и условиях реализации тектонических процессов, сказывающихся на специфике формирования разломов, все они обладают рядом общих черт [6-8]. Это не только принадлежность к единому классу тектонических структур, но и общность организации, выражающаяся в закономерной локализации структур оперения в пределах зон динамического влияния [9,10,12]. Для интерпретации полученных результатов обработки наложены разломы на территории г. Астана. Наложения разломов способствует для визуальной оценки полученных результатов обработки радарных снимков (рисунок 4).

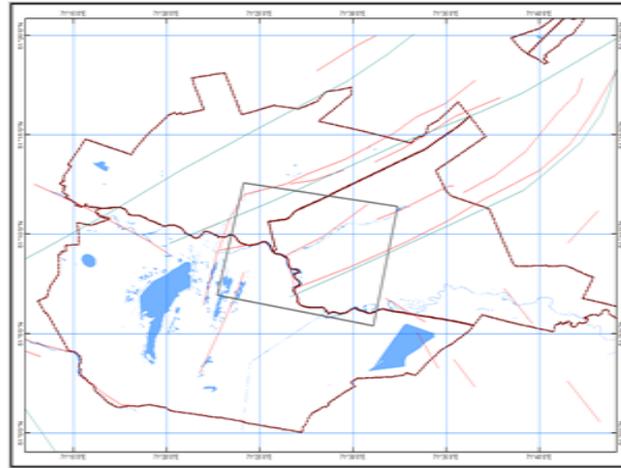
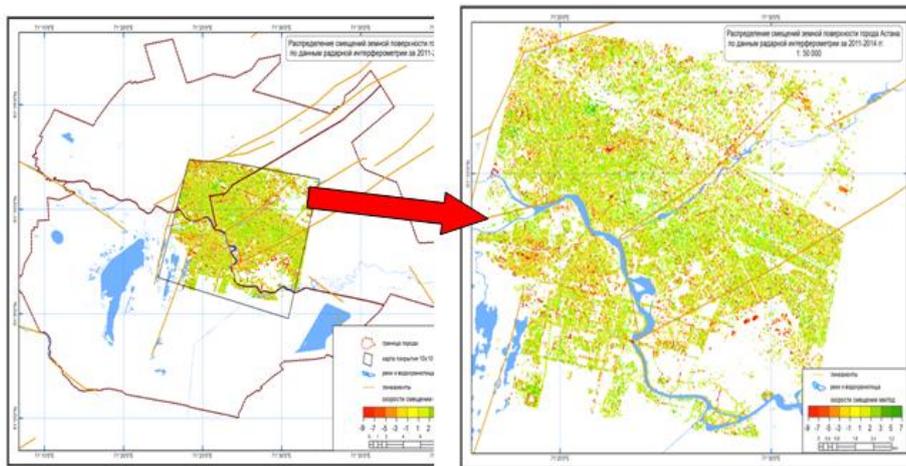


Рисунок 3 – Карта-схема современной тектонической обстановки на территории г. Астана



От желтого цвета к красному – возрастающие оседания, желтый цвет – стабильные участки, зелёный цвет – поднятия, коричневые сплошные линии – линеаменты.

Рисунок 4 – Распределение смещений земной поверхности города Астана по данным радарной интерферометрии за 2011-2014 гг.

Для анализа площадного распределения смещений земной поверхности выходные точечные значения были проинтерполированы в программной среде QGIS в дополнительном модуле Interpolation. В результате интерполяции были выделены интегрированные области, связанные либо с опусканием, либо с поднятиями. Основные закономерности распределения смещений связаны с линеаменами и разломами, которые пролегают по территории г. Астана (рисунок 4). В частности, из рисунка 4 видно, что вытянутые зоны красного цвета пространственно относятся к близлежащим линеаменам, другие – к участку железной дороги, к некоторым частям русла рек и к промышленной зоне на северо-востоке города.

Таким образом, интерферометрический анализ радарных сцен техногенно нагруженных территорий, а также территорий с высокой плотностью застройки промышленными и гражданскими объектами дает очень важные и практические результаты об активности деформаций и их пространственном распределении. Применение точечного анализа позволяет получить информацию не только о пространственном распределении деформаций, но во времени. Стоит отметить, для территории Астаны, входная цепочка радарных снимков охватывает лишь небольшой временной отрезок в полные три года, что выражается в небольших значениях смещений, но следует обратить внимание и на то, что даже небольшие значения смещений выражаются в трендовых опусканиях и поднятиях.

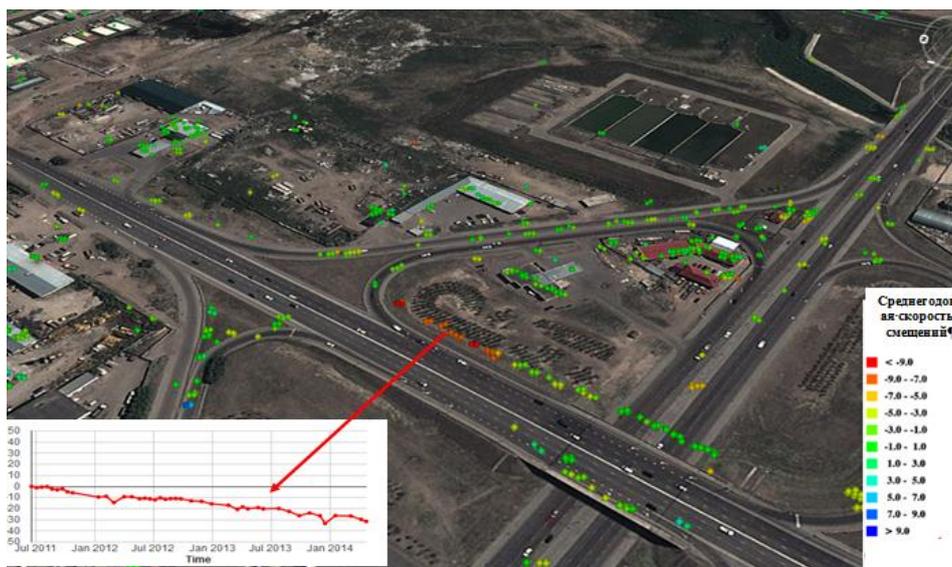


Рисунок 5 – Фрагмент карт вертикальных смещений земной поверхности г. Астаны, оползание насыпи вблизи развязки улиц Пушкина и Вишневского

**Выводы.** С использованием современных ГИС-технологий построены карты долговременных смещений на урбанизированных территориях. При учете величин сезонных смещений удалось выделить подвижки земной поверхности, связанные с техногенными факторами (рисунок 5). Для хранения и отображения картографической информации используются их растровые и векторные модели.

Карты смещений земной поверхности г. Астана рекомендуется использовать в планировании градостроительства и безопасной эксплуатации существующих зданий.

*Работа выполнена по РБП 076 «Разработать методы математического моделирования деформационных процессов верхней части разреза земной коры урбанизированных территорий на основе данных дистанционного зондирования Земли».*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Richards M. A. Beginner's Guide to Interferometric SAR Concepts and Signal Processing, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2007, Vol.22, №9. – P. 78-84.
- [2] Ferretti., Prati C., Rocca F. Nonlinear subsidence rate estimation using permanent scatterers in differential SAR interferometry, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions, –2000., Vol. 38, №5, Part 1. – P.2202–2212.
- [3] Ferretti., Prati C. Permanent scatterers in SAR interferometry, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions. – 2001. – Vol.39, №1. – P.8–20.
- [4] Лысков И.А., Мусихин В.В. Мониторинг деформационных процессов земной поверхности методами радарной интерферометрии, Вестник Пермский ГТУ
- [5] Madsen S.N., Zebker H.N. Imaging radar interferometry. In: Henderson, F.M. and Lewis, A.J. (Eds.) Principles and Applications of Imaging Radar, 3rd Edition.
- [6] Тимуш А.В. Горообразование – ключевая проблема сейсмотектоники // Геология Казахстана, Алматы: Гылым, 2004. –С.394-402
- [7] Гарагаш И.А., Паталаха Е.И. Приразломное смятие (сдвиговое течение) и складкообразование, Геотектоника, №6, 1990.
- [8] Конторович В.А., Жевлаков Л.П. Модель строения северной части Лугинецкого куполовидного поднятия, Геология нефти и газа, 6-98
- [9] Истрагов И.В. Геоморфолого-геодинамические исследования черногорской зоны северного кавказа, Геология нефти и газа, а 12-1998
- [10] Wetzel H.-U., Walter T.R. Land Subsidence pattern controlled by old alpine basement faults in the Kashmar Valley, Northeast Iran: results from InSAR and leveling, J. Anderssohn. – 2008. №174. – P.287-294.
- [11] Chester F., Evans J., Biegel R. Internal structure and weakening mechanisms of the San Andreas fault. J. Geoph. Res., v. 98, B1, 1993, p.771–786
- [12] Кантемиров Ю.И. Космический мониторинг смещений земной поверхности на месторождениях Кандым и Гумбулак Республики Узбекистан по данным космических радарных съемок // Геоматика. 2011. № 1. С.72–79.

- [13] Кантемиров Ю. Космический радарный мониторинг смещений и деформаций земной поверхности и сооружений, Вестник СибГАУ, №5(51), 2013
- [14] Кантемиров Ю., Мозер Д.В. Космический радарный мониторинг подработанных территорий с применением программного комплекса ENVI+SARSCAPE. Казахстан, Маркшейдерия және Геодезия, № 2(4), 2013
- [15] Costantini M., Falco S., Malvarosa F., Minati F. A new method for identification and analysis of persistent scatterers in series of SAR images// Proc. Int. Geoscience Remote Sensing Symp. (IGARSS), Boston MA, USA. –P.449-452.
- [16] Goldstein R.M., Zebker H.A., Werner C.L. Satellite radar interferometry// Two-dimensional phase unwrapping. Radio Science. –1988. №23. – P.713-720.
- [17] Li F., Goldstein R.M. Studies of multibaseline spaceborn interferometric synthetic aperture radars// IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 1990. №28
- [18] Gabriel A.K., Goldstein R.M., Zebker H.A. Mapping small elevation changes over large areas: differential radar interferometry// - 1989. № 94 (B7). – P.9183-9191
- [19] Жантаев Ж.Ш., Фремд А.Г., Нуракунов С.М. Космический радарный мониторинг смещений земной поверхности над нефтегазовым месторождением Тенгиз, Geomatics, vol. 1, декабрь 2012
- [20] Zhantaev Zh., Bibosinov A., Nurakynov S. Monitoring vertical surface deformation over a hydrocarbon reservoir by SBas-DinSar //, International Symposium & Exhibition on Geoinformation (ISG) // Universiti Teknologi Malaysia (UTM) Kuala Lumpur, Malaysia 24-25 September 201

### REFERENCES

- [1] Richards M. A. Beginner's Guide to Interferometric SAR Concepts and Signal Processing, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2007, Vol.22, №9. – P. 78-84.
- [2] Ferretti., Prati C., Rocca F. Nonlinear subsidence rate estimation using permanent scatterers in differential SAR interferometry, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions, –2000., Vol. 38, №5, Part 1. – P.2202–2212.
- [3] Ferretti., Prati C. Permanent scatterers in SAR interferometry, Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions. – 2001. – Vol.39, №1. – P.8–20.
- [4] Costantini M., Falco S., Malvarosa F., Minati F. A new method for identification and analysis of persistent scatterers in series of SAR images// Proc. Int. Geoscience Remote Sensing Symp. (IGARSS), Boston MA, USA. –P.449-452.
- [5] Madsen S.N., Zebker H.N. Imaging radar interferometry. In: Henderson, F.M. and Lewis, A.J. (Eds.) Principles and Applications of Imaging Radar, 3rd Edition.
- [6] Timush A.V. Mountain building - a key issue seismotectonics, Geology of Kazakhstan. Reports to the XXXII Geological Congress. Almaty: Science, 2004. –C.394-402
- [7] Garagash I.A., Patalha E.A By the fault collapse (shear flow), and folding, Geotectonics. №6, 1990( in Russ)
- [8] Kontorovich V.A., Jevlakov L.P. Model structure of the northern part of Luginetskoe dome uplift, Geology of Oil and gas, 6-98 (in Russ)
- [9] Isratov I.B. Geomorphological-geodynamic studies of the Montenegrin areas of the North Caucasus, Oil and Gas Geology 12-1998 (inRuss)
- [10] Wetzel H.-U., Walter T.R. Land Subsidence pattern controlled by old alpine basement faults in the Kashmar Valley, Northeast Iran: results from InSAR and leveling, J. Anderssohn. – 2008. №174. – P.287-294.
- [11] Chester F., Evans J., Biegel R. Internal structure and weakening mechanisms of the San Andreas fault. J. Geoph. Res., v. 98, B1, 1993, p.771–786
- [12] Zebker H.A., Goldstein R.M. Topographic mapping from interferometric SAR observations// Journal of Geophysical Research. –1986. № 91. –P.4993-4999.
- [13] Kantemirov J. Space radar monitoring of displacements and deformations of the earth's surface and structures, Herald SibSAU, №5(51), 2013 (inRuss)
- [14] Kantemirov J., Mozer D.V. Space radar monitoring undermined areas with complex software ENVI + SARSCAPE, Mine Surveying and Surveying, № 2(4), 2013 (in Russ)
- [15] Lyskov I.A Monitoring of deformation processes of the earth's surface radar interferometry techniques, Bulletin of Perm State Technical University (in russ)
- [16] Goldstein R.M., Zebker H.A., Werner C.L. Satellite radar interferometry// Two-dimensional phase unwrapping. Radio Science. –1988. №23. – P.713-720.
- [17] Li F., Goldstein R.M. Studies of multibaseline spaceborn interferometric synthetic aperture radars// IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 1990. №28
- [18] Gabriel A.K., Goldstein R.M., Zebker H.A. Mapping small elevation changes over large areas: differential radar interferometry - 1989. № 94 (B7). – P.9183-9191
- [19] Zhantaev Zh., Fremd A., Nurakynov S. Space radar monitoring earth surface displacements over the Tengiz oil and gas field, Geomatics, vol. 1, December 2012 (in Russ)
- [20] Zhantaev Zh., Bibosinov A., Nurakynov S. Monitoring vertical surface deformation over a hydrocarbon reservoir by SBas-DinSar, International Symposium & Exhibition on Geoinformation (ISG) // Universiti Teknologi Malaysia (UTM) Kuala Lumpur, Malaysia 24-25 September 2013

**ЖАЗ МӘЛІМЕТТЕРІ АРҚЫЛЫ УРБАНИЗАЦИЯЛЫҚ АЙМАҚТАРДЫҢ  
ҚАЗІРГІ ГЕОДИНАМИКАЛЫҚ ҮДЕРІСТЕРІН КАРТОГРАФИЯЛАУ**

**А. Ж. Бибосинов, С. М. Нурақынов**

«Ионосфера институты» ЕЖШС «Ұлтық Ғарыштық Зерттеулер мен технологиялар орталығы» АО,  
Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** радарлық интерферометрия, жер бедерінің ауытқулары, жерді арақашықтықтан зерттеу, географиялық ақпаратты жүйесі.

**Аннотация.** Ғимараттар мен құрылымдарды және жер бетінің қазіргі қозғалыстарын бақылау мен картографиялау қазіргі кезде қалалық инфрақұрылымның шапшаң өсуі кезеңінде көкейкесті мәселенің бірі болып табылады. Еуропа қалаларын геодинамикалық бақылауда сәтті іске асырылып отырған әдістің бірі жер-серіктік радарлық суреттерді өңдеу яғни, деформациялық үдерістерді арақашықтықтан бақылау жүргізуде экономикалық тиімді және еңбек шығыны аз болып табылады. Бұл әдіс қысқа толқынды радиотолқындарды қолдануымен жер бетінің ауытқуларын анықтауда жақсы қолданыс тапқан. Қазіргі уақытта урбанизациялық аймақтардың отыруларын (ауытқулар) анықтауда ғарыштық суреттерді интерферометриялық талдау техникалары қолданылады. Жүргізіліп отырған жұмыс шеңберінде Астана қаласы жер қыртысының жылжулары және ауытқулар карталарын ЖАЗ мәліметтері арқылы құрастыру қарастырылған. Ауытқулар карталарын құрастыруда қолданған негізгі мәліметтер яғни, COSMO-SkyMed-1-4 радарлық жер серігітерінен алынған ғарыштықтық суреттер болып табылады

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 98 – 103

**ASSESSING THE IMPACT OF THE RELIEF  
BY METHOD OF SPLINE REGRESSION  
IN THE STUDY OF THE EMISSION OF INFRARED RADIATION  
FROM THE SURFACE OF THE EARTH**

**A. V. Vilyayev, A. P. Stiharnyi, E. B. Serikbaeva**

Institute of the Ionosphere, National Center for Space Research and Technology, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: vilayev@gmail.com

**Keywords:** infrared remote sensing, digital elevation model, heat flow, spline regression.

**Abstract.** Processing infrared spectrometers-radiometers mounted on satellites for remote sensing are not satisfactorily take into account the dependence of the height of the relief, which significantly affects the efficiency of the use of measured data to estimate the depth of the heat flow. The paper proposes a method of correction of the emission of infrared radiation from the Earth's surface by bringing the measurement data to a common elevation spline regression method.

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РЕЛЬЕФА МЕТОДОМ СПЛАЙНОВОЙ РЕГРЕССИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИНФРАКРАСНОГО ЭМИССИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

А. В. Виляев, А. П. Стихарный, Э. Б. Серикбаева

ДТОО «Институт ионосферы» Акционерного общества  
«Национальный центр космических исследований и технологий», Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** инфракрасное излучение, дистанционное зондирование Земли, цифровая модель рельефа, тепловой поток, сплайновая регрессия.

**Аннотация.** Обработка данных инфракрасных спектрометров-радиометров, устанавливаемых на спутниках ДЗЗ, не вполне удовлетворительно учитывает зависимость от высоты рельефа, что ощутимо влияет на эффективность применения измеряемых данных для оценок глубинного теплового потока. В работе предлагается метод коррекции инфракрасного эмиссионного излучения поверхности Земли с приведением данных измерений к единой высотной отметке способом сплайновой регрессии.

**Введение.** В настоящее время интенсивно развиваются методы ДЗЗ, основанные на применении инфракрасных спектрометров-радиометров в исследованиях температуры подстилающей поверхности, стратификации атмосферы, парниковых газов, химических процессов в тропосфере и стратосфере и др. Изучение распределения теплового поля в районах активных геодинамических процессов представляет значительный практический интерес [1-4]. К одной из особенностей эмиссионного земного излучения в инфракрасном диапазоне относится зависимость яркостной температуры ИК излучения от высотной отметки отражающей единичной площади (пикселя на снимке). Методика расчета радиояркостной температуры земной поверхности по данным спутникового зондирования с учетом особенностей рельефа недостаточно разработана. Основные направления коррекции рельефа в исследованиях теплового поля определяются применением аппаратно-программного метода [5], способом физического и регрессионного анализа [6], статистическим моделированием наземных измерений [7].

В работе предлагается метод коррекции инфракрасного эмиссионного излучения поверхности Земли с приведением данных измерений к единой высотной отметке способом сплайновой регрессии.

**Исходные данные.** Исследования распределения теплового потока поверхности Земли главным образом основываются на результатах измерений спутниковых радиометров «Advanced Very High Resolution Radiometer» (AVHRR) с ИСЗ NOAA и MODIS с ИСЗ EOS. В данной работе использовались данные из глобальной базы данных «The Land Processes Distributed Active Archive Center» (<http://edcdaac.usgs.gov/main.asp>). В анализ включены продукты измерений MOD021KM и MOD03 в ночные и предутренние часы локального времени преимущественно позднего осеннего и зимнего сезонов с целью минимизации влияния дневного солнечного прогрева. При картировании распределения потока ИК излучения использовались спутниковые изображения в спектральных областях, соответствующих «окнам прозрачности» с минимальным ослаблением в атмосфере. Интенсивности величины потока соотносились с высотными отметками рельефа. Сопоставление проводилось по отдельным пикселям яркостных изображений и по усредненным данным для единичных площадок рельефа 1x1 км.

**Методы и результаты исследования.** Алгоритм сплайновой регрессии применялся для согласованных по географическим координатам и разрешению спутниковых изображений интенсивности излучения в 23 и 31 каналах (4.080-4.020 мкм; 11.280-10.780 мкм) радиометра MODIS и цифровой модели рельефа (рисунок 1). Цифровая модель рельефа имеет детализацию (разрешение) – 90м в пикселе, усредненную точность по высоте - 1 метр, проекцию WORLD LatLong. В программной среде ERDAS была произведена перепроецирование изображения в проекцию WGS-84.

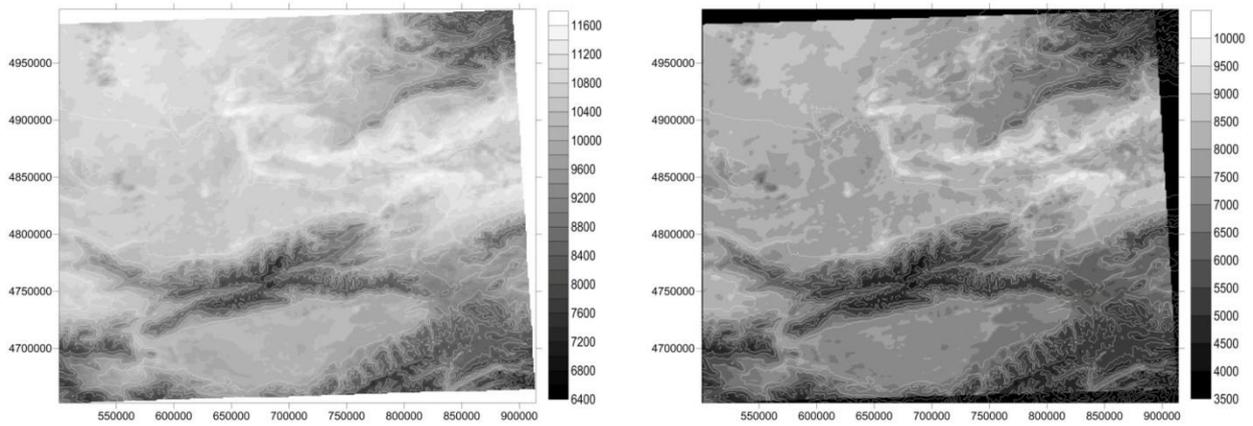


Рисунок 1 – Интенсивность ИК излучения: слева – 31 канал, справа - 23 канал (привязка в координатах Гаусса-Крюгера, рельеф – изолинии белого цвета, разрешение пикселя 1x1 км)

Методика обработки данных сводится к следующему:

1. Диапазон высот рельефа разбивается на  $K$  интервалов.
2. Соответствующие каждому интервалу высот, пиксели яркостной температуры ИК-снимка разделяются на  $K$  классов.
3. Рассчитывается корреляционное поле (признаковое пространство) в каждом интервале между высотной отметкой рельефа и значением ИК-интенсивности как для каждого канала измерений, так и для их отношения 31/23.
4. Определяются центры класса  $K_j$  ( $j=1, k$ ) как точки в признаковом пространстве с координатами  $(X_{cj}, Y_{cj})$ , где  $X_{cj}=(H_j+H_{j+1})/2$ ,  $H_j$  и  $H_{j+1}$  - начало и конец интервала,  $Y_{cj}= 1/n \sum Y_i$ ,  $n$  – количество всех суммируемых пикселей в классе.
5. Линия, соединяющая центры классов, аппроксимируется линейным регрессионным уравнением  $Y = A_i \cdot H_i + B_i$ ,  $H$  – высотная отметка рельефа (рисунок 2).

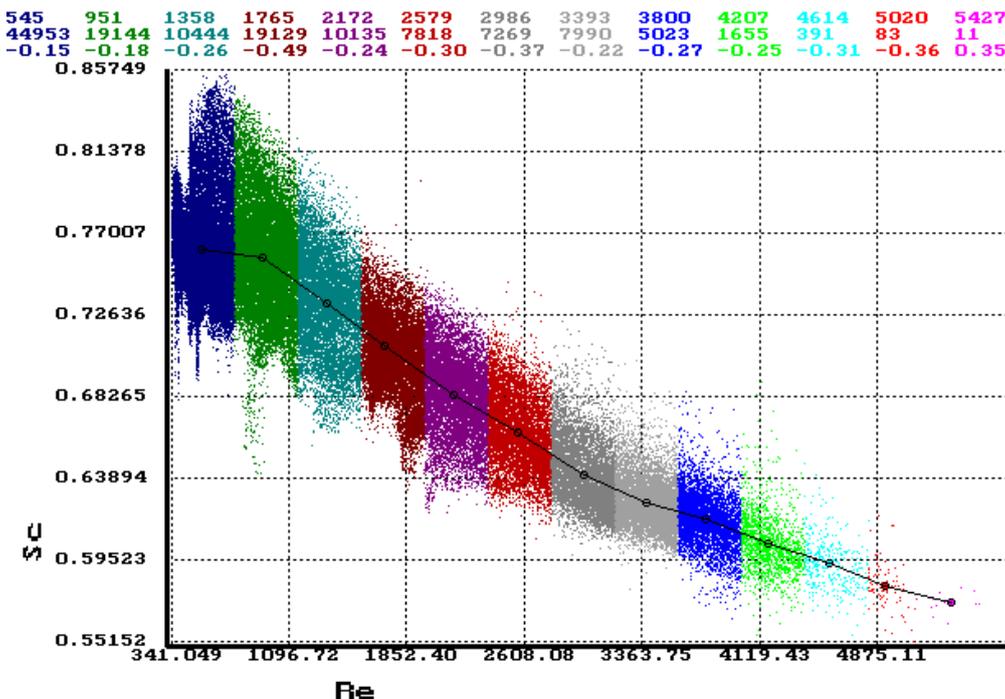


Рисунок 2 – Распределение интенсивности ИК излучения в признаковом пространстве высота (м)-отношение каналов 31/23

6. Рассчитанные регрессионные коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$  сглаживаются кубическим сплайном  $F(h)$  во всем диапазоне высот.

7. Приведение значений интенсивности излучения ИК-снимка к высоте  $H_0$  осуществляется попиксельно по формуле  $Y_{\text{нн}}=F(h_0)+Y_i-F(h_i)$ .

В таблице представлена матрица корреляции между интенсивностью излучения регистрируемого в соответствующем диапазоне и рельефом, где  $I_{31}$  – интенсивность пикселей на 31 канале,  $I_{23}$  – интенсивность пикселей на 23 канале,  $Re$  – рельеф (каждый пиксель – средняя высота площадки км на км),  $Sc$  – отношение каналов. Имеются высокие значения корреляции между спектральными каналами, незначительная поканальная с высотами рельефа и более значимая между отношением каналов и отметками высот. Отметим явное совпадение интенсивности ИК излучения на исходных снимках с изолиниями рельефа, хотя рассчитанная корреляция статистически незначима. Объяснение находим в предположении низкого геометрического разрешения (осреднения) высот рельефа в размерах единичного пикселя  $1 \times 1$  км.

Матрица корреляции для всей площади снимка

|     | I31    | I23    | Re     | Sc    |
|-----|--------|--------|--------|-------|
| I31 | 1.000  | 0.973  | -0.018 | 0.908 |
| I23 | 0.973  | 1.000  | -0.004 | 0.914 |
| Re  | -0.018 | -0.004 | 1.000  | 0.348 |
| Sc  | 0.908  | 0.914  | 0.348  | 1.000 |

Для детализации влияния рельефа применено разделение по классам высот (рисунок 2). Всего было выделено 12 классов. Над рисунком расположена таблица из 3 столбцов и 13 строк – классов. В первой строке указана средняя высота класса по рельефу, во второй – количество пикселей в классе, в третьей – коэффициент корреляции высоты и интенсивности снимка внутри класса. Пиксели разных классов отличаются цветом. Центры классов обозначены кружком и соединены линией. Отмечается понижение интенсивности ИК излучения с повышением высоты.

Внутри каждого интервала высот рассчитаны регрессионные коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  линейного уравнения, которые использованы для аппроксимации их распределения по отметкам рельефа кубическим сплайном (рисунок 3).

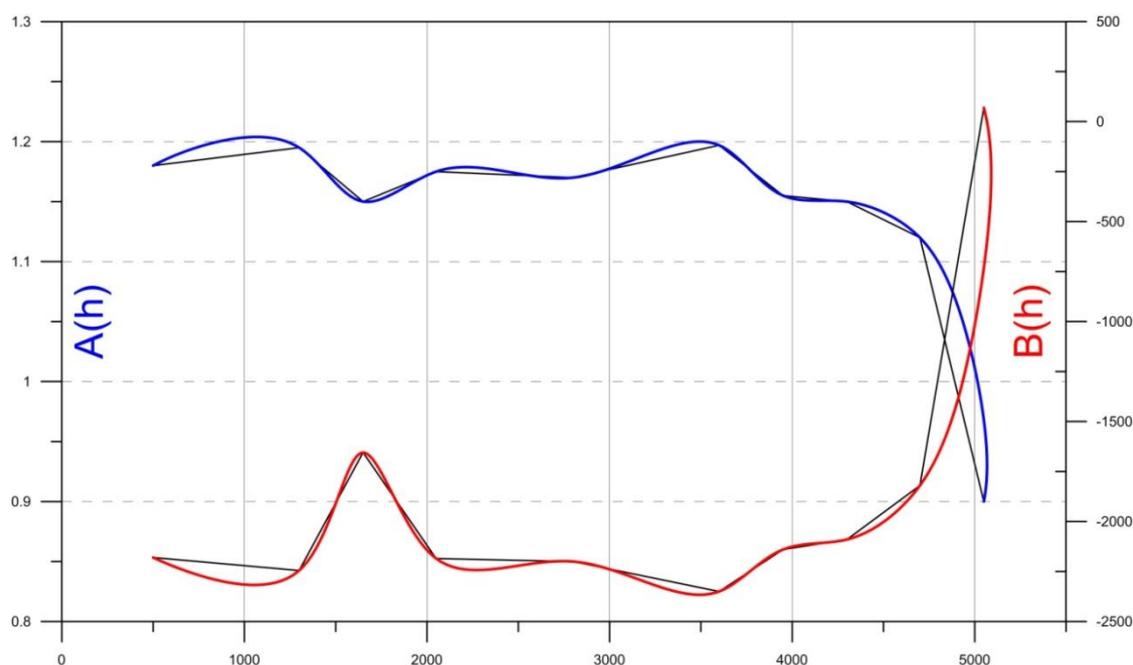


Рисунок 3 – Сплайн аппроксимация коэффициентов линейной регрессии ИК излучения и отметок высот

Расчитанные сплайн-интерполяцией для каждого пикселя значения интенсивности ИК излучения статистически значимо позволяют привести измеренные данные к единой высоте, т.е. формально ввести поправку за рельеф (рисунок 4).

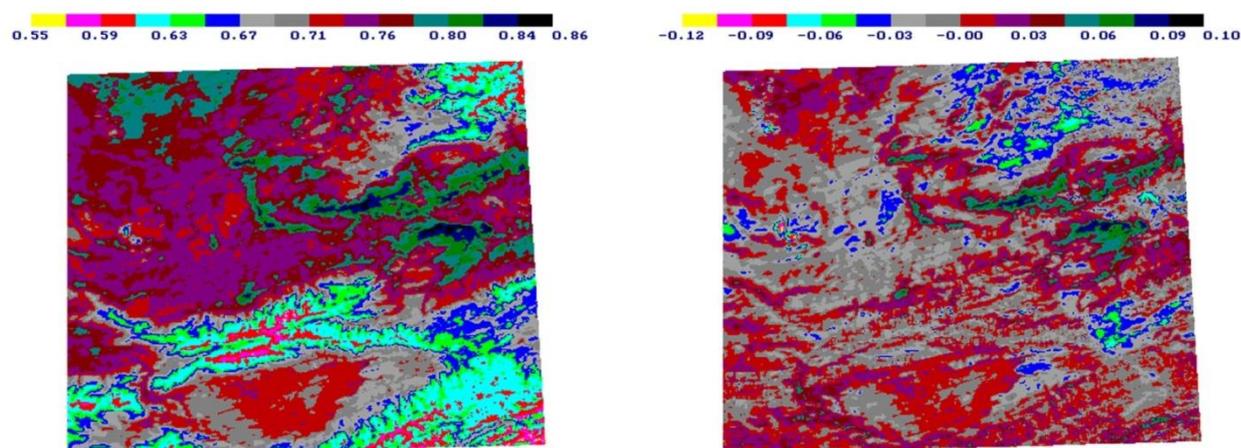


Рисунок 4 – Интенсивность ИК излучения (отношение каналов 31/23) до (слева) и после введения поправки за рельеф (справа)

**Обсуждение.** Эмиссионный поток ИК излучения значительно дифференцирован. Разновидность ИК-эмиссии связана с плотностью потока суммарной солнечной радиации, альбедо земной поверхности, коэффициента излучения, глубинного теплового потока, геометрии поверхности, сочетанием местных атмосферных циркуляций и приразломного теплопереноса [3, 8]. Не менее важный фактор обусловлен корреляцией яркостной температуры с высотой расположения отражающей площадки. Поэтому при дистанционном измерении теплового поля Земли необходимо учитывать зависимость между тепловыми потоками ИК излучения и рельефом. Предлагаемый способ позволяет ввести поправку за рельеф и, как следствие, значительно сглаживает исходные данные с возможностью выделения глубинной составляющей. В этой связи, возникает постановка дальнейшей задачи верификации «очищенных» за рельеф температурных ИК полей с данными скважинных измерений на поверхности Земли.

**Заключение.** На основе анализа характеристик статистических распределений интенсивности ИК излучений в различных волновых диапазонах от высоты пункта отражения предложен способ учета влияния рельефа для измеряемых значений радиояркостных температур. В качестве дополнительной информации могут использоваться карты растительности, построенные по материалам многоспектральной съемки, также обработанные по предлагаемой методике. Применение данной технологии дает возможность в последующем кластеризировать отдельные участки поверхности с имеющимися наземными определениями глубинного теплового потока (ТП) и, соответственно, распространить опорные измерения ТП на изучаемую территорию.

*Работа выполнена в рамках проекта «Математическое моделирование воздействия термоупругих деформаций земной коры Северного Тянь-Шаня на формирование сейсмической активности с использованием геоинформационных спутниковых технологий» по бюджетной программе 055 «Научная и (или) научно-техническая деятельность», подпрограмма 101 «Грантовое финансирование научных исследований».*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жантаев Ж.Ш., Ахмеджанов А.Х., Каипов. Определение температурных полей земной поверхности по данным спутникового зондирования // Гидрометеорология и экология.– 2010, вып.3.
- [2] Жантаев Ж.Ш., Ахмеджанов А.Х., Каипов И.В., К вопросу расчета температурных полей земной поверхности по спутниковым данным // АО «НЦКИТ», «Казахстанские космические исследования».–2010.–Т. 6.–С. 57-58.
- [3] Вилор Н.В., Абушенко Н.А., Тащилин С.А. Спутниковый метод изучения корреляции инфракрасного эмиссионного потока и элементов геологической структуры Земли в северном полушарии. // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Вып.3.т.2. М.: Институт космических исследований РАН. 2006. - с. 215-224

[4] Вилор Н.В., Ключевский А.В., Демьянович В.М., Русанов В.А., Тащилин С.А., Шарпинский Д.Ю. Распределение и колебательные свойства уходящего поверхностного ИК потока разломов в корреляционных соотношениях с сейсмологическими параметрами // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2008. Т. 5. №.1. С. 337-348.

[5] С.Б. Жуков Коррекция влияния рельефа на изображения, полученных съемочной системой КМСС на КА «Метеор-М» № 1 // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Институт космических исследований РАН. 2013. Т. 10. № 4. С. 9–15

[6] Афонин С.В. Применение физического и регрессионного подходов к измерению температуры поверхности суши по данным MODIS // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Институт оптики атмосферы СО РАН. 2012. Т.9. №1. С.9-15

[7] Аюнов Д. Е. Оценка влияния рельефа на температурное поле земной коры методом статистического моделирования (на примере Байкальской впадины) // Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук Новосибирск 2012

[8] Горный В.И., Шилин Б.В., Ясинский Г.И. Тепловая аэрокосмическая съемка. М.: Недра, 1993. 128с.

#### REFERENCES

[1] Zhantaev ZH.Sh., Akhmedzhanov A.KH., Kaipov Opredelenie temperaturnykh polei zemnoi poverkhnosti po dannym sputnykovogo zondirovaniia // Gidrometeorologiya i ekologiya.– 2010, vyp.3.

[2] Zhantaev ZH.Sh., Akhmedzhanov A.KH., Kaipov I.V., K voprosu rascheta temperaturnykh polei zemnoi poverkhnosti po sputnykovym dannym // АО «НТСКИТ», «Kazakhstanskie kosmicheskie issledovaniia».–2010.–Т. 6.–S. 57-58.3.

[3] Vilor N.V., Abushenko N.A., Tashchilin S.A. Sputnykovy i metod izucheniia korreliatsii infrakrasnogo emissionnogo potoka i elementov geologicheskoi struktury Zemli v severnom polusharii. // Sovremennye problemy distantcionnogo zondirovaniia Zemli iz kosmosa. Vy p.3.t.2. M.: Institut kosmicheskikh issledovaniia RAN. 2006. - c. 215-224

[4] Vilor N.V., Cluichevskii A.V., Demianovich V.M., Rusanov V.A., Tashchilin S.A., Sharpinskii D.Iu. Raspredelenie i kolebatelnye svoystva uhodiashchego poverkhnostnogo IK potoka razlomov v korreliatsionnykh sootnosheniakh s seismologicheskimi parametrami // Sovremennye problemy distantcionnogo zondirovaniia Zemli iz kosmosa. 2008. Т 5. №.1. С. 337-348.

[5] Zhukov S.B. Korrektsiia vliianiia relefa na izobrazheniakh, poluchennykh s emochnoi sistemoi KMSS na KA «Meteor-M» № 1 // Sovremennye problemy distantcionnogo zondirovaniia Zemli iz kosmosa. Institut kosmicheskikh issledovaniia RAN. 2013. Т. 10. № 4. С. 9–15.

[6] Afonin S.V. Primenenie fizicheskogo i regressionnogo podhodov k izmereniiu temeperatury poverkhnosti sushy po dannym MODIS // Sovremennye problemy distantcionnogo zondirovaniia Zemli iz kosmosa. Institut optiki atmosfery SO RAN. 2012. Т.9. №1. С.9-15

[7] Aiunov D. E. Ocenka vliianiia relefa na temperaturnoe pole zemnoi kory metodom statisticheskogo modelirovaniia (na primere Baikalskoi vpadiny ) // Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uchyonoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk Novo-sibirsk 2012

[8] Gornyi V.I., Shilin B.V., Iasinskii G.I. Teplovaia aerokosmicheskaia semka. M.: Nedra, 1993. 128s.

### ГЕОРАДИОЛОКАЦИЯ АРҚЫЛЫ ГИДРОТЕХНИКАЛЫҚ ҒИМАРАТЫНЫҢ ТЕХНИКАЛЫҚ КҮЙІНІҢ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ САРАПТАМА ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНУ

А. В. Виляев, А. П. Стихарный, Э. Б. Серикбаева

ЕЖШС «Ионосфера институты» акционерлік қоғамы  
«Ғарыштық зерттеулер мен технологиялар ұлттық орталығы», Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** инфрақызыл шағылу, Жерді ара-қашықтықтан зондылау, бедердің сандық үлгісі, жылулық ағын, сплайндық регрессия.

**Аннотация.** Тереңдіктегі жылулық ағынды бағалау үшін мәліметтерді өңдеу, өлшенілген мәліметтердің тиімділігіне біраз әсерін тигізетін ара-қашықтықтан зондылау серіктерінде орнатылған инфрақызыл спектр-метр-радиометр бедер биіктігіне тәуелділігін қанағатсыз дәрежеде есептеді. Жұмыста Жер бетінен эмиссиялық инфрақызылдың шағылуын, сплайндық регрессия әдісі мен берілген өлшемдерді бірдей биіктік деңгейіне келтіріп дұрыстау әдісі ұсынылған.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 104 – 117

**ABOUT THE PERIODIC PROBLEM ON THE PLANE  
FOR THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS  
WITH MIXED DERIVATIVES A SPECIAL FORM**

**A. T. Asanova**

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: anarasanova@list.ru

**Key words:** hyperbolic, period, condition, solvability, algorithm.

**Abstract.** The periodic problem on the plane for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives the special form is considered. The questions of the existence of unique solution of the considering problem and ways of its construction are investigated. The periodic problem on the plane is reduced to a periodic boundary value problem in a rectangle under the periodicity of the data. For the solve of periodic boundary value problem for system of hyperbolic equations of second order is applied a method of an introducing additional functional parameters. We introduce new unknown functions as the values of the desired solution on the characteristics. The desired solution of periodic boundary value problem for system of the hyperbolic equations is replaced by the sum of the new unknown functions and the introduced functional parameters. The considering periodic boundary value problem is reduced to an equivalent problem consisting of Goursat problem for the system of hyperbolic equations with functional parameters and functional relations. The algorithms of finding solution to setting equivalent problem on the characteristics with functional parameters are proposed. The feasibility and convergence of the constructed algorithm are proved in the terms of the data to problem. Sufficient coefficient conditions of the unique solvability to the equivalent problem on the characteristics with functional parameters are established. Theorem of the existence of unique classical solution to the periodic problem on the plane for system of hyperbolic equations of the special form is proved.

УДК 517.956

**О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ПЛОСКОСТИ  
ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

**A. T. Asanova**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** гиперболическое, период, условие, разрешимость, алгоритм.

**Аннотация.** Рассматривается периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений со смешанными производными специального вида. Исследуются вопросы существования единственного решения рассматриваемой задачи и способы его построения. При периодичности данных исследуемая

периодическая задача на плоскости сводится к периодической краевой задаче в прямоугольнике. Для решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка применяется метод введения дополнительных функциональных параметров. Вводятся новые неизвестные функции как значения искомого решения на характеристиках. Искомое решение периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений заменяется на сумму новой неизвестной функции и введенных функциональных параметров. Рассматриваемая периодическая краевая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и функциональным соотношениям. Предложены алгоритмы нахождения решения полученной эквивалентной задачи на характеристиках с функциональными параметрами. Доказана осуществимость и сходимости построенного алгоритма в терминах данных задачи. Установлены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости эквивалентной задачи на характеристиках с функциональными параметрами. Доказана теорема о существовании единственного классического решения периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений специального вида.

На плоскости  $R^2$  рассматривается система гиперболических уравнений второго порядка специального вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + C(t, x)u + f(t, x), \quad (1)$$

с периодическими условиями

$$u(t+T, x) = u(t, x), \quad (t, x) \in R^2, \quad (2)$$

$$u(t, x+\omega) = u(t, x), \quad (t, x) \in R^2, \quad (3)$$

где  $(n \times n)$ -матрицы  $A(t, x)$ ,  $C(t, x)$ ,  $n$ - вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы по  $t$  на  $R^2$ , а также  $(T, \omega)$  – периодичны, т.е. имеют место равенства

$$A(t+T, x) = A(t, x), \quad A(t, x+\omega) = A(t, x), \quad C(t+T, x) = C(t, x), \quad C(t, x+\omega) = C(t, x),$$

$$f(t+T, x) = f(t, x), \quad f(t, x+\omega) = f(t, x), \quad (t, x) \in R^2.$$

Непрерывная на  $R^2$  функция  $u(t, x)$ , имеющая непрерывные частные производные  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x}$  называется классическим  $(T, \omega)$  – периодическим решением системы (1), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех  $(t, x) \in R^2$  и условиям периодичности (2), (3).

Пусть  $\|u(t, x)\| = \max_{i=1, n} |u_i(t, x)|$ ,  $\|A(t, x)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|$ ,  $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ .

Через  $C(\Omega, R^n)$  (соответственно  $C([0, T], R^n)$ ,  $C([0, \omega], R^n)$ ) обозначим пространство непрерывных на  $\Omega$  ( $[0, T]$ ,  $[0, \omega]$ ) функций  $u: \Omega \rightarrow R^n$  ( $\psi: [0, T] \rightarrow R^n$ ,  $\varphi: [0, \omega] \rightarrow R^n$ ) с нормой  $\|u\|_0 = \max_{(t, x) \in \Omega} \|u(t, x)\|$  ( $\|\psi\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|$ ,  $\|\varphi\|_2 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi(x)\|$ ).

Для рассматриваемой задачи аналогом условия периодичности Пуанкаре по  $(t, x)$  являются соотношения

$$u(0, x) = u(T, x), \quad x \in [0, \omega], \quad (4)$$

$$u(t, 0) = u(t, \omega), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

Функция  $u(t, x) \in C(\Omega, R^n)$ , имеющая частные производные  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$ ,

$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$ ,  $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$  называется классическим решением задачи (1), (4), (5), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех  $(t, x) \in \Omega$  и выполнены краевые условия (4), (5).

Пусть  $u(t, x)$  - классическое решение задачи (1), (4), (5). Тогда в силу свойств характеристик:  $t = kT$ ,  $x = m\omega$ ,  $k, m \in Z$  и равенств (4), (5) функция  $u^*(t, x)$ , являющаяся периодическим продолжением  $u(t, x)$  на  $R^2$  по  $t, x$  соответственно с периодами  $T$  и  $\omega$  будет классическим  $(T, \omega)$ -периодическим решением системы (1), т.е. выполнены условия периодичности по обоим переменным  $u^*(t+T, x) = u^*(t, x)$ ,  $u^*(t, x+\omega) = u^*(t, x)$ ,  $(t, x) \in R^2$ .

Краевые задачи для уравнений гиперболического типа встречаются в приложениях в качестве математической модели реальных физических процессов и представляют собой обширную и активно развивающуюся часть современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Важное место в теории дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа занимают уравнения второго порядка, возникающие преимущественно в ходе решения физических задач.

Одной из основных и наиболее изученных задач теории гиперболических уравнений второго порядка является периодическая краевая задача, для решения которой применялись метод Фурье, метод последовательных приближений, методы функционального анализа и вариационный метод обзор и библиографию можно посмотреть в [1-6]. Условия существования периодических решений гиперболических уравнений высоких порядков, связанные с проблемой малых знаменателей, изучались в [3]. В монографии [4] для исследования периодических решений волновых уравнений были применены асимптотические методы. Изучение периодических краевых задач для гиперболических уравнений со смешанными частными производными началось в 60-е годы с работы L.Cesari [7]. В его работе разработанные им методы нахождения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений были распространены на уравнения с частными производными. В работах L.Cesari [7-11] исследовались периодические по переменной  $t$  с периодом  $T$  на полосе  $\{-\infty < t < \infty, -a \leq x \leq a\}$  решения систем нелинейных гиперболических уравнений. Были установлены достаточные условия существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных периодического по  $t$  решения исследуемой задачи при предположениях непрерывности по всем своим аргументам и периодичности по  $t$  вектор-функции  $f(t, x, u, v, w)$  правой части, а также липшицевости по последним трем аргументам. В статье [12] рассматривалась периодическая краевая задача на плоскости для гиперболического уравнения, зависящего от малого параметра. При предположениях непрерывности по своим аргументам, периодичности по  $t, x$  с периодом  $2\pi$  и липшицевости по последним трем аргументам функции  $f(t, x, u, v, w)$  правой части были получены достаточные условия существования единственного периодического решения с помощью результатов, установленных им для нахождения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теоремы о неявных функциях. Работы [13-15] распространяют результаты L.Cesari на уравнения гиперболического типа со многими независимыми переменными, где для установления достаточных условий существования единственного периодического решения применяется принцип неподвижной точки Шаудера. В работе [16] обобщены результаты L.Cesari, когда правая часть уравнения  $f$  принадлежит более широкому классу, а также исследованы для таких классов уравнений периодические по обоим аргументам решения. В статьях [17, 18] исследуются периодические на полосе и плоскости решения уравнения гиперболического типа с линейной и нелинейной частями. Были получены условия существования единственного периодического решения путем сведения исходной задачи к нахождению неподвижной точки некоторого интегрального оператора в соответствующем пространстве функций. В работе [19] рассмотрена система гиперболических уравнений, зависящая от параметра. Используя подход A.C.Lazer и сведя к интегральным уравнениям были доказаны утверждения о существовании единственного периодического решения на полосе и плоскости. В работах [20-21] изучались условия разрешимости периодических краевых задач для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа применяя метод неподвижных точек к некоторому интегральному оператору. В монографии [5] численно-аналитический метод применен к исследованию периодических краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производ-

ными гиперболического типа с отклоняющимся аргументом при различных зависимостях правой части от своих аргументов. В работе [6] рассматривается математическая модель RSLG-генератора - краевая задача для системы телеграфных уравнений. Указанная задача путем замены и соответствующих нормировок сводится к периодической краевой задаче для нелинейного гиперболического уравнения со смешанной производной. Развивая асимптотическую теорию периодических по времени решений дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, моделирующих колебательные процессы в автогенераторах с распределенными параметрами, установлены характерные особенности динамики рассматриваемых уравнений, в том числе градиентные катастрофы, выявлена роль резонансности как источника релаксационных колебаний и проведено теоретическое обоснование наблюдаемого в физических системах феномена буферности. В работах [22-28] исследовались периодические краевые задачи для уравнений и систем гиперболического типа. Установлены признаки однозначной разрешимости периодических краевых задач и указаны способы построения их решений. Найдены достаточные условия существования и единственности периодического на плоскости решения в терминах фундаментальной матрицы.

Необходимость исследования периодических краевых задач для гиперболических уравнений определяется как потребностями практики в связи с важностью ее приложения к решению разнообразных проблем задач физики, химии, биологии, радио- и электротехники, так и развитием самой теории.

Линейные и нелинейные гиперболические уравнения со смешанными производными второго порядка от двух независимых переменных применяются при рассмотрении процессов сушки воздушным потоком и изэнтропического одномерного плоского течения в газовой динамике, в динамике и кинетике сорбции газов при линейной и нелинейной изотерме, при описании кинетики фильтрационного осветления малоцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах [29-32]. При изучении ударных волн в упругой или вязкопластической среде также использовались гиперболические уравнения со смешанной частной производной [33, 34]. Системы таких уравнений появляются при исследовании движения адсорбируемых смесей веществ, состоящих из многих компонент, через пористую предварительно насыщенную одним или несколькими веществами среду для малых или больших концентраций адсорбируемых веществ при постоянной или переменной скорости фильтрации [35].

Периодическая задача на плоскости для системы (1) исследовалась в работах [36-37] методом введения функциональных параметров [38-40]. Путем введения новых неизвестных функций рассматриваемая задача была сведена к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональным соотношениям. Были установлены условия разрешимости при отсутствии в определении решения предположения о существовании непрерывной производной по  $t$ . Как следствие этого, не предполагалось непрерывная дифференцируемость коэффициентов системы по переменной  $t$ .

В настоящей работе в определении решения предполагается существование непрерывной производной по переменной  $t$ , а также непрерывная дифференцируемость исходных данных по этой переменной. Периодическая задача для системы гиперболических уравнений введением новых функциональных параметров и с помощью замены сведена к задаче Гурса для системы гиперболических уравнений с параметрами функциональным соотношениям. Неизвестные параметры ищутся как решения периодических краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия существования единственного классического решения изучаемой задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм построения приближенных решений и доказана его сходимости.

Схема метода. Введем обозначения  $\lambda(x) = u(0, x) - \frac{1}{2}u(0, 0)$ ,  $\mu(t) = u(t, 0) - \frac{1}{2}u(0, 0)$ . В задаче (1), (4), (5) осуществим замену искомой функции  $u(t, x)$ :  $u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \lambda(x) + \mu(t)$  и перейдем к следующей задаче

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + C(t, x) \tilde{u} + A(t, x) \lambda'(x) + C(t, x) \lambda(x) + C(t, x) \mu(t) + f(t, x), \quad (6)$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (7)$$

$$\tilde{u}(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$\tilde{u}(T, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (9)$$

$$\tilde{u}(t, \omega) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

Решением задачи (6)-(10) является тройка функций  $(\mu(t), \lambda(x), \tilde{u}(t, x))$ , где функция  $\tilde{u}(t, x)$  имеет непрерывные производные первого порядка и смешанную производную второго порядка на  $\Omega$ , функция  $\mu(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$ , функция  $\lambda(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, \omega]$ , удовлетворяющая системе уравнений (6) условиям (7)-(10).

Задача (6) - (8) при фиксированных  $\lambda(x)$ ,  $\mu(t)$  является задачей Гурса относительно функции  $\tilde{u}(t, x)$  в области  $\Omega$ . А соотношения (9), (10) позволяют определить неизвестные параметры  $\lambda(x)$ ,  $\mu(t)$ , где функции  $\lambda(x)$ ,  $\mu(t)$  удовлетворяют равенствам  $\lambda(0) = \lambda(\omega)$ ,  $\mu(0) = \mu(T)$ .

Введем новые неизвестные функции  $\tilde{v}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x}$ ,  $\tilde{w}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t}$  и запишем решение задачи Гурса в виде системы трех интегральных уравнений

$$\tilde{v}(t, x) = \int_0^t \{A(\tau, x)\tilde{v}(\tau, x) + C(\tau, x)\tilde{u}(\tau, x) + A(\tau, x)\lambda'(x) + C(\tau, x)[\lambda(x) + \mu(\tau)] + f(\tau, x)\}d\tau, \quad (11)$$

$$\tilde{w}(t, x) = \int_0^x \{A(t, \xi)\tilde{v}(t, \xi) + C(t, \xi)\tilde{u}(t, \xi) + A(t, \xi)\lambda'(\xi) + C(t, \xi)[\lambda(\xi) + \mu(t)] + f(t, \xi)\}d\xi, \quad (12)$$

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^x \{A(\tau, \xi)\tilde{v}(\tau, \xi) + C(\tau, \xi)\tilde{u}(\tau, \xi) + A(\tau, \xi)\lambda'(\xi) + C(\tau, \xi)[\lambda(\xi) + \mu(\tau)] + f(\tau, \xi)\}d\xi d\tau. \quad (13)$$

Из соотношений (9), (10), после дифференцирования по  $x$ ,  $t$ , соответственно, вытекает

$$\tilde{v}(T, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (14)$$

$$\tilde{w}(t, \omega) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Подставляя соответствующие представления из (11) и (12) при  $t = T$  в (14) и при  $x = \omega$  в (15) получим

$$\int_0^T A(\tau, x)d\tau \cdot \dot{\lambda}(x) = -\int_0^T C(\tau, x)d\tau \cdot \lambda(x) - \int_0^T C(\tau, x)\mu(\tau)d\tau - \int_0^T [A(\tau, x)\tilde{v}(\tau, x) + C(\tau, x)\tilde{u}(\tau, x)]d\tau - \int_0^T f(\tau, x)d\tau, \quad (16)$$

$$\int_0^\omega C(t, \xi)d\xi \cdot \mu(t) = -\int_0^\omega [A(t, \xi)\dot{\lambda}(\xi) + C(t, \xi)\lambda(\xi)]d\xi - \int_0^\omega [A(t, \xi)\tilde{v}(t, \xi) + C(t, \xi)\tilde{u}(t, \xi)]d\xi - \int_0^\omega f(t, \xi)d\xi. \quad (17)$$

Так как данные задачи непрерывно дифференцируемы по переменной  $t$ , соотношение (17) можно продифференцировать по  $t$ . Тогда с учетом системы уравнений (6) для производной  $\frac{\partial \tilde{v}(t, \xi)}{\partial t}$  получим

$$\int_0^\omega C(t, \xi)d\xi \cdot \dot{\mu}(t) = -\int_0^\omega \left[ \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi)C(t, \xi) \right] d\xi \cdot \mu(t) -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\omega} \left[ \left\{ \frac{\partial A(t, \xi)}{\partial t} + A^2(t, \xi) \right\} \dot{\lambda}(\xi) + \left\{ \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi)C(t, \xi) \right\} \lambda(\xi) \right] d\xi - \\
& - \int_0^{\omega} \left[ \left\{ \frac{\partial A(t, \xi)}{\partial t} + A^2(t, \xi) \right\} \tilde{v}(t, \xi) + \left\{ \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi)C(t, \xi) \right\} \tilde{u}(t, \xi) + C(t, \xi)\tilde{w}(t, \xi) \right] d\xi - \\
& - \int_0^{\omega} \left[ \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi)f(t, \xi) \right] d\xi. \tag{18}
\end{aligned}$$

Добавим к соотношениям (16), (18) периодические условия

$$\lambda(0) = \lambda(\omega), \tag{19}$$

$$\mu(0) = \mu(T). \tag{20}$$

Таким образом получили замкнутую систему уравнений относительно тройки функций  $(\mu(t), \lambda(x), \tilde{u}(t, x))$ : неизвестная функция  $\tilde{u}(t, x)$  и ее производные  $\tilde{v}(t, x)$ ,  $\tilde{w}(t, x)$  определяются из задачи Гурса (6)-(8) при фиксированных  $\dot{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ , неизвестный функциональный параметр  $\lambda(x)$  - из периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16), (19) при фиксированных  $\mu$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{u}$ , а неизвестный функциональный параметр  $\mu(t)$  - из периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18), (20) при фиксированных  $\dot{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{w}$ .

Предположим, что коэффициенты при старших производных - матрица  $\tilde{A}(x) = \int_0^T A(\tau, x) d\tau$

обратима для всех  $x \in [0, \omega]$ , а матрица  $\tilde{C}(t) = \int_0^{\omega} C(t, \xi) d\xi$  обратима для всех  $t \in [0, T]$ .

Если известны  $\dot{\lambda}(x)$ ,  $\lambda(x)$ ,  $\mu(t)$ , то из (11) - (13) находим функции  $\tilde{v}(t, x)$ ,  $\tilde{w}(t, x)$ ,  $\tilde{u}(t, x)$ . Обратно, если известны функции  $\tilde{v}(t, x)$ ,  $\tilde{w}(t, x)$ ,  $\tilde{u}(t, x)$ , то из периодических краевых задач (16), (19) и (18), (20) можем найти  $\dot{\lambda}(x)$ ,  $\lambda(x)$ ,  $\dot{\mu}(t)$ ,  $\mu(t)$ .

Так как неизвестными являются как  $\tilde{v}(t, x)$ ,  $\tilde{w}(t, x)$ ,  $\tilde{u}(t, x)$ , так и  $\dot{\lambda}(x)$ ,  $\lambda(x)$ ,  $\dot{\mu}(t)$ ,  $\mu(t)$ , для нахождения решения задачи (6) - (10) используем итерационный метод.

Тройку  $(\mu^*(t), \lambda^*(x), \tilde{u}^*(t, x))$  - решение задачи (6) - (10), определяем как предел последовательности троек  $(\mu^{(m)}(t), \lambda^{(m)}(x), \tilde{u}^{(m)}(t, x))$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , по следующему алгоритму:

*Шаг-0.* а) Используя условия (7), (8) из периодической краевой задачи (16), (19), где в правой части системы дифференциальных уравнений  $\tilde{u}(t, x) = 0$ ,  $\tilde{v}(t, x) = 0$ ,  $\mu(t) = 0$ , находим  $\lambda^{(0)}(x)$  для всех  $x \in [0, \omega]$ , а из периодической краевой задачи (18), (20), где в правой части системы дифференциальных уравнений  $\tilde{v}(t, x) = 0$ ,  $\tilde{w}(t, x) = 0$ ,  $\lambda(x) = 0$ ,  $\dot{\lambda}(x) = 0$ , находим  $\mu^{(0)}(t)$  для всех  $t \in [0, T]$ .

б) Из задачи Гурса (6)-(8) при  $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$ , определяем  $\tilde{u}^{(0)}(t, x)$  и ее производные  $\tilde{v}^{(0)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}^{(0)}(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \Omega$ .

*Шаг-1.* а) Из периодической краевой задачи (16), (19), где в правой части системы дифференциальных уравнений  $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(0)}(t, x)$ ,  $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(0)}(t, x)$ ,  $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$ , находим  $\lambda^{(1)}(x)$  для всех  $x \in [0, \omega]$ , а из периодической краевой задачи (18), (20), где в правой части системы дифференциальных уравнений  $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(0)}(t, x)$ ,  $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(0)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(0)}(t, x)$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$ , находим  $\mu^{(1)}(t)$  для всех  $t \in [0, T]$ .

б) Из задачи Гурса (6)-(8) при  $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$ ,  $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$ , определяем  $\tilde{u}^{(1)}(t, x)$  и ее производные  $\tilde{v}^{(1)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}^{(1)}(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \Omega$ .

И т.д.

Шаг- $m$ . а) Из периодической краевой задачи (16), (19), где в правой части системы дифференциальных уравнений  $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\mu(t) = \mu^{(m-1)}(t)$ , находим  $\lambda^{(m)}(x)$  для всех  $x \in [0, \omega]$ , а из периодической краевой задачи (18), (20), где в правой части системы дифференциальных уравнений  $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(m-1)}(x)$ ,  $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(m-1)}(x)$ , находим  $\mu^{(m)}(t)$  для всех  $t \in [0, T]$ .

б) Из задачи Гурса (6)-(8) при  $\mu(t) = \mu^{(m)}(t)$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(m)}(x)$ ,  $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(m)}(x)$ , определяем  $\tilde{u}^{(m)}(t, x)$  и ее производные  $\tilde{v}^{(m)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}^{(m)}(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \Omega$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Пусть

$$\alpha = \max_{(t,x) \in \Omega} \|A(t, x)\|, \beta = \max_{(t,x) \in \Omega} \|C(t, x)\|, \sigma = \alpha + \beta, A_1(x) = [\tilde{A}(x)]^{-1} \int_0^T C(\tau, x) d\tau,$$

$$A_2(t) = [\tilde{C}(t)]^{-1} \int_0^\omega \left[ \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi)C(t, \xi) \right] d\xi, \tilde{\alpha} = \max_{x \in [0, \omega]} \|[\tilde{A}(x)]^{-1}\|, \tilde{\beta} = \max_{t \in [0, T]} \|[\tilde{C}(t)]^{-1}\|,$$

$$\alpha_1 = \max_{x \in [0, \omega]} \|A_1(x)\|, a_1(x) = \max_{t \in [0, T]} \|C(t, x)\|, b_1(x) = \max_{t \in [0, T]} \{ \|A(t, x)\| + \|C(t, x)\| \},$$

$$\alpha_2 = \max_{t \in [0, T]} \|A_2(t)\|, a_2(t) = \max_{x \in [0, \omega]} \left\{ \left\| \frac{\partial A(t, x)}{\partial t} + A^2(t, x) \right\| + \left\| \frac{\partial C(t, x)}{\partial t} + A(t, x)C(t, x) \right\| \right\},$$

$$b_2(t) = \max_{x \in [0, \omega]} \left\{ \left\| \frac{\partial A(t, x)}{\partial t} + A^2(t, x) \right\| + \left\| \frac{\partial C(t, x)}{\partial t} + A(t, x)C(t, x) \right\| + \|C(t, x)\| \right\}.$$

Следующее утверждение дает условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма, которые одновременно обеспечивают существование единственного решения задачи (6)-(10).

**Теорема 1.** Пусть

i) матрицы  $A(t, x)$ ,  $C(t, x)$ , вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы по переменной  $t$  на  $\Omega$ ;

ii) матрица  $\tilde{A}(x) = \int_0^T A(\tau, x) d\tau$  обратима для всех  $x \in [0, \omega]$ , а матрица  $\tilde{C}(t) = \int_0^\omega C(t, \xi) d\xi$

обратима для всех  $t \in [0, T]$ ;

iii) матрицы  $Q_1(\omega) = \int_0^\omega A_1(\xi) d\xi$  и  $Q_2(T) = \int_0^T A_2(\tau) d\tau$  обратимы;

iv) выполняются неравенства  $\| [Q_1(\omega)]^{-1} \| \leq \gamma_1(\omega)$ ,  $\| [Q_2(T)]^{-1} \| \leq \gamma_2(T)$ , где  $\gamma_1(\omega)$ ,  $\gamma_2(T)$  - положительные числа,

$$q_1(\omega) = \gamma_1(\omega) \cdot (e^{\alpha_1 \omega} - 1 - \alpha_1 \omega) < 1, \quad q_2(T) = \gamma_2(T) \cdot (e^{\alpha_2 T} - 1 - \alpha_2 T) < 1;$$

v) справедливо неравенство  $q(T, \omega) =$

$$= \max [T, \omega] \max \{ \kappa_1(\omega), \alpha_1 \kappa_1(\omega) + 1, \kappa_2(T), \alpha_2 \kappa_2(T) + 1 \} \max \{ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \} \left( \max_{x \in [0, \omega]} a_1(x), \max_{t \in [0, T]} a_2(t) \right) +$$

$$+ (\sigma + \beta) \max \left[ \max_{x \in [0, \omega]} b_1(x), \max_{t \in [0, T]} b_2(t) \right] \max \left[ e^{\sigma(T+\omega)} - e^{\sigma T}, e^{\sigma(T+\omega)} - e^{\sigma \omega} \right] < 1,$$

$$\text{где } k_1(\omega) = \left\{ e^{\alpha_1 \omega} \frac{\gamma_1(\omega)}{1 - q_1(\omega)} \alpha_1 \omega^2 + 1 \right\} \left[ (e^{\alpha_1 \omega} - 1) \gamma_1(\omega) (1 + \omega) + e^{\alpha_1 \omega} \right] \omega + \gamma_1(\omega) \omega (1 + \omega),$$

$$k_2(T) = \left\{ e^{\alpha_2 T} \frac{\gamma_2(T)}{1 - q_2(T)} \alpha_2 T^2 + 1 \right\} \left[ (e^{\alpha_2 T} - 1) \gamma_2(T) (1 + T) + e^{\alpha_2 T} \right] T + \gamma_2(T) T (1 + T).$$

Тогда задача (6) - (10) имеет единственное решение.

Доказательство. В соответствии с нулевым шагом алгоритма и условий *i)-ii)* теоремы, неизвестные параметры  $\lambda^{(0)}(x)$ ,  $\mu^{(0)}(t)$  определяются как решения периодических краевых задач:

$$\dot{\lambda}(x) = -A_1(x) \cdot \lambda(x) - [\tilde{A}(x)]^{-1} \int_0^T f(\tau, x) d\tau, \quad \lambda(0) = \lambda(\omega), \tag{21}$$

$$\dot{\mu}(t) = -A_2(t) \cdot \mu(t) - [\tilde{C}(t)]^{-1} \int_0^\omega \left[ \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi) f(t, \xi) \right] d\xi, \quad \mu(0) = \mu(T). \tag{22}$$

При выполнении условий *iii)-iv)* теоремы вытекает существование единственного решения задач (21) и (22) и справедливость оценок [41]

$$\max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(0)}(x)\| \leq k_1(\omega) \max_{x \in [0, \omega]} \|F_1(x)\|, \quad \text{где } F_1(x) = [\tilde{A}(x)]^{-1} \int_0^T f(\tau, x) d\tau,$$

$$\max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\| \leq [\alpha_1 k_1(\omega) + 1] \max_{x \in [0, \omega]} \|F_1(x)\|,$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(0)}(t)\| \leq k_2(T) \max_{t \in [0, T]} \|F_2(t)\|, \quad \text{где } F_2(t) = [\tilde{C}(t)]^{-1} \int_0^\omega \left[ \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi) f(t, \xi) \right] d\xi,$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|\dot{\mu}^{(0)}(t)\| \leq [\alpha_2 k_2(T) + 1] \max_{t \in [0, T]} \|F_2(t)\|.$$

Решая систему интегральных уравнений (11)-(13) при найденных значениях параметров находим  $\tilde{v}^{(0)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}^{(0)}(t, x)$ ,  $\tilde{u}^{(0)}(t, x)$ , для которых имеют место оценки

$$\|\tilde{v}^{(0)}(t, x)\| \leq \max(T, \omega) e^{\sigma(t+x)} M, \quad \|\tilde{w}^{(0)}(t, x)\| \leq \max(T, \omega) e^{\sigma(t+x)} M, \\ \|\tilde{u}^{(0)}(t, x)\| \leq \max(T, \omega) e^{\sigma(t+x)} M,$$

где  $M = \alpha \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\| + \beta \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(0)}(x)\| + \beta \max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(0)}(t)\| + \max_{(t, x) \in \Omega} \|f(t, x)\|$ .

Из *m*-го шага алгоритма и условий *i)-iv)* теоремы вытекает существование функций  $\lambda^{(m)}(x)$  и  $\mu^{(m)}(t)$  - решений периодических краевых задач

$$\dot{\lambda}(x) = -A_1(x) \cdot \lambda(x) - F_1(x) - \\ - [\tilde{A}(x)]^{-1} \left[ \int_0^T C(\tau, x) \mu^{(m-1)}(\tau) d\tau + \int_0^T [A(\tau, x) \tilde{v}^{(m-1)}(\tau, x) + C(\tau, x) \tilde{u}^{(m-1)}(\tau, x)] d\tau \right], \quad \lambda(0) = \lambda(\omega), \tag{23}$$

$$\dot{\mu}(t) = -A_2(t) \cdot \mu(t) - F_2(t) - \\ - [\tilde{C}(t)]^{-1} \int_0^\omega \left\{ \frac{\partial A(t, \xi)}{\partial t} + A^2(t, \xi) \right\} \lambda^{(m-1)}(\xi) + \left\{ \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi) C(t, \xi) \right\} \lambda^{(m-1)}(\xi) \right] d\xi - \\ - [\tilde{C}(t)]^{-1} \int_0^\omega \left\{ \frac{\partial A(t, \xi)}{\partial t} + A^2(t, \xi) \right\} \tilde{v}^{(m-1)}(t, \xi) + \left\{ \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} + A(t, \xi) C(t, \xi) \right\} \tilde{u}^{(m-1)}(t, \xi) \right] d\xi - \\ - [\tilde{C}(t)]^{-1} \int_0^\omega C(t, \xi) \tilde{w}^{(m-1)}(t, \xi) d\xi, \quad \mu(0) = \mu(T). \tag{24}$$

При найденных функциях  $\lambda^{(m)}(x)$ ,  $\mu^{(m)}(t)$  решаем интегральные уравнения (11)-(13) и находим *m*-е приближения  $\tilde{v}^{(m)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}^{(m)}(t, x)$ ,  $\tilde{u}^{(m)}(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \Omega$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Для разностей  $m$ -ых и  $(m-1)$ -ых приближений  $\tilde{v}^{(m)}(t, x) - \tilde{v}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\tilde{w}^{(m)}(t, x) - \tilde{w}^{(m-1)}(t, x)$ ,  $\tilde{u}^{(m)}(t, x) - \tilde{u}^{(m-1)}(t, x)$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}^{(m)}(t, x) - \tilde{v}^{(m-1)}(t, x)\| &\leq \max(T, \omega) e^{\sigma(t+x)} \left\{ \alpha \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(m)}(x) - \dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\| + \right. \\ &\quad \left. + \beta \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(m)}(x) - \lambda^{(m-1)}(x)\| + \beta \max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(m)}(t) - \mu^{(m-1)}(t)\| \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}^{(m)}(t, x) - \tilde{w}^{(m-1)}(t, x)\| &\leq \max(T, \omega) e^{\sigma(t+x)} \left\{ \alpha \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(m)}(x) - \dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\| + \right. \\ &\quad \left. + \beta \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(m)}(x) - \lambda^{(m-1)}(x)\| + \beta \max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(m)}(t) - \mu^{(m-1)}(t)\| \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^{(m)}(t, x) - \tilde{u}^{(m-1)}(t, x)\| &\leq \max(T, \omega) e^{\sigma(t+x)} \left\{ \alpha \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(m)}(x) - \dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\| + \right. \\ &\quad \left. + \beta \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(m)}(x) - \lambda^{(m-1)}(x)\| + \beta \max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(m)}(t) - \mu^{(m-1)}(t)\| \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

А для разностей  $(m+1)$ -ых и  $m$ -ых приближений параметров  $\dot{\lambda}^{(m+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(m)}(x)$ ,  $\lambda^{(m+1)}(x) - \lambda^{(m)}(x)$ ,  $\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)$ ,  $\mu^{(m+1)}(t) - \mu^{(m)}(t)$  получим

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(m+1)}(x) - \lambda^{(m)}(x)\| &\leq k_1(\omega) \tilde{\alpha} \left( \max_{x \in [0, \omega]} a_1(x) T \|\mu^{(m)} - \mu^{(m-1)}\|_1 + \right. \\ &\quad \left. + \max_{x \in [0, \omega]} b_1(x) \int_0^T \max \left\{ \|\tilde{v}^{(m)}(\tau, x) - \tilde{v}^{(m-1)}(\tau, x)\|, \|\tilde{u}^{(m)}(\tau, x) - \tilde{u}^{(m-1)}(\tau, x)\| \right\} d\tau \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(m+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(m)}(x)\| &\leq [\alpha_1 k_1(\omega) + 1] \tilde{\alpha} \left( \max_{x \in [0, \omega]} a_1(x) T \|\mu^{(m)} - \mu^{(m-1)}\|_1 + \right. \\ &\quad \left. + \max_{x \in [0, \omega]} b_1(x) \int_0^T \max \left\{ \|\tilde{v}^{(m)}(\tau, x) - \tilde{v}^{(m-1)}(\tau, x)\|, \|\tilde{u}^{(m)}(\tau, x) - \tilde{u}^{(m-1)}(\tau, x)\| \right\} d\tau \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(m+1)}(t) - \mu^{(m)}(t)\| &\leq k_2(T) \tilde{\beta} \left( \max_{t \in [0, T]} a_2(t) \omega \max \left\{ \|\dot{\lambda}^{(m)} - \dot{\lambda}^{(m-1)}\|_2, \|\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}\|_2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \max_{t \in [0, T]} b_2(t) \int_0^\omega \max \left\{ \|\tilde{v}^{(m)}(t, \xi) - \tilde{v}^{(m-1)}(t, \xi)\|, \|\tilde{u}^{(m)}(t, \xi) - \tilde{u}^{(m-1)}(t, \xi)\|, \|\tilde{w}^{(m)}(t, \xi) - \tilde{w}^{(m-1)}(t, \xi)\| \right\} d\xi \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)\| &\leq [\alpha_2 k_2(T) + 1] \tilde{\beta} \left( \max_{t \in [0, T]} a_2(t) \omega \max \left\{ \|\dot{\lambda}^{(m)} - \dot{\lambda}^{(m-1)}\|_2, \|\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}\|_2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \max_{t \in [0, T]} b_2(t) \int_0^\omega \max \left\{ \|\tilde{v}^{(m)}(t, \xi) - \tilde{v}^{(m-1)}(t, \xi)\|, \|\tilde{u}^{(m)}(t, \xi) - \tilde{u}^{(m-1)}(t, \xi)\|, \|\tilde{w}^{(m)}(t, \xi) - \tilde{w}^{(m-1)}(t, \xi)\| \right\} d\xi \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \max \left( \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(m)}(x) - \dot{\lambda}^{(m-1)}(x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\mu}^{(m)}(t) - \dot{\mu}^{(m-1)}(t)\|, \right. \\ &\quad \left. \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(m)}(x) - \lambda^{(m-1)}(x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(m)}(t) - \mu^{(m-1)}(t)\| \right), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда из оценок (28)-(31) с учетом неравенств (25)-(27) следует

$$\max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(m+1)}(x) - \lambda^{(m)}(x)\| \leq k_1(\omega) \tilde{\alpha} \left( \max_{x \in [0, \omega]} a_1(x) T + \right.$$

$$+ \max_{x \in [0, \omega]} b_1(x) \cdot \max(T, \omega) [\alpha + 2\beta] (e^{\sigma(T+\omega)} - e^{\sigma\omega}) \Delta_m, \tag{32}$$

$$\max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(m+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(m)}(x)\| \leq [\alpha_1 k_1(\omega) + 1] \tilde{\alpha} \left( \max_{x \in [0, \omega]} a_1(x) T + \right. \\ \left. + \max_{x \in [0, \omega]} b_1(x) \cdot \max(T, \omega) [\alpha + 2\beta] (e^{\sigma(T+\omega)} - e^{\sigma\omega}) \right) \Delta_m, \tag{33}$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|\mu^{(m+1)}(t) - \mu^{(m)}(t)\| \leq k_2(T) \tilde{\beta} \left( \max_{t \in [0, T]} a_2(t) \omega + \right. \\ \left. + \max_{t \in [0, T]} b_2(t) \cdot \max(T, \omega) [\alpha + 2\beta] (e^{\sigma(T+\omega)} - e^{\sigma T}) \right) \Delta_m, \tag{34}$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|\dot{\mu}^{(m+1)}(t) - \dot{\mu}^{(m)}(t)\| \leq [\alpha_2 k_2(T) + 1] \tilde{\beta} \left( \max_{t \in [0, T]} a_2(t) \omega + \right. \\ \left. + \max_{t \in [0, T]} b_2(t) \cdot \max(T, \omega) [\alpha + 2\beta] (e^{\sigma(T+\omega)} - e^{\sigma T}) \right) \Delta_m. \tag{35}$$

Из оценок (32)-(35) получим основное неравенство

$$\Delta_{m+1} \leq q(T, \omega) \Delta_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{36}$$

Из условия v) теоремы вытекает сходимость последовательности  $\{\Delta_m\}$  при  $m \rightarrow \infty$  к  $\Delta^*$ . Отсюда получаем равномерную сходимость последовательностей  $\{\lambda^{(m)}(x)\}$ ,  $\{\dot{\lambda}^{(m)}(x)\}$ ,  $\{\mu^{(m)}(t)\}$ ,  $\{\dot{\mu}^{(m)}(t)\}$  при  $m \rightarrow \infty$  соответственно к  $\lambda^*(x)$ ,  $\dot{\lambda}^*(x)$ ,  $\mu^*(t)$ ,  $\dot{\mu}^*(t)$  для всех  $x \in [0, \omega]$ ,  $t \in [0, T]$ . Функции  $\lambda^*(x)$ ,  $\mu^*(t)$  являются непрерывными на  $[0, \omega]$ ,  $[0, T]$ , соответственно. Из равномерной сходимости последовательностей  $\{\dot{\lambda}^{(m)}(x)\}$ ,  $\{\dot{\mu}^{(m)}(t)\}$  при  $m \rightarrow \infty$  вытекает, что  $\frac{d\lambda^*(x)}{dx} \equiv \dot{\lambda}^*(x) = \tilde{\lambda}^*(x)$  для всех  $x \in [0, \omega]$  и  $\frac{d\mu^*(t)}{dt} \equiv \dot{\mu}^*(t) = \tilde{\mu}^*(t)$  для всех  $t \in [0, T]$ . На основе оценок (25), (26), (27) установим равномерную сходимость последовательностей  $\{\tilde{v}^{(m)}(t, x)\}$ ,  $\{\tilde{w}^{(m)}(t, x)\}$ ,  $\{\tilde{u}^{(m)}(t, x)\}$  при  $m \rightarrow \infty$  к функциям  $\tilde{v}^*(t, x)$ ,  $\tilde{w}^*(t, x)$ ,  $\tilde{u}^*(t, x)$ , соответственно, для всех  $(t, x) \in \Omega$ . Очевидно, что функция  $\tilde{u}^*(t, x)$  является непрерывной на  $\Omega$  и имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial \tilde{u}^*(t, x)}{\partial x} = \tilde{v}^*(t, x)$ ,  $\frac{\partial \tilde{u}^*(t, x)}{\partial t} = \tilde{w}^*(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \Omega$ .

Тройка функций  $(\mu^*(t), \lambda^*(x), \tilde{u}^*(t, x))$  является решением задачи (6)-(10). Единственность решения задачи (6)-(10) доказывается от противного.

Теорема 1 доказана. Определим сумму функций  $\tilde{u}^*(t, x) + \mu^*(t) + \lambda^*(x) = u^*(t, x)$ . Из эквивалентности задач (1), (4), (5) и (6)-(10) следует

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия i)-v) теоремы 1.

Тогда периодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений (1), (4), (5) имеет единственное классическое решение  $u^*(t, x)$ .

Для исходной задачи с учетом  $(T, \omega)$  – периодичности исходных данных и свойств характеристик будет справедлива

**Теорема 3.** Пусть i) матрицы  $A(t, x)$ ,  $C(t, x)$ , вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы по переменной  $t$  на  $R^2$ , а также  $(T, \omega)$  – периодичны на плоскости; и выполнены условия ii)-v) теоремы 1.

Тогда периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений (1)-(3) имеет единственное классическое  $(T, \omega)$  – периодическое решение  $u^*(t, x)$ .

Замечание. 1) Аналогичные утверждения можно получить для системы  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x)$ , при предположениях, что  $(n \times n)$ -матрицы  $B(t, x)$ ,  $C(t, x)$ ,  $n$ - вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы по  $x$  на  $R^2$ , а также  $(T, \omega)$  – периодичны.

2) Для системы  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = C(t, x)u + f(t, x)$ , где  $(n \times n)$ -матрица  $C(t, x)$ ,  $n$ - вектор-функция  $f(t, x)$  предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по переменным  $t, x$  на  $R^2$ , а также  $(T, \omega)$  – периодичными, также можно установить аналоги теорем 1-3.

Заключение. Таким образом, периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений (1)-(3) на основе свойств характеристик системы и путем введения новых функциональных параметров  $\lambda(x)$ ,  $\mu(t)$  как значений искомой функции  $u(t, x)$  на характеристиках  $t = 0$ ,  $x = 0$  со специальным смещением в точке  $(0,0)$ , а также осуществления замены  $u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \lambda(x) + \mu(t)$  сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами на прямоугольнике и функциональных соотношений относительно параметров. Построен алгоритм нахождения решения полученной задачи и доказана его сходимости. Получены условия существования единственного классического решения задачи (1)-(3) в терминах матриц  $A(t, x)$ ,  $C(t, x)$ , чисел  $\omega, T$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague: Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358 p.
- [2] Перов А.И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1981. -196с.
- [3] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984. - 264с.
- [4] Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громьяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. - 232с.
- [5] Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1992. - 208с.
- [6] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: Наука, 1998. - 191 с. - (Тр. МИАН; Т. 222)
- [7] Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Kiev. 1963. Vol. 2. P. 440-457.
- [8] Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1965. Vol. 14. No 2. P. 95-118.
- [9] Cesari L. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1965. Vol. 20. No 2. P. 170-190.
- [10] Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1974. Vol. 1. No 3-4. P. 311-358.
- [11] Cesari L. Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Shauder // Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sc. fis. mat. e natur. 1974. Vol. 57. No 5. P. 303-307.
- [12] Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. Vol. 23. No 5. P. 380-398.
- [13] Hecquet G. Utilisation de la methode d'Euler-Cauchy pour la demonstration d'un theoreme de L.Cesari // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.A. 1971. Vol.273. P.712-715.
- [14] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en  $x_1$  de l'equation  $u_{x_1 \dots x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_2 x_n})$  // C. R. Acad. Sci. Paris Ser.A. 1973. Vol. 276. P. 997-1000.
- [15] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en  $x_1$  et  $x_2$  de l'equation  $u_{x_1 \dots x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_2 x_n})$  // C. R. Acad. Sci. Paris Ser.A. 1973. Vol.276. P.1047-105
- [16] Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. No 3. P. 557-566.

- [17] Aziz A.K., Brodsky S.L. Periodic solutions of a class of weakly nonlinear hyperbolic partial differential equations // *SIAM J. Math. Anal.* 1972. Vol. 3. No 2. P. 300-313.
- [18] Aziz A.K., Horak M.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large // *SIAM J. Math. Anal.* 1972. Vol. 3. No 1. P. 176-182.
- [19] Aziz A.K., Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. Vol. 146. P. 167-178.
- [20] Lakshmikantham V., Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // *Comput. and Math.* 1985. Vol. 11. No 1-3. P. 249-259.
- [21] Жестков С.В. О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболических систем в частных производных // *Украинский математический журнал.* 1987. Т. 39. No 4. С. 521-523.
- [22] Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. I // *Дифференц. уравнения.* 1993. Т. 29. No 2. С. 281-297.
- [23] Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. II // *Дифференц. уравнения.* 1993. Т. 29. No 4. С. 637-645.
- [24] Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 1994. Vol. 1. P. 1-144.
- [25] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // *Archivum mathematicum.* 1997. Tomus 33. No 4. P. 253-272.
- [26] Кигурадзе Т.И. О двоякопериодических решениях одного класса нелинейных гиперболических уравнений // *Дифференц. уравнения.* 1998. Т. 34. No 2. С. 238-245.
- [27] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // *Nonlinear Analysis.* 2000. Vol. 39. No 1. P. 173-185.
- [28] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // *Nonlinear Analysis.* 2002. Vol. 49. No 1. P. 87-112.
- [29] Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н. Динамика сорбции из жидких сред. М.: Наука, 1983. - 237с.
- [30] Веницианов Е.В., Сенявин М.М. Математическое описание фильтрационного осветления суспензий // *Теорет. основы хим. технологии.* 1976. Т. 10. No 4. С.584-592.
- [31] Рачинский В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. - 136 с.
- [32] Минц Д.М. Кинетика фильтрации малоцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах // *Доклады АН СССР.* 1951. Т. 78. No 2. С. 315-318.
- [33] Perzyna P. The propagation of shock waves non-homogeneous elastic-ves-koplastic bodies // *Arch. mech. stosow.* 1961. Vol. 13. P. 75-106.
- [34] Perzina P. The propagation of stress wave in a rate sensitive and workhardning plastic medium // *Arch. mech. stosow.* 1964. Vol. 16. P. 1215-1244.
- [35] Цабек Л.К. О новых режимах при движении адсорбируемых смесей через пористую среду // *Доклады АН СССР.* 1980. Т. 254. No 6. С. 1372-1376.
- [36] Асанова А.Т. Периодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений // *Доклады НАН РК.* 2002. No 4. С. 5-11.
- [37] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // *Ukrainian Mathematical Journal.* 2004. Vol. 56. No 4. P.682-694.
- [38] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.
- [39] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // *Differential Equations.* 2003. Vol.39. No 10. P. 1414-1427.
- [40] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2013. Vol. 402. No 1. P.167-178.
- [41] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // *USSR Computational mathematics and mathematical Physics.* 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.

## REFERENCES

- [1] Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague : Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston, London, 1982. - 358p.
- [2] Perov A.I. Variational methods in the theory of nonlinear oscillations. Voronezh: Izd-vo Voronezh. Un-ta, 1981. -196p. (in Russ.).
- [3] Ptashnik B.I. Invalid boundary value problems for differential equations with partial derivatives. Kiev: Nauk. dumka, 1984. - 264p. (in Russ.).
- [4] Mitropol'skii Yu.A., Khoma G.P., Gromiyak M.I. Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type. Kiev: Nauk. dumka, 1991. - 232p. (in Russ.).
- [5] Samoilenko A.M., Tkach B.P. Numerical and analytical methods in the theory of periodic solutions of partial differential equations. Kiev: Nauk. dumka, 1992. - 208p. (in Russ.).
- [6] Kolesov A.Yu., Mishenko E.F., Rozov N.Kh. Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations. М.: Nauka, 1998. - 191 p. - (Trudy MIAN; V.222) (in Russ.).
- [7] Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // *Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961),* Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. Kiev. 1963. Vol. 2. P. 440-457.

[8] Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 1965. Vol. 14. No 2. P. 95-118.

[9] Cesari L. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1965. Vol.20. No 2. P.170-190.

[10] Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // *Ann. Scuola norm. super. Pisa*. 1974. Vol. 1. No 3-4. P. 311-358.

[11] Cesari L. Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Shauder // *Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sc. fis. mat. e natur.* 1974. Vol. 57. No 5. P. 303-307.

[12] Hale J.K. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1967. Vol. 23. No 5. P. 380-398.

[13] Hecquet G. Utilisation de la methode d'Euler-Cauchy pour la demonstration d'un theoreme de L.Cesari // *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A*. 1971. Vol. 273. P. 712-715.

[14] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en  $x_1$  de l'equation  $u_{x_1 \dots x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_2 x_n})$  // *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A*. 1973. Vol. 276. P. 997-1000.

[15] Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en  $x_1$  et  $x_2$  de l'equation  $u_{x_1 \dots x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_2 x_n})$  // *C.R. Acad. Sci. Paris Ser.A*. 1973. Vol. 276. P. 1047-105

[16] Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1966. Vol. 17. No 3. P. 557-566.

[17] Aziz A.K., Brodsky S.L. Periodic solutions of a class of weakly nonlinear hyperbolic partial differential equations // *SIAM J. Math. Anal.* 1972. Vol. 3. No 2. P. 300-313.

[18] Aziz A.K., Horak M.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large // *SIAM J. Math. Anal.* 1972. Vol. 3. No 1. P. 176-182.

[19] Aziz A.K., Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. Vol. 146. P. 167-178.

[20] Lakshmikantham V., Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // *Comput. and Math.* 1985. Vol. 11. No 1-3. P. 249-259.

[21] Zhestkov S.V. About two-periodic solutions of nonlinear hyperbolic-cal systems of partial // *Ukrainskii matematicheskii journal*. 1987. T. 39. No 4. p. 521-523. (in Russ.).

[22] Kiguradze T.I. Periodic boundary value problems for linear hyperbolic equations. I // *Differents. uravneniya*. 1993. V.29. No 2. p.281-297. (in Russ.).

[23] Kiguradze T.I. Periodic boundary value problems for linear hyperbolic equations. II // *Differents. uravneniya*. 1993. V. 29. No 4. p. 637-645. (in Russ.).

[24] Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 1994. Vol. 1. P. 1-144.

[25] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // *Archivum mathematicum*. 1997. Tomus 33. No 4. P. 253-272.

[26] Kiguradze T.I. O dvoiyakoperiodicheskikh resheniyah odnogo klassa nelineinyh giperbolicheskikh uravnenii // *Differents. uravneniya*. 1998. T.34. No 2. S.238-245.

[27] Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // *Nonlinear Analysis*. 2000. Vol. 39. No 1. P. 173-185.

[28] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // *Nonlinear Analysis*. 2002. Vol. 49. No 1. P. 87-112.

[29] Venetsianov E.V., Rubinshtein R.N. Sorption dynamics of liquid media. M.: Nauka, 1983. – 237p. (in Russ.).

[30] Venetsianov E.V., Seniyavin M.M. The mathematical description of filtration, clarification tional suspensions // *Teoret. osnovy khim. tekhnologii*. 1976. V. 10. No 4. p.584-592. (in Russ.).

[31] Rachinskii V.V. Introduction to the general theory of sorption dynamics and chromatography. M.: Nauka, 1964. - 136 p. (in Russ.).

[32] Mints D.M. Kinetics of filtering low-concentration aqueous suspensions in water treatment filters // *Doklady AN SSSR*. 1951. V. 78. No 2. p. 315-318. (in Russ.).

[33] Perzyna P. The propagation of shock waves non-homogeneous elastic - veskoplastic bodies // *Arch. mech. stosow*. 1961. Vol. 13. P. 75-106.

[34] Perzina P. The propagation of stress wave in a rate sensitive and workhardning plastic medium // *Arch. mech. stosow*. 1964. Vol. 16. P. 1215-1244.

[35] Tsabek L.K. On the new modes of motion of adsorbed compounds through a porous medium // *Doklady AN SSSR*. 1980. V. 254. No 6. p. 1372-1376. (in Russ.).

[36] Asanova A.T. Periodic boundary value problem for systems of hyperbolic equations // *Doklady NAN RK*. 2002. No 4. p. 5-11. (in Russ.).

[37] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // *Ukranian Mathematical Journal*. 2004. Vol. 56. No 4. P.682-694.

[38] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.

[39] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations //Differential Equations. 2003. Vol. 39. No 10. P. 1414-1427.

[40] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. P.167-178.

[41] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.

## АРАЛАС ТУЫНДЫЛАРЫ БАР ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ АРНАЙЫ ТҮРДЕГІ ЖҮЙЕСІ ҮШІН ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ПЕРИОДТЫ ЕСЕП ТУРАЛЫ

А. Т. Асанова

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** гиперболаалық, период, шарт, шешілімділік, алгоритм.

**Аннотация.** Аралас туындылары бар гиперболаалық теңдеулердің арнайы түрдегі жүйесі үшін жазықтықтағы периодты есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуы мәселелері және оны құру тәсілдері зерттеледі. Берілімдері периодты болған жағдайда зерттелінетін жазықтықтағы периодты есеп тіктөртбұрыштағы периодты шеттік есепке келтіріледі. Екінші ретті гиперболаалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есепті шешу үшін қосымша функционалдық параметрлер енгізу әдісі қолданылады. Жаңа белгісіз функциялар ізделінді шешімнің характеристикалардағы мәндері ретінде енгізіледі. Гиперболаалық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің ізделінді шешімі жаңа белгісіз функция мен енгізілген функционалдық параметрлердің қосындысына алмастырылады. Қарастырылып отырған периодты шеттік есеп функционалдық параметрлері бар гиперболаалық теңдеулер жүйесі үшін Гурса есебінен және функционалдық қатынастардан тұратын пара-пар есепке келтіріледі. Алынған функционалдық параметрлері бар характеристикалардағы пара-пар есептің шешімін табудың алгоритмдері ұсынылған. Құрылған алгоритмнің жүзеге асырылымдығы мен жинақтылығы есептің берілімдері терминінде дәлелденген. Функционалдық параметрлері бар характеристикалардағы пара-пар есептің бірімәнді шешілімділігінің коэффициенттік жеткілікті шарттары тағайындалған. Арнайы түрдегі гиперболаалық теңдеулер жүйесі үшін жазықтықтағы периодты есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуы туралы теорема дәлелденген.

*Поступила 07.07.2015 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 117 – 120

## THE CALCULATION INDEX OF SCATTERING IN THE EARTH'S ATMOSPHERE

A. M. Karimov

Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: karalik0@yandex.ru

**Key words:** Index, indicatrix, scattering, atmosphere.

**Abstract.** In this article two options of calculation the index of scattering of sunlight passing through the Earth's atmosphere are discussed. Depending on the availability of certain parameters, it can be used in the calculation of one of the options. The essential components of computing are the latitude of observing site and the index of refraction in the Earth's atmosphere. In another instance, it is required more parameters: atmospheric density, refractive index, wavelength, and the number of drops of water vapor per unit volume, the number of dust

particles in the unit volume and the particle radius. These equations can be used in studies of the physical processes occurring in the Earth's atmosphere.

УДК 551.521

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. М. Каримов

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** показатель, индикатриса, рассеяние, атмосфера.

**Аннотация.** Рассмотрены два варианта вычисления показателя индикатрисы рассеяния солнечного света проходящего через земную атмосферу. В зависимости от наличия тех или иных параметров, может быть использован в расчетах один из предложенных вариантов. Необходимыми компонентами вычислений являются значения широты места наблюдения и показатель преломления, в земной атмосфере. В другом случае, требуется большее количество параметров: плотность атмосферы, показатель преломления, длина волны, количество капель водяного пара в единичном объёме, количество частиц пыли в единичном объёме и радиус частиц. Полученные уравнения могут использоваться при исследованиях физических процессов происходящих в земной атмосфере.

**Введение.** При исследовании физических процессов протекающих в земной атмосфере, приходится учитывать рассеяние солнечного света частицами различных размеров, а также молекулами газов формирующих газовую оболочку Земли. Рассмотрение оптических свойств атмосферы, требует учёта функции ослабления приходящей к земной поверхности коротковолновой солнечной радиации. Одним из показателей снижения солнечного излучения проходящего через атмосферу Земли является индикатриса рассеяния. Которая определяется на основании спектрофотометрических измерений [1]. При обработке результатов измерений, имеют место затруднения при вычислениях и интерпретации их результатов.

**Цель работы.** Уточнения численных значений показателя индикатрисы рассеяния для расчётов в области физики земной атмосферы.

**Метод проведения работы.** Сопоставление накопленных закономерностей в данной области исследований, позволяет провести следующий метод анализа посвящённый этой проблематике: Показатель индикатрисы рассеяния  $\varkappa$ , связан с показателем поглощения  $k$ , следующим соотношением [2]:

$$4\pi\varkappa = k\lambda \quad \text{или} \quad \varkappa = \frac{k\lambda}{4\pi} \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны нм;  $\pi$  – 3,1415926; показатель поглощения;  $k$ , определяется следующим соотношением:

$$k = \alpha_{\Sigma}\rho \quad (2)$$

$\alpha_{\Sigma}$  – интегральный коэффициент рассеяния, который вычисляется по уравнению (3);  $\rho$  – плотность атмосферы кг/м<sup>3</sup>. Коэффициент рассеяния  $\alpha_{\Sigma}$  можно рассматривать как сумму релеевского рассеяния, рассеяние молекулами водяного пара и рассеяние на частицах пыли в атмосфере [1]:

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_R + \alpha_w + \alpha_D \quad (3)$$

где  $\alpha_R$  - коэффициент релеевского рассеяния, вычисляется по уравнению (4);  $\alpha_w$  - рассеяние молекулами водяного пара, вычисляется по закону Ми (5);  $\alpha_D$  - рассеяние на частицах пыли вычисляется по уравнению Стреттона и Хоутона (6) [1]:

$$\alpha_R = \frac{32\pi^3(n-1)^2}{3\lambda^4N} \quad (4)$$

где  $\pi$  – 3,1415926;  $n$  – показатель преломления;  $\lambda$  – длина волны нм;  $N$  – число Авогадро  $6,022 \times 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> [1].

$$\alpha_w = q\lambda^{-n} \quad (5)$$

где  $q$  – количество капель водяного пара в единичном объёме;  $\lambda$  – длина волны нм;  $n$  – показатель преломления, значения которого существуют в пределах от 0 до 4 [1].

$$\alpha_D = \frac{4\pi^2 r^3 q_*}{\lambda} \quad (6)$$

где  $\pi = 3,1415926$ ;  $r$  – радиус частиц мкм;  $\lambda$  – длина волны нм;  $q_*$  – количество частиц пыли в единичном объёме. Таким образом, подставляя в уравнение (1) расписанные коэффициенты имеем:

$$\kappa = \frac{\rho\lambda}{4\pi} \left( \frac{32\pi^3(n-1)^2}{3\lambda^4 N} + q\lambda^{-n} + \frac{4\pi^2 r^3 q_*}{\lambda} \right) = \frac{8\rho\pi^2(n-1)^2}{3\lambda^3 N} + \frac{\rho q}{4\pi\lambda^{-n+1}} + \rho\pi r^3 q_* \quad (7)$$

С другой стороны, показатель индикатрисы рассеяния  $\kappa$  можно получить из уравнения (8) [2]:

$$m = n(1+i\kappa) \quad (8)$$

$m$  – оптическая масса (толща) атмосферы;  $n$  – показатель преломления, значения которого существуют в пределах от 0 до 4;  $i$  – мнимое число равное -1. Из уравнения (8) имеем [2]:

$$\kappa = \frac{m-n}{ni} \quad (9)$$

$m$  – оптическую массу атмосферы можно найти из следующего соотношения [1,2]:

$$m = \sec z - \frac{2,8}{90-z} = \frac{90-z-2,8\cos z}{90\cos z - z\cos z} = - \int_0^\infty \rho ds \quad (10)$$

$z$  – угол падения солнечных лучей;  $\rho$  – плотность атмосферы;  $ds$  – элемент пути луча сквозь атмосферу [1]. Угол падения солнечных лучей  $z$ , можем получить из следующего уравнения [3]:

$$z = 90 \pm \delta - \varphi = 90 \pm 23,7 - \varphi \quad (11)$$

$z$  – угол падения солнечных лучей;  $\delta$  – угол наклона эклиптики к земному экватору, равный  $23,7^\circ$ . Для северного полушария эта величина берется со знаком плюс, для южного со знаком минус.  $\varphi$  – широта места наблюдения.

**Результаты работы.** Подставляя значение  $m$  из уравнения (10) в уравнение (9) получаем значение показателя индикатрисы рассеяния  $\kappa$ , которое можно приравнять с уравнением (7), в конечном итоге получаем выражение используемое для вычисления значения  $\kappa$ :

$$\kappa = -\frac{1}{n} \left( \frac{(\pm 23,7 - \varphi) - 2,8 \cos(90 \pm 23,7 - \varphi)}{90 \cos(90 \pm 23,7 - \varphi) - (90 \pm 23,7 - \varphi) \cos(90 \pm 23,7 - \varphi)} + n \right) = \frac{8\rho\pi^2(n^2 - 2n + 1)}{3\lambda^3 N} + \frac{\rho q}{4\pi\lambda^{-n+1}} + \rho\pi r^3 q_* \quad (12)$$

**Область применения результатов.** Полученные формулы можно использовать при расчётах в оптике атмосферы, гелиоэнергетике, метеорологии и астрофизике.

**Выводы.** Показатель индикатрисы рассеяния  $\kappa$ , можно определить двумя способами по уравнению (11). В первом случае достаточно значений широты места наблюдения  $\varphi$  (с учётом полушария) и показателя преломления  $n$  в земной атмосфере. Во втором случае существенно увеличивается ряд необходимых параметров: плотность атмосферы  $\rho$ , показатель преломления  $n$ , длина волны  $\lambda$ , количество капель водяного пара в единичном объёме  $q$ , количество частиц пыли в единичном объёме  $q_*$  и радиус частиц  $r$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хромов С. П. Мамонтова Л. И. Метеорологический словарь. – Л.: Гидрометеоздат, 1974. – 569 с.
- [2] Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1984. – 751 с.
- [3] Воронцов-Вельяминов Б. А. Астрономия. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.

#### REFERENCES

- [1] Khromov S. P. Mamontova L. I. *Meteorological dictionary*. L. Gidrometeoizdat. **1974**. 569 p. (in Russ.).
- [2] Matveev L. T. *Course of general meteorology. Atmospheric physics*. L. Gidrometeoizdat. **1984**. 751 p. (in Russ.).
- [3] Vorontsov-Vel'iaminov B. A. *Astronomy*. M. Prosveshchenie. **1987**. 159 p. (in Russ.).

**ЖЕР АТМОСФЕРАСЫНДАҒЫ ШАШЫРАУДЫҢ ИНДИКАТРИСАНЫ КӨРСЕТКІШІ ЕСЕПТІГІ**

Ә. М. Кәрімов

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** көрсеткіш, индикатриса, атмосфера, шашырау.

**Аннотация.** Мақала екі нұсқасы Жер атмосферасындағы арқылы күн сәулесінің өту шашырау индексі есептеу талқылайды. Белгілі бір параметрлер болуына байланысты, ол опцияларының бірін есептеу кезінде пайдаланылуы мүмкін. есептеу маңызды компоненттері ендік мәндері болып табылады және Жер атмосферасындағы сыну көрсеткіші. Атмосфералық тығыздығы, сыну индексі, толқын ұзындығы, бірлік көлемі, бір су буының тамшылардың саны, бірлік көлемі шаң бөлшектердің саны және бөлшектердің радиусы. Басқа жағдайда, параметрлер көп талап етеді. Бұл теңдеулер Жер атмосферасындағы жатқан физикалық процестерді зерттеу кезінде пайдаланылуы мүмкін.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 120 – 124

# THE CRITERION OF ONE-VALUED SOLVABILITY OF DIRICHLET AND POINCARÉ SPECTRAL PROBLEMS FOR GELLERSTEDT MULTIDIMENSIONAL EQUATION

S. A. Aldashev<sup>1</sup>, B. Uaisov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Kazakh Academy of Transport and Communications named after M. Tynysbayev, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: Aldash51@mail.ru

**Key words:** criterion, spectral problems, multidimensional, Bessel function.

**Abstract.** It has been shown in a plane that one of fundamental problems of Math Physics, i.e. studying the behavior of a hesitating string, is not correct when boundary conditions are given on the whole boundary of the domain. As it is shown below, Dirichlet problem is incorrect not just for a wave equation but for general hyperbolic equations.

The criterion of one-valued solvability of Dirichlet and Poincaré spectral problems for Gellerstedt multidimensional equation is obtained in the article.

УДК 517.956

# КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

С. А. Алдашев<sup>1</sup>, Б. Уайсов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** критерий, спектральные задачи, многомерное, функция Бесселя.

**Аннотация.** На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики – изучение поведения колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе

области. Как показано далее, задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральных задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта.

**1. Постановка задачи и результат.** Пусть  $\Omega_\beta$  – цилиндрическая область евклидова пространства  $E_{m+1}$  точек  $(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ , ограниченная цилиндром  $r = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \beta > 0$  и  $t = 0$ , где  $|\bar{x}|$  – длина вектора  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial\Omega_\beta$  области  $\Omega_\beta$ , обозначим через  $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$  соответственно.

В области  $\Omega_\beta$  рассмотрим многомерное уравнение Геллерстедта со спектральным действительным параметром

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} = \gamma u, \quad (1)$$

где  $p = \text{const} > 0$ ,  $\Delta_x$  – оператор Лапласа по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ,  $m \geq 2$

В качестве многомерных спектральных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** Найти решение (1) в области  $\Omega_\beta$  из класса  $C(\overline{\Omega_\beta}) \cap C^2(\Omega_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = 0, u|_{\Gamma_\beta} = 0, u|_{S_\beta} = 0, \quad (2)$$

или

$$u_t|_{S_0} = 0, u|_{\Gamma_\beta} = 0, u|_{S_\beta} = 0, \quad (3)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат  $x_1, x_2, \dots, x_m, t$  к сферическим  $r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}, t$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ,  $i = 2, 3, \dots, m-1$ .

Пусть  $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$  – система линейно независимых сферических функций порядка  $n$ ,  $1 \leq k \leq k_n$ ,  $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(n+m-2)$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1})$ .

Тогда справедлива

**Теорема.** 1) Если  $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$ , то задача 1 имеет только нулевое решение; 2) при  $\gamma > -\mu_{s,n}^2$  задача 1 имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда

$$\cos \beta' \sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (4)$$

где  $\beta' = \frac{2}{2+p} \beta^{\frac{(2+p)}{2}}$ ,  $\mu_{s,n}$  – нули функций Бесселя первого рода  $J_{tt+\frac{(m-2)}{2}}(Z)$ .

**2. Доказательство теоремы.** В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$t^p \left( u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2} \right) - u_{tt} = \gamma u, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно ([1]), что спектр оператора  $\delta$  состоит из собственных чисел  $\lambda_n = n(n+m-2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , каждому из которых соответствует  $k_n$  ортонормированных собственных функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$ .

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу  $C(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ , то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где  $\bar{u}_n^k(r, t)$ - функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$  ([1]), будем иметь

$$t^p \left( \bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{nt}^k = \gamma \bar{u}_n^k, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

при этом краевые условия (2) и (3), с учетом леммы 1, соответственно запишутся в виде

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = 0, \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \bar{u}_n^k(r, \beta) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

$$\bar{u}_{nt}^k(r, 0) = 0, \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \bar{u}_n^k(r, \beta) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

Произведя замену  $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$ , и положив, затем  $r = r$ ,  $x_0 = \frac{2}{2+p} t^{\frac{2}{2+p}}$ ,

задачи (7), (8) и (7), (9) приведем к следующим задачам Дирихле и Пуанкаре

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k \equiv v_{\alpha,nrr}^k - v_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} v_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_{\alpha,n}^k - \mathcal{W}_{\alpha,n}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10_\alpha)$$

$$v_{\alpha,n}^k(r, 0) = 0, \quad v_{\alpha,n}^k(1, x_0) = 0, \quad v_{\alpha,n}^k(r, \beta') = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} v_{\alpha,n}^k(r, 0) = 0, \quad v_{\alpha,n}^k(1, x_0) = 0, \quad v_{\alpha,n}^k(r, \beta') = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где

$$0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1, \quad \bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad v_{\alpha,n}^k(r, x_0) = u_n^k \left[ r, \left( \frac{2+p}{2} x_0 \right)^{\frac{2}{2+p}} \right]$$

Наряду с уравнением (10<sub>α</sub>) рассмотрим уравнение

$$L_0 v_{0,n}^k \equiv v_{0,nrr}^k - v_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_{0,n}^k - \mathcal{W}_{0,n}^k = 0, \quad (10_0)$$

Как доказано в [2, 3] (см. также [4]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10<sub>α</sub>) и (10<sub>0</sub>).

**Утверждения 1.** Если  $v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$ -решение задачи Коши для уравнения (10<sub>0</sub>), удовлетворяющее условиям

$$v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (13)$$

то функция

$$v_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{\alpha-1} d\xi \equiv 2^{-1} \gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[ \frac{v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0^2} \right] \quad (14)$$

при  $\alpha > 0$  является решением уравнения (10<sub>α</sub>) с данными (13).

**Утверждения 2.** Если  $v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$ -решение задачи Коши для уравнения (10<sub>0</sub>), удовлетворяющее условиям

$$v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0,$$

то при  $0 < \alpha < 1$  функция

$$\begin{aligned} v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) &= \gamma_{2-k+2q} \left( \frac{1}{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^q \left[ x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \equiv \\ &\equiv 2^{q-1} \gamma_{2-k+2q} \Gamma \left( q - \frac{\alpha}{2} + 1 \right) D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1} \left[ \frac{v_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

является решением уравнения (10<sub>α</sub>) с начальными данными

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} v_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) = v_n^k(r),$$

где  $\sqrt{\pi} \Gamma \left( \frac{\alpha}{2} \right) \gamma_\alpha = 2 \Gamma \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)$ ,  $\Gamma(z)$ - гамма-функция  $D_{0r}^\alpha$ - оператор Римана-Лиувилля ([2]), а

$q \geq 0$ - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству  $2 - \alpha + 2q \geq m - 1$ .

Учитывая формулу (15), а также обратимость оператора  $D_{0r}^\alpha$  ([2]), задачу Дирихле (10<sub>α</sub>), (11) сводим к задаче Пуанкаре для уравнения (10<sub>0</sub>), с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad v_{0,n}^{k,1}(1, x_0) = 0, \quad v_{0,n}^{k,1}(r, \beta') = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

Используя формулу (14), задачу Пуанкаре (10<sub>α</sub>), (12) также приводим к задаче (10<sub>0</sub>), (16).

В [5] показано, что 1) если  $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$ , то задача (10<sub>0</sub>) (16) имеет только нулевое решение; 2) при  $\gamma > -\mu_{s,n}^2$  задача (10<sub>0</sub>) (16) имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда имеет место условие (4).

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливаются аналогичные результаты для задач (10<sub>α</sub>), (11) и (10<sub>α</sub>), (12).

Следовательно, из (6) следует справедливость теоремы 1 для задачи 1.

Заметим, что при  $\gamma = 0$  теорема 1 согласуется с результатами работы [6].

Отметим, также, что теорема 1 анонсировано в [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962-254с.
- [2] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994-170с.
- [3] Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения, Орал: ЗКАТУ, 2007-139с.
- [4] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск: НГУ, 1973-94с.
- [5] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения// Материалы I международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011-с. 35-39.
- [6] Алдашев С.А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта// Украинский математический журнал, 2012, т.64, №3-с.3-9.
- [7] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного уравнения Геллерстедта// Материалы международной конференции «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2013-с. 31-33.

REFERENCES

- [1] Mikhlín S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations, M.: Physmathgiz, **1962**, 254 p. (in Russ.).  
[2] Aldashev S.A. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations, Almaty: Gylym, **1994**, 170 p. (in Russ.).  
[3] Aldashev S.A. Confluent multidimensional hyperbolic equations, Oral: ZKATU, **2007**, 139 p. (in Russ.).  
[4] Tersenov S.A. Introduction to the theory of equations confluent on the boundary, Novosibirsk: NGU, **1973**, 94 p. (in Russ.).  
[5] Aldashev S.A. Criterion of one-valued solvability of Poincaré spectral problem in a cylindrical domain for a multi-dimensional wave equation, Materials of the International conference of young scientists "Math modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics", Nalchik: SRI PMA KBSC RAS, **2011**. P. 35-39. (in Russ.).  
[6] Aldashev S.A. Correctness of Dirichlet and Poincaré problems in a cylindrical domain for Gellerstedt multidimensional equation, Ukrainian math journal, **2012**, v.64, №3, p.3-9. (in Russ.).  
[7] Aldashev S.A. Criterion of one-valued solvability of Dirichlet and Poincaré spectral problem for Gellerstedt multi-dimensional equation, Materials of the International conference of young scientists "Math modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics", Nalchik: SRI PMA KBSC RAS, **2013**, p. 31-33. (in Russ.).

КӨП ӨЛШЕМДІ ГЕЛЛЕРСТЕДТ ТЕҢДЕУІНЕ СПЕКТРАЛІК ДИРИХЛЕ ЖӘНЕ  
ПУАНКАРЕ ЕСЕПТЕРІНІҢ БІР МӘНДІ ШЕШІМДІЛІК КРИТЕРИЯСЫ

С. А. Алдашев<sup>1</sup>, Б. Уайсов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университет, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>М. Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникация академиясы, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** критерия, спектрлік есептер, көп өлшемді, Бессель функциясы.

**Аннотация.** Жазықтықта көрсетілгендей, ішектің толқуының қозғалысы математикалық физиканың негізгі есептері болып келеді. Дирихле есебі, тек ғана толқын теңдеуіне емес және де жалпы гиперболалық теңдеулерге де корректна емес екендігі дәлелденген.

Жұмыста көп өлшемді Геллерстедт теңдеуіне спектрлік Дирихле және Пуанкаре есептерінің бір мәнді шешімділік критериясы алынған.

Поступила 07.07.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 124 – 129

ABOUT ONE METHOD OF THE SOLUTION OF THE RETURN TASK  
OF CAUCHY FOR THE STORM LIOUVILLE EQUATION

S. T. Ahmetova, A. B. Imanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

**Keywords:** self-conjugacy, quite continuity, Cauchy's task, operator Shturma-Liuvillya.

**Abstract.** We will consider the operator equation in Hilbert space

$$Au = f, \tag{1.1}$$

where  $A$  - quite continuous operator, and  $f$  and  $u$  space elements. If the operator one-to-one displays spaces on the area of value, there is a return operator displaying sets in spaces who is the unlimited operator. In this case the equation (1.1) has the only decision for any right part from which has an appearance

$$u = A^{-1}f, \quad (1.2)$$

but unfortunately, because of limitlessness of the return operator, this decision isn't steady, that is small deviations of the right part from true value can lead to big deviations from the required true decision. In practice, as a rule, the right part known it is only approximate therefore there is a problem of search of steady algorithm of the solution of the equation (1.1). For the first time such Tikhonov A.N. started considering tasks. [1], it appeared that many problems of geophysics, seismic exploration belong to this class of tasks. The bright representative of this class of tasks is the return task of Cauchy for the Sturm Liouville equation. We will consider a task in space I Mow for the Sturm Liouville equation

$$\begin{aligned} Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

the decision which has an appearance

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (1.4)$$

The essence of the return task of Cauchy consists in finding of the right part according to the known decision, that is is reduced to the solution of the integrated equation of the first sort

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = y(x). \quad (1.5)$$

УДК 517.91

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** самосопряженность, вполне непрерывность, задача Коши, оператор Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе решена одна обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля.

### 1. Введение.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $H$  операторное уравнение

$$Au = f, \quad (1.1)$$

где  $A$  – вполне непрерывный оператор,  $f$  и  $u$  элементы пространства  $H$ . Если оператор  $A$  взаимно однозначно отображает пространства  $H$  на свою область значения  $R(A) \subset H$ , то существует обратный оператор  $A^{-1}$ , отображающий множества  $R(A)$  в пространства  $H$ , который является неограниченным оператором. В этом случае уравнение (1.1) имеет единственное решение  $u$  для любой правой части  $f$  из  $R(A)$ , который имеет вид

$$u = A^{-1}f, \quad (1.2)$$

но к сожалению, из-за неограниченности обратного оператора  $A^{-1}$ , это решение не устойчиво, то есть малые отклонения правой части от истинного значения могут привести к большим отклонениям от искомого истинного решения. На практике, как правило, правая часть бывает известной лишь приближенно, поэтому возникает проблема поиска устойчивого алгоритма решения уравнения (1.1). Впервые задачи такого рода начал рассматривать Тихонов А.Н. [1], оказалось, что многие задачи геофизики, сейсморазведки относятся именно к этому классу задач. Ярким представителем этого класса задач является обратная задача Коши для уравнения Штурма-Лиувилля. Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  задачу Коши для уравнения Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

решение, которого имеет вид

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (1.4)$$

Суть обратной задачи Коши состоит в нахождении правой части  $f$  по известному решению  $y(x)$ , то есть сводится к решению интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = y(x). \quad (1.5)$$

**2. Методы исследования.** В этом разделе мы докажем две леммы, которые могут иметь и самостоятельное значение и они подсказаны нам теоремой Эрвина Шмидта, о разложении произвольного компактного оператора в ряд по собственным функциям «модуля» оператора [2].

**Лемма 2.1.** Если  $A$  вольтерровый оператор,  $S$ - унитарный оператор и имеют место равенства

$$SA = A^*S, S = S^*, N(A) = \{0\}, \quad (2.1)$$

то операторное уравнение

$$Au = f \quad (2.2)$$

имеет в пространстве  $H$  единственное решение вида

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, \quad (2.3)$$

где  $\lambda_n$ - собственное значение оператора  $SA$ , а  $\varphi_n$ - собственные векторы этого оператора.

**Доказательство.** По условию леммы оператор  $A$  компактный, а в силу условий  $SA = A^*S$ ,  $S = S^*$  оператор  $SA$ - самосопряженный и компактный. По теореме Гильберта-Шмидта [3] для любого вектора  $u$  пространства  $H$  имеет место разложение

$$SAu = \sum_{n=1}^{\infty} (SAu, \varphi_n) \varphi_n + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0 \in N(SA)$ . В нашем случае  $N(SA) = \{0\}$ , поэтому

$$SAu = \sum_{n=1}^{\infty} (SAu, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \varphi_n) \varphi_n, \Rightarrow (SAu, \varphi_n) = \lambda_n (u, \varphi_n), (u, \varphi_n) = \frac{(SAu, \varphi_n)}{\lambda_n}.$$

Если  $(u, \varphi_n) = 0$ , то  $SAu = 0$ ,  $\Rightarrow u = 0$ , следовательно, система  $\{\varphi_n\}$  является полной ортогональной системой. Полагая ее ортонормированной, имеем

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(SAu, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n.$$

**Лемма 2.2.** (а) Если  $A$  вольтерровый оператор,  $S$ - унитарный оператор, действующие в гильбертовом пространстве  $H$  и удовлетворяющие условию

$$SA = A^*S, S = S^*, N(A) = \{0\}, \quad (2.1)$$

то операторное уравнение

$$(SA - i\alpha)u_\alpha = Sf \quad (2.4)$$

для любого вещественного числа  $\alpha$ , отличного от нуля, и правой части  $f \in H$  имеет единственное решение вида

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} \varphi_n, \quad (2.5)$$

где  $SA\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, n = 1, 2, \dots$

(б) для любого элемента  $f \in R(A)$  имеет место оценка

$$\|Au_\alpha - f\| \ll |\alpha| \cdot \|u\|, f = Au, \quad (2.6)$$

которая показывает скорость приближения элемента  $Au_\alpha$  к  $f$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ;

(в) если  $f \in R(A)$  и  $\alpha \rightarrow 0$ , то величина  $\|u_\alpha - u\|$  стремится к нулю.

**Доказательство.** а) Оператор  $SA$  вполне непрерывен и самосопряжен, поэтому все его собственные значения вещественны. По альтернативе Фредгольма любое комплексное число является либо собственным значением вполне непрерывного оператора, либо принадлежит к резольвентному множеству, стало быть, оператор  $SA - i\alpha I$  ограниченно обратим при любом вещественном значении  $\alpha \neq 0$ . Следовательно, уравнение

$$(SA - i\alpha I)u_\alpha = Sf$$

разрешимо при любом вещественном  $\alpha \neq 0$ , т.е. имеет место формула:  $u_\alpha = (SA - i\alpha I)^{-1}Sf$ .

Найдем Фурье представление этого решения.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_\alpha, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} ((SA - i\alpha I)^{-1}Sf, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, (SA + i\alpha)^{-1} \varphi_n) \varphi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n) \varphi_n}{\lambda_n + i\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n) \varphi_n}{\lambda_n + i\alpha}. \end{aligned}$$

Оценим норму  $u_\alpha$  в пространстве  $H$ .

$$\|u_\alpha\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Sf, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} < \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} |(f, S\varphi_n)|^2 \ll \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}, \quad \alpha \neq 0;$$

б) Из условия  $f \in R(A)$  следует, что существует такой элемент  $u$  пространства  $H$ , что  $f = Au$ . Оператор  $A$  ограничен и  $A\varphi_n = \lambda_n S\varphi_n$ , поэтому

$$\begin{aligned} Au_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} A\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} S\varphi_n; \\ \|Au_\alpha - f\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} \lambda_n S\varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} (f, S\varphi_n) S\varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_n + i\alpha} - 1 \right|^2 |(f, S\varphi_n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} |(f, S\varphi_n)|^2 \ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Au, S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(SAu, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \\ &\ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(u, SA\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2 \cdot \|u\|^2; \end{aligned}$$

в) Оценим норму  $\|u_\alpha - u\|$  в пространстве  $H$ .

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - u\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_n + i\alpha} - \frac{1}{\lambda_n} \right) (f, S\varphi_n) \varphi_n \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \alpha^2)} |(f, S\varphi_n)|^2 = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Au, S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \alpha^2)} = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(u, SA\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \alpha^2)} = \alpha^2 \cdot \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} = \alpha^2 \sum_{n=1}^N \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} + \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} \ll \alpha^2 \sum_{n=0}^N \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} + \sum_{N+1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2. \end{aligned}$$

Из условия  $f \in R(A)$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < +\infty$ , поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $\sum_{N+1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ . При фиксированном  $N(\varepsilon)$  найдем число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для всех  $0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$  имеет место

$$\alpha^2 \sum_{n=1}^N \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

неравенство. Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для всех  $0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$  имеет место неравенство  $\|u_\alpha - u\| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Заметим, что если  $u$  является элементом функционального пространства, иначе говоря, функцией, то быстрота сходимости к нулю величины  $\sum_{N+1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2$  зависит от гладкости функции  $u(x)$ .

### 3. Результаты исследований.

**Теорема 3.1.** (а) Если  $f(x) \in W_2^2(0,1)$ , то интегральное уравнение

$$Au(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt = f(x) \quad (3.1)$$

имеет единственное решение вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, \quad (3.2)$$

где  $S\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x)$ ,  $SA\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ ;

(б) для любого  $f(x) \in W_2^2(0,1)$  имеет место оценка

$$\|Au_\alpha - f\| \ll |\alpha| \cdot \|u\|, f = Au,$$

где  $u_\alpha(x)$  является решением уравнения

$$(SA - i\alpha)u_\alpha = Sf, \alpha - \text{вещественная величина};$$

(в) если  $f(x) \in W_2^2(0,1)$ , то  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_\alpha - u\| = 0$ .

**Доказательство.** Если  $Au = 0$ , то  $\int_0^x (x-t)u(t)dt = 0$ , тогда из теоремы Лебега [3] следует, что  $u(x) = 0$  почти всюду в  $(0,1)$ , следовательно, обратный оператор  $A^{-1}$  существует;

Ядро интегрального оператора (3.1) имеет вид  $A(x, t) = (x-t) \cdot \theta(x-t)$ , поэтому ограничен и принадлежит классу Гильберта-Шмидта. Следовательно, оператор  $A$  вполне непрерывен. Вольтерровость оператора  $A$  является следствием теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля. Проверка выполнения условий лемм 2.1, 2.2 не составляет труда.

**4. Выводы.** Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [4-15].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979, 288с.
- [2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в спектральную теорию несамосопряженных операторов. - М.: Наука, 1965, 447с.
- [3] Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980, 494с.
- [4] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [5] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция «Дифференциальные уравнения и теория колебаний» – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.
- [6] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция «Дифференциальные уравнения и теория колебаний». – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.
- [7] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.
- [8] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.
- [9] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.
- [10] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.
- [11] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве  $L^2(0,1)$ . // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.
- [12] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.
- [13] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.
- [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [15] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

#### REFERENCES

- [1] Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody reshenija nekorrektnyh zadach.- M.: Nauka, 1979, 288s.
- [2] Gohberg I.C., Krejn M.G. Vvedenie v spektral'nuju teoriju nesamosoprjazhennyh operatorov.- M.: Nauka, 1965, 447s.
- [3] Trenogin V.A. Funkcional'nyj analiz.- M.: Nauka, 1980, 494s.
- [4] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovaniya JuK» № 27, 2002. s. 58-62.
- [5] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Respublikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij” – Алматы, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.

- [6] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuivillja. Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij". – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.
- [7] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g., - s. 25-30.
- [8] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuivillja. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g., - s. 133-136.
- [9] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovaniya sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.
- [10] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuivillja. - Bashkirskij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.
- [11] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve . // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.
- [12] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.
- [13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.
- [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [15] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193c, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

### ШТУРМ-ЛИУВИЛ ТЕҢДЕУІНІҢ КОШИ ЕСЕБІНЕ КЕРІ ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР ТӘСІЛІ ТУРАЛЫ

С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жалкылық, әсіре үзіксіздік, Кошидің есебі, Штурм-Лиувилл операторы.

**Аннотация.** Еңбекте Штурм-Лиувилл есебіне арналған Коши есебіне кері есеп шешілді.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 129 – 138

## ON THE STOCHASTIC STABILITY ANALYTICALLY GIVEN INTEGRAL MANIFOLD

M. I. Tleubergenov<sup>1</sup>, G. K. Vassilina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics and Mathematical Modelling of MES RK, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: v\_gulmira@mail.ru

**Keywords:** differential Ito equations, stability, probability, integral manifold.

**Abstract.** Proved in the A.M. Lyapunov's, N.G. Chetaev's, I.G. Malkin's et al. works, the classical theorems of Lyapunov functions method and their various modifications of the stability of the unperturbed motion in a class of ordinary differential equations are summarized in Matrosov's, Zubov's, Malyshev's works to the case of invariant sets using Lyapunov functions of the  $V(\rho, t)$  form where  $\rho = \rho(x, M)$  - the distance from the image point  $x$  to the set  $M$ .

Considering the complexity of constructing of the function  $V(\rho, t)$ , as a function of the distance  $\rho$ , in the Galiullin's, Mukhametzyanov's, Muharlyamov's works an analytical description of the set are used in the problem of construction of the equations of stable program motion of the ordinary differential equations and essentially the problem of studying of the stability of the set is reduced to the study of stability of the trivial solution of the system. Analogues of the theorems of the Lyapunov second method for the analytically given invariant sets in a class of ordinary differential equations are proved in the works of these authors.

In this work using Lyapunov function method sufficient conditions of stability and asymptotic stability in probability of the integral manifold of Itô differential equations in the presence of random perturbations in a class of processes with independent increments are obtained.

УДК 517.925, 519.216

## О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАДАННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

М. И. Тлеубергенов<sup>1</sup>, Г. К. Василина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения Ито, устойчивость, вероятность, интегральное многообразие.

**Аннотация.** Классические теоремы метода функций Ляпунова и их различные модификации об устойчивости невозмущенного движения в классе обыкновенных дифференциальных уравнений, доказанные в работах Ляпунова А.М., Четаева Н.Г., Малкина И.Г. и др., обобщаются в работах Матросова В.М., Зубова В.И., Малышева И.В. и др. на случай инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида  $V(\rho, t)$ , где  $\rho = \rho(x, M)$  -- расстояние от изображающей точки  $x$  до множества  $M$ .

Учитывая сложность построения функции  $V(\rho, t)$ , как функции от расстояния  $\rho$ , в задаче построения уравнений устойчивого программного движения обыкновенных дифференциальных уравнений в работах Галиуллина А.С., Мухаметзянова И.А., Мухарлямова Р.Г. и др. используется аналитическое описание множества и, по-существу, задача исследования устойчивости множества сводится к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой системы. В работах указанных авторов для аналитически заданных инвариантных множеств в классе обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются аналоги теорем второго метода Ляпунова.

В настоящей работе методом функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности интегрального многообразия дифференциальных уравнений Ито при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

**Введение.** Основные теоремы метода функций Ляпунова и их различные модификации об устойчивости невозмущенного движения в классе обыкновенных дифференциальных уравнений ([1-3] и др.) обобщены в [4-7] и др. на случай инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида  $V(\rho, t)$ , где  $\rho = \rho(x, M)$  - расстояние от изображающей точки  $x$  до множества  $M$ .

Учитывая сложность построения функции  $V(\rho, t)$ , как функции от расстояния  $\rho$ , в задаче построения уравнений устойчивого программного движения обыкновенных дифференциальных уравнений используется аналитическое описание множества [8, 9] и, по-существу, задача исследования устойчивости множества сводится к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой системы. В работах [8-11] для аналитически заданных инвариантных множеств в классе обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются аналоги теорем второго метода Ляпунова. При этом для аналитически заданных инвариантных множеств в [12, 13] доказываются теоремы об устойчивости по первому приближению, устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Впервые задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения методом функций Ляпунова исследовалась в [14, 15]. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений при

случайных возмущениях из класса винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями) методом функций Ляпунова в [16] доказаны теоремы о стохастической устойчивости невозмущенного движения. В этом же классе в [16-19] доказаны теоремы о стохастической устойчивости инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида  $V(\rho, t)$ .

Достаточные условия устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия [10-13] обобщаются в [20-23] на класс стохастических дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов.

Задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения при случайных возмущениях из класса процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [24].

Настоящая работа посвящена исследованию стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

**1. Постановка задачи о стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия.** Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dw(t) + \int_{R^n} f(x(t), t, u)\tilde{v}(dt, du), \quad (1)$$

где  $X(x, t), \sigma(x, t), f(x, t, u)$  – не случайны,  $X, f$  – векторные функции со значениями в  $R^n$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in R^n$ ;  $u \in R^n$ ,  $\sigma(x, t)$  – матричная функция размера  $n \times m$ ,  $w(t)$  –  $m$ -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами,  $\tilde{v}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$ ,  $\nu(t, A)$  – пуассоновская мера на  $R^d$ ,  $E\nu(t, A) = t\Pi(A)$ , процесс  $w(t)$  и мера  $\nu(t, A)$  независимы между собой,  $\Pi(A)$  – мера на  $\sigma$ -алгебре борелевских множеств  $R^n$ .

Предположим, что

1) существует постоянная  $L > 0$  такая, что

$$\|X(x, t)\|^2 + \|\sigma(x, t)\|^2 + \int_{R^n} \|f(x, t, u)\|^2 \Pi(du) \leq L(1 + \|x\|^2);$$

2) функции  $X(x, t), \sigma(x, t), f(x, t, u)$  – непрерывны по совокупности аргументов;

3) выполнено локальное условие Липшица по  $x$  т.е. для любого  $R > 0$  найдется постоянная  $C_R > 0$  такая, что при  $\|x\| \leq R, \|y\| \leq R$

$$\|X(x, t) - X(y, t)\|^2 + \|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)\|^2 + \int_{R^n} \|f(x, t, u) - f(y, t, u)\|^2 \Pi(du) \leq C_R \|x - y\|^2.$$

Согласно [25, стр. 276], эти условия обеспечивают существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения  $x^{x_0, t_0}(t)$  (1) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ , являющегося непрерывным справа с вероятностью 1 строго марковским случайным процессом.

Рассмотрим в пространстве  $R^{n+1}$  поверхность  $\Lambda(t)$  заданную системой уравнений:

$$\Lambda(t): \lambda(x, t) = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda = \lambda(x, t) \in C_{xt}^{21}$  –  $r$ -мерная вектор-функция,  $r \leq n$ .

В дальнейшем приведем условия того, что эта поверхность инвариантна для (1) (интегральное многообразие), т.е. если  $(x_0, t_0) \in \Lambda(t_0)$  с вероятностью 1, то

$$P\{(x(t), t) \in \Lambda(t), t \geq t_0\} = 1,$$

а также исследуем ее на стохастическую устойчивость.

**Определение 1.** Назовем  $a(r)$  - функцией класса  $K$  ( $a \in K$ ), если  $a(r)$  - непрерывная, строго возрастающая функция и  $a(0) = 0$ .

Условия инвариантности и стохастической устойчивости приведем в терминах функций Ляпунова вида  $V(\lambda; x, t) \in C_{\lambda x}^{221} : R^r \times R^n \times R^+ \rightarrow R^+$ , и таких, что  $V(0; x, t) = 0$ .

Обозначим  $V_1(x, t) = V(\lambda(x, t), x, t)$ . Очевидно, что  $V_1(x, t) \in C_{x,t}^{21}$ . Будем рассматривать такие функции Ляпунова, чтобы

$$\int_{R^n} \left\| [V_1(x + f(x, t, u)) - V_1(x, t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x, t, u)] \right\| \Pi(du) < \infty. \quad (3)$$

Введем следующий производящий оператор

$$\begin{aligned} \tilde{L}V(\lambda(x, t), x, t) &= \tilde{L}V_1(x, t) = \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma_{jk}^T \right] + \\ &+ \int_{R^n} [V_1(x + f(x, t, u)) - V_1(x, t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x, t, u)] \Pi(du). \end{aligned}$$

**Определение 2.** [16] Интегральное многообразие  $\Lambda(t)$ , определяемое формулой (2), уравнения (1) называется  $P$ -устойчивым по вероятности, если

$$\lim_{\rho(x_0, \Lambda(t_0)) \rightarrow 0} P_{x_0} \left\{ \sup_{t > 0} \rho(x^{x_0, t_0}(t), \Lambda(t)) > \varepsilon \right\} = 0. \quad (4)$$

**Определение 3.** Интегральное многообразие  $\Lambda(t)$ , определяемое формулой (2), уравнения (1) называется  $\lambda$ -устойчивым по вероятности, если

$$\lim_{\|\lambda(x_0, t_0)\| \rightarrow 0} P_{x_0} \left\{ \sup_{t > 0} \|\lambda(x^{x_0, t_0}(t), t)\| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (5)$$

**Определение 4.** [16] Интегральное многообразие  $\Lambda(t)$ , определяемое формулой (2), уравнения (1) называется асимптотически  $\rho$ -устойчивым по вероятности, если оно  $P$ -устойчиво по вероятности и, кроме того,

$$\lim_{\rho(x_0, \Lambda(t_0)) \rightarrow 0} P_{x_0} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} \rho(x^{x_0, t_0}(t), \Lambda(t)) = 0 \right\} = 1. \quad (6)$$

**Определение 5.** Интегральное многообразие  $\Lambda(t)$ , определяемое формулой (2), уравнения (1) называется асимптотически  $\lambda$ -устойчивым по вероятности, если оно  $\lambda$ -устойчиво по вероятности и, кроме того,

$$\lim_{\|\lambda(x_0, t_0)\| \rightarrow 0} P_{x_0} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} \|\lambda(x^{x_0, t_0}(t), t)\| = 0 \right\} = 1. \quad (7)$$

**Теорема 1.** Если для уравнения (1) и множества (2) существует функция Ляпунова  $V(\lambda; x, t) \in C_{\lambda x}^{221}$  со свойствами

$$V(0, x, t) \equiv 0, \quad (8)$$

$$V(\lambda, x, t) \geq a(\|\lambda\|), \quad a \in K; \tag{9}$$

$$\tilde{L}V_1(x, t) \leq 0, \tag{10}$$

и для  $V_1 = V(\lambda(x, t), x, t)$  выполнено условие (3);

а также существуют положительные постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ , что

$$V_1(x, t) \leq C_1 + C_2 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V_1}{\partial x} \right\| \leq C_3 + C_4 \|x\|, \quad \left\| \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \leq C_5;$$

то множество (2) есть интегральное многообразие для (1).

Если к тому же функция  $\lambda(x, t)$  удовлетворяет условию:

$$\|\lambda(x, t)\| \geq \alpha(\rho(x, \Lambda(t))), \quad \alpha \in K, \tag{11}$$

то множество (2)  $P$ -устойчиво по вероятности.

**Замечание.** В дальнейшем для краткости будем обозначать  $\alpha(\rho(x, \Lambda(t))) = \alpha(\rho)$ .

*Доказательство.* Пусть  $x^{x_0, t_0}(t) = x(t)$  произвольное решение уравнения (1), что  $(x(t_0), t_0) \in \Lambda(t_0)$  с вероятностью 1. Применяя к процессу  $V_1(x(t), t)$  обобщенную формулу Ито [25, теорема 2, стр. 274], имеем

$$E_{x_0, t_0} V_1(x(t), t) - V_1(x_0, t_0) = \int_{t_0}^t E \tilde{L}_1 V_1(x(s), s) ds.$$

Откуда, в силу условий (8) и (10) имеем

$$E_{x_0, t_0} V_1(x(t), t) \leq 0 \tag{12}$$

для  $\forall t \geq t_0$ . Получаем, что (12) имеет вид

$$E_{x_0, t_0} V(\lambda(x(t), t), x(t), t) \leq 0.$$

Учитывая при этом условие (3) имеем, что  $V(\lambda(x(t), t), x(t), t) = 0$  для каждого  $t$  с вероятностью 1. Поэтому  $\lambda(x(t), t) = 0$  для каждого  $t \geq t_0$  с вероятностью 1.

Отсюда получаем, что

$$P \left\{ \sup_{\substack{t_i \geq t_0 \\ t_i \in Q^+}} \|\lambda(x(t), t)\| = 0 \right\} = 1,$$

где  $Q^+$  - множество неотрицательных рациональных чисел. Но в силу непрерывности справа траекторий  $x(t)$  имеем

$$P \left\{ \sup_{\substack{t_i \geq t_0 \\ t_i \in Q^+}} \|\lambda(x(t), t)\| = 0 \right\} = P \left\{ \sup_{t_i \geq t_0} \|\lambda(x(t), t)\| = 0 \right\} = 1.$$

Последнее означает инвариантность множества  $\Lambda(t)$  для системы (1).

Докажем теперь  $\rho$  – устойчивость по вероятности множества  $\Lambda(t)$ . Для этого возьмем произвольное достаточно малое число  $\varepsilon > 0$ , произвольный момент  $t_0$  и начальную точку  $x_0$ . Рассмотрим решение  $x^{x_0, t_0}(t)$  уравнения (1). Пусть  $\tau_\varepsilon = \inf \{t : \|\lambda(x(t))\| > \varepsilon\}$ , а  $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$ . Тогда, используя формулу Дынкина [25, стр. 274], получим

$$\begin{aligned} E_{x_0, t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t))), \tau_\varepsilon(t); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)) = \\ = V(\lambda(x_0, t_0), x_0, t_0) + E_{x_0, t_0} \int_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \tilde{L}V(\lambda(x(u), u); x(u), u) du, \end{aligned} \quad (13)$$

откуда в силу (10) вытекает неравенство

$$E_{x_0, t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t))), \tau_\varepsilon(t); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)) \leq V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0),$$

которое с учетом (9) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_\varepsilon < t} a(\|\lambda(x(\tau_\varepsilon), \tau_\varepsilon)\|) P_{x_0, t_0}(d\omega) + \int_{\tau_\varepsilon \geq t} a(\|\lambda(x(t), t)\|) P_{x_0, t_0}(d\omega) \leq \\ \leq V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a(\varepsilon) P_{x_0, t_0} \{\tau_\varepsilon < t\} \leq V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0).$$

В силу непрерывности по  $\lambda$  функции  $V(\lambda; x_0, t_0)$  и  $V(0; x, t) \equiv 0$  из последнего неравенства вытекает соотношение

$$\lim_{\|\lambda\| \rightarrow 0} P_{x_0, t_0} \{\tau_\varepsilon < t\} = 0,$$

которое влечет за собой  $\lambda$ -устойчивость  $\Lambda(t)$  в соответствии с определением 3. И, учитывая оценку (11), получаем  $\rho$ -устойчивость интегрального многообразия  $\Lambda(t)$  уравнения (1).

**Теорема 2.** Если для процесса  $x(t)$ , описываемого уравнением (1), существует функция Ляпунова  $V(\lambda; x, t) \in C_{\lambda x}^{221}$ ,  $V(0; x, t) \equiv 0$  со свойствами

$$V(\lambda; x, t) \geq a(\|\lambda\|), \quad a \in K; \quad (9)$$

$$V(\lambda; x, t) \leq b(\|\lambda\|), \quad b \in K; \quad (14)$$

$$\tilde{L}V \leq -c(\|\lambda\|), \quad c \in K; \quad (15)$$

и, кроме того, вектор-функция  $\lambda = \lambda(x, t)$  удовлетворяет условию

$$\|\lambda(x, t)\| \geq \alpha(\rho), \quad \alpha \in K, \quad (11)$$

то интегральное многообразие  $\Lambda(t): \lambda(x, t) = 0$  уравнения (1) асимптотически  $\rho$ -устойчиво по вероятности.

Доказательство. По теореме 1 условия (9) и (15) обеспечивают  $\lambda$ -устойчивость  $\Lambda(t)$  по вероятности, а (11) влечет за собой  $\rho$ -устойчивость по вероятности интегрального многообразия  $\Lambda(t)$ .

Докажем справедливость соотношения (7) - асимптотической  $\lambda$ -устойчивости по вероятности  $\Lambda(t)$ , и из оценки (11) тогда будет следовать асимптотическая  $\rho$ -устойчивость интегрального многообразия  $\Lambda(t)$ .

Пусть аналогично теореме 1  $\tau_\varepsilon = \inf \{t : \|\lambda(x(t), t)\| > \varepsilon\}$ ,  $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$ . Обозначим через  $\mathfrak{R}$  множество выборочных траекторий процесса  $x^{x_0, t_0}(t)$  таких, что  $\tau_\varepsilon(t) = t$ ,  $t \geq 0$ , то есть те траектории, которые до момента  $t$  не вышли из множества  $\|\lambda(x(t), t)\| < \varepsilon$ . Тогда по теореме 1 следует

$$\lim_{\|\lambda(x_0, t_0)\| \rightarrow 0} P_{x_0, t_0} \{R\} = 1.$$

Из (14) и (15) вытекает неравенство

$$E_{x_0, t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)) \leq V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0),$$

т.е. случайный процесс  $V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t))$  является неотрицательным супермантингалом и по теореме Дуба [16] с вероятностью 1 для траекторий из множества  $\mathfrak{R}$  существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\lambda(x(t), t); x(t), t) = \mathfrak{a}.$$

Покажем, что с вероятностью 1  $\mathfrak{a} = 0$ . Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что найдется хотя бы одна пара  $x_0^*, t_0^* \in U_\varepsilon$ , где  $U_\varepsilon = \{x : \|\lambda(x, t)\| < \varepsilon\}$ , такая, что для выборочных траекторий из множества  $\mathfrak{R}$  с вероятностью  $q$  выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\lambda(x(t), t); x(t), t) = V_* > 0.$$

Тогда из свойства (14) бесконечно малого высшего предела функции  $V$  вытекает, что с вероятностью  $q$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\lambda(x(t), t)\| \geq b^{-1}(V_*) > \varepsilon_1 > 0.$$

Для дальнейших рассуждений нам необходимо доказать свойство возвратности выборочных траекторий процесса  $x^{x_0, t_0}(t)$ , принадлежащих множеству  $R$  по отношению к области  $\{\|\lambda(x(t), t)\| < \nu\}$  для каждого  $\nu \cdot 0 < \nu < \varepsilon$ . Действительно, для таких  $\nu$  и всех  $\{x : \nu \leq \|\lambda(x(t), t)\| \leq \varepsilon\}$  из строгой монотонности  $c(r)$  выполняется оценка  $LV \leq -c(\nu)$ .

Пусть  $\tau^\nu$  - момент первого выхода процесса  $x^{x_0, t_0}(t)$  из области  $\nu \leq \|\lambda\| \leq \varepsilon$ . Используя (13) имеем

$$E_{x_0, t_0} \tau^\nu(t) - t_0 \leq c^{-1}(\nu)V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0),$$

отсюда на основании неравенства Чебышева получим

$$P_{x_0, t_0} \{\tau^\nu \geq t\} \leq \frac{c^{-1}(\nu)V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0)}{t}.$$

Переходя к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , будем иметь

$$P_{x_0, t_0} \{\tau^\nu < \infty\} = 1, \tag{16}$$

что доказывает возвратность траекторий процесса  $x^{x_0, t_0}(t)$ , принадлежащих множеству  $\mathfrak{R}$  по отношению к  $\{\|\lambda(x, t)\| < \nu\}$ .

Из (16) и строгой марковости процесса  $x(t)$  получаем для любого  $\nu > 0$

$$\begin{aligned}
 q &= P_{x_0, t_0}^* \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \| \lambda(x(t), t) \| > \varepsilon_1 \} = \\
 &= \int_{\{x: \| \lambda(x, t) \| = 0\}}^{\infty} P_{x_0, t_0}^* \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \| \lambda(x(t), t) \| > \varepsilon_1 \} P_{x_0, t_0}^* \{ \tau^V \in dt, x(\tau^V) \in dx \} \leq \\
 &\leq \sup_{\{x: \| \lambda(x, t) \| \leq \nu, t_0 > 0\}} P_{x_0, t_0}^* \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \| \lambda(x(t), t) \| > \varepsilon_1 \},
 \end{aligned}$$

что противоречит  $\lambda$ -устойчивости по вероятности интегрального многообразия  $\Lambda(t)$ .

Таким образом, для почти всех выборочных траекторий множества  $\mathcal{R}$  с вероятностью 1  $\lim_{t \rightarrow \infty} \| \lambda(x(t), t) \| = 0$  для всех  $x \in U_{\varepsilon}(0)$ . Отсюда и из оценки  $V(\lambda; x, t) \geq a(\| \lambda \|)$  для почти всех траекторий из  $\mathcal{R}$  следует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \| \lambda(x(t), t) \| = 0$ , откуда с учетом (16) и оценки (11) вытекает утверждение теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М., 1950. - 472 с.
- [2] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1965. - 208 с.
- [3] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М., 1966. - 530 с.
- [4] Матросов В.М. Об устойчивости движения // ПММ. - 1962. - Т. 26, вып. 5. - С. 885-895.
- [5] Зубов В.И. Устойчивость движения. - М., 1973. - 272 с.
- [6] Малышев Ю.В. Об устойчивости некомпактных множеств для неавтономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. - Новосибирск, 1979. - С. 66-70.
- [7] Hajek O. Ordinary and asymptotic stability of Noncompact sets // J. of Diff. Eq. - 1972. - № 11. - P. 49-65.
- [8] Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
- [9] Мухарлямов Р.Г. О построении дифференциальных уравнений оптимального движения к заданному многообразию // Дифференциальные уравнения. - 1971. -- Т. 7, № 10. - С. 688-699.
- [10] Галиуллин А.С. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1973. - 104 с.
- [11] Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия // Дифференциальные уравнения. - 1973. - Т. 9, № 5. - С. 846-856.
- [12] Тлеубергенов М.И. Необходимые и достаточные условия устойчивости интегрального многообразия // Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики. - М.: Изд-во УДН, 1983. - С. 125-132.
- [13] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости программного движения по первому приближению // Известия АН КазССР. Серия физ.-матем. - 1984. - № 5. - С. 58-61.
- [14] Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. of the Intern. on Circuit and Inform. Theory. Los-Angeles. Calif. IRE transactions. CT-6. - 1959. - P. 260-270.
- [15] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. - 1960. - Т. 27, вып. 5. - С. 809-823.
- [16] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М., 1969. - 368 с.
- [17] Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2011. - 312 p.
- [18] Станжицкий А.Н. Об устойчивости по вероятности инвариантных множеств систем со случайными возмущениями // Нелінійні коливання. - 1998. - 1, № 2. - С. 138-142.
- [19] Станжицкий О.М. Дослідження інваріантних множин стохастичних систем Іто за допомогою функцій Ляпунова // Український математический журнал. - 2001. - 53, № 2. - С. 282-285.
- [20] Тлеубергенов М.И. Метод функций Ляпунова в задаче стохастической устойчивости программного движения // Математический журнал. - 2001. - Т. 1, № 2. - С. 98-106.
- [21] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости интегрального многообразия стохастического дифференциального уравнения Ито // Известия МОН РК, НАН РК. - 2001. - № 3. - С. 55-62.
- [22] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости по вероятности программного движения // Известия МОН РК, НАН РК. - 2002. - № 3. - С. 47-53.
- [23] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости по вероятности программного движения при постоянно-действующих возмущениях // Известия МОН РК, НАН РК. - 2004. - № 3. - С. 53-58.
- [24] Гихман И.И., Дороговцев А.Я. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Украинский математический журнал. - 1965. - Т. 17, № 6. - С. 3-21.
- [25] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - Киев: Наукова думка, 1968. - 256 с.

## REFERENCES

- [1] Lyapunov A.M. The general problem of stability of motion. - M., 1950. - 472 p. (in Russ.).
- [2] Chetaev N.G. Resistance movement. - M.: Nauka, 1965 - 208 p. (in Russ.).
- [3] Malkin I.G. The theory of motion stability. - M., 1966. - 530 p. (in Russ.).
- [4] Matrosov V.M. On the stability of motion. PMM. - 1962. - V. 26, no. 5. - p. 885-895. (in Russ.).
- [5] Zubov V.I. Resistance movement. - M., 1973. - 272 p. (in Russ.).
- [6] Malyshev Yu.V. The stability of non-compact sets for non-autonomous systems. Stability Theory and Its Applications. - Novosibirsk, 1979. - P. 66-70. (in Russ.).
- [7] Hajek O. Ordinary and asymptotic stability of Noncompact sets. J. of Diff. Eq. - 1972. - № 11. - P. 49-65.
- [8] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G., Furasov V.D. Building systems software movement. - M.: Nauka, 1971. - 352 p. (in Russ.).
- [9] Mukharlyamov R.G. On the construction of the differential equations of motion for optimal given variety. Differential Equations. - 1971. - V. 7, № 10. - p. 688-699. (in Russ.).
- [10] Galiullin A.S. Resistance movement. - M.: Nauka, 1973 - 104 p.
- [11] Mukhametzyanov I.A. The stability of software diversity. Differential Equations. - 1973. - T. 9, № 5. - p. 846-856. (in Russ.).
- [12] Tleubergenov M.I. The necessary and sufficient conditions for the stability of the integral manifold. Differential equations and inverse problems of dynamics. - M.: Publishing House of the PFU, 1983. - p. 125-132. (in Russ.).
- [13] Tleubergenov M.I. On the stability of the software in the first approximation of motion. Proceedings of the Kazakh SSR. Series of Physics and Mathematics. - 1984. - № 5. - p. 58-61. (in Russ.).
- [14] Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters. Proc. of the Intern. on Circuit and Inform. Theory. Los-Angeles. Calif. IRE transactions. CT-6. - 1959. - P. 260-270.
- [15] Katz I.Ya., Krasovsky N.N. On the stability of systems with random parameters // PMM. - 1960. - V. 27, no. 5. - p. 809-823. (in Russ.).
- [16] Khas'minskii R.Z. The stability of systems of differential equations with random perturbations of their parameters. - M., 1969. - 368 p. (in Russ.).
- [17] Samoilenko A.M., Stanzhytskiy O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2011. - 312 p.
- [18] 18 AN Stanzhitskiy On stability in probability of invariant sets of systems with random perturbations // Neliniyni Oscillations. - 1998 - 1, № 2. - p. 138-142. (in Russ.).
- [19] Stanzhitskiy O.M. Doslidzhennya invariantnih mnozhin stochasticity systems ITO for Relief funktsiy Lyapunov. Ukrainian mathematical journal. - 2001 - 53, № 2. - p. 282-285. (in Ukr.).
- [20] Tleubergenov M.I. Method of Lyapunov functions in a problem of stochastic stability program motion. Mathematical Journal. - 2001. - Volume 1, № 2. - p. 98-106.
- [21] Tleubergenov M.I. The stability of the integral manifold Ito stochastic differential equations. Proceedings of the MES, NAS RK. - 2001. - № 3. - p. 55-62. (in Russ.).
- [22] Tleubergenov M.I. On stability in probability programmed motion. Proceedings of the MES, NAS RK. - 2002. - № 3. - p. 47-53. (in Russ.).
- [23] Tleubergenov M.I. On the stability of motion in the probability of software, constantly acting perturbations. Proceedings of the MES, NAS RK. - 2004. - № 3. - p. 53-58. (in Russ.).
- [24] Gikhman I.I., Dorogovtsev A.Ya. On the stability of solutions of stochastic differential equations. Ukrainian mathematical journal. - 1965. - V. 17, № 6. - p. 3-21. (in Russ.).
- [25] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic differential equations. - Kiev: Naukova Dumka, 1968. - 256 p. (in Russ.).

## АНАЛИТИКАЛЫҚ ТҮРДЕ БЕРІЛГЕН ИНТЕГРАЛДЫҚ КӨПБЕЙНЕНІҢ СТОХАСТИКАЛЫҚ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

М. И. Тлеубергенов<sup>1</sup>, Г. К. Василина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>Аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** Ито дифференциалдық теңдеулері, орнықтылық, ықтималдық, интегралдық көпбейне.

**Аннотация.** А.М. Ляпуновтың, Н.Г. Четаевтің, И.Г. Малкиннің және тағы басқалардың жұмыстарында дәлелденген, жәй дифференциалдық теңдеулер класында түрткіленбеген қозғалыстың орнықтылығы туралы Ляпуновтың функциялар әдісінің классикалық теоремалары және олардың түрлі жетілдірулері В.Т. Матросовтың, В.И. Зубовтың, И.В. Малышевтың және басқалардың жұмыстарында  $V(\rho, t)$  түріндегі Ляпунов функцияларының көмегі арқылы, мұнда  $\rho = \rho(x, M)$  кескіндеуші  $x$  нүктесінен  $M$  жиынына дейінгі қашықтық, инварианттық жиындар жағдайында жалпыланады.  $\rho$  қашықтығының функциясы ретінде  $V(\rho, t)$  функцияларын құрудың қиындығын ескере отырып, жәй дифференциалдық теңдеулердің бағдарламалық

козғалысының теңдеулерін тұрғызу есебінде А.С. Галиуллиннің, И.А. Мухарлямовтың, Р.Г. Мухамедияновтың және басқалардың жұмыстарында жиынның аналитикалық суреттеуі пайдаланылады және негізінде жиынның орнықтылығын зеттеу есебі белгілі бір жүйенің көрнекі шешімінің орнықтылығын зерттеуге әкелінеді. Корсетілген авторлардың жұмыстарында жай дифференциалдық теңдеулер класында екінші Ляпунов әдісінің теоремаларының тәріздестігі аналитикалық түрде берілген инварианттық жиындар үшін дәлелденеді.

Аталмыш жұмыста Ляпуновтың функциялар әдісі арқылы Ито дифференциалдық теңдеулерінің интегралдық көпбейнелерінің ықтималдық бойынша орнықтылығының және асимптотикалық орнықтылығының жеткілікті шарттары кездейсоқ түтркілі тәуелсіз өсімшелі үрдістер класында алынды.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 138 – 144

## ABOUT SELF-CONJUGACY SIGNS IN ESSENTIAL THE OPERATOR OF STORM LIOUVILLE

A. B. Imanbaeva, S. T. Ahmetova, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

**Keywords:** self-conjugacy in essential the operator, the operator Shturma-Liuvillya.

**Abstract.** Definition 1.1. Densely certain operator  $A$  in Hilbert space is called symmetric, if  $A \subset A^*$ , that  $D(A) \subset D(A^*)$  is if  $A\varphi = A^*\varphi$  for all  $\varphi \in D(A)$ .

Definition 1.2. The operator is called self-conjugate, if  $A = A^*$ , that is in only case when,  $A$  when it is symmetric and  $D(A) = D(A^*)$ .

The symmetric operator always allows short circuit, as  $D(A) \subset D(A^*)$ , so, area densely century. If  $A \subset A^*$ , it is symmetric,  $A^*$  - the closed expansion  $A$ . Therefore the smallest closed expansion  $A^{**}$  o of the operator  $A$  has to contain in  $A^*$ , so for the symmetric operator we have

$$A \subset A^{**} \subset A^* .$$

For the closed symmetric operator we have

$$A = A^{**} \subset A^* ,$$

and for the self-conjugate operator

From here it is visible that the closed symmetric operator is self-conjugate in only case when when it is symmetric.

Definition 1.3. The symmetric operator is called in essential self-conjugate if his short circuit is self-conjugate. If close, the subset is called as essential range of definition of the operator if short circuit of narrowing of the operator on coincides page.

If in the essential it is self-conjugate, it imt one and only one self-conjugate expansion. Really, if to assume that - self-conjugate expansion, it is closed and from it is received. From here. Therefore.

Fairly and the converse, namely if the operator has one and only one self-conjugate expansion, - it is self-conjugate in the essential.

We will note that the symmetric operator can have many self-conjugate expansions or absolutely not have them.

PROBLEM DEFINITION. We will consider in Hilbert space of operators of Storm Liouville  $Ly = -y''(x)$ ,  $x \in (0,1)$ , (1.1)

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

where - any complex numbers.

It is asked, under what conditions on coefficients these operators will be self-conjugate in essential?

Due to the objective we will note the following known results.

Theorem 1.1 [1]. If coefficients of boundary conditions real numbers, a problem of Storm Liouville (or the operator Shturma-Liuvillya) it is self-conjugate, in only case when, when equality takes place

$$\Delta_{12} = \Delta_{34} \quad (1.3)$$

where - the minors made from - ro and - ro matrix columns

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

made of coefficients of a boundary condition (1.2).

If kompleksnoznachna coefficients, criteria of self-conjugacy has the following appearance [2].

Theorem 1.2 [2]. Let, where - it is positive, the derivative is absolutely continuous on an interval, and function - is continuous and valid. Let

$$U_y = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Forms are self-conjugate in only case when, when

$$\begin{cases} \frac{\bar{m}_{11}m_{12} - \bar{m}_{12}m_{11}}{p(0)} = \frac{\bar{n}_{11}n_{12} - \bar{n}_{12}n_{11}}{p(1)}, \\ \frac{\bar{m}_{21}m_{22} - \bar{m}_{22}m_{21}}{p(0)} = \frac{\bar{n}_{21}n_{22} - \bar{n}_{22}n_{21}}{p(1)}, \\ \frac{\bar{m}_{11}m_{22} - \bar{m}_{22}m_{12}}{p(0)} = \frac{\bar{n}_{11}n_{22} - \bar{n}_{22}n_{12}}{p(1)}. \end{cases} \quad (1.6)$$

We will note that if coefficients - are valid, only the last condition is required.

УДК 517.91

## О ПРИЗНАКАХ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ В СУЩЕСТВЕННОМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** самосопряженность в существенном оператора, оператор Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе установлен один критерии самосопряженности в существенном оператора Штурма-Лиувилля.

### 1. Введение.

**Определение 1.1.** Плотно определенный оператор  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  называется симметрическим, если  $A \subset A^*$ , то есть если  $D(A) \subset D(A^*)$  и  $A\varphi = A^*\varphi$  для всех  $\varphi \in D(A)$ .

**Определение 1.2.** Оператор  $A$  называется самосопряженным, если  $A = A^*$ , то есть тогда и только тогда, когда  $A$  симметричен и  $D(A) = D(A^*)$ .

Симметрический оператор всегда допускает замыкание, поскольку  $D(A) \subset D(A^*)$ , а значит, область  $D(A^*)$  плотно в  $H$ . Если  $A$  симметричен, то  $A^*$  - замкнутое расширение  $A$ . Поэтому наименьшее замкнутое расширение  $A^{**}$  оператора  $A$  должно содержаться в  $A^*$ , итак для симметрического оператора имеем

$$A \subset A^{**} \subset A^* .$$

Для замкнутого симметрического оператора имеем

$$A = A^{**} \subset A^* ,$$

а для самосопряженного оператора

$$A = A^{**} = A^* .$$

Отсюда видно, что замкнутый симметрический оператор  $A$  самосопряжен тогда и только тогда, когда  $A^*$  симметричен.

**Определение 1.3.** Симметрический оператор  $A$  называется в существенном самосопряженным, если его замыкание  $\bar{A}$  самосопряжено. Если  $A$  замкнут, то подмножество  $D \subset D(A)$  называется существенной областью определения оператора  $A$ , если замыкание сужения оператора  $A$  на  $D$  совпадает с  $A$ .

Если  $A$  в существенном самосопряжен, то он имеет одно и только одно самосопряженное расширение. Действительно, если предположить, что  $B$  - самосопряженное расширение  $A$ , то  $B$  замкнут и из  $B \supset A$  получаем  $B \supset A^{**}$ . Отсюда  $B = B^* \subset (A^{**})^* = A^{**}$ . Поэтому  $B = A^{**}$ .

Справедливо и обратное утверждение, а именно, если оператор  $A$  имеет одно и только одно самосопряженное расширение, то  $A$  - самосопряжен в существенном.

Отметим, что симметрический оператор может иметь много самосопряженных расширений или совсем их не иметь.

**Постановка задачи.** Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $H = L^2(0,1)$  операторов Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x), \quad x \in (0,1), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

где  $a_{ij}$  ( $i = 1,2; j = 1,2,3,4$ )- произвольные комплексные числа.

Спрашивается, при каких условиях на коэффициенты эти операторы окажутся самосопряженными в существенном?

В связи с поставленной задачей отметим следующие известные результаты.

**Теорема 1.1 [1].** Если коэффициенты  $a_{ij}$  граничных условий действительные числа, то задача Штурма-Лиувилля (или оператор Штурма-Лиувилля) самосопряжена, тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\Delta_{12} = \Delta_{34} \tag{1.3}$$

где  $\Delta_{ij}$  - миноры составленные из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

составленной из коэффициентов граничного условия (1.2).

Если коэффициенты  $a_{ij}$  комплекснозначны, то критерии самосопряженности имеет следующий вид [2].

**Теорема 1.2 [2].** Пусть  $Ly = -(py')' + qy$ , где  $p(x)$ - положительна, производная  $p'(x)$  абсолютно непрерывна на интервале  $[0,1]$ , а функция  $q(x)$ - непрерывна и действительна. Пусть

$$U_y = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Формы  $U$  самосопряжены тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{\bar{m}_{11}m_{12} - \bar{m}_{12}m_{11}}{p(0)} = \frac{\bar{n}_{11}n_{12} - \bar{n}_{12}n_{11}}{p(1)}, \\ \frac{\bar{m}_{21}m_{22} - m_{21}\bar{m}_{22}}{p(0)} = \frac{\bar{n}_{21}n_{22} - n_{21}\bar{n}_{22}}{p(1)}, \\ \frac{\bar{m}_{11}m_{22} - m_{21}\bar{m}_{12}}{p(0)} = \frac{\bar{n}_{11}n_{22} - n_{21}\bar{n}_{12}}{p(1)}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отметим, что если коэффициенты  $m_{ij}, n_{ij}$ - действительны, то требуется только последнее условие.

**2. Методы исследований.** Для вывода основного результата настоящей работы были использованы следующие, легко доказываемые леммы.

**Лемма 2.1.** Если  $f(x)$  непрерывна в сегменте  $[0,1]$  и

$$Ly = -y''(x) = f(x), \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0 \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

то при

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$$

существует обратный оператор  $L^{-1}$ , который имеет вид

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int_0^x \frac{-\Delta_{13}xt - (\Delta_{12} + \Delta_{32})x + (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14})t + \Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} f(t)dt + \int_x^1 \frac{-\Delta_{13}xt - (\Delta_{32} + \Delta_{34})t + (\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34})x + \Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} f(t)dt. \tag{2.3}$$

**Лемма 2.2.** Интегральный оператор

$$K^*g(x) = \int_0^1 K^*(x,t)g(t)dt, \tag{2.4}$$

является сопряженным оператором к интегральному оператору

$$Kf(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt,$$

в пространстве  $L^2(0,1)$  тогда и только тогда, когда

$$K^*(x,t) = \overline{K(t,x)}. \tag{2.5}$$

Следует отметить, что ядро  $K(x,t)$  из класса Гильберта-Шмидта.

**Лемма 2.3.** Если  $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$  существует обратный оператор  $L^{-1}$  к оператору Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2), сопряженный к которому имеет вид

$$(L^{-1})^*g(x) = \int_0^1 G^*(x,t)g(t)dt, \tag{2.6}$$

где

$$G^*(x,t) = \begin{cases} \frac{-\bar{\Delta}_{13}xt - (\Delta_{34} + \Delta_{32})x + (\overline{\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34}})t + \bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}, & 0 \leq t \leq x; \\ \frac{-\bar{\Delta}_{13}xt - (\overline{\Delta_{12} + \Delta_{32}})t + (\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14}})x + \bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}, & x \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

**Лемма 2.4.** Если оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) является обратимым в пространстве  $L^2(0,1)$ , то сопряженный оператор  $L^*$  имеет следующий вид

$$L^*z = -z''(x), \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{13}y(0) - (\overline{\Delta_{34} + \Delta_{32}})y'(0) - \bar{\Delta}_{13}y(1) - (\overline{\Delta_{12} + \Delta_{14}})y'(1) = 0, \\ (\overline{\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34}})y(0) - (\overline{\Delta_{32} + \Delta_{42}})y'(0) + (\overline{\Delta_{12} + \Delta_{32}})y(1) + (\overline{\Delta_{12} + \Delta_{24}})y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

**Лемма 2.5.** Если  $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$ , то оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) симметричен тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} &= \frac{\bar{\Delta}_{13}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, \\ \frac{\Delta_{12} + \Delta_{32}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} &= \frac{\bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{32}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, \\ \frac{\Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} &= \frac{\bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Лемма 2.6.** Если  $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$ , то оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) обратим, замыкаем и имеет место формула

$$\overline{L^{-1}} = (\bar{L})^{-1}. \quad (2.11)$$

**Лемма 2.7.** Если  $A \subset A^*$  и  $R(A) = H$ , то  $A = A^*$ .

### 3. Результаты исследований

**Теорема 3.1.** Если

$$\text{а) } \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} &= \frac{\bar{\Delta}_{13}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, \\ \text{б) } \frac{\Delta_{12} + \Delta_{32}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} &= \frac{\bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{32}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, \\ \frac{\Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} &= \frac{\bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

то оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) самосопряжен в существенном в пространстве  $L^2(0,1)$ .

**Доказательство.** В силу условий (3.1), (3.2) и леммы 2.5 оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) симметричен, а в силу леммы (2.6) он замыкаем. Замыкание любого симметрического оператора будет симметрическим оператором.

Таким образом, замыкание оператора Штурма-Лиувилля  $L$  является симметрическим оператором, область значений, которого  $R(\bar{L})$  совпадает со всем пространством  $H = L^2(0,1)$  (см.2.11).

Тогда в силу леммы 2.7 имеет место равенство  $(\bar{L})^* = \bar{L}$ , т.е. оператор  $\bar{L}$  самосопряжен, что и утверждалось теоремой 3.1.

**4. Выводы.** Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [3-14].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков, 1939, 717с.  
 [2] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: ИЛ, 1958, 474с.  
 [3] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.  
 [4] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний” – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.  
 [5] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний”. – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.  
 [6] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.  
 [7] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.  
 [8] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.  
 [9] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.  
 [10] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве  $L^2(0,1)$ . // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.  
 [11] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.  
 [12] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.  
 [13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.  
 [14] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBEPT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

#### REFERENCES

- [1] Ajns Je.L. Obyknovnyye differencial'nye uravnenija.- Harkov, 1939, 717s.  
 [2] Koddington Je.A., Levinson N. Obyknovnyye differencial'nye uravnenija. - M.: IL, 1958,  
 [3] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Republikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovaniya JuK» № 27, 2002. s. 58-62.  
 [4] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Republikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij” – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.  
 [5] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Republikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij”. – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.  
 [6] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Republikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 25-30.  
 [7] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Republikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 133-136.  
 [8] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovaniya sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.  
 [9] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirsij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.  
 [10] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve . // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.  
 [11] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovnyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.  
 [12] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g. Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.  
 [13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.  
 [14] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193с, LAP LAMBEPT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

**ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ  
ТЕГІ ЖАЛҚЫ БОЛУЫНЫҢ БЕЛГІЛЕРІ ТУРАЛЫ**

**А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев**

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** тегі жалқы оператор, Штурм-Лиувилл операторы.

**Аннотация.** Бұл еңбекте  $Ly = -y''(x)$  Штурм-Лиувилл операторының тегі жалқы болуының бір белгісі табылды.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 144 – 150

**THE METHOD OF GENERALIZED FUNCTIONS  
IN STATIONARY BOUNDARY VALUE PROBLEM  
FOR EQUATION OF THE DYNAMICS OF THE DRILL-STRING**

**A. Sergaliyev, L. Khajiyeva**

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: khadle@mail.ru

**Keywords:** drill-string, rod, stationary vibrations, fundamental solution, the method of generalized functions.

**Abstract.** The method of generalized functions for the solution of stationary boundary value problem of the dynamics of transverse vibrations of the drill-string is considered. The drill string is modeled as an elastic rod rotating with constant angular speed and compressed by constant axial force. By means of the theory of generalized functions a generalized solution of the boundary value problem is constructed, which in case of regularity and differentiability coincides with the classical solution of the problem. Using the generalized Fourier transforms a fundamental solution is obtained and its properties, as properties of its first three derivatives, are studied. The methods of construction of resolving equations needed to determine the missing boundary conditions is shown, which allows to solve not only the direct boundary value problems, but also semi-inverse and inverse boundary value problems. Which in turn is very important for practical applications in the manufacture of a variety of controllers for measuring devices of constructions working in the conditions of variable dynamic impacts. The obtained solutions allows to determine stressed state of rod structures under a variety of geometric dimensions and elastic parameters, as well as throughout the entire range of vibration frequencies.

УДК 622.257.2

**МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
В СТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ БУРОВОЙ КОЛОННЫ**

**А. С. Сергалиев, Л. А. Хаджиева**

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** буровая колонна, стержень, стационарные колебания, фундаментальное решение, метод обобщенных функций.

**Аннотация.** Рассмотрен метод обобщенных функций для решения стационарной краевой задачи динамики поперечных колебаний буровой колонны. Буровая колонна моделируется как упругий стержень, который вращается с постоянной угловой скоростью и находится под действием постоянной продольной нагрузки. С помощью теории обобщенных функций построено обобщенное решение поставленной краевой задачи, которое при условии регулярности и дифференцируемости совпадает с классическим решением краевой задачи. Используя обобщенное преобразование Фурье, получено фундаментальное решение и изучены его свойства, а также свойства его первых трех производных. Показан метод построения разрешающих уравнений, необходимых для определения недостающих краевых условий, что позволяет в итоге решать не только прямые краевые задачи, но и обратные и полуобратные краевые задачи. В свою очередь это очень важно для практических приложений при изготовлении разнообразных контроллеров для измерительных приборов конструкций, работающих в условиях переменных динамических воздействий. Полученные решения позволяют определять напряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и упругих параметрах, а также во всем диапазоне частот колебаний.

**Введение.** В настоящее время интенсивное освоение недр Земли характеризуется ростом добычи нефти и природного газа. В странах с развитой добывающей промышленностью наиболее распространенным способом добычи нефтепродуктов является строительство вертикальных скважин путем бурения, которое является надежным и эффективным в различных горно-геологических условиях. Однако практика строительства нефтяных и газовых скважин показывает, что еще нередки случаи, когда происходит искривление вертикального ствола скважины, что ставит под угрозу возможность ее эксплуатации. Причинами искривления скважин может служить как появление нештатных ситуаций, вызванных критическими состояниями квазистатического равновесия и колебаний буровой штанги, так и браковка скважины за счет вращения буровой колонны, в результате которого генерируются центробежные и кориолисовы силы инерции. Таким образом, задачи моделирования динамики колебаний буровых колонн в таких скважинах представляют существенный научный и прикладной интерес.

В данной работе рассматривается применение аппарата теории обобщенных функций к задачам колебания упругих стержней. Метод обобщенных функций является эффективным методом исследования задач математической физики, в силу того что классическое понятие дифференцируемости решений уравнений порой может резко сужать класс задач, полезных для приложений. При этом несущественен тип уравнений, он может быть эллиптическим, параболическим, гиперболическим или даже смешанного типа. Решение динамических задач на основе метода обобщенных функций требует введения понятия обобщенного решения, что связано с построением фундаментальных решений для исследуемых уравнений, особенностью которых является принадлежность к классу обобщенных функций. Поэтому на первом этапе рассматривается случай плоских стационарных колебаний буровой колонны.

**Постановка задачи.** Рассмотрим буровую колонну как упругий стержень длины  $L$ , который характеризуется плотностью  $\rho$ , жесткостью  $EJ$ , площадью поперечного сечения  $F$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $w$  и находится под действием постоянной продольной нагрузки  $N$ . Поперечные перемещения сечений стержня задаем уравнением вида:

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho w^2 F u + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(z, t), \quad (1)$$

с граничными условиями шарнирного опирания стержня:

$$\begin{aligned} u(\pm l, t) &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=\pm l} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u(z, t)$  – компоненты поперечных перемещений,  $l = \frac{L}{2}$ ,  $f(z, t)$  – действующая на стержень сила.

В нашем случае будем рассматривать периодическую во времени силу вида

$$f(z, t) = f(z) \exp(-i\omega t). \quad (3)$$

Для простоты введем следующие обозначения  $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$ ,  $q = \frac{N}{\rho F}$ . Тогда (1) примет следующий вид:

$$c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + q \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - w^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tilde{f}(z, t), \quad (4)$$

где  $\tilde{f}(z, t) = \frac{f(z, t)}{\rho F}$ , далее знак  $\sim$  опускается.

**Обобщенное решение краевой задачи.** В силу гармоничности по времени действующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде  $u(z, t) = u(z) \exp(-i\omega t)$ , где комплексные амплитуды удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$c^2 \frac{d^4 u}{dz^4} + q \frac{d^2 u}{dz^2} - w^2 u + \omega^2 u = f(z). \quad (5)$$

Для решения задачи используем метод обобщенных функций, основные идеи которого изложены в [1]. Для этого представим обобщенное решение краевой задачи в виде:

$$\hat{u}(z) = u(z) H(l - |z|),$$

где  $H(z)$  – функция Хевисайда, равная 0.5 в точке разрыва,  $u(z)$  – ее классическое решение. Из (5), используя операцию дифференцирования регулярных кусочно-дифференцируемых обобщенных функций [2], получим на  $S'(R^1)$ :

$$c^2 \frac{d^4 \hat{u}}{dz^4} + q \frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} - w^2 \hat{u} + \omega^2 \hat{u} = f(z) H(l - |z|) + q \left( \frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} \delta(z+l) - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} \delta(z-l) \right) + \\ + c^2 \left( \frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=-l} \delta(z+l) - \frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=l} \delta(z-l) + \frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} \delta''(z+l) - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} \delta''(z-l) \right), \quad (6)$$

$\delta(z)$  – функция Дирака. Коротко запишем это уравнение в виде:

$$c^2 \frac{d^4 \hat{u}}{dz^4} + q \frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} - w^2 \hat{u} + \omega^2 \hat{u} = \hat{f}(z) + \hat{G}(z, u'(-l), u'(l), u'''(-l), u'''(l)). \quad (7)$$

Требуется определить решение (7) при полученной сингулярной правой части, которая зависит от значений производных искомой функции в граничных точках.

Решение уравнения (7) имеет вид свертки:

$$\hat{u}(z) = U(z, \omega) * \hat{f}(z) + U(z, \omega) * \hat{G}(z, \dots), \quad (8)$$

где  $U(z, \omega)$  – фундаментальное решение уравнения (5):

$$c^2 \frac{d^4 U}{dz^4} + q \frac{d^2 U}{dz^2} - w^2 U + \omega^2 U = \delta(z). \quad (9)$$

Как известно, если такая свертка существует, то обобщенное решение существует и оно единственно. А если оно регулярное и дифференцируемое, то совпадает с классическим.

Подставляя в (8) правую часть (6) и вычисляя, получим решение задачи в виде:

$$u(z) H(l - |z|) = \hat{f}(z) * U(z, \omega) + q \left( \frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} U(z+l, \omega) - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} U(z-l, \omega) \right) + \\ + c^2 \left( \frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=-l} U(z+l, \omega) - \frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=l} U(z-l, \omega) + \frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} \frac{\partial^2 U(z+l, \omega)}{\partial z^2} - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} \frac{\partial^2 U(z-l, \omega)}{\partial z^2} \right). \quad (10)$$

Формула (10) определяет поперечные перемещения стержня по известным перемещениям, углам поворота, изгибающим моментам и перерезывающим силам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи задаются только четыре граничных условия, например, в этом случае известны перемещения и изгибающие моменты на концах стержня. Для ее решения надо определить углы поворота и перерезывающие силы на его концах. Для определения недостающих краевых значений следует использовать краевые условия, исходя из свойств фундаментального решения  $U(z, \omega)$ .

**Фундаментальное решение и его свойства.** Фундаментальное решение  $U(z, \omega)$  удается построить аналитически с помощью обобщенного преобразования Фурье уравнения (9). Его трансформанта Фурье имеет следующий вид:

$$\bar{U}(\xi, \omega) = \frac{1}{\Delta(\xi, \omega)}, \quad (11)$$

где  $\Delta(\xi, \omega) = c^2 \xi^4 - q \xi^2 - (\omega^2 + w^2) = c^2 (\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2)$ .

Корни квадратного относительно  $\xi^2$  уравнения  $\Delta(\xi, \omega) = 0$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4c^2(\omega^2 + w^2)}}{2c^2},$$

зависят только от трех параметров стержня:  $c$ ,  $\alpha = \frac{q}{2c}$ ,  $w$ . Размерность  $[\alpha] = [w] = [\omega]$ .

В этих параметрах

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega^2 + w^2}}{c}.$$

Их асимптотика по частоте следующая:

$$\text{а) при } \omega \rightarrow \infty: \quad \lambda_1 \square \frac{\omega}{c}, \quad \lambda_2 \square -\frac{\omega}{c}, \quad (12)$$

$$\text{б) при } \omega \rightarrow 0: \quad \lambda_1 \square \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + w^2}}{c}, \quad \lambda_2 \square \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + w^2}}{c}. \quad (13)$$

Для построения оригинала удобно разложить  $\frac{1}{\Delta(\xi, \omega)}$  в простые дроби. Тогда компоненты трансформанты (11) преобразуются к виду:

$$\bar{U}(\xi, \omega) = \frac{1}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left( \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right). \quad (14)$$

Из (14) видно, что для построения оригинала  $U$  надо построить оригинал функции

$$\psi^*(\xi, \omega) = (\xi^2 - \lambda)^{-1} = F_z[\psi(z, \omega)].$$

Используя свойство непрерывности преобразования Фурье обобщенных функций, нетрудно показать, что функция  $\frac{\sin(k|z|)}{k}$  имеет обобщенное преобразование Фурье вида:

$$F_z \left[ \frac{\sin(k|z|)}{k} \right] = \left( \frac{1}{(\xi^2 - (k+i0)^2)} + \frac{1}{(\xi^2 - (k-i0)^2)} \right),$$

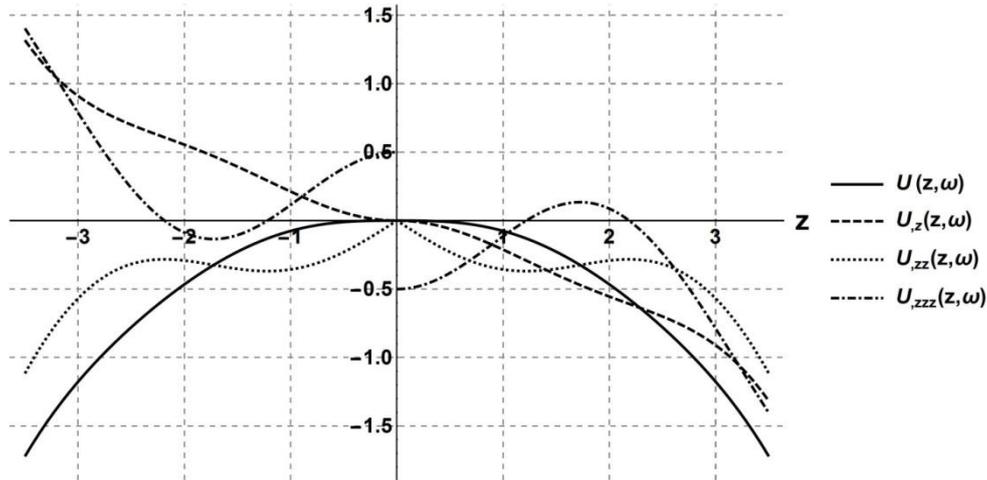
откуда следует, что

$$\psi(z, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}|z|)}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (15)$$

Таким образом, используя (15), получим выражение для фундаментального решения:

$$U(z, \omega) = \frac{1}{4c\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 + w^2}} \left( \frac{\sin(\sqrt{\lambda_1}|z|)}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_2}|z|)}{\sqrt{\lambda_2}} \right). \quad (16)$$

Заметим, что риманова поверхность фундаментального решения по  $\omega$  однолистная, так как значения  $U(z, \omega)$  не зависят от выбора знака радикалов  $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ .



Фундаментальное решение  $U(z, \omega)$  и его производные до 3-го порядка при  $\omega = 1$  ( $c = 1, q = 1, \alpha = 1$ )

Из рисунка видно, что фундаментальное решение и его первые две производные являются регулярными обобщенными функциями, непрерывными в точке  $x = 0$ :

$$U(\pm 0, \omega) = U(0, \omega) = 0, \quad U_{,z}(\pm 0, \omega) = U_{,z}(0, \omega) = 0, \quad U_{,zz}(\pm 0, \omega) = U_{,zz}(0, \omega) = 0, \quad (17)$$

а его третья производная

$$U_{,zzz}(z, \omega) = \frac{1}{4c\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 + w^2}} \left( \lambda_2 \cos(\sqrt{\lambda_2}z) - \lambda_1 \cos(\sqrt{\lambda_1}z) \right) \text{sgn}(z)$$

в этой точке терпит разрыв первого рода:

$$U_{,zzz}(\pm 0, \omega) = \pm \frac{1}{2c^2} \quad (18)$$

(верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему – правый). Эти особенности наглядно продемонстрированы на рис. 1 ( $U_{,z} = \frac{\partial U}{\partial z}$  и т.д.).

**Разрешающие уравнения краевой задачи.** Используя (8) и предельные свойства  $U(z, \omega)$  и ее производных при  $z \rightarrow \pm 0$  (17), а также решение (10), получим систему из четырех линейных алгебраических уравнений в левой и правой граничных точках для определения четырех неизвестных функций на концах стержня:

$$\begin{aligned} 0 &= -q\theta_2 U(-2l, \omega) - c^2 Q_2 U(-2l, \omega) - c^2 \theta_2 U_{,zz}(-2l, \omega) + \hat{f}(z) * U(z, \omega) \Big|_{z=-l}, \\ 0 &= q\theta_1 U(2l, \omega) + c^2 Q_1 U(2l, \omega) + c^2 \theta_1 U_{,zz}(2l, \omega) + \hat{f}(z) * U(z, \omega) \Big|_{z=l}, \\ 0.5\theta_1 &= -q\theta_2 U_{,z}(-2l, \omega) - c^2 Q_2 U_{,z}(-2l, \omega) - c^2 \theta_2 U_{,zzz}(-2l, \omega) + \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \omega) \Big|_{z=-l}, \\ 0.5\theta_2 &= q\theta_1 U_{,z}(2l, \omega) + c^2 Q_1 U_{,z}(2l, \omega) + c^2 \theta_1 U_{,zzz}(2l, \omega) + \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \omega) \Big|_{z=l}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – углы поворота на левом и правом концах стержня, соответственно;  $Q_1$  и  $Q_2$  – перерезывающие силы на концах стержня.

Если  $\hat{f}(z)$  – регулярная функция, то

$$\hat{f}(z) * U(z, \omega) = H(l - |z|) \int_{-l}^l f(y) U(z - y, \omega) dy. \tag{19}$$

Для сингулярной  $\hat{f}(z)$  – следует пользоваться определением свертки [2].

Разрешающую систему уравнений (18) представим в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & (qU + c^2U_{,zz})_{(-2l)} & 0 & c^2U(-2l, \omega) \\ -(qU + c^2U_{,zz})_{(2l)} & 0 & -c^2U(2l, \omega) & 0 \\ 0.5 & (qU_{,z} + c^2U_{,zzz})_{(-2l)} & 0 & c^2U_{,z}(-2l, \omega) \\ -(qU_{,z} + c^2U_{,zzz})_{(2l)} & 0.5 & -c^2U_{,z}(2l, \omega) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \left\{ \hat{f}(z) * U(z, \omega) \Big|_{z=-l}, \hat{f}(z) * U(z, \omega) \Big|_{z=l}, \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \omega) \Big|_{z=-l}, \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \omega) \Big|_{z=l} \right\}^T. \tag{20}$$

Такую систему линейных алгебраических уравнений легко построить для любой краевой задачи, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть – с известными.

Представим (20) в следующем виде:

$$\{M_{ij}(l, \omega)\}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(l, \omega) \\ b_2(l, \omega) \\ b_3(l, \omega) \\ b_4(l, \omega) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Определитель матрицы  $M_{ij}$  определяет спектр собственных упругих колебаний стержня, частоты которых должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det \{M_{ij}(l, \omega_k)\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{22}$$

В силу (16), это сложное трансцендентное уравнение, корни которого можно определять численно с помощью различных стандартных программ.

В случае собственных колебаний существование решений и его единственность определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера. После определения недостающих граничных функций с помощью формулы (7) определяем перемещения в стержне.

**Заключение.** Полученные решения позволяют определять напряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и упругих параметрах, а также во всем диапазоне частот колебаний. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Нетрудно видеть, что алгоритм решения сохраняется и для обратных краевых задач, если на одном конце стержня задать не два краевых условия, а три, а на другом одно, недостающее для разрешимости системы, или даже 4 значения на одном, при неизвестных значениях на другом. Этот класс полуобратных и обратных задач очень важен для практических приложений при изготовлении разнообразных контроллеров для измерительных приборов конструкций, работающих в условиях переменных динамических воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. – 2006. – Т. 6, № 1(19). – С. 16-32.  
[2] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1978.

REFERENCES

- [1] Alekseyeva L.A. The method of generalized functions in non-stationary boundary value problems for the wave equation // Mathematical Journal. – Vol. 6 (2006), №1(19), p.16-32.  
[2] Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics. – M., 1978.

**БҰРҒЫЛАУ БАҒАНЫНЫҢ ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУІ ҮШІН СТАЦИОНАРЛЫ  
ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕГІ ЖАЛПЫЛАНҒАН ФУНКЦИЯ ӘДІСІ**

**А. С. Серғалиев, Л. А. Хаджиева**

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** бұрғылау бағаны, стержень, стационарлы тербеліс, іргелі шешім, жалпыланған функция әдісі.

**Аннотация.** Бұрғылау бағанының көлденең қимасының қозғалысы туралы стационарлы шекаралық есебін шешудің жалпыланған функция әдісі қарастырылды. Бұрғылау бағаны серіппелі стержень ретінде моделденеді және тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналады, әрдайым тұрақты бойлық күшпен әсер етіледі. Жалпыланған функция теориясымен қойылған шекаралық есептің жалпы шешімі тұрғызылды және ол регулярлық және дифференциалданатындық шарттарымен шекаралық есептің классикалық шешімімен сәйкес келеді. Жалпыланған Фурье түрлендіруін қолдана отырып іргелі шешім алынды және оның қасиеттері зерттелді, сонымен қатар оның бастапқы үш туындысының қасиеттері зерттелді. Тура шекаралық есепті ғана емес, сонымен қатар кері және жартылай кері шекаралық есептерді шешуге мүмкіндік беретін жетіспейтін шекаралық шарттарды анықтау үшін шешілетін теңдеулерді тұрғызу әдісі көрсетілді. Бұл өз кезегінде айнымалы динамикалық әсерлер мен жұмыс жасайтын, конструкцияларды өлшеуші құрылғылары үшін әртүрлі контроллерларды дайындау барысында қолдану үшін өте маңызды. Алынған шешім әртүрлі геометриялық өлшемдерде, серпімді параметрлерде және тербеліс жиілігінің барлық аралықтарында стерженьді құрылғылардың күйін анықтауға мүмкіндік береді.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 150 – 154

**MATHEMATICAL MODELING IN ENVIRONMENTAL ISSUES**

**A. K. Koishybekova**

Zhetysu state university named after Ilyas Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan.

E-mail: aizhankym@inbox.ru

**Key words:** flue gas cleaning, the cleaning process automation.

**Abstract.** The article presents the results of mathematical modeling of the transport and chemical transformation of substances in industrial places. A mathematical model describing the process of distribution of pollution in the atmosphere at a point short of emission processes damage objects within the contaminated area, which allows to estimate the damage caused by environmental pollution.

There presents the results of numerous studies on the development of methods of short-term forecasting of air pollution with the possibility of emission control under adverse weather conditions. Select two lines of research to study the patterns of spread of contaminants from the source of contamination.

Issues of mathematical modeling of the spread of pollutants in the atmosphere and water monograph. Particular attention is paid to mathematical modeling of the optimal placement of industrial enterprises among the ecologically important areas. The paper presents a mathematical model of the formation, rise and spread of the cloud of combustion products in ground bench tests of rocket engines. The model is based on the numerical solution of three-dimensional equations of hydrodynamics. We apply the same approach for the solution of the nonstationary problem of assessing the damage caused by the sudden release of a point of pollution in the atmosphere.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОБЛЕМЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

А. К. Койшыбекова

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан

**Ключевые слова:** очистка дымовых газов, автоматизация процесса очистки.

**Аннотация.** Предложена математическая модель, описывающая процессы распространения загрязнений в атмосфере при точечном кратковременном выбросе, процессы повреждения объектов, попавших в зону загрязнения, позволяющая оценить величину ущерба от загрязнения окружающей среды излагаются результаты многочисленных исследований по разработке методов краткосрочного прогнозирования загрязнения воздуха с учетом возможности регулирования выбросов при неблагоприятных метеоусловиях. Выделено два направления исследований по изучению закономерностей распространения примесей от источника загрязнений.

Вопросам математического моделирования процессов распространения загрязняющих веществ в атмосфере и воде посвящена монография. Особое внимание уделено вопросам математического моделирования оптимального размещения промышленных предприятий среди экологически важных зон. В работе предложена математическая модель формирования, подъема и распространения облака продуктов сгорания при наземных стендовых испытаниях ракетных двигателей. Модель основана на численном решении трехмерных уравнений гидротермодинамики. Применим аналогичный подход для решения нестационарной задачи об оценке ущерба, вызванного внезапным точечным выбросом загрязнений в атмосферу.

В настоящее время имеются несколько типов моделей, отражающих те или иные аспекты взаимодействия общества и среды с учетом загрязнения окружающей среды и его социально-экономических последствий.

В работах [1-5] сформулирован ряд математических моделей для решения такого рода задач.

В данной работе рассматривается математическая модель основанная на численном решении управления переноса и диффузии загрязняющих примесей. В качестве целевой функции выступает функционал стоимости ущерба от отдельных источников и затрат на их оптимизацию. Эти функции зависят от концентрации примесей и могут зависеть от входных параметров модели.

Пусть рассматриваемый регион расположен в ограниченной трехмерной области  $D = \Sigma \cdot [O, H]$  и на его территории имеется  $n$  промышленных предприятий, производящих выбросы вредных веществ в атмосферу.

Не ограничивая общности, будем считать источники выбросов точечными и расположенными внутри области. Для описания процесса распространения примеси от указанных источников воспользуемся линейным уравнением турбулентной диффузии (4,5)

$$L_{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} + \text{div} \bar{U} \varphi + \delta \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - \mu, \quad \varphi = \varphi_0(\vec{\chi}, t) + \sum_{m=1}^n Q^{m\sigma}(\vec{\chi} - \tau_0) \quad (1)$$

С краевым и начальными условиями

$$\mathcal{G} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{G} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\varphi / s = \varphi_s(\vec{x}, t) \quad (4)$$

$$\varphi /_{t=0} = \vec{\varphi}_0(\vec{x}) \quad (5)$$

где  $\varphi(\vec{x}, t)$  - концентрация примеси в точке  $\vec{x} \in D$  в момент времени  $t$ ;  $\mu \mathcal{G}$  - коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии;  $\sigma(\vec{x}, t)$  - функция, описывающая скорость изменения примеси вследствие химических превращений;  $\beta$  - коэффициент, характеризующий взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью;  $\varphi_s(\vec{x}, t), \vec{\varphi}_0(\vec{x})$  - значение концентрации примеси  $S$  - боковой поверхности области  $D$  и в начальный момент времени;  $\vec{\varphi}_0(\vec{x})$  - известная функция, описывающая неорганизованные источники выбросов;  $Q_m$  - начальная мощность выброса источника,  $m=1, \bar{n}$ .

Будем считать заданными начальные и краевые условия (2)-(5), скорость ветра  $\vec{U}$ , коэффициенты турбулентного обмена, и ограничимся рассмотрением модели "интегральной" концентрации [5-7]. Предположим, кроме того, что коэффициенты (1)-(5) и оператор  $\delta$  не зависят от искомого решения.

Введем следующие обозначения:  $\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  - вектор размерности компонента которого описывает относительное уменьшение интенсивности выброса от  $i$ -го источника,  $0 \leq e_i \leq E_i$ ;  $E_i$  - максимум относительного уменьшения интенсивности выброса от  $i$ -го источника,  $i=1, \bar{n}$ .

В силу линейности модели (1)-(5), концентрация примеси в точке после уменьшения интенсивности выбросов определяется по формуле [4,7]:

$$\varphi(\vec{x}, t, \vec{e}) = \sum_{m=1}^n Q_m (1 - e_m) \varphi_m(\vec{x}, t) + \varphi_0(\vec{x}, t) \quad (6)$$

где  $\varphi_m(\vec{x}, t)$  - решение набора задач

$$\begin{aligned} L\varphi_m(\vec{x}, t) &= \delta(\vec{x} - \tau_m) \\ E\varphi_m(\vec{x}, t) &= 0 \quad \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_m}{\partial Z} = 0 \quad \text{при } z = 0, H \\ \varphi_m(\vec{x}, t)|_{t=0} &= 0 \quad \varphi_m(\vec{x}, t)|_s = 0 \quad m=1, n \end{aligned} \quad (7)$$

а функция  $\varphi_0(\vec{x}, t)$  удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} L\varphi_0(\vec{x}, t) &= \varphi_0(\vec{x}_0, t) \quad E\varphi_0(\vec{x}, t) = 0 \quad \mathcal{G} \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z} = 0 \quad \text{при } z = 0, H \\ \varphi_0|_s &= \varphi_s(\vec{x}, t) \quad \varphi_0|_{t=0} = \vec{\varphi}_0(\vec{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

При выработке долговременной политики улучшения качества атмосферы используются, как правило, значения осредненных концентраций примеси приземного слоя.

Таким образом, построенная экономико-математическая модель управления используется для описания процессов распространения загрязнителей в численных моделях. Это позволяет получить оценку уровней загрязнения в точках рассматриваемого региона, которые далее могут быть использованы для формирования критерия качества воздушного бассейна области. Целевая функция представлена в виде свертки кусочно-линейной функции.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Охрана окружающей среды. Модели управления чистой природной среды. /Под.ред. Гофонова К.Г., Гусева А.А. – М.: Экономика, 1987.
- [2] Gorr W.K., Gistafson S.A., Kortonen R.O. Optimal control strategies and regulatory policy. – Environment and Planning, 1992, И4.
- [3] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1997.
- [4] Пенек В.В., Шпак В.А. Некоторые модели управления качеством воздушного бассейна. – Новосибирск, 1996.
- [5] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 2001.
- [6] Берлянд М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. – Л. : Гидрометеиздат, 1985. – 272 с.
- [7] Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 320 с.
- [8] Воздействие на окружающую среду кратковременных выбросов большой мощности : учеб. пособие / В. М. Суслонов, Н. Г. Максимович, В. Н. Иванов, В. А. Шкляев. – Пермь : Пермский ун-т, 2005. – 126 с.
- [9] Кулешов А. А. Математическое моделирование в задачах промышленной безопасности и экологии / А. А. Кулешов // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2003. – № 4. – С. 56–70.
- [10] Долгих В. Н. Применение методов математического моделирования для оценки экономического ущерба от загрязнения окружающей среды / В. Н. Долгих, Я. В. Долгих // Вісник Української академії банківської справи. – 2000. – № 1(8). – С. 92–94.
- [11] Долгих В. Н. Применение некоторых идей механики разрушения в экологии / В. Н. Долгих, Я. В. Долгих // Вісник Сумського державного університету. – 1995. – № 4. – С. 121–124.
- [12] Долгих Я. В. Оценка экологических амортизационных отчислений в зависимости от уровня поврежденности природных объектов / Я. В. Долгих // Вісник Української академії банківської справи. – 1998. – № 4. – С. 72–75.
- [13] Долгих В. Н. Мера поврежденности нагруженных элементов конструкций, находящихся в агрессивной среде / В. Н. Долгих, Я. В. Долгих // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. – 2003. – № 3(49). – С. 179–183.
- [14] Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. - М: УРСС, 2004.
- [15] Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
- [16] Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических процессов. – М., МГУ, 1993, 300 стр.
- [17] Коробейников В.П. Математическое моделирование катастрофических явлений в природе. – М., Знание, 1986.
- [18] Жаблон, Симон. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике. – М.: Наука, 1983.
- [19] Математическое моделирование. \ под ред. Дж.Эндрюса, З.Мак-Лоуна; пер с англ. - М.:Мир, 1979.
- [20] Вабищевич П.Н. Численное моделирование. -М.:Изд-во МГУ, 1993.

## REFERENCES

- [1] The protection of the environment. Management Models clean environment. Ed. Gofonova K.G., Guseva A.A. - MA: Economics, 1987. (in Russ.).
- [2] Gorr W.K., Gistafson S.A., Kortonen R.O. Optimal control strategies and regulatory policy. - Environment and Planning, 1992 I4.
- [3] Gurman V.I. Singular optimal control problem. - M.: Nauka, 1997. (in Russ.).
- [4] Peneko V.V., Shpak V.A. Some models of quality control of the air basin. - Novosibirsk, 1996. (in Russ.).
- [5] Marchuk G.I. Mathematical modeling in the problem of the environment. Nauka, 2001. (in Russ.).
- [6] Berlyand M.E. Forecast and regulation of air pollution. - L. Gidrometeoizdat, 1985. - 272 p. (in Russ.).
- [7] Marchuk G.I. Mathematical modeling in the environmental problem. Marchuk. - Moscow: Nauka, Home edition of Physical and mathematical literature, 1982. - 320 p. (in Russ.).
- [8] The environmental impact of short-term emissions of high power: Proc. Benefit. V.M. Suslonov, N.G. Maksimovich, V.N. Ivanov, V.A. Shklyayev. - Perm Perm State University Press, 2005. - 126 p. (in Russ.).
- [9] Kuleshov A.A. Mathematical modeling in problems of industrial safety and environmental. Information technologies and computer systems. - 2003. - № 4. - pp 56-70. (in Russ.).
- [10] Long V.N. Application of mathematical modeling to assess the economic impact of environmental pollution. News Ukrainkoï Academy bankivskoï right. - 2000. - № 1 (8). - p. 92-94. (in Russ.).
- [11] Long V.N. Application of some concepts of fracture mechanics in ecology. News Sumskogo sovereign universitetu. - 1995. - № 4. - pp 121-124. (in Russ.).
- [12] Long Y. Assessment of environmental depreciation depending on the level of natural objects damage. News Ukrainkoï Academy bankivskoï right. - 1998. - № 4. - pp 72-75. (in Russ.).
- [13] Long V.N. Measure of damage of loaded structural elements located in aggressive environments. News Sumskogo sovereign universitetu. Seriya Tehnichni science. - 2003. - № 3 (49). - S. 179-183. (in Russ.).
- [14] Myshkis A.D. Elements of the theory of mathematical models. - Moscow: URSS, 2004. (in Russ.).
- [15] Zarubin V.S. Mathematical modeling technique. -M Univ. MSTU. Bauman, 2003. (in Russ.).
- [16] Riznichenko G.Y., Rubin A.B. Mathematical models of biological processes. -M., Moscow State University, 1993, 300 p. (in Russ.).

- [17] Korobeynikov V.P. Mathematical modeling of catastrophic phenomena in nature. -M., Knowledge, 1986. (in Russ.).  
[18] Zhablon Simon. The use of computers for numerical simulation in physics. - М.: Nauka, 1983. (in Russ.).  
[19] Mathematical modeling. Under ed. Dzh. Endryusa, Z. Mak Lawn; tran. From Eng.- Moscow: Mir, 1979. (in Russ.).  
[20] Vabishchevich P.N. Numerical simulation. M.: MGU, 1993. (in Russ.).

## БІЗДІ ҚОРШАҒАН ОРТА МӘСЕЛЕЛЕРІНДЕГІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҮЛГІЛЕУ

А. Қ. Қойшыбекова

І. Жансүгіров атындағы ЖМУ, Талдықорған, Қазақстан

**Тірек сөздер:** түгінді газдарды тазалау, массаны тасымалдауды үлгілеу.

**Аннотация.** Мақалада бізді қоршаған орта мәселелеріндегі обектердің кезінде атмосфераны ластанған заттардың тасымалдауын және химикалық трансформациясын математикалық үлгілеу нәтижелері көрсетілген. Қоршаған ортаны ластау туындаған залал бағалауға мүмкіндік береді ластанған ауданы, ішінде эмиссиялық процестер залал объектілерін қысқа нүктесінде атмосферада ластану бөлу процесін сипаттайтын математикалық моделі. Мұнда біз қолайсыз ауа райы жағдайында эмиссиялық бақылау мүмкіндігімен ауаның ластану қысқа мерзімді болжау әдістерін әзірлеу бойынша көптеген зерттеулер нәтижелерін ұсынамыз. Ластану көзінен ластаушылардың таралу заңдылықтарын зерттеу үшін ғылыми-зерттеу екі желілерін таңдаңыз.

Атмосфера мен су монография ластаушы заттардың таралу математикалық модельдеу мәселелері. Ерекше назар экологиялық маңызды бағыттарының арасында өнеркәсіптік кәсіпорындардың оңтайлы орналастыру математикалық модельдеу аударылады. қағаз зымыран қозғалтқыштарын жер стендтік сынақтар жану өнімдерінің бұлтта қалыптастыру, өрлеу және таралу математикалық моделі ұсынылды. моделі гидродинамика үш өлшемді теңдеулер сандық шешу негізделген. Біз атмосферада ластану нүктеден кенеттен босату арқылы келтірілген зиянды бағалау стационарлық проблеманы шешу үшін сол тәсілді қолдану.

*Поступила 07.07.2015 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 154 – 159

## RESEARCH OF LONG-RANGE AND SHORT-RANGE CORRELATIONS IN INTERACTIONS OF 10.7 AGEV GOLD NUCLEI WITH PHOTOEMULSION NUCLEI

I. A. Lebedev, A. T. Temiraliev, A. I. Fedosimova

Institute of Physics and Technology, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: lebedev@sci.kz

**Keywords:** interaction of nuclei, multiparticle processes, fragmentation.

**Abstract.** Research of "length" and "force" of correlations in pseudorapidity distributions of the secondary particles, formed in interactions of  $^{197}\text{Au}$  10,7 AGeV gold nuclei with photoemulsion nuclei, on the basis of Hurst's method, is carried out. As a result, events with long-range, short-range correlations and the mixed type by the detailed analysis of Hurst curve behaviour, are allocated. It is revealed, that events of various types have various fragmentation characteristics. The majority of events with long-range correlations are processes of full destruction of target nuclei, in which multi-charge fragments are absent. In events of the mixed type several multi-charge fragments is observed. Besides, these two types essentially differ on multiplicity of secondary particles. On the basis

of research of dependence of multiplicity of high energy particles  $n_s$  versus number of target nucleus fragments for events of various types it is revealed, that the most considerable multiparticle correlations are shown in the central interactions of gold nuclei and nuclei of CNO group, i.e. nuclei are essentially differing on volume, nuclear mass, charge. Such events are characterised by full destruction of target nucleus and disintegration of projectile nucleus to several multi-charge fragments.

УДК 539.12

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДАЛЬНИХ И БЛИЖНИХ КОРРЕЛЯЦИЙ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ЯДЕР ЗОЛОТА 10.7 А·ГЭВ С ЯДРАМИ ФОТОЭМУЛЬСИИ

И. А. Лебедев, А. Т. Темиралиев, А. И. Федосимова

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** взаимодействие ядер, многочастичные процессы, фрагментация.

**Аннотация.** Проведено исследование «длины» и «силы» корреляций в псевдобыстротных распределениях вторичных частиц, образованных во взаимодействиях ядер золота  $^{197}\text{Au}$  10,7 А·ГЭВ с ядрами фотоэмульсии, на основе метода Херста. В результате детального анализа поведения кривой Херста выделены события с дальними, ближними корреляциями и смешанного типа. Обнаружено, что события различных типов имеют различные фрагментационные характеристики. Большинство событий с дальними корреляциями являются процессами полного разрушения ядра снаряда, в которых многозарядные фрагменты отсутствуют. В событиях смешанного типа наблюдается множественное образование многозарядных фрагментов. Кроме того, эти два типа существенно отличаются по множественности вторичных частиц. На основе исследования зависимости множественности быстрых частиц  $n_s$  от числа фрагментов ядра мишени для событий различных типов обнаружено, что наиболее значительные многочастичные корреляции проявляются в центральных взаимодействиях ядер золота и ядер CNO группы, т.е. ядер существенно отличающихся по объему, атомному весу, заряду. Такие события характеризуются полным разрушением ядра мишени и распадом ядра снаряда на несколько многозарядных фрагментов.

**Введение.** Поиск фазового перехода вещества из адронного состояния в кварк-глюонную плазму (КГП) составляет одну из важных проблем не только ядерной физики, но и физики вообще [1, 2]. Экспериментальные и теоретические исследования в этой области традиционно концентрируются на изучении взаимодействий ядер высоких энергий, создающих наилучшие условия для изучения таких задач: высокие давления и температура в объеме реакции.

Флуктуации и корреляции служат уникальной основой для изучения природы фазового перехода КГП и обеспечивают понимание свойств системы, созданной во взаимодействиях высокоэнергичных тяжелых ионов [3].

Большие флуктуации плотности энергии из-за формирования сгустков вторичных частиц ожидаются, если фазовый переход имеет первый порядок. Второй порядок фазового перехода может привести к увеличению флуктуаций плотности энергии вследствие дальних корреляций в системе [4].

В работе проводится пособытийный анализ флуктуационной структуры псевдобыстротных распределений вторичных частиц, выделение дальних и ближних корреляций во взаимодействиях ядер золота  $^{79}\text{Au}^{197}$  с ядрами фотоэмульсии [5].

**Процедура анализа.** Для исследования многочастичных корреляций использовался метод Херста [6]. Этот метод позволяет оценить "силу" и "длину" многочастичных корреляций в псевдобыстротных распределениях вторичных частиц, отличать флуктуации динамически коррелированных распределений вторичных частиц от стохастических, связанных со статистическими причинами [7].

Для количественной характеристики корреляций используется поведение показателя скоррелированности (индекса Херста)  $h$ . Если нормированное распределение вторичных частиц

(последовательный набор значений) представляет совершенно некоррелированный сигнал, то  $h = 0.5$ . Случай  $0.5 < h < 1$  на псевдобыстротном интервале  $d\eta$  говорит о наличии корреляций «длиной»  $d\eta$ . «Сила» корреляций оценивается величиной показателя Херста. Для полностью коррелированного сигнала  $h = 1$  [6, 8].

Подробно процедура анализа описана в работе [9].

### Результаты и обсуждение

В результате детального анализа поведения кривой Херста выделены события с дальними, ближними корреляциями и смешанного типа.

События с ближними корреляциями характеризуются показателем кривой Херста  $h > 0.64$  в области малых значений псевдобыстротных интервалов ( $d\eta \leq 0.2$ ) и  $h \sim 0.5$  при других значениях  $d\eta$ . Такое поведение корреляционной кривой относится к процессам струйного типа.

В событиях с дальними корреляциями  $h > 0.64$  в области больших значений псевдобыстротных интервалов ( $d\eta \geq 1$ ) и  $h \sim 0.5$  при других значениях  $d\eta$ . Такое поведение корреляционной кривой соответствует процессам взрывного типа.

События смешанного типа имеют показатель Херста  $h > 0.64$  и при малых значениях и при больших значениях псевдобыстротного интервала. Такое поведение кривой Херста соответствует событиям, в которых на фоне процесса взрывного типа присутствуют процессы струйного типа.

Для исследования характера обнаруженных многочастичных корреляций мы проанализировали распределения фрагментов ядра мишени и ядра снаряда и множественность ливневых частиц.

В результате обнаружено, что события различных типов имеют различные фрагментационные характеристики. Большинство событий с дальними корреляциями являются процессами полного разрушения ядра снаряда, в которых многозарядные фрагменты отсутствуют. В событиях смешанного типа наблюдается множественное образование многозарядных фрагментов. Кроме того, эти два типа существенно отличаются по множественности вторичных частиц. Средняя множественность для событий с дальними корреляциями  $\sim 270$  частиц, а для событий смешанного типа  $\sim 90$  частиц.

На рисунке 1 представлено распределение фрагментов ядра мишени для событий с различными значениями показателя Херста.

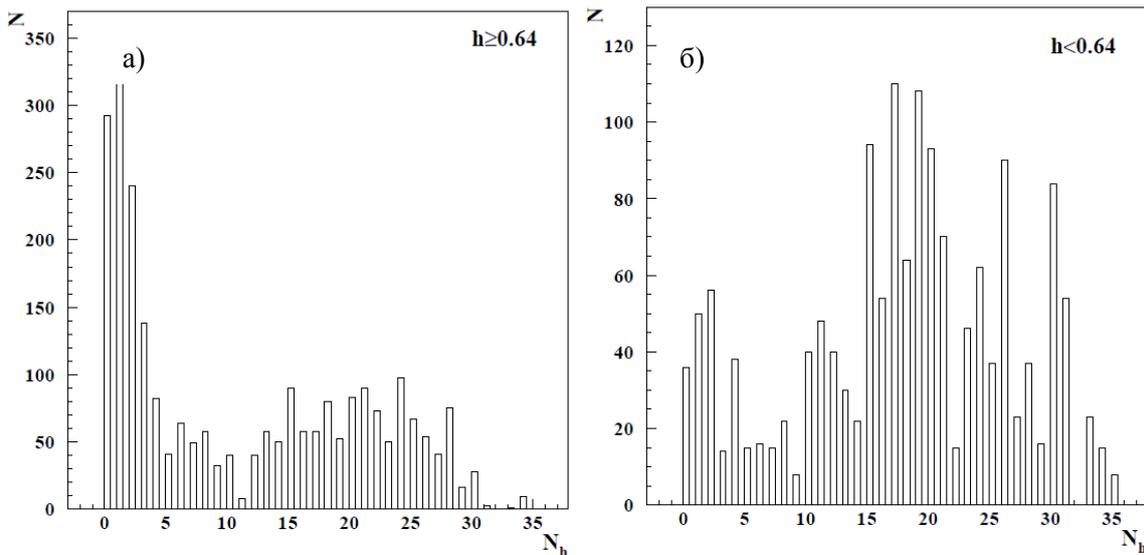


Рисунок 1 – Распределение фрагментов ядра-мишени для событий  $Au+Em$  10,7 А-ГэВ:

а) – с показателем Херста  $h \geq 0.64$ ; б) – с показателем Херста  $h < 0.64$

Как видно из рисунка 1, для событий с высоким показателем Херста наблюдается пик в области малых значений  $N_h$ . Для событий с низким показателем Херста максимум распределения расположен в средней области изменения  $N_h$ .

Если рассмотреть более коррелированные события, т.е. увеличить критерий отбора, то этот эффект еще более усиливается: большинство событий со значительными многочастичными корреляциями идет с полным разрушением ядра мишени.

На рисунке 2 представлено распределение событий с различными значениями показателя Херста в зависимости от множественности  $n_s$  частиц и в зависимости от числа фрагментов ядра мишени  $N_h$ .

Анализ распределения, представленного на рисунке 2, обнаруживает существенную корреляционную зависимость показателя Херста и от множественности ливневых частиц и от числа фрагментов ядра мишени.

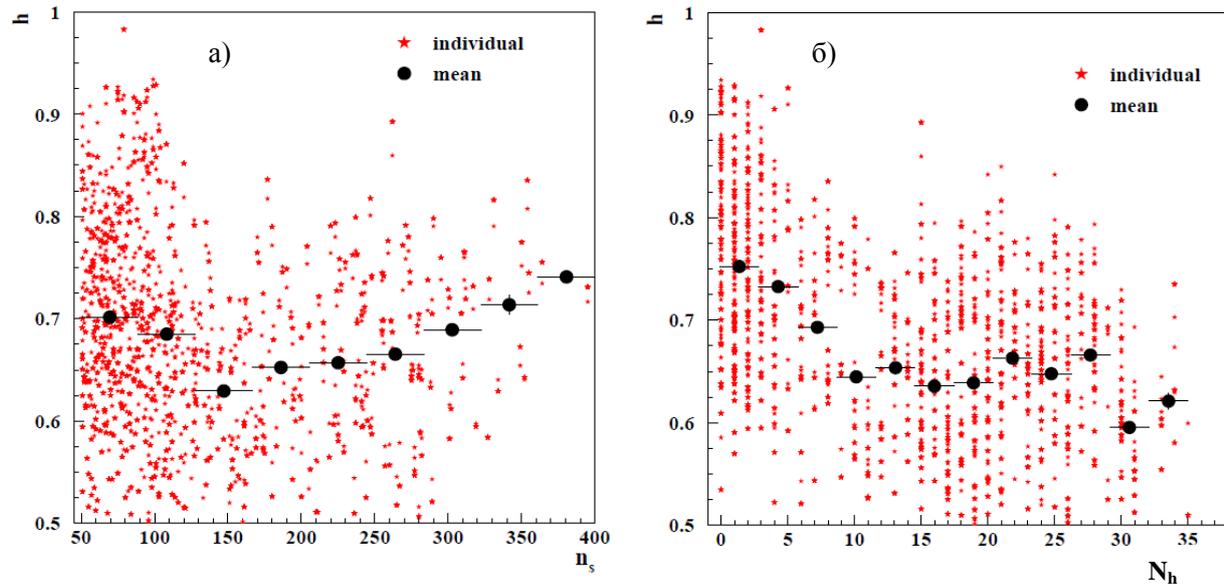
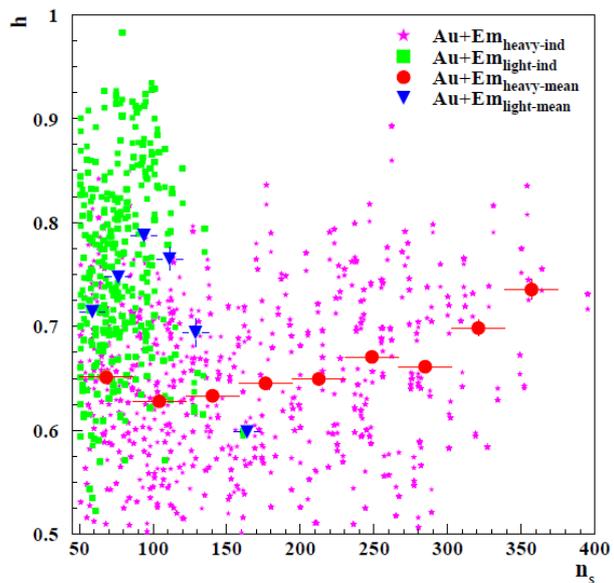


Рисунок 2 – Корреляционная зависимость показателя Херста  $h$  от числа ливневых частиц  $n_s$  (левый) и от числа фрагментов ядра мишени  $N_h$  (правый) в среднем (mean) и для отдельных (individual) событий взаимодействия ядер золота  $^{197}\text{Au}$  с энергией 10,7 А·ГэВ с ядрами фотоэмульсии:  
а) – от числа ливневых частиц; б) – от числа фрагментов ядра мишени

Рисунок 3 – Корреляционная зависимость числа ливневых частиц  $n_s$  и показателя Херста  $h$  в среднем (mean) и для отдельных (ind) событий взаимодействия ядер золота  $^{197}\text{Au}$  с энергией 10,7 А·ГэВ с тяжелыми (heavy) и легкими (light) ядрами фотоэмульсии (Em)



Во-первых, наблюдается рост показателя  $h$  с увеличением множественности в интервале  $n_s$  от 150 до 400. Во-вторых, при множественностях от 50 до 150 обнаруживается довольно большое количество событий с высоким показателем  $h > 0.8$ . В-третьих, среднее значение показателя Херста значительно выше для событий с малым числом фрагментов ядра-мишени.

На рисунке 3 представлена корреляционная зависимость числа ливневых частиц  $n_s$  и показателя Херста  $h$  в среднем и для отдельных событий взаимодействия ядер золота  $^{197}\text{Au}$  с энергией 10,7 А·ГэВ с тяжелыми и легкими ядрами фотоэмульсии.

Среднее значение показателя Херста для взаимодействий ядер золота с легкими ядрами фотоэмульсии представляет собой пикообразное поведение с максимумом в области  $n_s \sim 100$ . В этой области наблюдаются и события с наиболее высокими значениями показателя  $h$ .

Таким образом, наиболее значительные многочастичные псевдобыстротные корреляции проявляются в центральных взаимодействиях ядер золота и ядер CNO-группы, т.е. ядер, сильно отличающихся по объему (атомному весу, заряду и т.п.).

Работа поддержана грантом МОН РК №1563/ГФ.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] E.Shuryak. Quark-Gluon Plasma—New Frontiers. // J.Phys. – G35:104044, –2008.
- [2] E.L. Bratkovskaya, O. Linnyk, V.P. Konchakovski, M.I. Gorenstein, W. Cassing Signatures of the strongly interacting QGP in relativistic heavy-ion collisions // Proc. Int. workshop "Dense Matter 2010". – 5-10 April 2010, Stellenbosch, South Africa.
- [3] Tarnowsky T.J. et al. Quark-Gluon Phase Transition with Correlations and Fluctuations in Heavy Ion Collisions from the STAR Experiment // Proc.of DPF-2009. – Detroit, MI, July 2009, eConf C090726.
- [4] T.K. Nayak: Overview of event-by-event analysis of high energy nuclear collisions // Int.J.Mod.Phys. E16:3303-3322. – 2008.
- [5] Adamovich M.I. et al. Multifragmentation of gold nuclei in the interactions with photoemulsion nuclei at 10.7-GeV/nucleon // Z.Phys.A359. – 1997. – p.277-290.
- [6] H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Simaika Long-Term Storage: An Experimental Study. – Constable, London, 1965.
- [7] Lebedev I.A., Shaikhhatdenov B.G. The use of Hurst method for rapidity correlations analysis // J.Phys.G:Nucl.Part.Phys. 23. – 1997. –p.637
- [8] Feder J. "Fractals".— Plenum Press, New York, 1988,
- [9] Gaitinov A.Sh., Lebedev I.A., et al. A search of multiparticle correlations in 10.7 A GeV  $^{197}\text{Au}$  and 200 A GeV  $^{32}\text{S}$  interactions with emulsion nuclei by the Hurst method // Nucl-th. – 2011. – 1105.3029 v.1. – p.1-10

#### REFERENCES

- [1] E.Shuryak. Quark-Gluon Plasma—New Frontiers. *J.Phys.G35:104044*, 2008.
- [2] E.L. Bratkovskaya, O. Linnyk, V.P. Konchakovski, M.I. Gorenstein, W. Cassing Signatures of the strongly interacting QGP in relativistic heavy-ion collisions *Proc. Int. workshop "Dense Matter 2010"*, 5-10 April 2010, Stellenbosch, South Africa.
- [3] Tarnowsky T.J. et al. Quark-Gluon Phase Transition with Correlations and Fluctuations in Heavy Ion Collisions from the STAR Experiment *Proc.of DPF-2009*, Detroit, MI, July 2009, eConf C090726.
- [4] T.K. Nayak: Overview of event-by-event analysis of high energy nuclear collisions *Int.J.Mod.Phys. E16:3303-3322*, 2008.
- [5] Adamovich M.I. et al. Multifragmentation of gold nuclei in the interactions with photoemulsion nuclei at 10.7-GeV/nucleon *Z.Phys.A359*, 1997, p.277-290
- [6] H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Simaika Long-Term Storage: An Experimental Study. Constable, London, 1965.
- [7] Lebedev I.A., Shaikhhatdenov B.G. The use of Hurst method for rapidity correlations analysis *J.Phys.G:Nucl.Part.Phys.* 23 (1997) 637
- [8] Feder J. "Fractals", Plenum Press, New York, 1988,
- [9] Gaitinov A.Sh., Lebedev I.A., et al. A search of multiparticle correlations in 10.7 AGeV  $^{197}\text{Au}$  and 200 AGeV  $^{32}\text{S}$  interactions with emulsion nuclei by the Hurst method *Nucl-th*, 2011, 1105.3029 v.1, p.1-10

### АЛЫС ЖӘНЕ ЖАҚЫН КОРРЕЛЯЦИЯЛАРДЫ АЛТЫН ЯДРОЛАРЫНЫҢ 10.7 А·ГЭВ ФОТОЭМУЛЬСИЯ ЯДРОЛАРЫМЕН ӘРЕКЕТТЕСУİNДЕ ЗЕРТТЕУ

И. А. Лебедев, А. Т. Темиралиев, А. И. Федосимова

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

**Тірек сөздер:** ядролар әрекеттестігі, көптік процесстер, фрагментация.

**Аннотация.** Херст әдісінің негізінде, алтын ядроларының  $^{197}\text{Au}$  10,7 А·ГэВ фотоэмульсия ядроларымен әрекеттесуінде құрылған, екінші бөлшектердің псевдотез таратушылықтарында, корреляциялардың «ұзындығы» мен «күшін» зерттеу жұмыстары өткізілді. Херст қисығы тәртібінің толық талдауы нәтижесінде,

алыс, жақын және аралас түрдегі корреляциялардың оқиғалары ерекшеленген. Әр түрлі оқиғалардың әр түрлі фрагментациондық мінездемелерді алып жатқаны анықталды. Алыс корреляциялармен болған оқиғалардың көпшілігі, көп зарядті фрагменттер болмаған, снаряд ядросының толық қирату процесі болып табылады. Аралас түрдегі оқиғаларда, көп зарядті фрагменттердің көптеп құрылғаны байқалып жатыр. Сонымен қатар, бұл екі түрдің, екінші бөлшектердің көптігімен, маңызды айырмашылығы бар. Әр түрлі түрдегі оқиғалар үшін,  $n_s$  тез бөлшектердің, нысана ядросының, фрагменттер санынан тәуелділігін зерттеу негізде, өте түбегейлі көп бөлшекті корреляциялар алтын ядросы мен CNO топтағы ядролардың, яғни көлемі, атомдық салмағы, заряды бойынша айырмашылығы бар ядролардың, орталық әрекеттесулерінде айқындалатыны табылған. Сондай оқиғалар, нысана ядроларының толық қирауымен және снаряд ядросының бірнеше көп зарядті фрагменттерге ыдыраттыумен бейнеленіп жатыр.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 159 – 166

## DESCRIPTION OF SCATTERING PROCESSES $^3\text{He}$ ISOTOPES $^{28,30,32}\text{Si}$ STRONG COUPLING METHOD CHANNELS OF NUCLEAR REACTIONS

K. Baktybaev<sup>1</sup>, A. Dalelkhankyzy<sup>1</sup>, N. O. Koilyk<sup>1</sup>, M. K. Baktybaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Institute of nuclear physics RK, Almaty, Kazakhstan.

**Keywords:** nucleus, nuclear states, nuclear reactions, the Hamiltonian.

**Abstract.** The processes of interaction of  $^3\text{He}$  particles with collective states of nuclei  $^{28,30,32}\text{Si}$  by strongly-connected channels of nuclear reactions are studied. As the collective Hamiltonian able to take the expression patterns of the interacting bosons model (IBM).

УДК 539.12/.17

## ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАССЕЙЯНИЯ $^3\text{He}$ НА ИЗОТОПАХ $^{28,30,32}\text{Si}$ МЕТОДОМ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ КАНАЛОВ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

К. Бактыбаев<sup>1</sup>, А. Далелханкызы<sup>1</sup>, Н. О. Койлык<sup>1</sup>, М. К. Бактыбаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Институт ядерной физики НЯЦ РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** ядро, ядерные состояния, ядерный реакции, гамильтониан.

**Аннотация.** Изучаются процессы рассеяния  $^3\text{He}$  на коллективных состояниях сферических изотопов  $^{28,30,32}\text{Si}$  методом сильной связи каналов ядерных реакций. В качестве Гамильтониана коллективных состояний ядер-мишени взяты оператор модели взаимодействующих бозонов.

**I. Введение.** В настоящее время имеется большое количество экспериментальных данных по различным типам ядерных реакций, упругое и неупругое рассеяния ядерных частиц при низких и средних энергиях налетающей частицы.

Во многих ядрах имеются низколежащие состояния, которые обладают сильной коллективной природой, сечение неупругого рассеяния ядерных частиц на них имеют довольно большую величину. Возбуждение таких сложных процессов коллективного типа должно рассматриваться посредством метода сильной связи каналов (МССК).

По этому методу в качестве гамильтониана коллективных состояний ядер-мишеней, использовалось гамильтониан Бора-Маттельсона [1, 2]. На основе такого подхода было выполнено большое количество работ по описанию взаимодействия различных ядерных частиц с многими ядерными системами при низких и средних энергиях налетающей частицы.

В работе содержание этой теории МССК мы несколько видоизменили, приняв для описания коллективных состояний ядер-мишеней модель взаимодействующих бозонов (МВБ), в которой самые нижние состояния ядер рассматриваются как возбуждения взаимодействующих бозонов. Поскольку в работе изучается рассеяние ядерных частиц на сферических ядрах, то в гамильтониане МВБ оставляются члены, описывающие вибрационные состояния с SU(5)-симметрией. Для расчета используется та же программа ECIS 88 [3] несколько видоизмененная с заменой потенциала связывания каналов реакции на оператор взаимодействия частиц с бозонными коллективными возбуждениями ядер-мишеней.

Основной целью исследования является изучение процессов взаимодействия налетающих ядерных частиц с коллективными состояниями ядер-мишеней легкого и среднего атомного веса и извлекать необходимую информацию о свойствах и структуре взаимодействующих ядер.

В первой части работы излагается краткое содержание теории рассеяния частиц на коллективных состояниях ядер методом МССК с использованием МВБ, описывающей коллективные возбуждения как состояния взаимодействующих бозонов.

Теория МССК прилагается к исследованию рассеяния  ${}^3\text{He}$  на основных состояниях легких ядер  ${}^{28,30,32}\text{Si}$ , при энергии налетающей частицы  $E = 60,0 \pm 0,6$  МэВ. Точно учитывается влияние первых возбужденных состояний  $2_1^+$  ядер на процессы рассеяния основным уровнем  $0_1^+$ . Влияние других высоко лежащих возбужденных состояний на изучаемые процессы учитывается эффективно слабым изменением параметров оптического потенциала. Параметры оптического потенциала взяты из систематики С.М.Перей [4] и Института Ядерной физики [5]. Слабые изменения параметров не превышали квадратичных ошибок указанных систематик.

Теория рассеяния  ${}^3\text{He}$  частиц на сильно связанных состояниях указанных легких ядер дает удовлетворительное описание процессов.

**II. Краткое содержание теории МССК.** Гамильтониан процессов рассеяния записывается в виде:

$$H = T + H_i + V(r, \theta, \varphi) = T + H_i + V_d + V_c, \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия налетающей частицы и  $H_i$  – Гамильтониан движения внутренних нуклонов мишени-ядра.

Потенциал взаимодействия налетающей частицы с мишенью разделим на диагональную часть  $V_d$  и часть связывания каналов рассеяния частицы  $V_c$ .

$$V(r, \theta, \varphi) = V_d + V_c. \quad (2)$$

Волновая функция системы  $\psi$  определяется равенством:

$$\psi = r^{-1} \sum_{J_n \ln j_n} R_{J_n \ln j_n}(r) (Y_{\ln j_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM} = r^{-1} \sum_{J_n \ln j_n} R_{J_n \ln j_n}(r) \sum_{m_j M_n} (j_n I_n m_j M_n | JM) Y_{\ln j_n} \Phi_{I_n M_n}, \quad (3)$$

в которой канал, соответствующий  $n$ -состоянию мишени со спином  $I_n M_n$  связывается с парциальной волной налетающей частицы  $j_n m$  в полный угловой момент  $J_n M_n$  системы, где  $\Phi_{I_n M_n}$  – волновая функция ядра-мишени в  $n$ -состоянии, которая определяется из решения уравнения:

$$H_i \Phi_{I_n M_n} = \omega_n \Phi_{I_n M_n}. \quad (4)$$

Подставляя (1, 2, 3, 4) в полное уравнение Шредингера и умножая его на  $(Y_{\ln j_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM}^*$  с левой стороны и интегрируя по всем координатам, за исключением радиальной переменной  $r$  и наконец, деля равенство на  $E_n$ , получаем уравнение:

$$\left( \frac{d^2}{d\rho_n^2} - \frac{\ln(\ln+1)}{\rho_n^2} - \frac{1}{E_n} + 1 \right) R_{J_n \ln j_n} = E_n^{-1} \sum_{n \ln j_n} \left\langle \left( Y_{\ln j_n} \otimes \Phi_{I_n} \right)_{JM} \left| V_{cs} \left( Y_{\ln j_n'} \otimes \Phi_{I_n'} \right)_{JM} \right\rangle R_{J_n \ln j_n'}(r) \quad (5)$$

где  $\rho_n = k_n r$ ;  $k_n$  - волновое число.

Это уравнение представляет набор  $n$  связанных между собой уравнений.

Уравнение (5) является самым общим уравнением и не зависит от природы налетающей частицы или ядра-мишени. Эта система (5) носит название системы уравнений метода сильной связи каналов, а величины на правой стороне называются матричными элементами связи каналов. Через величины  $V_c(\vec{r})$  происходит “зацепление” одночастичных уравнений.

Если в системе (5)  $n=1,2,..$ , т.е. учитываются только  $V_{12}$  и  $V_{21}$  недиагональные матричные элементы. Тогда получаем систему из двух уравнений:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho_1^2} - \frac{l_1(l_1+1)}{\rho_1^2} + \frac{1}{E_1} V_{11} - 1 \right] R_1(\vec{r}) = -\frac{1}{E_1} V_{12} R_2(\vec{r}) \quad (6)$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho_2^2} - \frac{l_2(l_2+1)}{\rho_2^2} + \frac{1}{E_2} V_{22} - 1 \right] R_2(\vec{r}) = -\frac{1}{E_2} V_{21} R_1(\vec{r})$$

Эта система соответствует задаче об описании упругого и неупругого рассеяния, в которых участвуют кроме основного состояния еще одно возбужденное состояние ядра мишени при наличии сильной связи упругого и неупругого каналов. Это двухканальное приближение применимо, если среди состояний ядра-мишени можно выделить одно, наиболее сильно связанное с основным состоянием, и связь с остальными состояниями можно пренебречь.

Чтобы применить формализм МССК к описанию неупругого рассеяния ядерных частиц на коллективных состояниях ядер в качестве гамильтониана коллективных состояний использовалась так называемая геометрическая модель О.Бора и Б. Маттельсона [1]. В данной работе в качестве гамильтониана коллективных возбуждений используем гамильтониан модели взаимодействующих бозонов (МВБ)  $SU(5)$  симметрии, который имеет вид:

$$H_1 = H_0 + \varepsilon(d^+ d)^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{L=0,2,4} C_L (2L+1) [d^+ \cdot d^+]^{(L)} [d \cdot d]^{(L)} \quad (7)$$

где  $H_0$  и  $\varepsilon(d^+ d)$  – энергии основного и первого возбужденного состояния. А при учете большего количества  $d$ -бозонов с их взаимодействиями, то приходится включить следующий третий член равенства (7).

Явление взаимодействия налетающей частицы с ядром будем рассматривать феноменологически посредством оптического потенциала, который является комплексным и включает в себя, кроме общей ядерной частью, спин-орбитального и кулоновского взаимодействия. Кроме того, радиальная зависимость потенциала предполагается, имеет вид Вудс-Саксоновской функции.

$$V_d = (-V + iW)(1 + e)^{-1} - 4iW_D e'(1 + e')^{-2} - V_{so} \left( \frac{\lambda^2}{ar} \right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{l}) e(1 + e)^{-2} + \frac{ZZ'e^2}{2R_e} \left( 3 - \frac{r^2}{R_e^2} \right) \theta(R_e - r) - \frac{ZZ'e^2}{r} \theta(r - R_e). \quad (8)$$

В этом равенстве введено обозначение:

$$e = \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right); \quad e' = \exp\left(\frac{r - R_0'}{a'}\right)$$

где  $R_0, R_0'$  - средние радиусы оптического потенциала  $R_0 = r_0 A^{1/3}$ ,  $R_0' = r_0' A'^{1/3}$ ;  $V, W, W_D, V_{so}$  - параметры оптического и спин-орбитального потенциалов взаимодействия.

Потенциал связи каналов можно в общей форме записать в виде:

$$V_c = \sum_{i,\lambda} v_\lambda^{(i)}(r)(Q_\lambda^{(i)} \cdot Y_x) \quad (9)$$

$Q_\lambda$  - оператор, действующий только на координаты ядра-мишени. Вычисление матричных элементов этого оператора дает:

$$\langle (Y_{ij} \otimes \Phi_I)JM | V_c | (Y_{i'j'} \otimes \Phi_{I'})JM \rangle = \sum_{i,\lambda} v_\lambda^{(i)}(r) \langle I || Q^{(i)} || I' \rangle A(l_j I, l'_j I', \lambda J) \quad (10)$$

где

$$A(l_j I, l'_j I', \lambda J) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-)^{J-I'-I+l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)(2j+1)(2j'+1)} (ll'00(\lambda 0)W(jl_j I'; J\lambda))$$

где

$$Q_{\lambda_\mu}^{(1)} = d_{\lambda\mu}^+ d, \quad Q_{\lambda_\mu}^{(2)} = \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)} (\lambda_1 \lambda_2 00 | \lambda 0) C_L(2L+1) (d^+ d^+)^L (dd)^L \quad (11)$$

Волновые функции различных вибрационных состояний со спином  $IM$  и с одним и двумя бозонами:

$$|1; IM \rangle = d_{IM}^+ |0 \rangle; \quad |2; IM \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{\lambda_1 \lambda_2}}} (d_{\lambda_1}^+ d_{\lambda_2}^+)_{JM} |0 \rangle.$$

Для сферических ядер радиальная часть  $v^{(\lambda)}(r)$  имеет вид.

$$v^{(\lambda)}(r) = 4\pi \int_0^1 \frac{-(v+iw)}{1 + \exp[(r-R_0)(1 + \sum \beta_\lambda \varphi_{\lambda\mu}(\theta)/a)]} + \frac{-4iW_D \exp[(r-R_0)(1 + \sum \beta_\lambda \varphi_{\lambda\mu}(\theta)/a)]}{[1 + \exp[(r-R_0)(1 + \sum \beta_\lambda \varphi_{\lambda\mu}(\theta)/a)]]} \times Y_{\lambda\mu}(\theta) d \cos(\theta). \quad (12)$$

Кроме того,  $V_d$  имеет такой же вид, как и (8), за исключением, что первый член в (8) должен быть заменен на  $v^{(\lambda)}(r)$  выраженному в (12).

Решение системы зацепляющихся дифференциальных уравнений для радиальных функции  $R_{l_n j_n J_n}(\vec{r})$ , с определенными граничными условиями, дает возможность найти элементы  $S$ -матрицы и построить сечения упругого и неупругого рассеяния.

Тогда для дифференциального сечения рассеяния получаем выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2}{\hbar^4} \mu^2 \frac{k'}{k} \frac{1}{2S+1} \sum_L B_L P_L(\cos \theta), \quad (13)$$

где

$$B_L = \sum_{l'l'j'l_j j'_l j'_j} (-)^{l'-l} (2J+1)(2J_1+1) Z \left( l'l_1 j_1 | \frac{1}{2} L \right) Z \left( l'j'_l j'_l | \frac{1}{2} L \right) W(jj_1 J_1 | IL) W(j'j'_l j'_l | I'L) \cdot \left| \langle JM l' j' I' | T | J_1 M_1 l'_l j'_l I'_l \rangle \langle J_1 M_1 l'_l j'_l I'_l | T | JM l j I \rangle \right|^2 \quad (14)$$

и

$$\langle \vec{K}' S' \mu'_S I' M'_A | T | \vec{K} S \mu_S I M_A \rangle = i^{l-l'} Y_{lM-M_A-\mu_S}^* (\vec{K}) Y_{l'M-M'_A-\mu'_S} (\vec{K}') (lM - M_A - \mu_S S \mu_S | jM - M_A) \cdot (lM - M_A - \mu_S S \mu_S | jM - M_A) \cdot (I' M'_A j' M - M'_A | JM) (I' M - M'_A - \mu'_S S \mu'_S | j' M - M'_A) (I' M'_A j' M - M'_A | JM) \cdot \langle l' j' I' JM | T | l j I JM \rangle. \quad (15)$$

Здесь  $Z$  – коэффициенты Благга-Виденхарна,  $W$  – коэффициенты Рака.

Отметим, что дифференциальное сечение (13) является общим и не зависит от того, в какой модели вычисляются элементы T- или S-матрицы. Это может быть оптическая модель для упругого рассеяния, метод связанных каналов или искаженных волн для неупругих процессов.

Метод связанных каналов в ядерных реакциях можно намного упростить, при использовании так называемого адиабатического приближения.

**III. Приложения теории к рассеянию  $^3\text{He}$ -частиц на легких ядрах  $^{28,30,32}\text{Si}$  и сравнение их с экспериментальными данными.** Теория рассеяния частиц  $^3\text{He}$  с учетом связывания каналов рассеяния, приложена к процессам, происходящим на самых нижних состояниях сферических легких ядер  $^{28,30,32}\text{Si}$ . Мы рассмотрели рассеяния частиц  $^3\text{He}$  с энергиями близкими к 60 МэВ на основных состояниях указанных ядер. Для облегчения компьютерного счета и с целью анализа возможности теории учитывались влияние только первых возбужденных состояний с  $J = 2^+$  на основное состояние ядер. Такое рассмотрение связи каналов в этих ядрах можно считать приемлемым, поскольку, остальные возбужденные состояния находятся довольно высоко, примерно на 3 МэВ выше первого возбужденного состояния. Свойства этого процесса на многих ядрах легкой и средней атомной массы изучалась экспериментально неоднократно. Вместе с тем проводились теоретические анализы результатов экспериментов с использованием оптического потенциала различной модификации, фолдинг-потенциалов и методами искаженных волн.

Поскольку, мы учитываем взаимосвязь только двух нижних состояний, основного и первого возбужденного уровней, мы оставляем связанные между собой только два уравнения (6). Известно, что рассеяние частиц  $^3\text{He}$  на основных состояниях ядер описывается, в общем, оптической моделью, с использованием комплексного Вудс-Саксоновского потенциала обычно получают разумное соответствия вычисленных сечений с экспериментальными данными [5, 6]. Для того, чтобы анализировать упругое рассеяние частиц  $^3\text{He}$  на большие углы на некоторых работах [8, 9] приходилось обобщить Вудс-Саксоновский потенциал с добавлением к нему еще член, содержащий высокого порядка обычного потенциала Вудс-Саксоновского типа.

По описываемому нами методу сильной связи каналов мы провели теоретические вычисления дифференциальных сечений процессов рассеяния частиц  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{28,30,32}\text{Si}$  на всем угловом диапазоне от 12 до 172°.

На рисунках 1, 2 и 3 представлены угловое распределение дифференциальных сечений. На них сплошными линиями изображены экспериментальная картина рассеяния  $^3\text{He}$  частиц на ядрах  $^{28,30,32}\text{Si}$  при энергии налетающей частицы  $E = 60,0 \pm 0,6$  МэВ. Теоретические значения сечений даны пунктирной линией. Рассеяние происходит на основном состоянии  $0^+$  ядер с учетом влияния первых возбужденных состояний  $2_1^+$ .

Экспериментальные данные по сечениям процессов взяты из массива экспериментальных данных Института Ядерной физики Республики Казахстан [3-5], выполненных на изохронном циклотроне Института. Измерения  $d\sigma/d\theta$  выполнены на благоприятных для эксперимента угловых расстояниях от 2 до 2,5°, в промежутках углов от 12 до 175°. Теоретические вычисления  $d\sigma/d\theta$  выполнены через каждые 2,5° углов в общем диапазоне от 10 до 175°.

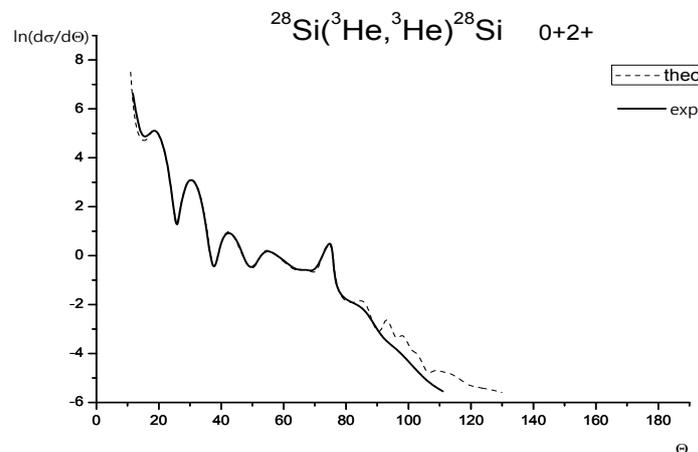


Рисунок 1 – Рассеяния  $^3\text{He}$  на основном состоянии  $^{28}\text{Si}$

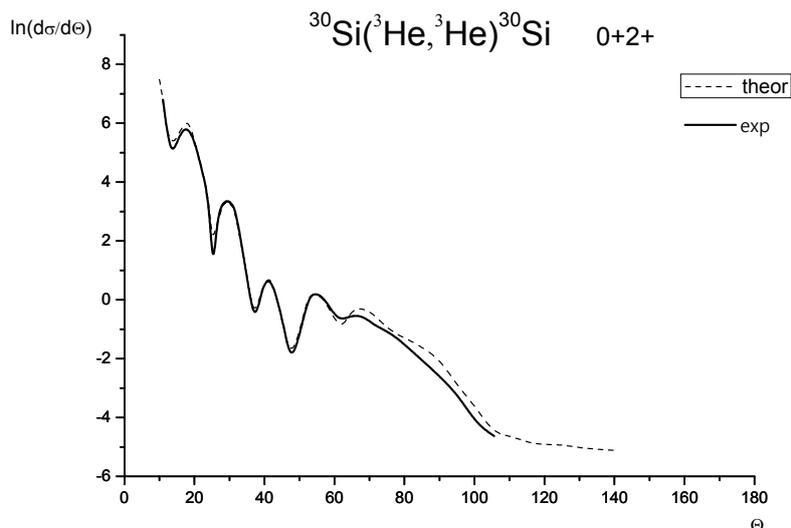


Рисунок 2. – Рассеяния  $^3\text{He}$  на основном состоянии  $^{30}\text{Si}$

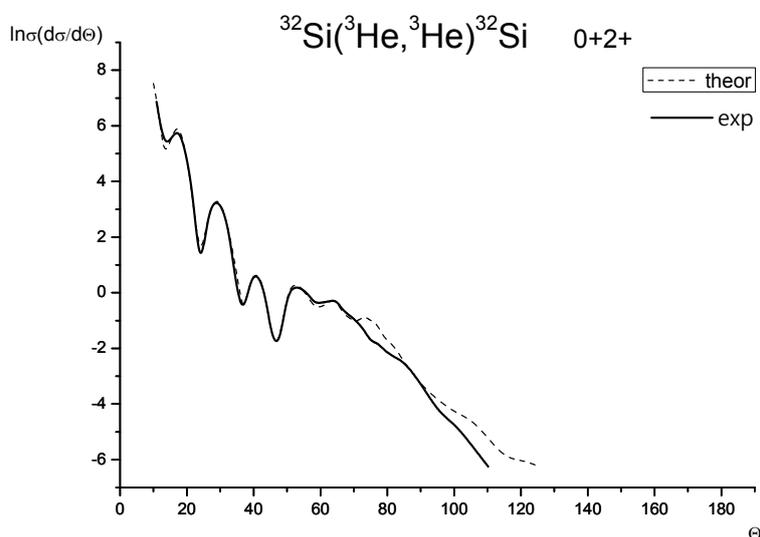


Рисунок 3. – Рассеяния  $^3\text{He}$  на основном состоянии  $^{32}\text{Si}$

В качестве параметров потенциалов взяты компиляции феноменологических оптико-модельных параметров, выполненных группой Перель [3], и из данных ИЯФ РК [4, 5]. В таблице даны оптимальные параметры процессов взаимодействия при соответствующих энергиях налетающей частицы.

Оптимальные параметры взаимодействия частиц  $^3\text{He}$  с ядрами

| Ядро             | $V_0$ (МэВ) | $r_0$ (Фм) | $a_0$ (Фм) | $W_V$ (МэВ) | $r_v$ (Фм) | $a_v$ (Фм) | $\chi_R$<br>(МэВ·Фм <sup>3</sup> ) |
|------------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------------------------------|
| $^{28}\text{Si}$ | 117,0       | 1,26       | 0,81       | 29,74       | 1.420      | 0,73       | 354                                |
| $^{30}\text{Si}$ | 115.7       | 1.155      | 0.805      | 12.92       | 1.449      | 0.997      | 10.21                              |
| $^{32}\text{Si}$ | 126.0       | 1.02       | 0.842      | 4.326       | 2.176      | 0.669      | 19.99                              |

Численные вычисления проводились по компьютерной программе ECIS -88, созданной группой j. Raynal (Saclay, Франция) [3]. При этом в программе было осуществлено небольшое изменение, связанное с заменой свойств коллективных состояний, описываемых геометрической теорией О. Бара и Б. Моттельсона на физические величины описываемые моделью взаимодействующих бозонов.

Как видно из графиков 1, 2 и 3 при сравнении вычисленных сечений рассеяния с их экспериментальными значениями получим вполне согласованную картину. Особенно хорошее согласие имеется в диапазоне углов от начала координат до углов  $125\text{--}130^\circ$  в пределах средне-квадратичных ошибок экспериментального измерения  $\sigma(\theta)$ . Однако теоретические величины сечения значительно отличаются от их экспериментальных значений на задних углах рассеяния в диапазоне больших углов от  $125$  до  $175^\circ$ . С самого начала можно было бы считать, что общее согласие по всему диапазону углов получим, если несколько изменим параметры оптических потенциалов. Однако, как показано аналогичные исследования, что получив удобное согласие на задних углах рассеяния, в передних углах картина несколько изменится. В некоторых исследованиях для получения общей согласованной картины рекомендует добавить дополнительный член в выражении оптического потенциала. Однако в таком случае растет число подгоночных параметров. Подчеркнем, что теоретические угловые распределения сечений рассеяния получены нами при тех же значениях параметров, которые использовались в других анализах процессов по другим подходам, особенно, по оптической модели.

Одним из важных путей улучшения выше указанной ситуации было бы использование разложения волновых функций, по некоторой линейной комбинацией функций гармонических колебаний поверхности ядра. По-видимому, следовало бы сделать к однобозонным волновым функциям малый добавок двух и даже трех бозонных функций возбуждения.

В то же время, следует помнить, что в процессах рассеяния на задних углах лежит известная физическая причина, связанная с поглощением частиц  ${}^3\text{He}$ . Но это явление, по-видимому лежит вне возможности теории сильно-связанных каналов.

Но в целом, метод сильно-связанных каналов, хорошо описывает упругие и неупругие рассеяния частиц  ${}^3\text{He}$  на четно-четных легких ядрах, при этом следует учесть, то обстоятельство, что в нашем варианте теории в качестве операторов и волновых функций коллективного движения нуклонов в ядре-мишени использовались гамильтониан модели взаимодействующих бозонов и его собственные функции. Наш вариант теории, в целом, удовлетворительно работает при объяснении свойств упругих и неупругих взаимодействий налетающих частиц с коллективными состояниями ядер-мишеней.

#### IV. Заключение.

1. Получена совокупность  $N$  сильно-связанных уравнений взаимодействия налетающих ядерных частиц с коллективными состояниями четно-четных сферических ядер. В качестве гамильтониана и их собственных функций коллективных состояний ядер взяты гамильтониан уравнения движения модели взаимодействующих бозонов. Потенциалы ядерного и спин-орбитального взаимодействия ядерных частиц выбраны в виде оптического комплексного потенциала.

2. Вычислены матричные элементы операторов  $V_c$  связи различных каналов рассеяния налетающих частиц с коллективными состояниями ядер-мишеней и найдены решения системы уравнений Шредингера с учетом матричных элементов оператора связи каналов.

3. Определены дифференциальные и интегральные сечения взаимодействия налетающих ядерных частиц с коллективными состояниями ядер.

Для численного расчета принята программа, ECIS-88 с некоторыми изменениями, связанными с взаимодействием ядерных частиц с коллективными бозонными состояниями. Для облегчения расчета учитывались только  $s$ - и  $d$ -бозоны в системе.

4. Развиваемая теория рассеяния сильно-связанных каналов приложена к исследованию взаимодействия  ${}^3\text{He}$  частиц с основными состояниями легких ядер  ${}^{28,30,32}\text{Si}$  при энергии налетающей частицы  $E = 60,0$  МэВ. При этом решались система неоднородных уравнений, связывающая первое возбужденное состояния  $2_1^+$  ядер с основными уровнями  $0_1^+$ . Слабое влияние других возбужденных уровней, находящихся на большой высоте порядка  $3$  МэВ учитывались эффективно корреляцией параметров оптического ядерного потенциала. В то же время эти параметры взяты из систематики С.М. Перей и Института Ядерной физики РК. Теоретически найденные угловые распределения сечений процессов в пределах углов от  $10$  по  $175^\circ$  сравнены с их экспериментальными величинами.

5. Исследования показывают, что используемый метод связанных каналов взаимодействия налетающих частиц  ${}^3\text{He}$  с коллективными состояниями ядер хорошо описывает процессы рассеяния частиц на четных изотопах легких ядер  ${}^{28,30,32}\text{Si}$ , особенно в угловом диапазоне от начала координат до углов  $120\text{--}125^\circ$ . Однако, в областях обратного рассеяния частиц наблюдаются расхождения между теоретическими и экспериментальными величинами. Эти расхождения объясняются поглощением налетающих частиц ядрами мишенями.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бор. О., Маттelson Б. Структура атомных ядер. – М, 1972.
- [2] Tamura T. Analyses of the Scattering of Nuclear Particles by Collective Nuclei in Terms of the Coupled-Channel Calculation // Rev. Mod. Phys. -1965, -Vol. 37. -P. 679-708.
- [3] Reynal J. Coupled Channel Calculations and Computer Code ECIS-88. NEA Data Bank. CE-Saclay. F-91190.
- [4] Perey C. M., Perey F. G. Compilation of Phenomenological optical-model parameters // Atomic Data and Nucl. Data Tables, -1976.- №17, -P. 3-7, 20-43.
- [5] Буртебаев Н.Т., Дуйсебаев А.Д., Иванов Г.Н. Упругое рассеяние 50 МэВ  $\alpha$ -частиц на ядрах  ${}^{14}\text{N}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$ ,  ${}^{24}\text{Mg}$  и  ${}^{28}\text{Si}$  // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. – №6. – С.49-53.
- [6] K.Baktybaev, A. Dalelkhankyzy, M.K.Baktybaev, N.Koilyk «The study of inelastic scattering of  $\alpha$  – particles on nuclei  ${}^{20}\text{ne}$ ,  ${}^{24}\text{mg}$  by methods strongly-connected channels ». Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 8, 2014, no. 28. –P. 1205-1212.
- [7] Abele H., Hauser H.J. et. al. Measurement and Folding-Potential Analysis of the Elastic  $\alpha$  -scattering on Light Nuclei // Z. Phys. A. Atomic Nuclei. -1987. -Vol. 326 -P. 373-381.
- [8] Michel F., Vander poorten R. Differential cross sections for the  $\alpha$ -  ${}^{16}\text{O}$  scattering over a wide energy range// Phys. Rev. -1977. - C. 16. -P.142.
- [9] Michel F. et. al. magic closed shell nucleus  ${}^{16}\text{O}$  has an  $\alpha$ + ${}^{16}\text{O}$  cluster structure // Phys. Rev. -1983. - C.28. -P.1904.

#### REFERENCES

- [1] Bor. O., Mattelson B. Structure of atomic nuclei. - Moscow, 1972. (in Russ.).
- [2] Tamura T. Analyses of the Scattering of Nuclear Particles by Collective Nuclei in Terms of the Coupled-Channel Calculation // Rev. Mod. Phys. -1965, -Vol. 37. -P. 679-708.
- [3] Reynal J. Coupled Channel Calculations and Computer Code ECIS-88. NEA Data Bank. CE-Saclay. F-91190.
- [4] Perey C. M., Perey F. G. Compilation of Phenomenological optical-model parameters // Atomic Data and Nucl. Data Tables, -1976.- №17, -P. 3-7, 20-43.
- [5] Burtebaev N.T., Duisebayev A.D., Ivanov G.N. Elastic scattering of 50 MeV  $\alpha$ -particles on nuclei  ${}^{14}\text{N}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$ ,  ${}^{24}\text{Mg}$  and  ${}^{28}\text{Si}$ . News. KazSSR. Ser. phys.-math. 1984. - №6. - p.49-53. (in Russ.).
- [6] Baktybaev K., Dalelkhankyzy A., Baktybaev M.K., Koilyk N. The study of inelastic scattering of  $\alpha$  – particles on nuclei  ${}^{20}\text{ne}$ ,  ${}^{24}\text{mg}$  by methods strongly-connected channels. Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 8, 2014, no. 28. –P. 1205-1212.
- [7] Abele H., Hauser H.J. et. al. Measurement and Folding-Potential Analysis of the Elastic  $\alpha$  -scattering on Light Nuclei // Z. Phys. A. Atomic Nuclei. -1987. -Vol. 326 -P. 373-381.
- [8] Michel F., Vander poorten R. Differential cross sections for the  $\alpha$ -  ${}^{16}\text{O}$  scattering over a wide energy range// Phys. Rev. -1977. - C. 16. -P.142.
- [9] Michel F. et. al. magic closed shell nucleus  ${}^{16}\text{O}$  has an  $\alpha$ + ${}^{16}\text{O}$  cluster structure // Phys. Rev. -1983. - C.28. -P.1904.

### ЯДРОЛЫҚ РЕАКЦИЯЛАРДЫҢ КҮШТІ БАЙЛАНЫСҚАН КАНАЛДАР ӘДІСІ БОЙЫНША ${}^3\text{He}$ БӨЛШЕКТЕРІНІҢ ${}^{28,30,32}\text{Si}$ ИЗОТОПТАРЫНДАҒЫ ШАШЫРАУ ПРОЦЕССИ

Қ. Бақтыбаев<sup>1</sup>, А. Дәлелханқызы<sup>1</sup>, Н. О. Қойлық<sup>1</sup>, М. К. Бақтыбаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан  
<sup>2</sup>ҚР Ядролық физика институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ядро, ядро күйлері, ядролық реакция гамильтониан.

**Аннотация.** Ядролық реакциялардың күшті байланған каналдар әдісі бойынша  ${}^3\text{He}$  бөлшектерінің  ${}^{28,30,32}\text{Si}$  сфералық изотоптары коллективтік күйлеріндегі шашырауы зерттеледі. Ядро-нысананың коллективтік күйлері Гамильтонианы ретінде әсерлесуші бозондар моделінің энергетикалық операторы алынған.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 167 – 172

## ABOUT ONE NECESSARY SIGN OF FREQUENCY RATE OF OWN VALUES OF THE OPERATOR OF STORM LIOUVILLE

A. B. Imanbaeva, S. T. Ahmetova, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

**Keywords:** own values, frequency rate of a range, operator Shturma-Liuvillya.

**Abstract.** Problem definition. Many problems of a mathematical task give to a task definitions of own values and own functions of differential operators and decomposition of any function in a row (or integral) on own functions. So, for example, to such questions come always, applying Fourier's method to finding of the solution of the differential equation in private derivatives meeting these entry and regional conditions. Therefore differential operators attracted, both draw great attention and there are many works by it devoted.

Despite the fundamental results received so far the problem of spectral decomposition of differential operators still can't be considered settled. Here first of all it is necessary to point to a problem of determination of frequency rate of a range of the differential operator depending on properties of his coefficients [1].

Let Gilbert's space, - the operator Shturma-Liuvillya determined by conditions:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = zy(x), \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

If for some own value of this operator there correspond two own functions, such own value is called multiple. It is asked what have to be coefficients of a regional condition (1.2) that the operator (1.1)-(1.2) had at least one multiple own value.

УДК 517.91

## ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ ПРИЗНАКЕ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** собственные значения, кратность спектра, оператор Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе установлен один признак кратности собственного значения оператора Штурма-Лиувилля.

### 1. Введение.

**Постановка задачи.** Многие задачи математической задачи приводят к задаче определения собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и разложения произвольной функции в ряд (или интеграл) по собственным функциям. Так, например, к такого рода вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего данным начальным и краевым условиям. Поэтому дифференциальные операторы привлекали, и привлекают большое внимание и имеется много работ им посвященных.

Несмотря на фундаментальные результаты полученные до настоящего времени, проблему спектрального разложения дифференциальных операторов еще нельзя считать исчерпанной. Здесь в первую очередь следует указать на задачу определения кратности спектра дифференциального оператора в зависимости от свойств его коэффициентов [1].

Пусть  $H = L^2(0,1)$  пространство Гильберта,  $L$ - оператор Штурма-Лиувилля, определенный условиями:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = zy(x), \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Если для некоторого собственного значения  $\lambda_0$  этого оператора соответствуют две собственные функции, то такое собственное значение называется кратным. Спрашивается, какими должны быть коэффициенты краевого условия (1.2), чтобы оператор (1.1)-(1.2) имел хотя бы одного кратного собственного значения.

**2. Методы исследований.** Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  спектральную задачу

$$Ly = y'(1-x) = \lambda y(x), x \in (0,1) \quad (2.1)$$

$$\alpha y(0) + \beta y(1) = 0, \quad (2.2)$$

где  $\alpha, \beta$ - произвольные комплексные числа.  $\lambda$ - спектральный параметр. Сначала найдем общего решения уравнения (2.1) и изучим ее свойства. Имеет место следующая лемма [2].

**Лемма 2.1.**

- (а) Пространство решений уравнения (2.1) одномерно;
- (б) Общее решение уравнения (2.1) имеет следующий вид

$$y(x, \lambda) = C \left[ \cos \lambda \left( x - \frac{1}{2} \right) + \sin \lambda \left( x - \frac{1}{2} \right) \right], C - const. \quad (2.3)$$

- (в) Для любого нетривиального решения уравнения (2.1) имеет место формула

$$y(1-x, \lambda) = y(x, -\lambda). \quad (2.4)$$

- (г) Если  $y(x, \lambda)$  есть решение уравнения (2.1) и

$$z(x, \lambda) = y(1-x, \lambda),$$

то

$$z'(1-x) = -\lambda z(x). \quad (2.5)$$

- (д) Если  $\lambda \neq 0$ , то пара  $\varphi(x, \lambda), \varphi(x, -\lambda)$  образует базис решений уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) = \lambda^2 y(x), x \in (0,1), \quad (2.6)$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \lambda \left( x - \frac{1}{2} \right) + \sin \lambda \left( x - \frac{1}{2} \right), \quad (2.7)$$

есть решение уравнения (2.1). Вронскиан этой пары вычисляется по формуле

$$W[\varphi(x, \lambda), \varphi(x, -\lambda)] = -2\lambda; \quad (2.8)$$

- (е) Если  $\psi(x, \lambda) = \varphi(x, -\lambda)$ , то пара

$$z_1(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) - \psi(x, \lambda), z_2(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \psi(x, \lambda) \quad (2.9)$$

образует базис в пространстве решений уравнения Штурма-Лиувилля (2.6), причем

$$\begin{aligned} z_1(1-x, \lambda) &= -z_1(x, \lambda); z_1(0) = -z_1(1), z'_1(0) = z'_1(1); \\ z_2(1-x, \lambda) &= z_2(x, \lambda); z_2(0) = z_2(1), z'_2(0) = -z'_2(1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эта лемма играет ключевую роль во всех наших дальнейших исследованиях, одним из следствий этой леммы является следующая

**Лемма 2.2.** Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

имеет хотя бы одного кратного собственного значения, отличного от нуля, т.е.  $\lambda_0 \neq 0$ , то имеет место равенства

$$\Delta_{12} - \Delta_{34} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0, \quad (2.13)$$

где  $\Delta_{ij}$  - минор составленный из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

составленный и коэффициентов граничного условия (2.12).

С помощью другого базиса получена следующая лемма 2.3, которые уточняют предыдущую лемму 2.2.

**Лемма 2.3.** Если оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) имеет хотя бы одно кратное собственное значение  $\lambda_0^2$ , отличное от нуля, то имеет место равенства

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Delta_{12} - \Delta_{34} = 0; \\ 2) \quad & \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0; \\ 3) \quad & \lambda_0^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Предположим, что оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений, отличных от нуля, тогда из равенств

$$\lambda_0^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0, \lambda_1^2 \cdot \Delta_{42} + \Delta_{13} = 0$$

выводим, что  $(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\Delta_{42} = 0, \Rightarrow \Delta_{42} = 0, \Delta_{13} = 0$ .

Таким образом, имеет место следующая лемма 2.4.

**Лемма 2.4.** Если оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений, отличных от нуля, то имеет место равенства

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Delta_{12} - \Delta_{34} = 0; \\ 2) \quad & \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0; \\ 3) \quad & \Delta_{42} = \Delta_{13} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

**Определение 2.1.** Оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) называется вырожденным, если ее спектр пуст или вся комплексная  $\lambda$ - плоскость.

**Лемма 2.5 [3].** Оператор Штурма-Лиувилля (2.11)-(2.12) вырожден тогда и только тогда, когда

$$|\Delta_{42}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| = 0. \quad (2.17)$$

### 3. Результаты исследований

**Теорема 3.1.** Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad x \in (0,1),$$

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \end{cases}$$

с линейно независимыми краевыми условиями, имеет не менее двух, отличных от нуля, кратных собственных значений, то граничное условие такого оператора имеет вид

$$y(0) = ky(1), y'(0) = ky'(1), \quad (2.18)$$

где  $k^2 = 1$ .

**Доказательство.** По нашему предположению оператор Штурма-Лиувилля имеет не менее двух кратных собственных значений. Известно, что спектр вырожденного оператора либо пуст, либо вся комплексная  $\lambda$  плоскость, причем все они являются однократными собственными значениями. Таким образом,

$$|\Delta_{14} + \Delta_{32}| \neq 0. \quad (2.19)$$

Следовательно, ни один из  $\Delta_{14}, \Delta_{32}$  не обращается в нуль.

Выводим граничного условия, удовлетворяющего всем этим требованиям. Из условия  $\Delta_{14} \neq 0$  следует, что

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0; \\ \begin{cases} a_{11}y(0) + a_{14}y'(1) = -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1), \\ a_{21}y(0) + a_{24}y'(1) = -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1). \end{cases} \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений относительно  $y(0), y'(1)$ , методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1), & a_{14} \\ -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1), & a_{24} \end{vmatrix} = \Delta_{42}y'(0) + y(1)\Delta_{43};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & -a_{12}y'(0) - a_{13}y(1) \\ a_{21}, & -a_{22}y'(0) - a_{23}y(1) \end{vmatrix} = \Delta_{21}y'(0) + y(1)\Delta_{31}.$$

Следовательно, имеет место равенства

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{14}}y'(0) + \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}}y(1), \\ y'(1) &= \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}}y'(0) + \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{14}}y(1). \end{aligned}$$

В нашей ситуации  $\Delta_{42} = \Delta_{13} = 0$ , поэтому

$$y(0) = \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}}y(1), y'(1) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}}y'(0).$$

В силу пункта 1) леммы 2.3 имеет место равенство  $\Delta_{12} = \Delta_{34}$ , поэтому

$$\frac{\Delta_{43}}{\Delta_{14}} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{14}} = k.$$

Следовательно, граничное условие примет вид

$$y(0) = ky(1), y'(1) = ky'(0), \quad (2.20)$$

Аналогично из условия  $\Delta_{23} \neq 0$  выводим, что

$$y'(0) = ky'(1), y(1) = ky(0). \quad (2.21)$$

Сравнивая формул (2.20) и (2.21), получим

$$y(0) = ky(1) = k^2y(0), y'(1) = ky'(0) = k^2y'(1).$$

Если  $k = 0$ , то  $y(0) = y'(0) = 0$ , тогда по теореме единственности решения задачи Коши, получим  $y \equiv 0$ , поскольку речь идет о нетривиальных решениях, то  $k \neq 0$  и  $k^2 = 1$ .

**4. Выводы.** Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [2-15].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969, 526с.

- [2] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений с отклоняющимися аргументами. // Математический журнал, Алматы- 2004, т.4, №3, 41-48с.
- [3] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени. // Известия АН РК, серия физ.-мат., Алматы-2000, 29-34с.
- [4] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [5] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний” – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.
- [6] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний”. – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.
- [7] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.
- [8] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.
- [9] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.
- [10] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.
- [11] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве  $L^2(0,1)$ . // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.
- [12] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.
- [13] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.
- [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [15] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

## REFERENCES

- [1] Najmark M.A. Linejnye differencial'nye operatory.- M.: Nauka, 1969, 526s.
- [2] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimisja argumentami.// Matematicheskij zhurnal, Almaty- 2004, t.4, №3, 41-48s.
- [3] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni.-//Izvestija AN RK, serija fiz.-mat., Almaty-2000, 29-34s.
- [4] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Republikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanija JuK» № 27, 2002. s. 58-62.
- [5] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Republikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij” – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.
- [6] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Republikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij”. – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.
- [7] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Republikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 25-30.
- [8] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Republikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 133-136.
- [9] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovanija sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.
- [10] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirskij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.
- [11] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve  $L^2(0,1)$ . // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.
- [12] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.
- [13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.
- [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [15] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

## ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІНІҢ ЕСЕЛІ БОЛУЫНЫҢ БІР БЕЛГІСІ ТУРАЛЫ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** меншікті мәндер, спектрдің еселігі, Штурм-Лиувилл операторы.

**Аннотация.** Бұл еңбекте шекаралық шарттары өзара тәуелсіз  $Ly = -y''(x) = \lambda^2 y(x)$  Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің еселік болуының бір белгісі табылды.

Поступила 07.07.2015 г.

### NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 172 – 181

## WEIGHTED FUNCTIONAL INEQUALITIES

Sh. Bilal, A. B. Darzhanova

Institute of Mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: bilal44@mail.ru

**Keywords:** weight, inequality, investment, compact, space.

**Abstract.** With the emergence of a new direction in functional analysis - "embedding theorems of the functional spaces" - it turned out that study of the many qualitative properties of differential and integral operators is equivalent to the determination of appropriate embedding theorems with certain properties. Particularly, this approach gives productive results in establishing the properties of singular operators and embedding theorems of weighted spaces. In this article are discussed embedding of weighted spaces, embedding of functions with absolutely - continuous derivatives of a certain order in the Lebesgue space or score weighted inequality of Hardy. Obtained the necessary and sufficient conditions for the weighted inequality of Hardy or investments mentioned spaces. Founded matching two-sided estimates in order. Criterion for compactness of the embedding operator was given. It uses the method of localization based on a detailed study of the objects in the "characteristic" range, introduced in additive behavior factors. One productive approach in studies of this kind belongs to M. Otelbaev which we use too. At the same time the results of this work are the results of the Oynarova's addition.

УДК 517.51

## О ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Ш. Биал, А. Б. Даржанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** весовые, неравенства, вложение, компактность, пространства.

**Аннотация.** С возникновением нового направления в функциональном анализе - «теоремы вложения функциональных пространств» - выяснилось, что изучение многих качественных свойств дифференциальных и интегральных операторов эквивалентно установлению соответствующих теорем вложения с теми или иными свойствами. Особенно, такой подход дает плодотворные результаты в установлении свойств сингулярных операторов и теорем вложений весовых пространств. В данной статье рассматривается вложение весовых пространств, вложение пространства функций, имеющих абсолютно-непрерывные производные

определенного порядка в Лебегово пространство или оценка весового неравенства типа Харди. Получены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства типа Харди или вложения упомянутых пространств. Найдены двухсторонние оценки совпадающие по порядку. Дан критерий компактности оператора вложения. При этом используется метод локализации основанный на детальном изучении исследуемых объектов на “характеристическом” интервале, внедренный в зависимости поведения коэффициентов. Один из плодотворных подходов в исследованиях такого рода принадлежит М. Отелбаеву [18] которым пользуемся и мы. При этом результаты данной работы представляют собой дополнение результатов работы Р. Ойнарова [20].

В теории сингулярных интегро-дифференциальных операторов центральное место занимает вопросы, связанные с изучением свойств операторов в зависимости от поведения коэффициентов соответствующего интегро-дифференциального выражения. В этом направлении получены фундаментальные результаты в работах С.М. Никольского, Л.Д. Кудрявцева, А. Куфнер, П.И. Лизоркина, В.Г. Мазья, Ж.Л. Лионса, Э. Мадженеса, М.Ш. Бирмана, М. Отелбаева, С.Н. Похожаева, В.И. Буренкова, К. Бойматова, В.Д. Степанова, Р. Ойнарова и других [3–16, 21].

Пусть  $\rho, \nu, r$  - заданные весовые функции, определенные на интервале  $J = (a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , удовлетворяют на этом интервале следующим требованиям:

$$\begin{aligned} 0 < \rho(x) \in L_{\infty}^{loc}(J), \quad \rho^{-1}(x) \in L_1^{loc}(J), \\ 0 < \nu(x) \in C^{loc}(J), \quad 0 \leq r(x) \in C^{loc}(J) \end{aligned} \tag{1}$$

При этом будем считать, что  $\rho^{-1}(x)$  не суммируема хотя бы в одном конце интервала  $J$ . И пусть это будет окрестность точки  $x = a$ .

Введем в рассмотрение следующие величины, характеризующие локальное поведение весовых функций:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sup \left\{ d > 0 : \int_{x-d}^x \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq \int_x^{x+y} \rho^{-1}(\tau) d\tau, (x-d, x+y] \subset J \right\}, \\ d^+(x) &= \sup \left\{ d > 0 : \sup_{x-\omega(x,d) \leq t \leq x+d} \nu(t) \int_{x-\omega(x,d)}^{x+d} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 1, [x, x+d] \subset J \right\}, \\ d^-(x) &= \omega(x, d^+(x)). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta(x) = [x - d^-(x), x + d^+(x)] = [x^-, x^+], \quad \Delta^-(x) = [x - d^-(x), x], \quad \Delta^+(x) = [x, x + d^+(x)]$$

Будем считать, что для некоторого  $c \in (a, b)$  выполнено

$$\lim_{t \rightarrow a} \left( \nu(t) \int_t^c \rho^{-1}(\tau) d\tau \right) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b} \left( \nu(t) \int_c^t \rho^{-1}(\tau) d\tau \right) = \infty \tag{2}$$

**Лемма 1.** Имеет место неравенство [1]:

$$\int_{y-d^-(y)}^{y+d^+(y)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \int_{x-d^-(x)}^{x+d^+(x)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \quad \forall y \in \Delta(x) \tag{3} \quad \int_{\Delta^+(y)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \int_{\Delta^+(x)} \rho^{-1}(\tau) d\tau$$

Рассмотрим условия выполнения неравенства

$$\|rf\|_{\infty} \leq c (\|\rho f'\|_{\infty} + \|\nu f\|_{\infty}) \tag{4}$$

Введем функцию 
$$B(x) = \sup_{x^- \leq z \leq x} r(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau + \sup_{x \leq z \leq x^+} r(z) \int_z^{x^+ - d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau) d\tau.$$

**Теорема 1 [2].** Пространство  $W'_\infty$  вложено в  $L_{\infty,r}$  тогда и только тогда или неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$B = \sup_{x \in J} B(x) < \infty \quad (5)$$

При этом для нормы оператора вложения  $E: W'_\infty \rightarrow L_{\infty,r}$  справедлива оценка:

$$c^{-1}B \leq \|E\| \leq cB \quad (6)$$

Пусть  $AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+)(R_+ = [0, \infty))$  - совокупность функций, имеющих абсолютно непрерывные производные  $(n+1)$ -го порядка и обращающихся в нуль некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, своей для каждой функции.

Обозначим через  $H_\infty^n$  пополнение пространства  $AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+)$  по норме

$$\|f\|_{H_\infty^n} = \|\rho f^{(n+1)}\|_\infty + \|\nu f^{(n)}\|_\infty.$$

Здесь  $\nu, \rho \in C[0, N] \quad \forall N > 0$ . Продолжим функции  $\nu, \rho$  четным образом на всю ось и будем предполагать выполнение условия (2). Положим

$$\rho_*(x) = \left( \int_{\Delta^+(x)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1}$$

**Лемма 2.** Имеет место неравенство

$$\|\rho_* f^{(n)}\|_\infty \leq K \|f\|_{H_\infty^n} \quad \forall f \in AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+), \quad (7)$$

где постоянная  $K > 0$  не зависит от  $\nu, \rho$  и  $f$ .

Доказательство. Положим  $\varphi = f^{(n)}$ . Тогда (7) имеет вид

$$\|\rho_* \varphi\|_{\infty, R_+} \leq K \left( \|\rho \varphi'\|_{\infty, R_+} + \|\nu \varphi\|_{\infty, R_+} \right) \quad (8)$$

Продолжим функцию  $\varphi$  четным образом на всю ось. Тогда (8) эквивалентно неравенству

$$\|\rho_* \varphi\|_{\infty, R} \leq K \|\varphi\|_{W'_\infty(R)} \quad (9)$$

По теореме 1 (9) выполнено, если

$$\sup_{x \in R} B(x) < \infty,$$

где

$$B(x) = \sup_{x^- \leq z \leq x} \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau + \sup_{x \leq z \leq x^+} \rho_*(z) \int_z^{x^+ + d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau) d\tau$$

Имеем

$$\begin{aligned} \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau &\leq \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^{x^-} \rho^{-1}(\tau) d\tau + \rho_*(z) \int_{x^-}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \rho_*(z) (\rho_*(x^-))^{-1} + \rho_*(z) (\rho_*(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Так как  $x^- \in \Delta^-(z) \quad \forall z \in \Delta^-(x)$ , то по лемме 1  $\rho_*(z) \leq 2\rho_*(x^-) \quad \forall z \in \Delta^-(x)$ .

Поэтому  $\rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 3$  при  $z \in \Delta^-(x)$ .

Аналогично  $\rho_*(z) \int_z^{x^+ + d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 3$  при  $z \in \Delta^+(x)$ .

Следовательно  $\sup_{x \in R} B(x) \leq 6$ .

Лемма доказана.

Положим

$$B_n(x) = r(x) \int_z^\infty (s)^{n-1} \rho^{-1}(s) ds$$

**Теорема 2.** Вложение пространств  $H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  имеет место тогда и только тогда, когда

$$B_n = \sup_{x>0} B_n(x) < \infty \tag{10}$$

Для нормы оператора вложения  $E : H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  имеет оценка

$$C^{-1} B_n \leq \|E\| \leq C B_n$$

где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $r, \rho, \nu$ .

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено (10). Положим  $\psi(t) = \rho_*(t) f^{(n)}(t)$ .

Тогда

$$f(t) = \gamma \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \rho^{-1}(s) \psi(s) ds, \quad \gamma = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$A\psi = \gamma r(t) \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \rho^{-1}(s) \psi(s) ds$$

из  $L_\infty(R_+)$  в  $L_\infty(R_+)$ . Как известно [ 17, гл.2, теор. 4]

$$\|A\|_{\infty \rightarrow \infty} = \gamma B_n$$

В силу (45) оператор  $A$  ограничен в  $L_\infty$ , что равносильно выполнению неравенства

$$\|rf\|_\infty \leq \gamma B_n \|\rho_* f^{(n)}\|_\infty \quad \forall f \in AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right)$$

Теперь, применяя лемму 2 убедимся, что имеет место вложение  $H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  и  $\|E\| \leq K \gamma B_n$ .

Необходимость. Пусть оператор вложения  $E : H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  непрерывен. Тогда

$$\|rf\|_\infty \leq \|E\| \|f\|_{H_\infty^n} \quad f \in H_\infty^n \tag{11}$$

Пусть  $z \in R_+$  произвольная фиксированная точка.

Пусть  $R = \bigcup_{i=-\infty}^\infty \Delta^+(z_i)$ , причем  $z_0 = z$  и  $z_{i+1} = z_i + d^+(z_i)$ . В силу леммы 1

$$\int_{\Delta^+(z_{i+1})} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \int_{\Delta^+(z_i)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \tag{12}$$

Введем функции

$$f_i(t) = f_{i,z}(t) = \begin{cases} \alpha_i \int_{z_{i-1}}^t \rho^{-1}(\tau) d\tau & \text{при } z_{i-1} \leq t \leq z_i \\ \int_t^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau & \text{при } z_i \leq t \leq z_{i+2} \\ 0 & \text{при } t \in [z_{i-1}, z_{i+2}], \end{cases}$$

где  $\alpha_i = \left( \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau$ .

Для любого целого  $m > 0$  и  $z \in R_+$  положим

$$\varphi_m(t) = \varphi_{z,m}(t) = \sum_{i=0}^m \int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s) ds.$$

Тогда имеем

$$\int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s) ds = \begin{cases} \alpha_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} (s-t)^{n-1} \int_{z_{i-1}}^S \rho^{-1}(\tau) d\tau ds + \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds, & t \leq z_{i-1} \\ \alpha_i \int_t^{z_i} (s-t)^{n-1} \int_{z_{i-1}}^S \rho^{-1}(\tau) d\tau ds + \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds, & z_{i-1} \leq t \leq z_i \\ \int_t^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds, & z_i \leq t \leq z_{i+2} \\ 0, & t \geq z_{i+2} \end{cases}$$

Пусть  $t \in [0, \infty)$ . Тогда существует  $\Delta^+(z_{i_0})$  такой, что  $t \in [z_{i_0}, z_{i_0+1})$ ,

$$\rho(t) \sum_{i=0}^\infty |f_i'(t)| = \rho(t) |f'_{i_0-1}(t)| + \rho(t) |f'_{i_0}(t)| + \rho(t) |f'_{i_0+1}(t)|,$$

$$\nu(t) \sum_{i=0}^\infty |f_i(t)| = \nu(t) f_{i_0-1}(t) + \nu(t) f_{i_0}(t) + \nu(t) f_{i_0+1}(t)$$

Вычисления показывают  $\rho(t) |f'_{i_0-1}(t)| = 1$ ,  $\rho(t) |f'_{i_0}(t)| = 1$ ,  $\rho(t) |f'_{i_0+1}(t)| = \alpha_{i_0+1} \leq 6$

Последнее неравенство получено на основании (12). Итак

$$\left\| \rho(t) \sum_{i=0}^\infty f_i'(t) \right\|_\infty \leq 8.$$

Таким же образом получаем

$$\left\| \nu(t) \sum_{i=0}^m f_i \right\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq \infty} \sum_{k=-1}^1 \|\nu f_{i+k}\|_\infty \leq 10.$$

Тогда

$$\|\varphi_{z,m}\|_{H_\infty^n} \leq 18(n-1)! \tag{13}$$

При  $t \leq z_i$  справедливо неравенство

$$\int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s) ds \geq \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds \leq \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds \geq \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{S^+} \rho^{-1}(\tau) d\tau = \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds$$

Пусть  $t = z = z_0$ . Тогда  $t \leq z_i \quad \forall i \geq 0$ , поэтому

$$\varphi_{z,m}(t) = \sum_{i=0}^\infty \int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_{i,z}(s) ds \geq \sum_{i=0}^\infty \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-z)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds = \int_t^{z_{m+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \tag{14}$$

Из (11), (13), (14) имеем

$$r(t) \int_t^{z_{m+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \leq r(t) \varphi_t(x) \leq \sup_{x \geq 0} |r(x) \varphi_t(x)| \leq \|E\| \|\varphi_t\|_{H_\infty^n} \leq 18(n-1)! \|E\|.$$

Откуда в силу произвольности  $t = z \in R_+$  и  $m > 0$

$$B_n \leq 18(n-1)! \|E\| < \infty$$

Теорема 2 доказана.

**Следствие 1.** Неравенство

$$\|r\varphi^{(k)}\|_\infty \leq C \|\varphi\|_{H_\infty^n}, \quad \varphi \in AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} r(x) \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty$$

**Следствие 2.** Если  $\int_0^\infty s^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty$ , то

$$\forall f \in H_\infty^n \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(\kappa)}(x) = 0, \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1.$$

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и неравенства

$$\int_0^\infty s^k \rho_*^{-1}(s) ds \leq \int_0^1 \rho_*^{-1}(s) ds + \int_1^\infty s^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds$$

**Теорема 3.** Вложение  $H_\infty^n(R_+) \subset C_r(R_+)$  компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B_n(x) = 0$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение  $H_\infty^n(R_+) \subset C_r(R_+)$  компактно.

Тогда  $B_n < \infty$ . Рассмотрим семейство функций  $M = \{\varphi_{z,m}(\square), m > 0, z \in R_+\}$ . Из доказательства теоремы 2 следует, что  $\forall z \in R_+ \|\varphi_{z,m}\|_{H_\infty^n} \leq 18(n-1)!$ . Следовательно множество  $rM = \{r\varphi_{z,m}, m > 0, z \in R_+\}$  предкомпактно в  $C(R_+)$ . На основании теоремы о компактности

ограниченного множества в  $C(R_+)$ , для  $\varepsilon > 0$  существует конечное число  $n = n(\varepsilon)$  и точек

$\{\alpha_i\}^n \subset R_+$  такие, что  $R_+ = \bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_{n+1} = \infty$ ,

$$\sup_{\varphi \in R^M} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y)| < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (15)$$

Пусть  $R_\eta = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^+(z_k)$ ,  $z_0 = z \in [\alpha_n, \infty)$ .

Положим  $x = z_{m+2}$ ,  $y = z$ . Тогда  $r(x)\varphi_{z,m}(x) = 0$  так как  $\int_x^\infty (s-x)^{n-1} f_{i,z}(s) ds = 0$  при

$z_{m+2} = x \geq z_{i+2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$

Из (14), (15) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &> |r(x)\varphi_{y,m}(x) - r(y)\varphi_{y,m}(y)| = r(y) \sum_y^\infty \int (s-y)^{n-1} f_{i,y}(s) ds \geq \\ &\geq r(y) \int_y^{z_{m+1}} (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds. \end{aligned}$$

Откуда в силу произвольности  $m > 0$

$$r(y) \int_y^\infty (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \varepsilon \quad \text{при } y > \alpha_n(\varepsilon)$$

т.е.  $\lim_{y \rightarrow \infty} B_n(y) = 0$ . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие  $\lim_{x \rightarrow \infty} B_n(x) = 0$ .

Тогда для  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $x > N$   $B_n(x) < \varepsilon$ . Из – за непрерывности составляющих,  $B_n(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, N]$  и поэтому ограничена на нем

$$\sup_{x \in [0, N]} B_n(x) \leq C.$$

Следовательно  $\sup_{x \in R_+} B_n(x) < \infty$ . Тогда по теореме 2 имеет место непрерывное вложение

$$H_\infty^n \subset C_r.$$

Пусть  $S$  - единичный шар в  $H_\infty^n$ . Тогда применяя теорему 2 на интервале  $[N, \infty)$  получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [N, \infty)} |r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y)| &\leq 2 \sup_{\varphi \in S} \|r\varphi\|_{\infty, [N, \infty)} \leq \\ &\leq C \sup_{x, y \in [N, \infty)} B_n(x) \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq C\varepsilon \end{aligned} \quad (16)$$

Из равномерной непрерывности функции  $r(\cdot)$  на  $[0, N]$  для  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$  и  $|r(x) - r(y)| \leq \varepsilon$  при  $|x - y| \leq \delta_1$ ,  $x, y \in [0, N]$ .

Из условия (10)  $\int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty$ . Поэтому на основании следствия 2 теоремы 2  $\forall \varphi \in H_\infty^n$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(s) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Далее для  $\varphi \in S$ ,  $x, y \in [0, N]$

$$\begin{aligned}
 |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^\infty (s-y)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds - \int_x^\infty (s-x)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds \right| = \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds + \int_x^\infty [(s-y)^{n-1} - (s-x)^{n-1}] \varphi^{(n)}(s) ds \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds \right| + \frac{1}{(n-1)!} \left| \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} (x-y)^k \int_y^x (s-y)^{n-k-1} \varphi^{(n)}(s) ds \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \right| \|\rho_* \varphi^{(n)}\|_\infty + \frac{1}{(n-1)!} \left| \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} |x-y|^k \right| \cdot \\
 &\cdot \left| \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds \right| \|\rho_* \varphi^{(n)}\|_\infty \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_y^x (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\varphi\|_{H_\infty^n} + \\
 &+ \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} |x-y|^k \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \right| + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} |x-y|^k \int_0^\infty S^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds = \theta(x, y)
 \end{aligned}$$

Из условия (10) следует, что

$$\int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty S^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds \leq \int_0^1 \rho_*^{-1}(s) ds + \int_1^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty.$$

Выберем  $0 < \delta \leq \delta_1$  так, чтобы при  $|x - y| \leq \delta$  выполнялось неравенство  $\theta(x, y) \leq \varepsilon$ . Тогда  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ .

Пусть  $[0, N] = \bigcup_{i=1}^{m-1} [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , причем  $\alpha_{i+1} - \alpha_i \leq \delta$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 &\sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y)| \leq \\
 &\sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |r(x)| |\varphi(x) - \varphi(y)| + \sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |\varphi(y)| |r(x) - r(y)| \leq \\
 &\leq \varepsilon \left( \sup_{x \in [0, N]} |r(x)| + \sup_{\varphi \in S} \sup_{y \in [0, N]} |\varphi(y)| \right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Из теоремы 2 следует

$$\sup_{\varphi \in S} \sup_{y \in [0, N]} |\varphi(y)| \leq \sup_{\varphi \in S} \|\varphi\|_\infty \leq \int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq \int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds$$

Поэтому из (16), (17) на основании теоремы о предкомпактности ограниченного множества в  $C(R_+)$  следует, что  $S$  предкомпактно в  $C_r$ . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Блялов Ш. Об одном весовом вложении // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1988. №5. С. 17 – 21.
- [2] Блялов Ш. Об одном трехвесовом вложении // Деп. в ВИНТИ. 1988. №4834 – В88. 21 с.
- [3] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [4] Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1959. Т. 55. С. 1-181.
- [5] Куфнер А., Опиц Б. и др. Точные теоремы вложения для одного класса весовых пространств С.Л. Соболева // ДАН УССР. 1988. №1. С. 22-26.
- [6] Лизоркин П.Н., Отелбаев М. Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами // Мат. Сб. 1979. Т. 108. №3. С. 358-377 (4.1); Мат. Сб. 1980. Т. 112. №1. С. 56-85 (4.11)
- [7] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Тр. МИАН СССР. 1983. Т.161. С. 157-183.
- [8] Мазья В.Г. Пространства Соболева. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985.
- [9] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир. 1971. 372 с.
- [10] Бирман М.Ш., Павлов В.С. О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрология. 1961. №1, С. 61-74.
- [11] Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 265-305.
- [12] Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988, 288 с.
- [13] Похожаев С.И. Вложение нелинейных операторов и априорные оценки решений нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1982. Т. 266. №5. С. 1063-1066.
- [14] Буренков В.Н. Теорема о повторных нормах для пространств Никольского – Бесова и ее применение // Тр. МИАН. 1980. Т. 181. С. 27-39.
- [15] Бойматов К.Х. О некоторых весовых пространствах. – Вкн.: Функциональный анализ и его приложения. М.: МГУ. С. 119-120.
- [16] Степанов В.Д. О весовом неравенстве Харди // Сиб. Мат. журнал. 1987. Т. 28. №3. С. 205-207.
- [17] Конторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
- [18] Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства. М.: ИЛ. 1948.
- [19] Ойнаров Р., Отелбаев М. Критерий дискретности спектр общего оператора Штурма – Лиувилля и теоремы вложения, связанные с ним. // Диф. уравнения. 1988. Т. 24. №4 С. 584-591.
- [20] Ойнаров Р. О плотности финитных функций в весовых пространствах и весовые неравенства // ДАН СССР. 1988. Т. 303. №3. С.
- [21] Ойнаров Р. Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора // Труды междунар. конф. “Современное состояние и перспектива развития математики в рамках программы “Казахстан в третьем тысячелетии”” 2001. – С. 111-115.
- [22] Oinarov R., Temirkhanova A.M. Boundedness of multiple discrete Hardy operators with weighted sequence spaces // J. Math. Ineq. - 2008. – V. 2. №4. – P. 555-570.
- [23] Oinarov R., Okroti C.A., Person L. E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case  $q < p$  // Math. Inequal. Appl. – 2007. №4. – P. 843 – 861.
- [24] Taspaganbetova Zh. Two – sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // J. Math. Anal. – 2014. – V. 410.
- [25] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Математический журнал. – 2011. Т. 11, №2(40). – С. 73-85.
- [26] Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. – 2011. Т. 2, №1. – С. 114-127.

REFERENCES

- [1] Blyalov Sh. A weight attachment // Math. AN Kazakh SSR. Ser. phys - mat. 1988. №5. S. 17 - 21.
- [2] Blyalov Sh. A three weight attachment // Dep. VINITI. 1988. №4834 - V88. 21.
- [3] Nikolsky S.M. Approximation of functions of several variables and embedding theorems. M. : Nauka, 1977.
- [4] Kudryavtsev L.D. Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of the variational method of elliptic equations // Tr. Steklov. 1959. T. 55. S. 1-181.
- [5] Kufner A., Opitz B. et al. Exact embedding theorem for a class of weighted spaces C.L. Sobolev // Dokl. 1988. №1. S. 22-26.
- [6] Lizorkin. P.N., Otelbaev M. Embedding theorems and compactness for spaces of Sobolev type with weights // Mat. Coll. 1979. T. 108. №3. Pp 358-377 (4.1); Mat. Coll. 1980. T. 112. №1. Pp 56-85 (4.11)
- [7] Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Coercive properties of an elliptic equation with degeneration and a generalized right-hand side // Tr. MI USSR. 1983 T.161. Pp 157-183.
- [8] Maz'ya V.G. Sobolev spaces. AL: Leningrad State University, 1985.
- [9] Lions J.L., Magenes E. Heterogeneous boundary value problems and their applications. M. : Mir. 1971. 372 p.
- [10] Birman M.Sh., Pavlov V.S. On the complete continuity of certain imbedding operators // Vestn. LSU. Mathematics. Mechanics. Astrology. 1961. №1, pp 61-74.

- [11] M. Otelbaev. Imbedding theorems for spaces with weight and their application to the study of the spectrum of the Schrödinger operator // Tr. MI USSR. T. 1979. 150 pp 265-305.
- [12] Mynbayev KT, Otelbaev M. Weighted function spaces and a range of differential operators. M.: Nauka, 1988, 288 p.
- [13] Pokhozhaev S.I. Attachment of nonlinear operators and a priori estimates of the solutions of nonlinear equations // Dokl. 1982. Vol. 266. №5. P. 1063-1066.
- [14] Burenkov V.N. A theorem on iterated norms for Nikol'skij - Besov and its application // Tr. Mat. T. 1980. 181 pp 27-39.
- [15] Boymatov K.H. On some weighted spaces. - WPC.: Functional analysis and its application on the weight theory. 1984. M.: MGU. Pp 119-120.
- [16] Stepanov V.D. About the weighted Hardy inequality // Sib. Mt.zhurnal. 1987. V. 28. №3. Pp 205-207.
- [17] Kontorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. M.: Nauka, 1977. 744 p.
- [18] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. Neravenstva. M.: IL. 1948.
- [19] Oinarov R., Otelbaev M. Discreteness criterion for the spectrum of the total of the Sturm - Liouville theorem and investments associated with it. // Diff. equation. 1988. Vol. 24. №4 P. 584-591.
- [20] Oinarov R. On the density of finite functions in weighted spaces, and the weight of unequal // Dokl. 1988. Vol. 303. №3. FROM.
- [21] Oinarov R. The dual inequality addition to the assessment matrix operator // Proceedings of Int. Conf. "Current state and prospects of development of mathematics in the framework of the program" Kazakhstan in the third millennium", 2001 -P. 111-115.
- [22] Oinarov R., Temirkhanova A.M. Boundedness of  $n$ -multiplier discrete Hardy operators with weighted sequence spaces // J. Math/Ineq/ - 2008. - V. 2. №4. - P. 555-570.
- [23] Oinarov R., Okroti C.A., Persson L. E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case  $q < p$  // Math. Inequal. Appl. - 2007. №4. - P. 843 - 861.
- [24] Taspaganbetova Zh. Two - sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // J. Math. Anal. - 2014. - V. 410.
- [25] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Mathematical j. - 2011. T. 11, №2(40). - pp. 73-85.
- [26] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. - 2011. T. 2, №1. - pp. 114-127.

## ЖҮКТЕЛГЕН ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР ТУРАЛЫ

Ш. Біләл, А. Б. Даржанова

ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жүктелген теңсіздіктер, ену, жинақылық, кеңістіктер.

**Аннотация.** Функционалдық талдауда “функционалдық кеңістіктердің ену теоремалары” атты жаңа бағыттың пайда болуымен дифференциалдық және интегралдық операторлардың көптеген сапалық қасиеттерінің зерттеу – сәйкес әр түрлі қасиеттерге ие ену теоремаларын орнықтырумен пара – пар келетіндігі анықталды. Ерекше, мұндай тәсіл сингуляр операторлармен жүктелген кеңістіктердің ену теоремалары қасиеттерін орнықтыруда жемісті нәтижелер береді. Бұл мақалада жүктелген кеңістіктердің енуі, белгілі ретті абсолют – үзіліссіз туындылары бар функциялар кеңістігінің Лебег кеңістігіне енуі немесе Харди типтес жүктелген теңсіздіктерді бағалау қарастырылған. Харди типтес теңсіздіктің орындалу немесе аталған кеңістіктердің енуінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Реті бойынша теңескен екіжақты бағалар да алынды. Ену операторы жинақылығының критеріі берілді. Бұл жерде коэффициенттерінің әрекеттеріне байланысты еңгізілген зерттеу нысандарын “сипаттамалық” аралықта түбегейлі зерттеуге негізделген тәсілдер қолданылады. Мұндай тектес зерттеулердің жемісті әдістерінің бірі М. Отелбаевқа тиесілі. Біз де соны пайдаланамыз. Сонымен қатар бұл жұмыстың нәтижелері Р. Ойнаров жұмысы нәтижелерін толықтыра түседі.

Поступила 07.07.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 182 – 185

UDC 517.957.6

## ANALYTICAL SOLUTION OF THE HEAT EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

M. M. Sarsengeldin<sup>1</sup>, N. T. Bizhigitova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Suleyman Demirel University, Almaty, Qaskelen, Kazakhstan,

<sup>1,2</sup>Department of mathematics and natural sciences,

E-mail: merey@mail.ru

**Key words:** Integral Error Functions, heat polynomials, moving boundaries.

**Abstract.** The main idea of the developed method is based on the use of Integral Error Functions and Heat polynomials which a priori satisfy the heat equation. Linear combination of these functions allows to solve heat equations in domains with moving boundaries with discontinuous coefficients.

**Introduction.** Solution of heat equation by heat polynomials in domains with nonmoving boundaries were considered in [1]. Heat distribution in degenerate domains substantially complicates the problem and cannot be solved by classical methods represented in [2] and [3]. Only for special cases it is possible to construct Heat potentials, however in general solution reduced to the system of Integra-differential equations which contains singularities. In this paper we consider analytical solution of the heat equation with discontinuous coefficients in domain with moving boundary which degenerate at the initial time. This problem is a part of study where the two phase spherical Stefan problem with two moving boundaries has to be solved. We follow the method represented in [4] and utilize Heat polynomials to solve the problem.

**Problem statement.** It is required to find the solution of the Heat Equation

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \beta(t), \quad t > 0 \quad (1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \beta(t) < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2),$$

with following boundary conditions:

$$x = 0: \quad -\lambda_1 \left[ b \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \right]_{x=0} = b^2 P(t), \quad (3),$$

$$u_2(\infty, t) = 0 \quad (4),$$

$$x = \beta(t): \quad u_1(\beta(t), t) = 0 \quad (5),$$

$$u_2(\beta(t), t) = 0 \quad (6).$$

**Problem solution.** We represent solution in the following form:

$$u_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} (2a_1 t)^n \left[ i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_1 \sqrt{t}} + i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} (2a_1 t)^{\frac{2n+1}{2}} \left[ i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_1 \sqrt{t}} - i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right] \quad (7),$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (2a_2 t)^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \tag{8}$$

Where coefficients  $A_{2n}, A_{2n+1}, C_n$  have to be found. Moreover, it is necessary to find unknown moving  $\beta(t)$ . Using Hermite polynomials we represent (7) in the form of Heat polynomials:

$$u_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m} t^m \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m+1} t^m \beta_{2n+1,m} \tag{9}$$

Making substitution  $\sqrt{t} = \tau$

$$u_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m} \tau^{2m} \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m+1} \tau^{2m} \beta_{2n+1,m} \tag{10}$$

From (5) for  $x = 0$

$$\left( b \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \right)_{x=0} = \frac{b^2}{-\lambda_1} P(t)$$

Using above expression we have

$$\begin{aligned} b \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} t^n \beta_{2n+1,n} - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} t^n \beta_{2n,n} &= \frac{b^2}{-a_1} P(t) \\ b A_{2n+1} \beta_{2n+1} - A_{2n} \beta_{2n,n} &= \frac{b^2}{-a_1} \cdot \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \\ A_{2n+1} &= A_{2n} \frac{\beta_{2n,n}}{b \cdot \beta_{2n+1,n}} - \frac{b}{a_1 \beta_{2n+1,n}} \cdot \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned} \tag{11}$$

To find  $A_{2n}$  we use multinomial coefficients of Newton's Polynomials.

It is known that

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1 \leq i \leq m} x_i^{k_i}$$

where  $\binom{n}{k_1, k_2, k_3, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$  is a multinomial coefficient

$$\text{for } \beta(t) = \alpha_1 t^{1/2} + \alpha_2 t^1 + \alpha_{n+1} t^{3/2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} t^{\frac{n+1}{2}} \tag{12}$$

after making substitution  $\tau = \sqrt{t}$  we have

$$(\alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \dots + \alpha_{m+1} \tau^{m+1})^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m+1}} \cdot \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_{m+1}^{k_{m+1}} \tau^{k_1+2k_2+\dots+(m+1)k_{m+1}} \tag{13}$$

where

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m+1}} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_{m+1}^{k_{m+1}} \tag{14}$$

is a multinomial coefficient in our case

Thus to derive recurrent formula for  $A_{2n}$ , we take both sides of (5),  $2k -$  times derivatives at  $\tau = 0$ , we use multinomial coefficients and get following expressions.

$$0 \equiv 0^{(4l)} = \sum_{n=1}^l A_{2n} \sum_{m=0}^{n-1} C_{2n,m} [4l] + \sum_{n=l+1}^{2l-1} A_{2n} \sum_{m=0}^{2l-n-1} C_{2n,m+2(n-l)} [4l] \beta_{2n,m+2(n-l)} + A_{4l} \beta_{4l,2l} + \tag{15}$$

$$+ \sum_{n=1}^l A_{2n-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_{2n-1,m} [4l] \beta_{2n-1,m} + \sum_{n=l+1}^{2l} A_{2n-1} \sum_{m=0}^{2l-n} C_{2n-1,m+2(n-l)-1} [4l] \beta_{2n-1,m+2(n-l)-1}$$

where  $l=1,2,\dots$  and

$$0 \equiv 0^{(2(2l-1))} = \sum_{n=1}^{l-1} A_{2n} \sum_{m=0}^{n-1} C_{2n,m} [2(2l-1)] \beta_{2n,m} + \sum_{n=l}^{2l-2} A_{2n} \sum_{m=1}^{2l-n-1} C_{2n,m+2(n-l)} [2(2l-1)] \beta_{2n,m+2(n-l)} +$$

$$+ A_{4l-2} \beta_{4l-2,2l-1} [2(2l-1)] + \sum_{n=0}^{l-1} A_{2n+1} \sum_{m=0}^n C_{2n+1,m} [2(2l-1)] \beta_{2n+1,m} +$$

$$+ \sum_{n=l}^{2l-2} A_{2n+1} \sum_{m=1}^{2l-n-1} C_{2n+1,m+2(n-l)+1} [2(2l-1)] \beta_{2n+1,m+2(n-l)+1}$$

(16)

$A_0=0$

Thus  $A_{2n}$ , coefficients are found explicitly and can be calculated from (15) and (16) where  $C_{i,j}[4l]$  or  $C_{i,j}[4l-2]$  multinomial coefficients or sums of coefficients at  $\beta_{i,j}$ .

To calculate  $C_n$  we apply Leibniz, Faa Di Bruno's formulas and Bell polynomials

Using Leibniz formula we have

$$\frac{\partial^k [2^{n/2} \tau^n \cdot i^n \operatorname{erfc} \beta]}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & \text{for } k < n \\ \frac{2^{n/2} k!}{(k-n)!} \cdot [i^n \operatorname{erfc} \beta]^{(k-n)}, & \text{for } k \geq n \end{cases} \tag{17}$$

Using Faa Di Bruno's formula and Bell polynomials for a derivative of a composite function we have

$$\frac{\partial^{k-n} [i^n \operatorname{erfc}(\pm \beta)]}{\partial \tau^{k-n}} \Big|_{\tau=0} = \sum_{m=1}^{k-n} (i^n \operatorname{erfc}(\pm \beta))^{(m)} \Big|_{\beta=0} \cdot B_{k-n,m}(\beta'(\tau), \beta''(\tau), \dots, \beta^{(k-n-m+1)}(\tau)) \Big|_{\tau=0} \tag{18}$$

where

$$B_{k-n,m} = \sum \frac{(k-n)!}{j_1! j_2! \dots j_{k-n-m+1}!} \cdot \beta_1^{j_1} \beta_2^{j_2} \beta_3^{j_3} \dots \beta_{k-n-m+1}^{j_{k-n-m+1}} \tag{19}$$

and  $j_1, j_2, \dots$  satisfy following equations

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{k-n-m+1} = m$$

$$j_1 + 2j_2 + \dots + (k-n-m+1)j_{k-n-m+1} = k-n$$

for  $k \geq n$

$$[i^n \operatorname{erfc}(\pm \beta)]^{(m)} \Big|_{\beta=0} = (-1)^m i^{n-m} \operatorname{erfc} 0 = (\mp 1)^m \frac{\Gamma(\frac{n-m+1}{2})}{(n-m)! \sqrt{\pi}} \tag{20}$$

From  $x = \beta(\tau)$  we have

$$\sum_{n=0}^{k-1} C_n \cdot \mu + C_k \cdot \mu = 0 \tag{21}$$

where

$$\mu = (2)^{1/2} \frac{k!}{(k-n)!} \sum_{m=1}^{k-n} (-1)^m \frac{\Gamma(\frac{n-m+1}{2})}{(n-m)! \sqrt{\pi}} \cdot \sum \frac{(k-n)!}{j_1! j_2! \dots j_{k-n-m+1}!} \cdot \beta_1^{j_1} \beta_2^{j_2} \beta_3^{j_3} \dots \beta_{k-n-m+1}^{j_{k-n-m+1}}$$

Thus utilizing (11), (15), (16) and (21) we find  $A_{2n}, A_{2n+1}, C_n$  coefficients of functions (7) and (8). Convergence of (7) and (8) can be proved by following the analogy of the proof represented in [4].

#### REFERENCES

- [1] Widder D.V. *Analytic solutions of the heat equation*, Duke Math. J. 29 (1962), 4 97-503.13  
 [2] Tikhonov A.N., Samarski A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Gostechteorizdat, 1951.  
 [3] Friedman A. *Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids*, J. Math. Mech., 8 (1959), p. 499–517.  
 [4] Kharin S.N. The analytical solution of the two-phase Stefan problem with boundary flux condition, *Mathematical journal*, Vol.14, № 1 (51), 2014, pp. 55 – 76.

#### ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕНДЕУІНІҢ ЖЫЛЖЫМАЛЫ АЙМАҚТАРДА АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШІМІ

М. М. Сарсенгельдин, Н. Т. Бижигитова

Сүлеймен Демирел атындағы университет, Қаскелен, Қазақстан

**Тірек сөздер:** интегралды Қателіктер Функциясы, жылу полиномдары, жылжымалы аймақтар.

**Аннотация.** Жылуөткізгіштік тендеуінің интегралды қателіктер функциялары және жылу полиномдары арқылы аналитикалық шешими табылған.

#### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. М. Сарсенгельдин, Н. Т. Бижигитова

Университет им. Сулеймана Демиреля, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** интегральная Функция Ошибок, тепловые полиномы, подвижные границы.

**Аннотация.** Найдено аналитическое решение уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами методом интегральных функций ошибок и тепловых полиномов.

Поступила 07.07.2015 г.

#### NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 185 – 192

#### REPRESENTATIONS OF $S_n$ ON SOME ROOTED TREES IN FREE RIGHT-COMMUTATIVE ALGEBRA

B. K. Zhakhayev

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan.

E-mail: bekat22@hotmail.com

**Key words:** free algebra, multi-linear part, identity, irreducible module, basis, rooted tree, Young symmetrizer, group of automorphisms, cycle index, permutation module.

**Abstract.** Algebra with identity  $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$  is called a right-commutative. In [2] the basis of the free right-commutative algebra constructed by rooted trees. Studies varieties of free algebras lead to the study of

multi-linear part of free algebra as  $S_n$ -module. Research on the  $S_n$ -modules is a representation of the permutation group  $S_n$ . Maschke's theorem says, that any finite  $V G$ -module decomposes into irreducible  $G$ -submodules, where  $V$  is finite-dimensional vector space,  $G$  is any finite group.  $\mathbb{C}S_n$  is group algebra of  $S_n$  and  $S_n$ -module. Irreducible submodules in  $\mathbb{C}S_n S_n$ -module are called Specht modules. The dimension of the Specht module for partition  $\lambda \vdash n$  in  $\mathbb{C}S_n S_n$ -module is equal to the number of standard Young tableaux for the partition  $\lambda$ . Multiplicity of the Specht module for partition  $\lambda \vdash n$  in  $\mathbb{C}S_n S_n$ -module is equal to the number of standard Young tableaux for the partition  $\lambda$ . In this paper consider the multi-linear part  $F_n^{multi}(X)$  of free right-commutative algebra  $F(X)$  as  $S_n$ -module. Fully describe the representations of  $S_n$  on some rooted trees, that is decomposing into Specht modules.

## ЕРКІН ОҢ-КОММУТАТИВТІ АЛГЕБРАНЫҢ КЕЙБІР ТҮБІРЛІ АҒАШТАРЫНДАҒЫ $S_n$ ТОБЫНЫҢ КӨРСЕТІЛІМДЕРІ

Б. К. Жахаев

Сулейман Демирел атындағы университет, Қаскелең, Қазақстан

**Тірек сөздер:** еркін алгебра, мульти-сызықты бөлік, тепе-теңдік, келтірілмейтін модуль, базис, түбірлі ағаш, Юнг симметризаторы, автоморфизмдер тобы, циклдік индекс, алмастыру модулі.

**Аннотация.** Алгебра  $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$  тепе-теңдігін қанағаттандырса оң-коммутативті деп аталады. Еркін оң-коммутативті алгебраның базисы [2] жұмыста түбірлі ағаштар арқылы көрсетілген. Еркін алгебралардың көпбейнелерін зерттеу берілген еркін алгебраның мульти-сызықты бөлігін  $S_n$ -модульге жіктелуіне алып келеді. Ал  $S_n$ -модульді зерттеу бұл  $S_n$  алмастыру тобының көрсетілімін зерттеу есебіне пара пар.  $G$ -модульге қатысты Машке теоремасы былай дейді, кез келген ақырлы өлшемді  $V G$ -модуль келтірілмейтін немесе жіктелмейтін  $G$ -ішкімодульдерге жіктеледі, мұндағы  $V$  ақырлы векторлық кеңістік,  $G$  кез келген ақырлы топ.  $\mathbb{C}S_n S_n$  тобының топтық алгебрасы және  $S_n$ -модуль.  $\mathbb{C}S_n S_n$ -модулінің келтірілмейтін  $S_n$ -ішкімодульдерін Шпехт модуль деп атайды.  $\mathbb{C}S_n S_n$ -модулінде  $\lambda \vdash n$  бөліктеуіне сәйкес келетін Шпехт модулінің өлшемі  $\lambda$  бөліктеуіне сәйкес келетін стандартты Юнг таблицаларына тең.  $\mathbb{C}S_n S_n$ -модулінде  $\lambda \vdash n$  бөліктеуіне сәйкес келетін Шпехт модулінің еселігі  $\lambda$  бөліктеуіне сәйкес келетін стандартты Юнг таблицаларына тең. Бұл мақалада  $F(X)$  еркін оң-коммутативті алгебраның мульти-сызықты  $F_n^{multi}(X)$  бөлігі  $S_n$ -модуль ретінде қарастырылады. Кейбір түбірлі ағаштардың  $S_n$ -модульге жіктелуі толық сипатталады. Басқаша айтқанда Шпехт модульдерге жіктелуі толық сипатталады.

**1. Кіріспе.** Еркін алгебралардың көпбейнелілігін зерттеу заманауи алгебраның маңызды есебі. Еркін алгебралардың келтірілмейтін тепе-теңдіктері мен келтірілмейтін модульдерін табу бір есеп болып саналады.

Ғылымда кейбір еркін алгебралардың модульге жіктелуі белгілі. Мысалы, айталық  $F_n^{assoc}$ ,  $F_n^{zimb}$  және  $F_n^{leib}$  еркін ассоциативті, еркін Цинбиел және еркін Лейбниц алгебраларының мульти-сызықты бөлігі болсын, онда  $F_n^{assoc}$ ,  $F_n^{zimb}$  және  $F_n^{leib}$  мульти-сызықты бөліктері  $\mathbb{C}S_n$ -ге изоморфты.

Егер  $F_n^{lie}$  еркін Ли алгебрасының мульти-сызықты бөлігі болса, онда келтірілмейтін модульдердің еселіктері [7] жұмыста толығымен есептелінген.

Еркін бикоммутативті және еркін Новиков алгебраларының мульти-сызықты бөліктерінің  $F_n^{bicom}$ ,  $F_n^{nov}$  модульдік құрылымдары [3], [4] жұмыстарда толығымен қарастырылған.

Еркін анти-коммутативті алгебраның  $F_n^{acom}$  мульти-сызықты бөлігінің модульдік құрылымдары  $1 \leq n \leq 7$  үшін [1] жұмыста зерттелген.

Осы жұмыста  $F(X)$  еркін оң-коммутативті алгебраның  $F_n^{multi}(X)$  мульти-сызықты бөлігі  $S_n$ -модуль ретінде қарастырылады. Қарастырылатын алгебра векторлық кеңістік ретінде характеристикасы 0-ге тең өріс үстінде зерттеледі.  $S_n$  алмастыру тобының  $F_n^{multi}(X)$

кеңістігіне әсері табиғи түрде анықталған. Мысалы, егер  $\sigma = (12)(34)(5) \in S_5$  және  $m = ((x_1 \cdot x_3) \cdot (x_2 \cdot (x_4 \cdot x_5))) \in F_5^{multi}$  болса, онда  $\sigma(m) = ((x_2 \cdot x_4) \cdot (x_1 \cdot (x_3 \cdot x_5)))$ .

**2. Базис ережесі.**

**Анықтама 2.1:**  $(A, \cdot)$  алгебрасы оң-коммутативті деп аталады, егер кез келген  $x, y, z \in A$  үшін

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y$$

тепе-теңдігі орындалса.

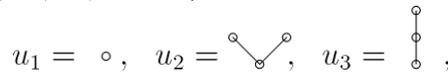
Боялған түбірлі ағаштардың анықтамасы [2] жұмыста келтірілген. Алайда [2] жұмыста келтірілген анықтаманы екіге бөліп қарастырайық. Алдымен боялмаған түбірлі ағаштардың, сосын боялған түбірлі ағаштардың анықтамаларын келтірейік.

**Анықтама 2.2:** Егер  $\overline{\mathbb{T}}$  жиыны үшін төмендегі шарттар орындалса:

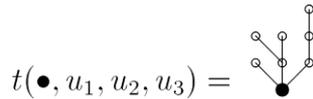
- (1)  $\bullet \in \overline{\mathbb{T}}$  және  $\bullet = t(\bullet)$ , мұндағы  $\bullet$ — түп және  $t$ -жай ғана формалды символ,
- (2)  $\bullet, u_1, u_2, \dots, u_k \in \overline{\mathbb{T}} \Rightarrow t(\bullet, u_1, u_2, \dots, u_k) \in \overline{\mathbb{T}}$ ,

онда  $\overline{\mathbb{T}}$  түбірлі ағаштардың рекурсивті жиыны деп аталады.

**Мысалы 2.1:** Айталық  $\bullet, u_1, u_2, u_3 \in \overline{\mathbb{T}}$ , және



болса, онда

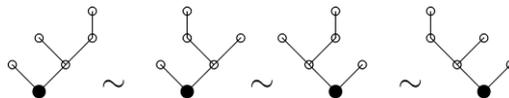


**Анықтама 2.3:** Егер  $\mathbb{T} := \overline{\mathbb{T}} / \sim$  жиыны үшін төмендегі шарттар орындалса:

- (1)  $t(\bullet) \sim t(\bullet)$ ,
- (2)  $t(\bullet, u_1, u_2, \dots, u_k) \sim t(\bullet, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k})$ , егер  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  тізбегі  $(1, 2, \dots, k)$  тізбегінің алмастыруы болса,
- (3)  $t(\bullet, u_1, u_2, \dots, u_k) \sim t(\bullet, v_1, v_2, \dots, v_k)$ , егер кез келген  $i = 1, 2, \dots, k$  үшін  $u_i \sim v_i$ ,

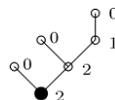
онда  $\mathbb{T}$  түбірлі ағаштардың жиыны деп аталады.

**Мысалы 2.2:**



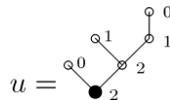
Енді әрбір эквивалент кластан өкіл таңдайық және өкілдер арасына рет анықтайық. Барлық түбірлі ағаштар түптен жапыраққа қарай бағытталған, сондықтан ағаштың әрбір төбесінде төбеге кіретін және төбеден шығатын бұтақтары болады. Енді ағаштың әрбір төбесін сол төбеден шығатын бұтақтар санымен белгілеп шығайық.

**Мысалы 2.3:**



Енді ағашты саяхаттау ұғымын енгізейік, анығырақ айтсақ preorder = (root, left, right).

**Мысалы 2.4:** Айталық



болсын, онда  $preorder(u) = 202110$ .

Енді  $\mathbb{T}$  жиынында рет  $<$  енгізейік,  $(\mathbb{T}, <)$ .

**Анықтама 2.4:** Айталық  $u, v \in \mathbb{T}$  болсын, онда  $u < v$  деп аталады, егер  $|u| < |v|$ , немесе  $|u| = |v|$  және  $preorder(u) <_{lex} preorder(v)$ .

**Мысалы 2.5:** Жоғарыда келтірілген мысалдағы ағашты қарастырайық.



$$a_n \underbrace{(\dots a_{k+3} (a_{k+2} (\dots ((a_{k+1} a_1) a_2) a_3 \dots) a_k))}_{nonsym-part} \dots$$

$S_n$  алмастыру тобы элементінің түбірлі ағашқа әсер етуінің үш жолын қарастырсақ жеткілікті:

**1-жол:**  $\sigma$  алмастыруы  $\text{nspr}(u_f)$  симметриялы емес бөлігіне әсер етеді

**2-жол:**  $\sigma$  алмастыруы  $\text{spr}(u_f)$  симметриялық бөлігіне әсер етеді

**3-жол:**  $\sigma$  алмастыруы  $\text{nspr}(u_f)$  симметриялық емес және  $\text{spr}(u_f)$  симметриялық бөліктеріне әсер етеді.

**1-жол:** Базис ережесі бойынша  $u_g \in F_n^{multi}$ , яғни симметриялық емес бөліктегі бояулардың орын алмастыруы базис ережесіне қайшы келмейді.

**2-жол:** Ыңғайлық үшін  $u_f$  элементінің симметриялық бөлігін алу және кез келген  $\sigma \in S_n$  алмастыруын  $(i \ i + 1)$  транспозиция ретінде қарау дәлелдеуге жеткілікті, сондықтан

$$(i \ i + 1) : (\dots ((\circ a_1) a_2) a_3 \dots a_i) a_{i+1} \dots) a_k \mapsto (\dots ((\circ a_1) a_2) a_3 \dots a_{i+1}) a_i \dots) a_k.$$

Анықтылық үшін  $x = (\dots ((\circ a_1) a_2) a_3 \dots) a_{i-1}$ ,  $y = a_i$ ,  $z = a_{i+1}$  деп алайық, онда

$$(\dots (xz)y) a_{i+2} \dots) a_k = |\text{RCOM identity}| = (\dots (xy)z) a_{i+2} \dots) a_k,$$

яғни  $u_g \in F_n^{multi}$  және  $f = g$ .

**3-жол:** 1 және 2-жолдар арқылы дәлелденеді.

**4. Негізгі нәтижелер.** Берілген  $u$  түбірлі ағашының  $u_1$  және  $u_2$  жапырақтары егіз деп аталады, егер олардың әкелері ортақ болса. Берілген ағаштың  $v$  төбесінің  $b', b''$  ішкі ағаштары егіз деп аталады, егер  $b' = b''$ . Берілген  $b_1, b_2, \dots, b_k$  егіздері *еселігі k-ға тең қарапайым егіздер* деп аталады, егер  $b_1 = b_2 = \dots = b_k = \text{төбе}$ .

**Анықтама 4.1:** Егер  $u \in \mathbb{T}_n$  түбірлі ағашының әрбір төбесінің барлық ішкі ағаштары әртүрлі болса, онда  $u$  ағашы 0-асимметриялы деп аталады. Егер  $u \in \mathbb{T}_n$  түбірлі ағашының әрбір төбесінің барлық қарапайым емес ішкі ағаштары әртүрлі болса, онда  $u$  ағашы 1-асимметриялы деп аталады. Егер  $u \in \mathbb{T}_n$  түбірлі ағашының әрбір төбесінің барлық егіздерінің ұзындығы жұп болса, онда  $u$  ағашы супер деп аталады және мұндай ағаштар жиыны  $\text{super}\mathbb{T}_n$  деп белгіленеді.

Төмендегі алгоритм бойынша  $u \in \mathbb{T}_n$  түбірлі ағашының әрбір төбесін  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , бояуларымен бояп шығайық:

- Егер әкесі ортақ екі төбе жапырақ болса, онда олар бір түспен боялады,
- Егер екі төбе бір түс болса, онда олар жапырақтар және әкелері ортақ.

Сондықтан әрбір  $u \in \mathbb{T}_n$  1-асимметриялы ағашқа оның бояуын сәйкес қоюға болады

$$\text{color}(u) = \{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots\},$$

мұндағы  $k_i$   $u$  ағашындағы  $a_i$  бояуларының еселегі.

**Анықтама 4.2:** Берілген  $u$  1-асимметриялы ағашының салмағы төмендегідей анықталады

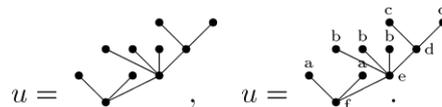
$$\omega(u) = \omega(\{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots\}) = \text{sort}(k_1, k_2, \dots),$$

мұндағы  $k_i$   $a_i \in \Omega$  бояуының еселегі.

**Мысалы 4.1:** Кез келген  $u \in \mathbb{T}_n$  0-асимметриялы ағаштың салмағы төмендегі өрнекке тең

$$\omega(u) = \omega(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = (1, 1, \dots, 1).$$

**Мысалы 4.2:** Айталық  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$  және



Сондықтан  $\omega(u) = \omega(\{2a, 3b, 2c, 1d, 1e, 1f\}) = \text{sort}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ .

**Теорема 4.1:** Кез келген  $n$  үшін  $F_n^{multi}(X)$  мульти-сызықты бөлігінің тривиал модульдер саны түбірлі ағаштар санына  $|\mathbb{T}_n|$  тең.

**Дәлелдеуі:** Айталық  $M^u$  кеңістігі  $u \in \mathbb{T}$  түбірлі ағашымен туындатылған векторлық кеңістік болсын. Диаграммасы  $\lambda = (n) \vdash n$  болатын  $T$  стандартты Юнг таблицасын алайық және  $c_T$  Юнг симметризаторы болсын, толығырақ [5] жұмыстан көруге болады. Қандай да бір  $u_f \in M^u$

элементін тіркейік. Мұнда  $M^u$  кеңістігінің барлық элементерін  $u_f$  элементіне кейбір  $\sigma \in S_n$  алмастыруларымен әсер ету арқылы алуға болады,  $\sigma \cdot u_f$ . Сондықтан  $c_T \cdot M^u \cong 1 \cdot S^{(n)}$ , мұндағы  $S^{(n)}$  диаграммасы  $(n)$  сәйкес келетін Шпехт модулі, толығырақ [8] жұмыстан көруге болады.

**Теорема 4.2:** Кез келген  $n$  үшін  $F_n^{multi}(X)$  мульти-сызықты бөлігінің таңбасы айнымалы модульдер саны супер түбірлі ағаштар санына  $|super\mathbb{T}_n|$  тең.

**Дәлелдеуі:** Айталық  $M^u$  кеңістігі  $u \in \mathbb{T}$  түбірлі ағашымен туындатылған векторлық кеңістік болсын. Диаграммасы  $\lambda = (1^n) \vdash n$  болатын  $T$  стандартты Юнг таблицасын алайық және  $c_T$  Юнг симметризаторы болсын. Қандай да бір  $u_f \in M^u$  элементін тіркейік. Мұнда  $M^u$  кеңістігінің барлық элементері  $u_f$  элементіне кейбір  $\sigma \in S_n$  алмастыруларымен әсер ету арқылы алынады, яғни  $\sigma \cdot u_f$ . Демек  $c_T \cdot \sigma = \pm c_T$  екені айқын, сондықтан  $c_T \cdot M^u \cong 1 \cdot S^{(1^n)}$  немесе  $c_T \cdot M^u \cong 0 \cdot S^{(1^n)}$ . Анықтылық үшін  $u \in \mathbb{T}_n$  элементінің арнайы бір симметриялық бөлігін  $t(o, kv)$  қрастырайық, мұндағы  $v \in asym\mathbb{T}$  және  $v$  өкіл,  $|v| = l$ . Енді,  $t(o, kv)$  элементінің әрбір төбесін  $\{1, 2, 3, \dots, l(k-1), lk\}$  жиыны элементтерімен солдан оңға және төменнен жоғары қарай белгілеп шығайық. Пайда болған элементті  $t(o, kv)'$  арқылы өрнектейік. Мұнда  $t(o, kv)'$  элементінің симметриялық тобының туындатушылары төмендегідей анықталады

$$\sigma = (12)(k+1 \ k+2) \dots ((l-1)k+1 \ (l-1)k+2),$$

$$\tau = (1 \ 2 \ \dots \ k)(k+1 \ k+2 \ \dots \ 2k) \dots ((l-1)k+1 \ (l-1)k+2 \ \dots \ lk)$$

және

$$Sym(t(o, kv)') = \langle \sigma, \tau \rangle.$$

Енді,  $Sym(t(o, kv)')$  тобы элементтерінің таңбасын  $S_n$  тобындағындай анықтайық және  $v$  ішкі ағашының ұзындығы таңбаға әсер ететіні айқын. Егер  $|v|$  тақ болса, онда  $c_T \cdot M^u \cong 0$ , ал егер  $|v|$  жұп болса, онда  $c_T \cdot M^u \cong 1 \cdot S^{(1^n)}$ . Ал бұл супер түбірлі ағаштан туындатылған векторлық кеңістікте таңбасы айнымалы модульдердің саны 1-ге тең екенін көрсетеді.

**Теорема 4.3:** Айталық  $\lambda \vdash n$  және  $u \vdash n$  төбеден тұратын 1-асимметриялы түбірлі ағаш болсын. Егер  $\omega(u) = \lambda$ , онда

$$M^u \cong M^\lambda,$$

мұндағы  $M^\lambda$   $\lambda$  бөліктеуіне сәйкес келетін алмастыру модулі.  $M^\lambda$  алмастыру модулі жайлы [7] жұмыстан көруге болады.

**Дәлелдеуі:** Айталық  $u = \{t(o, k_1 \bullet), t(o, k_2 \bullet), \dots, t(o, k_m \bullet), \underbrace{\bullet, \dots, \bullet}_i\}$  және

$\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_m, 1^j)$ . Енді [6] жұмыста көрсетілгендей  $u$  элементінің автоморфизмдер тобы төмендегідей анықталады

$$\Gamma(u) = S_{k_1} \cdot S_{k_2} \cdot \dots \cdot S_{k_m} \cdot \underbrace{S_1 \cdot \dots \cdot S_1}_i.$$

Сонымен  $\Gamma(u)$  тобының циклдік индексін [6] жұмыстағыдай есептейік

$$\begin{aligned} Z(\Gamma(u)) &= Z(S_{k_1} \cdot S_{k_2} \cdot \dots \cdot S_{k_m} \cdot S_1 \cdot \dots \cdot S_1) = Z(S_{k_1}) \cdot Z(S_{k_2}) \cdot \dots \cdot Z(S_{k_m}) \cdot Z(S_1) \cdot \dots \cdot Z(S_1) = \\ &= Z(S_{k_1}) \cdot Z(S_{k_2}) \cdot \dots \cdot Z(S_{k_m}) \cdot Z(S_1)^i. \end{aligned}$$

және  $\lambda$  бөліктеуінің циклдық индексін төмендегідей есептейік

$$\Gamma(\lambda) = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \dots \cdot S_{l_m} \cdot S_1 \cdot \dots \cdot S_1.$$

Көріп тұрғанымыздай  $u$  ағашы мен  $\lambda$  бөліктеуінің автоморфизмдер тобы бірдей. Демек

$$\begin{aligned} Z(\Gamma(\lambda)) &= Z(S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \dots \cdot S_{l_m} \cdot S_1 \cdot \dots \cdot S_1) = Z(S_{l_1}) \cdot Z(S_{l_2}) \cdot \dots \cdot Z(S_{l_m}) \cdot Z(S_1) \cdot \dots \cdot Z(S_1) = \\ &= Z(S_{l_1}) \cdot Z(S_{l_2}) \cdot \dots \cdot Z(S_{l_m}) \cdot Z(S_1)^j. \end{aligned}$$

Енді теорема шартын ескерсек  $\omega(u) = \lambda$ , яғни  $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_m = l_m, i = j$ , онда біздер төмендегі тепе-теңдікті аламыз.

$$Z(\Gamma(u)) = Z(\Gamma(\lambda)).$$

Ал бұл  $M^u \cong M^\lambda$  изоморфты екенін көрсетеді.

**Мысалы 4.3:** Айталық



болсын, онда  $\omega(u) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$  және  $M^u \cong M^{(3,2,2,1,1,1)}$ .

**Салдары 4.1:** Егер  $u$   $n$  төбеден тұратын 0-асимметриялы түбірлі ағаш болса, онда

$$M^u \cong \mathbb{C}S_n,$$

мұндағы  $\mathbb{C}S_n$   $S_n$  тобының топтық алгебрасы.

**Дәлелдеуі:** Берілген  $u$   $n$  төбеден тұратын 0-асимметриялы түбірлі ағашының салмағы  $(1^n)$  тең, сондықтан Теорема 4.3 бойынша  $M^u \cong M^{(1^n)}$  және [8] жұмыстан белгілі  $M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}S_n$ .

**Мысалы 4.4:** Айталық  $u \in \mathbb{T}_4$  және



болсын, онда  $\omega(u) = (1, 1, 1, 1) = (1^4)$  және  $M^u \cong M^{(1^4)} \cong \mathbb{C}S_4$ .

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Bremner M., Classifying varieties of anti-commutative algebras, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, **1996**, 4 (2), 119-127.
- [2] Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C., Trees, Free Right-symmetric algebras, Free Novikov algebras and identities, *Homology, Homotopy and Applications*, **2002**, 4(2), 165-190.
- [3] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M., Free bicommutative algebras, *Serdica Math. J.*, **2011**, 37 (1), 25-44.
- [4] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A.,  $S_n$  - and  $GL_n$  - module structures on free Novikov algebras, *Journal of Algebra*, **2014**, 416, 287-313.
- [5] Fulton W., Harris J., Representation theory: A First Course, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag New York, 1991. 551 p.
- [6] Harary F., Palmer E.M., Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London, 1973. 271 p.
- [7] Kraśkiewicz W., Weynman L., Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element, *Bayreuth. Math. Schr.*, **2001**, 63, 265-284.
- [8] Sagan B.E., The symmetric group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 203, Springer Verlag, New York, 2001. 241 p.

#### REFERENCES

- [1] Bremner M., Classifying varieties of anti-commutative algebras, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, **1996**, 4 (2), 119-127. (in Eng.)
- [2] Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C., Trees, Free Right-symmetric algebras, Free Novikov algebras and identities, *Homology, Homotopy and Applications*, **2002**, 4(2), 165-190. (in Eng.)
- [3] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M., Free bicommutative algebras, *Serdica Math. J.*, **2011**, 37 (1), 25-44. (in Eng.)
- [4] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A.,  $S_n$  - and  $GL_n$  - module structures on free Novikov algebras, *Journal of Algebra*, **2014**, 416, 287-313. (in Eng.)
- [5] Fulton W., Harris J., Representation theory: A First Course, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag New York, 1991. 551 p. (in Eng.)
- [6] Harary F., Palmer E.M., Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London, 1973. 271 p. (in Eng.)
- [7] Kraśkiewicz W., Weynman L., Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element, *Bayreuth. Math. Schr.*, **2001**, 63, 265-284. (in Eng.)
- [8] Sagan B.E., The symmetric group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 203, Springer Verlag, New York, 2001. 241 p. (in Eng.)

**ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  $S_n$  НА НЕКОТОРЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЯХ  
В СВОБОДНОЙ ПРАВО-КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЕ**

**Б. К. Жахаев**

Университет им. Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан

**Ключевые слова:** свободная алгебра, мульти-линейная часть, тождество, неприводимый модуль, базис, корневые деревья, Юнг симметризатор, группа автоморфизмов, цикловой индекс, модуль перестановка.

**Аннотация.** Алгебра с тождеством  $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$  называется право-коммутативной. В работе [2] базис право-коммутативной алгебры построен с помощью корневых деревьев. Исследование многообразий свободных алгебр приводят к исследованию мульти-линейной части свободной алгебры как  $S_n$ -модуль. Исследование на  $S_n$ -модулей это есть представления группы перестановок  $S_n$ . В теореме Машке сказано, что любая конечномерная  $V G$ -модуль разлагается на неприводимую  $G$ -подмодулей, где  $V$  конечномерное векторное пространство,  $G$  любая конечномерная группа.  $\mathbb{C}S_n$  есть групповая алгебра группы  $S_n$  и  $S_n$ -модуль. Неприводимые  $S_n$ -подмодули в  $\mathbb{C}S_n$   $S_n$ -модуля называются модулем Шпехта. Размерность модуля Шпехта для разбиение  $\lambda \vdash n$  в  $\mathbb{C}S_n$   $S_n$ -модуле равна количеству стандартных таблиц Юнга для разбиение  $\lambda \vdash n$ . Кратность модуля Шпехта для разбиение  $\lambda \vdash n$  в  $\mathbb{C}S_n$   $S_n$ -модуле равна количеству стандартных таблиц Юнга для разбиение  $\lambda \vdash n$ . В этой статье рассматривается мульти-линейная часть  $F_n^{multi}(X)$  свободной право-коммутативной алгебры  $F(X)$  как  $S_n$ -модуль. Полностью описываются представления  $S_n$  на некоторых корневых деревьях. Иными словами описываются разложения на модули Шпехта.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 192 – 197

**ABOUT FOURIER SUBMISSION OF THE STRONG SOLUTION  
OF THE TASK OF CAUCHY FOR THE STORM LIOUVILLE EQUATION**

**S. T. Ahmetova, A. B. Imanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev**

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

**Keywords:** Cauchy's task self-conjugacy, quite continuity, Storm Liouville equation.

**Abstract.** Problem definition. Let continuous function on a segment  $[0,1]$ , i.e. We will consider Cauchy's task for the simplest equation of Storm Liouville:

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \quad (1.2)$$

DEFINITION 1.1. (1.1)-(1.2) twice continuously differentiable function satisfying the equations (1.1) and to regional conditions (1.2) is called as the regular solution of a regional task.

For any continuous function there is the only regular solution of a regional task (1.1)-(1.2) which is set by a formula

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (1.3)$$

DEFINITION 1.2. Function is called as the strong solution of a task of Cauchy (1.1)-(1.2) if there is a sequence of regular solutions of tasks of Cauchy (1.1)-(1.2) such that in space.

DEFINITION 1.3. Cauchy's task (1.1)-(1.2) is called strongly solvable if for any there is the only strong decision.

Cauchy's task (1.1)-(1.2) is strongly solvable and the decision is given by the same formula (1.3), but for the practical purpose it is a formula is a little suitable as often the integral will be not calculated in a quadrature therefore approximate methods of calculation of certain integrals are applied. But these methods also encounter obstacles the matter is that in our situation the upper bound of integral is a variable and this circumstance creates additional difficulties. The classical method of Fourier - decomposition of the decision on own functions is also not applicable because of the absence of the last because, it is well known a volterrovost of a task of Cauchy.

PROBLEM. Whether decomposition of the solution of a task of Cauchy (1.1)-(1.2) in a row of Fourier on some orthonormalized system is possible so that the partial sums of this row in the best way approached this decision among all finite-dimensional approximations.

УДК 517.91

## О ФУРЬЕ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** задача Коши самосопряженность, вполне непрерывность, уравнение Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе получено Фурье разложение решения задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля.

### 1. Введение.

**Постановка задачи.** Пусть  $f(x)$  непрерывная функция на сегменте  $[0,1]$ , т.е.  $f(x) \in C[0,1]$ . Рассмотрим задачу Коши для простейшего уравнения Штурма-Лиувилля:

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \quad (1.2)$$

**Определение 1.1.** Регулярным решением краевой задачи (1.1)-(1.2) называется дважды непрерывно дифференцируемая функция  $y(x)$ , удовлетворяющая уравнения (1.1) и крайевым условиям (1.2).

Для любой непрерывной функции  $f(x)$  существует единственное регулярное решение краевой задачи (1.1)-(1.2), которое задается формулой

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (1.3)$$

**Определение 1.2.** Функция  $y(x)$  называется сильным решением задачи Коши (1.1)-(1.2), если существует последовательность регулярных решений  $\{y_n(x)\}$  задач Коши (1.1)-(1.2) такая, что  $Ly_n \rightarrow f(x), y_n(x) \rightarrow y(x)$  в пространстве  $L^2(0,1)$ .

**Определение 1.3.** Задача Коши (1.1)-(1.2) называется сильно разрешимой, если для любого  $f(x) \in L^2(0,1)$  существует единственное сильное решение.

Задача Коши (1.1)-(1.2) сильно разрешима и решение дается той же формулой (1.3), но для практической цели это формула мало пригодна, поскольку зачастую интеграл окажется не вычисляемой в квадратуре, поэтому применяются приближенные методы вычисления определенных интегралов. Но эти методы также наталкиваются на препятствия, дело в том, что в нашей ситуации верхняя граница интеграла является переменной величиной и это обстоятельство создает дополнительные трудности. Классический метод Фурье- разложение решения по собственным функциям также не применим из-за отсутствия последних, ибо ,хорошо известно вольтерровость задачи Коши.

**Проблема.** Возможно ли разложение решения задачи Коши (1.1)-(1.2) в ряд Фурье по некоторой ортонормированной системе так, чтобы частичные суммы этого ряда наилучшим образом приближали этого решения среди всех конечномерных приближений.

**2. Методы исследований.** Пусть  $H = L^2(0,1)$  пространство Гильберта,  $A$ - линейный вполне непрерывный оператор, определенный на этом пространстве, а  $S$ - инволюция, определенный формулой:

$$Su(x) = u(1 - x). \quad (2.1)$$

Нетрудно установить, что оператор  $S$  является унитарным и самосопряженным, поэтому имеет место равенство

$$S^2 = I. \quad (2.2)$$

**Лемма 2.1.** Если вполне непрерывный оператор  $A$  удовлетворяет условию

$$SA = A^*S, \quad (2.3)$$

то оператор  $SA$  является вполне непрерывным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве  $H = L^2(0,1)$ .

**Доказательство.** Во-первых, имеет место равенство  $(SA)^* = A^*S^* = A^*S = SA$ . Во-вторых, произведение ограниченного и компактного оператора компактен.

**Лемма 2.2.** Если  $A$  оператор интегрирования, определенный формулой

$$Ay(x) = \int_0^x y(t)dt \quad (2.4)$$

в гильбертовом пространстве  $H = L^2(0,1)$ , то имеет место формула

$$SA = A^*S,$$

где  $S$ - оператор, определенный формулой (2.1).

**Доказательство.**

$$\text{а) } (Ay, z) = \int_0^1 \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot \overline{z(t)}dt = - \int_0^1 \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot d \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi = - \int_0^t y(\xi)d\xi \cdot \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi \Big|_0^1 + \int_0^1 y(\xi) \cdot \int_t^1 \overline{z(\xi)}d\xi dt = (y, A^*z), \Rightarrow A^*z(x) = \int_x^1 z(t)dt;$$

$$\text{б) } SAy(x) = \int_0^{1-x} y(t)dt = \left| \begin{matrix} 1-t = \xi \\ -dt = d\xi \end{matrix} \right| = - \int_1^x y(1-\xi)d\xi = \int_x^1 y(1-\xi)d\xi = \int_x^1 Sy(\xi)d\xi = A^*S.$$

**Лемма 2.3.** Если  $A$  оператор интегрирования, определенный формулой

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (2.4)$$

то имеет место формула

$$A^2y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (2.5)$$

**Доказательство.**  $A^2f(x) = A(Af(x)) = A \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \int_0^t f(\xi)d\xi dt =$

$$t \int_0^t f(\xi)d\xi \Big|_0^x - \int_0^x f(t) \cdot tdt = x \int_0^x f(\xi)d\xi - \int_0^x f(t)tdt = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

**Лемма 2.4.** Если  $A$  оператор интегрирования, определенный формулой (2.4), то имеет место формула

$$SA^2 = (A^2)^*S, \quad (2.6)$$

где  $S$  - инволюция, определенный формулой (2.1).

**Доказательство.**  $SA^2 = SAA = A^*SA = A^*A^*S = (A^2)^*S.$

**Лемма 2.5.** Если  $A$  вольтерровый оператор,  $S$ - унитарный оператор и имеют место равенства

$$SA = A^*S, S = S^*, N(A) = \{0\}, \quad (2.7)$$

то операторное уравнение

$$Au = f \quad (2.8)$$

имеет в пространстве  $H$  единственное решение вида

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_j)}{\lambda_j} \varphi_j, \quad (2.9)$$

где  $\lambda_j$ - собственное значение оператора  $SA$ , а  $\varphi_j$ - собственные векторы этого оператора.

**Доказательство.** По условию леммы оператор  $A$  компактный, а в силу условий  $SA = A^*S$ ,  $S = S^*$  оператор  $SA$ - самосопряженный и компактный. По теореме Гильберта-Шмидта для любого вектора  $u$  пространства  $H$  имеет место разложение

$$SAu = \sum_{j=1}^{\infty} (SAu, \varphi_j) \varphi_j + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0 \in N(SA)$ . В нашем случае  $N(SA) = \{0\}$ , поэтому

$$SAu = \sum_{j=1}^{\infty} (SAu, \varphi_j) \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, \varphi_j) \varphi_j, \Rightarrow (SAu, \varphi_j) = \lambda_j (u, \varphi_j), (u, \varphi_j) = \frac{(SAu, \varphi_j)}{\lambda_j}.$$

Если  $(u, \varphi_j) = 0$ , то  $SAu = 0$ ,  $\Rightarrow u = 0$ , следовательно, система  $\{\varphi_j\}$  является полной ортогональной системой. Полагая ее ортонормированной, имеем

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j) \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(SAu, \varphi_j)}{\lambda_j} \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_j)}{\lambda_j} \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_j)}{\lambda_j} \varphi_j.$$

**3. Результаты исследований.** Пусть оператор  $A$  определен формулой

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad (3.1)$$

тогда в силу формул (1.3), (2.5) решение задачи Коши (1.1)-(1.2) имеет вид

$$y(x) = A^2 f(x). \quad (3.2)$$

Действуя на обе части этого равенства оператором  $S$ , имеем

$$Sy(x) = SA^2 f(x). \quad (3.3)$$

В силу леммы 2.4 оператор  $SA^2$  самосопряжен, а в силу формулы (1.3) оператор  $SA^2$  компактен. Если  $A^2 f = 0$ , то  $f = 0$ , в самом деле, в этом случае

$$\int_0^x (x-t) f(t) dt = 0.$$

Дважды продифференцировав это равенство и воспользовавшись теоремой Лебега [1], получим  $f(x) = 0$  почти всюду. В силу теоремы Гильберта-Шмидта имеет место разложение

$$SA^2 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (SA^2 f, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n,$$

где  $SA^2 \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  следовательно, в силу формул 2.10, 2.11 решение задачи Коши имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \lambda_n \cdot S\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \lambda_n \varphi_n (1-x). \quad (3.4)$$

Нами доказана следующая теорема.

**Теорема 3.2.** Задача Коши

$$Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \quad (3.5)$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \quad (3.6)$$

сильно разрешима в пространстве  $L^2(0,1)$  и это сильное решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \lambda_n \varphi_n (1-x), \quad (3.7)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в пространстве  $L^2(0,1)$ .

$$SA^2 \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad (3.8)$$

$$A^2 y(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt. \quad (3.9)$$

**4. Выводы.** Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [2-13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа.- М.: Наука, 1980.
- [2] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [3] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний” – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.
- [4] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний”. – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.
- [5] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.
- [6] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.
- [7] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.
- [8] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.
- [9] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве  $L^2(0,1)$ . // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.
- [10] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.
- [11] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.
- [12] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [13] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBEPT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

REFERENCES

- [1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkicii i funkcional'nogo analiza.- М.: Nauka, 1980.
- [2] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanija JuK» № 27, 2002. s. 58-62.
- [3] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Respublikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teoriija kolebanij” – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.
- [4] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Respublikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teoriija kolebanij”. – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.
- [5] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 25-30.
- [6] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 133-136.
- [7] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovanija sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.
- [8] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirkij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.
- [9] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve  $L^2(0,1)$ . // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.
- [10] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.
- [11] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.
- [12] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [13] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193с, LAP LAMBEPT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

**ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ТЕҢДЕУІНІҢ КОШИ ЕСЕБІНІҢ  
ӘЛДІ ШЕШІМІНІҢ ФҮРЕЛІК КЕЙПІ****С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев**

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** Кошидің есебі, жалқы оператор, әсіре үзіксіздік, Штурм-Лиувилл теңдеуі.**Аннотация.** Бұл еңбекте Штурм-Лиувилл теңдеуіне арналған Коши есебінің шешімінің Фурье кейпі табылды.*Поступила 07.07.2015 г.***NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 197 – 207

**INVESTIGATION OF FILTERED DENSITY FUNCTION  
FOR LARGE EDDY SIMULATION  
OF CHEMICALLY REACTING TURBULENT FLOWS****M. K. Inkarbekov, A. Kaltayev**

Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: inkarbekovm@gmail.com

**Key words:** turbulence, filtered density function, large-eddy simulation, Monte Carlo method, direct numerical simulation.**Abstract.** The methodology of “filtered density function” (FDF) is surveyed and implemented for large eddy simulation (LES) of incompressible chemically reacting turbulent flows. In this methodology the effect of chemical reactions appears in a closed form and the influences of SGS mixing and convection are modeled. The FDF transport equation is solved numerically via a Lagrangian Monte Carlo scheme. The consistency of the FDF approach, the convergence of its Monte Carlo solution and the performance of the closures employed in the FDF transport equation are assessed by comparisons with results obtained by direct numerical simulation (DNS). The FDF results show a much closer agreement with filtered DNS results.

УДК 532; 533

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ ХИМИЧЕСКИ  
РЕАГИРУЮЩИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ****М. К. Инкарбеков, А. Калтаев**

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** турбулентность, фильтрованная функция плотности, моделирования крупных вихрей, метод Монте-Карло, прямое численное моделирование.

**Аннотация.** Методология “фильтрованная функция плотности” (FDF) исследована и применена для моделирования крупных вихрей (LES) химически реагирующих турбулентных течений. В этой методологии, влияния нерешенных скалярных флуктуаций учитываются путем рассмотрения функции плотности вероятности подсеточных функций скалярных величин. В уравнении переноса для FDF эффект химических реакций находятся в замкнутом виде. Уравнение переноса для FDF решается численно Лагранжевым методом Монте-Карло. Консистенция FDF подхода, сходимость его Монте-Карло решения и эффективность замыканий использованных в уравнении переноса для FDF оцениваются путем сравнения с результатами прямого численного моделирования (DNS). Полученные FDF результаты хорошо согласуются с фильтрованными DNS результатами.

**1. Введение.** Два статистических подхода были очень популярны в вычислении систем турбулентного горения [1]: (1) методы моментов и (2) методы функции плотности вероятностей (PDF). Первый подход рассматривает средние значения рассматриваемого течения через решения осредненных уравнений переноса [2]. Основной задачей в этом подходе является моделирование связи между неизвестными корреляциями в этих уравнениях и осредненными переменными переноса. Такие замыкания моментов используют смесь математического анализа и физического соображения. Несмотря на это, постройка окончательной математической модели требует дополнительных предположений и эмпирических взаимосвязей. В настоящее время, все полученные модели не являются универсально применимыми. В попытке исправить эти недостатки, достаточно много усилий были приложены на адаптацию этих моделей для определенных параметров течения. Второй подход, основанный на PDF, является весьма привлекательным в прогнозировании турбулентных реактивных течений, так как он преодолевает проблему замыкания связанную с химической реакцией. На практике, методы PDF стали применяться с помощью предложенных выше методов или через решение уравнения переноса, описывающее их дальнейшую эволюцию.

Значительные улучшения в вычислительных отраслях связанные с численными методами высокой точности облегчили моделирование простых турбулентных течений без турбулентных моделей. В этом подходе, известный как “прямое численное моделирование (DNS)” [3], все величины течения, включая самые мелкие турбулентные вихри, решаются напрямую. Такие моделирования стали ценными для фундаментальных исследований турбулентных течений для проверки моделей замыкания. Однако, из за высоких требований к размерам вычислительной сетки в реальных инженерных течениях, DNS не является широко применимым для “практических” задач [4]. Трудности DNS заключаются в ограниченности компьютерных ресурсов. Количество требуемых сеточных узлов и временных шагов существенно превосходят современные вычислительные мощности.

Ниже представлена таблица, показывающая зависимость времени расчета от числа Рейнольдса для канала [5].

Время расчета турбулентного течения в канале с DNS при различных числах Рейнольдса [5]

| Re          | $5 \cdot 10^3$ | $5 \cdot 10^4$ | $5 \cdot 10^5$ | $5 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^8$ |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 200 Mflop/s | 68 дней        | 444 дней       | 610 лет        | $\infty$       | $\infty$       |
| 1 Tflops/s  | 13 дней        | 88 дней        | 122 года       | $\infty$       | $\infty$       |

Очевидно, что DNS позволяет получать результаты при современном развитии вычислительной техники только при малых числах Рейнольдса. Кроме этого существуют проблемы постановки граничных условий. Для описания случайного характера турбулентного течения необходимо адекватное задание нестационарных входных и выходных условий. С практической точки зрения, статистика, полученная с DNS, может быть использована для тестирования и калибровки моделей, базирующихся на осредненных уравнениях Рейнольдса.

При моделировании крупных вихрей (LES) [6], вместо того чтобы моделировать все турбулентные величины, как это делается в методе осреднения Рейнольдса, крупные вихри напрямую разрешаются на численной сетке и времени, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба моделируются. Основной предпосылкой такого подхода является то, что наибольшие вихри несут

максимум рейнольдсовых напряжений и должны быть рассчитаны. Мелкие же вихри содержат низкие значения рейнольдсовых напряжений, кроме того, мелкомасштабная турбулентность близка к изотропной и имеет близкие к универсальным характеристики, в большей степени поддающиеся моделированию. Это приводит к некоторой степени облегченному решению по сравнению с решением DNS. В дополнении, предполагается что замыкание подсеточных величин в моделировании крупных вихрей являются более универсальными чем осредненные величины Рейнольдса.

За последние несколько десятилетия значительный прогресс был сделан в моделировании крупных вихрей турбулентных течений [7]. Сравнительно, небольшая работа была выполнена в моделировании крупных вихрей химических реагирующих течений. Использование схем PDF для метода крупных вихрей было предложено Пейманом Гиви[8] и первое его фактическое применение было выполнено Маднием и Гиви [9]. Стивен Поуп представил концепцию “фильтрованная функция плотности (FDF)” [10], который по существу является PDF переменных величин подсеточной функции. С помощью математического определения FDF, Поуп демонстрирует [10], что эффекты химической реакции находятся в замкнутом виде в уравнении переноса FDF.

Одним из сложных вопросов в области энергетической и экологической исследований связано с точностью прогнозирования турбулентных реагирующих течений. Оптимальным средством захвата подробную, нестационарную физику таких потоков, как уже показала практика, является моделирование крупных вихрей (LES) [11]. Задачей в моделировании крупных вихрей является точное и последовательное моделирование величин подсеточной функции [12]. Методология, фильтрованная функция плотности (FDF), включая ее серию осредненной по плотности, фильтрованная функция массовой плотности, оказалось особенно эффективной для достижения этих целей [13]. Фильтрованная функция плотности, по существу, является функцией плотности вероятности величин подсеточной функции. Поэтому фильтрованная функция плотности обеспечивает всю статистическую информацию касающуюся этих величин.

**2. Постановка.** Мы рассматриваем несжимающиеся, изотермическое, турбулентное реагирующее течение жидкости, включающее  $N_s$  компонентов. Для математического описания процесса, основными переменными переноса являются вектор скорости  $u_i(x, t)$  ( $i=1,2,3$ ), давление  $p(x, t)$ , и массовые доли компонентов  $\phi_\alpha(x, t)$  ( $\alpha=1,2,\dots,N_s$ ). Уравнениями, которые описывают перемещение этих переменных в пространстве и времени, являются:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial u_i \phi_\alpha}{\partial x_j} = -\frac{\partial J_j^\alpha}{\partial x_j} + \omega_\alpha, \quad (3)$$

где  $\omega_\alpha(x, t) \equiv \hat{\omega}_\alpha(\Phi(x, t))$  химическая реакция для  $\alpha$  компоненты, и  $\Phi \equiv [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_s}]$  обозначает скалярный массив. Предполагая Ньютоновское течение с законом Фика для диффузии, тензор напряжения вязкости  $\tau_{ij}$  и массоперенос  $J_j^\alpha$  представляются в следующем виде

$$\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad J_j^\alpha = -\Gamma \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_j}, \quad (4)$$

где  $\nu$  вязкость жидкости,  $\Gamma$  коэффициент диффузии,  $\Gamma = \frac{\nu}{Sc}$ , и  $Sc$  молекулярное число Шмидта.

В рамках LES используется осреднение по пространству, описываемое процедурой фильтрации [14]

$$\langle f(x, t) \rangle_L = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', t) G(x', x) dx', \quad (5)$$

где  $G$  функция фильтра,  $\langle f(x, t) \rangle_L$  представляет фильтрованное значение переменной переноса  $f(x, t)$ , и  $f' = f - \langle f \rangle_L$  обозначает флуктуацию  $f$  от фильтрованного значения. После применение операции фильтрации к уравнениям переноса получается

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_L}{\partial x_i} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_L}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle_L \langle u_j \rangle_L}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p \rangle_L}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle_L}{\partial x_j} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle J_j^\alpha \rangle_L}{\partial x_j} - \frac{\partial M_i^\alpha}{\partial x_j} + \langle \omega_\alpha \rangle_L, \quad (8)$$

где  $T_{ij} = \langle u_i u_j \rangle_L - \langle u_i \rangle_L \langle u_j \rangle_L$  и  $M_i^\alpha = \langle u_i \phi_\alpha \rangle_L - \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L$  обозначают подсеточное напряжение и подсеточный массовый поток, соответственно.

**3. Стратегия замыкания.** В методе LES нереагирующих течений проблема замыкания связана с  $T_{ij} = \langle u_i u_j \rangle_L - \langle u_i \rangle_L \langle u_j \rangle_L$  и  $M_i^\alpha = \langle u_i \phi_\alpha \rangle_L - \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L$ . В реагирующих течениях требуется дополнительная модель для  $\langle \omega_\alpha \rangle_L$ . Мы используем доступные на сегодняшний день замыкания, которые хорошо известны в нереагирующих течениях. Подсеточное напряжение моделируется через

$$T_{ij} - (\delta_{ij}/3)\Gamma_{kk} = -2\nu_t \langle S_{ij} \rangle_L, \quad (9)$$

где  $\langle S_{ij} \rangle_L$  тензор деформации и  $\nu_t$  подсеточная вязкость. Мы используем два вида замыкания для представления этой вязкости. Первый является таким же как традиционное замыкание Смагоринского [15]

$$\nu_t = C_s \Delta_G^2 \sqrt{\langle S_{ij} \rangle_L \langle S_{ij} \rangle_L}, \quad (10)$$

где  $\Delta_G$  размер фильтра,  $C_s$  эмпирическая константа. Недостатки этого замыкания хорошо известны [16]. Чтобы избежать некоторых из этих недостатков, мы также использовали второй вид замыкания, в котором подсеточная вязкость определяется на основе модифицированной подсеточной кинетической энергии

$$\nu_t = C_K \Delta_G \sqrt{\langle \langle u_i^* \rangle_L \langle u_j^* \rangle_L - \langle \langle u_i^* \rangle_L \rangle_{L'} \langle \langle u_j^* \rangle_L \rangle_{L'} \rangle}, \quad (11)$$

где  $u_i^* = u_i - U_i$ ,  $U_i$  эталонная скорость в направлении  $x_i$ . Индекс  $L'$  обозначает фильтр второго уровня, который имеет размер больше первого уровня  $L$ . Это замыкание известно как модифицированная вязкость кинетической энергии (МКЕВ).

Типичная модель используется для замыкания подсеточного массового потока [17]

$$M_i^\alpha = \Gamma_t \frac{\partial \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial x_i}, \quad (12)$$

где  $\Gamma_t = \nu_t / Sc_t$ ,  $Sc_t$  подсеточное число Шмидта.

**4. Фильтрованная функция плотности.** Ключевой момент в этой формулировке это рассмотреть скаляр неустойчивости основного скалярного массива  $\Phi(x, t)$  в вероятностным методом. Для этого мы определяем «Фильтрованную функцию плотности» (FDF), обозначается  $P_L$ , как [18]

$$P_L(\Psi; x, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta [\Psi, \Phi(x', t)] G(x' - x) dx', \quad (13)$$

$$\zeta[\Psi, \Phi(x, t)] = \delta[\Psi - \Phi(x, t)] \equiv \prod_{\alpha=1}^{N_s} \delta[\psi_\alpha - \phi_\alpha(x, t)], \tag{14}$$

где  $\delta$  обозначает дельта-функцию и  $\Psi$  обозначает композиционную область скалярного массива. Значение  $\zeta[\Phi - \Psi(x, t)]$  это «мелкозернистая» плотность [19], и (13) уравнение означает что FDF является пространственно фильтрованным значением мелкозернистой плотности. Таким образом,  $P_L$  дает плотность в композиционном пространстве жидкости вдоль  $x$  взвешенную фильтром  $G$ . При условии положительного ядра фильтра,  $P_L$  имеет все свойства ФПВ [19].

Для дальнейших разработок, определим "условно отфильтрованное значение" переменной  $Q(x, t)$  по

$$\langle Q(x, t) | \Psi \rangle_L \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x', t) \sigma[\Psi, \Phi(x', t)] G(x' - x) dx'}{P_L(\Psi; x, t)}, \tag{15}$$

где  $\langle \alpha | \beta \rangle_L$  означает фильтрованное значение  $\alpha$  обусловлено  $\beta$ . Уравнение (15) имеет свойства

$$(i) \text{ Для } Q(x, t) = c, \langle Q(x, t) | \Psi \rangle_L = c, \tag{16}$$

$$(ii) \text{ Для } Q(x, t) \equiv \hat{Q}(\Phi(x, t)), \langle Q(x, t) | \Psi \rangle_L = \hat{Q}(\Psi), \tag{17}$$

$$(iii) \text{ Интегриральное свойство: } \langle Q(x, t) | \Psi \rangle_L = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle Q(x, t) | \Psi \rangle_L P_L(\Psi; x, t) d\Psi, \tag{18}$$

где  $c$  это постоянная, и  $Q(x, t) \equiv \hat{Q}(\Phi(x, t))$  означает случай, когда переменная  $Q$  может быть полностью описана композиционным переменным  $\Phi(x, t)$ . От этих свойств следует, что фильтрованное значение любой функции скалярной переменной (таких, как скорость реакции) получается интегрированием по композиционному пространству

$$\langle Q(x, t) \rangle_L = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Q}(\Psi) P_L(\Psi; x, t) d\Psi. \tag{19}$$

Для того чтобы построить уравнение переноса для FDF, рассматривается производная по времени уравнения (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L(\Psi; x, t)}{\partial t} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi_\alpha(x', t)}{\partial t} \frac{\partial \sigma[\Psi, \Phi(x', t)]}{\partial \psi_\alpha} \times G(x' - x) dx' = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi_\alpha(x', t)}{\partial t} \times \sigma[\Psi, \Phi(x', t)] G(x' - x) dx' \end{aligned} \tag{20}$$

В комбинации с уравнением (15), получается

$$\frac{\partial P_L(\Psi; x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left[ \left\langle \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} \middle| \Psi \right\rangle_L P_L(\Psi; x, t) \right]. \tag{21}$$

Подставляя (3) в уравнение (21) получим:

$$\frac{\partial P_L(\Psi; x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left\{ \left[ \left\langle \frac{\partial u_i \phi_\alpha}{\partial x_i} \middle| \Psi \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial J_i^\alpha}{\partial x_i} \middle| \Psi \right\rangle_L - \langle \hat{w}(\Phi) | \Psi \rangle_L \right] P_L(\Psi; x, t) \right\} \tag{22}$$

в котором конвективный член может быть представлен в виде

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left[ \left\langle \frac{\partial u_i \phi_\alpha}{\partial x_i} \middle| \Psi \right\rangle_L P_L(\Psi; x, t) \right] = \frac{\partial \langle u_i | \Psi \rangle_L P_L(\Psi; x, t)}{\partial x_i} \tag{23}$$

Незамкнутый характер конвекции обозначается обусловленным фильтрованным значением скорости, который далее разлагается на разрешенный и подсеточный компоненты

$$\langle u_i | \Psi \rangle_L P_L = \langle u_i \rangle_L P_L + [\langle u_i | \Psi \rangle_L - \langle u_i \rangle_L] P_L. \tag{24}$$

так что уравнение (21) может быть выражено следующим образом

$$\frac{\partial P_L}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle_L P_L}{\partial x_i} = - \frac{\partial [\langle u_i | \Psi \rangle_L - \langle u_i \rangle] P_L}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left[ \left\langle \frac{\partial J_i^\alpha}{\partial x_i} \middle| \Psi \right\rangle_L P_L \right] - \frac{\partial [\hat{\omega}_\alpha(\Psi) P_L]}{\partial \psi_\alpha}. \quad (25)$$

Это точное уравнение переноса для FDF и похож на уравнение, который был представлен Гао и О'Брайен [20]. Последний член в правой части этого уравнения за счет химической реакции и находится в замкнутом виде. Второе слагаемое в левой части представляет отфильтрованную конвекцию FDF в физическом пространстве, и также замкнут (известно что при условии  $\langle u_i \rangle_L$ ). Незамкнутые члены связаны с первым слагаемым в правой части, обозначающей последствий неразрешенного подсеточного масштаба конвекции, и вторым слагаемым в правой части, представляющий влияние молекулярной диффузии. Подсеточный конвективный поток моделируется

$$[\langle u_i | \Psi \rangle_L - \langle u_i \rangle] P_L = -\Gamma_i \frac{\partial P_L}{\partial x_i}. \quad (26)$$

Преимущество разложения (уравнение (24)) и последующего моделирования (уравнение (26)) в том, что они дают результаты, аналогичные тому, что в традиционном LES для первого момента FDF.

Первыми моментами согласно уравнениям (24) и (26) являются

$$\langle u_i \phi_\alpha \rangle_L = \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L + [\langle u_i \phi_\alpha \rangle_L - \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L] \quad (27)$$

$$[\langle u_i \phi_\alpha \rangle_L - \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L] = -\Gamma_i \frac{\partial \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial x_i} \quad (28)$$

Слагаемые в квадратных скобках в уравнении (27) - обобщенный скалярный поток в виде рассмотренных в традиционном LES [21]. Следовательно, уравнение (28) становится тождественным уравнению (12).

Замыкание для обусловленной подсеточной диффузии основано на линейной среднеквадратичной оценки (LMSE) [22] модели, которая также известна как ИЕМ замыкание [23]. Модель включает разложение диффузионного члена в уравнении (25),

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \left[ \left\langle - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} \right) \middle| \Psi \right\rangle_L P_L \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial P_L}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \psi_\alpha \partial \psi_\beta} \left[ \left\langle \Gamma \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_i} \middle| \Psi \right\rangle_L P_L \right]. \quad (29)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения означает эффекты молекулярной диффузии в пространственном перемещении FDF. Второе слагаемое представляет собой диссипативную природу подсеточного скалярного смешивания. Модель среднеквадратичной оценки предполагает

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi_\alpha \partial \psi_\beta} \left[ \left\langle \Gamma \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_i} \middle| \Psi \right\rangle_L P_L \right] = - \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} [\Omega_m (\psi_\alpha - \langle \psi_\alpha \rangle_L) P_L], \quad (30)$$

где  $\Omega_m$  является " частотой смешивания в подсеточном масштабе". Эта частота может быть связана с коэффициентом подсеточной диффузии и длины фильтра:  $\Omega_m = C_\Omega (\Gamma + \Gamma_i) / \Delta_G^2$ . Второе значение уравнения (30) представляет собой выражение для общей подсеточной скалярной диссипации

$$\varepsilon_\alpha = 2\Gamma \left\langle \frac{\partial \phi_{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_{(\alpha)}}{\partial x_i} \right\rangle = 2\Omega_m (\langle \phi_{(\alpha)}^2 \rangle_L - \langle \phi_{(\alpha)} \rangle_L^2), \quad (31)$$

Применяя полученные замыканиями (26) и (30), получаем смоделированное уравнение переноса для FDF

$$\frac{\partial P_L}{\partial t} + \frac{\partial [\langle u_i \rangle_L P_L]}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\Gamma + \Gamma_i) \frac{\partial P_L}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} [\Omega_m (\psi_\alpha - \langle \phi_\alpha \rangle_L) P_L] - \frac{\partial [\hat{\omega}_\alpha(\Psi) P_L]}{\partial \psi_\alpha}. \quad (32)$$

Это уравнение может быть интегрировано чтобы получить уравнений переноса для моментов подсеточного масштаба. Уравнение для первого подсеточного момента,  $\langle \phi_\alpha \rangle_L$ , и обобщенная подсеточная дисперсия,  $\sigma_\alpha = \langle \phi_{(\alpha)}^2 \rangle_L - \langle \phi_\alpha \rangle_L^2$  находятся

$$\frac{\partial \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle_L \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma + \Gamma_t) \frac{\partial \langle \phi_\alpha \rangle_L}{\partial x_i} + \langle \omega_\alpha \rangle_L, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle_L \sigma_\alpha}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\Gamma + \Gamma_t) \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial x_i} \right] - 2\Omega_m \sigma_\alpha \\ &+ 2(\Gamma + \Gamma_t) \left[ \frac{\partial \langle \phi_{(\alpha)} \rangle_L}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \phi_{(\alpha)} \rangle_L}{\partial x_i} \right] + 2 \langle \phi_{(\alpha)} \omega_{(\alpha)} \rangle_L - \langle \phi_{(\alpha)} \rangle_L \langle \omega_\alpha \rangle_L. \end{aligned} \quad (34)$$

**5. Решение FDF методом Монте-Карло.** Решение уравнения переноса для FDF предоставляет всю статистическую информацию относительно скалярной переменной  $\Phi(x, t)$ . Это уравнение может быть решено эффективно с помощью Лагранжевого метода Монте-Карло [24]. Преимущество этого метода хорошо известен тем что в нем особо не проявляется численная диффузия. Основой Лагранжевого решения уравнения переноса для FDF является принцип эквивалентных систем. Две системы с разными мгновенными значениями могут иметь идентичную статистику, который полностью удовлетворяет уравнение переноса для FDF. В Лагранжевом методе Монте-Карло каждая частица перемещается согласно определенным уравнениям. Эти частицы подвергаются движению за счет конвекции из-за фильтрованной средней скорости потока, и диффундируют за счет молекулярной и подсеточной диффузии. Главный диффузионный процесс представляется в стохастической форме и описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) [24, 25]

$$dX_i(t) = D_i(X_i(t), t)dt + E(X_i(t), t)dW_i(t), \quad (35)$$

где  $X_i$  Лагранжевое расположение стохастической частицы,  $D_i$  и  $E$  известные как коэффициенты “сноса” и “диффузии” соответственно,  $W_i$  означает процесс Винер-Леви.

$$E \equiv \sqrt{2(\Gamma + \Gamma_t)}, \quad D_i \equiv \langle u_i \rangle_L + \frac{\partial(\Gamma + \Gamma_t)}{\partial x_i} \quad (36)$$

Поэтому СДУ, которое определяет пространственное перемещение FDF, является

$$dX_i(t) = \left( \langle u_i \rangle_L + \frac{\partial(\Gamma + \Gamma_t)}{\partial x_i} \right) dt + \sqrt{2(\Gamma + \Gamma_t)} dW_i(t), \quad (37)$$

Композиционный состав частиц развивается одновременно благодаря действию подсеточного смешивания и реакции

$$\frac{d\phi_\alpha^+}{dt} = -\Omega_m (\phi_\alpha^+ - \langle \phi_\alpha \rangle_L) + \omega_\alpha, \quad (38)$$

где  $\phi_\alpha^+ = \phi_\alpha(X_i(t), t)$  является скалярной величиной частицы с Лагранжевым вектором расположения  $X_i$ .

**6. Результаты.** Для того чтобы показать эффективность FDF модели, рассмотрена задача развивающегося по времени слоя смешивания. Этот слой состоит из двух параллельных потоков бегущих в противоположных направлениях с одинаковыми по абсолютной величине скоростями. Рассматривается реакция простого типа  $A + B \rightarrow P$ , в которой предполагается константная скорость химической реакции и течение считается изотермической. Реагенты A и B вводятся в верхний и нижний потоках соответственно.

Переменные течения нормированы относительно эталонных величин. Эталонными величинами в задаче развивающегося по времени слоя смешивания являются величины свободного

потока и длина  $L_r$ , которая определяется как  $\delta_{v0}/L_r = 2.83$ , где  $\delta_{v0}$  начальная толщина завихренности. Эталонные величины определяют число Рейнольдса  $Re = U_r L_r / \nu$ . Скорость химической реакции параметризуется с помощью числа Дёмклера  $Da = K/(U_r/L_r)$ .

Проведены DNS и LES расчеты. В методе DNS используется полностью конечно-разностный подход. Процедура в LES основана на методе Монте-Карло для решения уравнения переноса FDF, а фильтрованные гидродинамические переменные решаются конечно-разностным методом. Для 2D DNS расчетом максимальным разрешением сетки является  $433 \times 577$  точек с  $Re = 500$  и  $Da = 2$ . В случае 3D DNS, расчет на сетке с количеством узлов  $217 \times 289 \times 133$  точек с  $Re = 400$  и  $Da = 1$ .

FDF и LES- FD расчеты проводились на более грубой сетке с размером  $74 \times 98$  для 2D случая, и  $82 \times 108 \times 64$  точек для 3D. Для сравнения полученных результатов, DNS данные фильтруются следующей функцией фильтра

$$G = (x'-x) = \prod_{i=1}^{N_D} \tilde{G}(x'_i - x_i),$$

$$\tilde{G}(x'_i - x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_G} & |x'_i - x_i| \leq \frac{\Delta_G}{2} \\ 0 & |x'_i - x_i| > \frac{\Delta_G}{2} \end{cases} \quad (39)$$

в которой  $N_D$  обозначает размерность области.

Чтобы показать согласованность FDF подхода и сходимость схемы Монте-Карло, результаты LES нереагирующих течений полученные с помощью FDF и LES-FD сравниваются. Так как точность метода конечных разностей хорошо исследована, такой сравнительный анализ дает возможность хорошо оценить производительность метода Монте-Карло.

На рисунке 1 представлены результаты LES для развивающегося по времени слоя смешивания, полученные с помощью FDF и LES-FD. Эти рисунки представляют простую визуальную наглядность согласованности FDF с помощью результатов полученных методом частиц в соответствии с результатами полученных с помощью LES-FD. В действительности результаты полученные методом Монте-Карло в какой-то мере более привлекательные, так как содержат меньше численную диффузию по сравнению с результатами LES-FD.

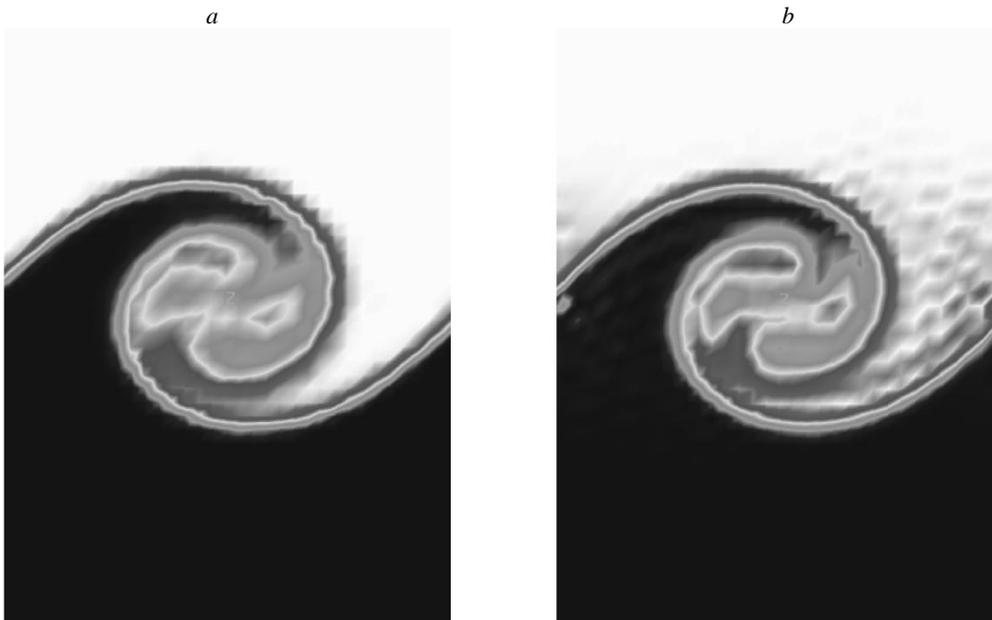


Рисунок 1 – Контур распределения фильтрованного скалярного поля: *a* – FDF и *b* – LES-FD

Для двумерного моделирования, значения фильтрованной массовой доли полученные методом Монте-Карло, согласуются с решением полученным с помощью метода конечных разностей. Это проиллюстрировано на рисунке 2, в котором показан Точечный график сравнения отфильтрованных значений скаляра полученных с помощью FDF и LES-FD.

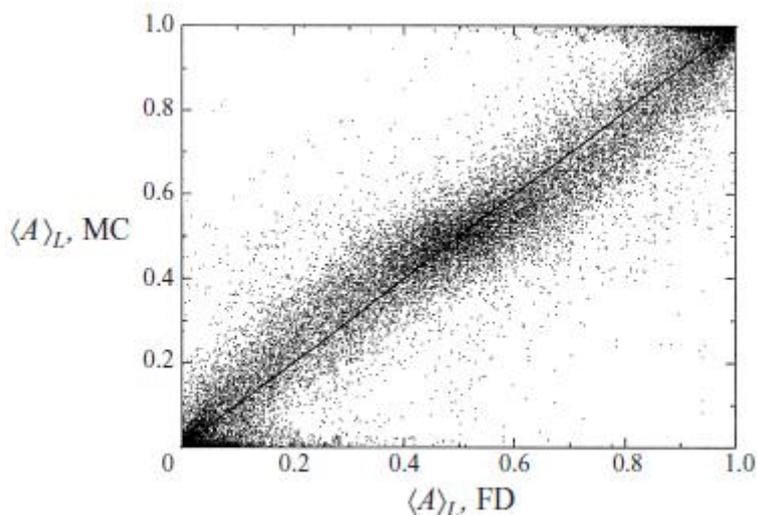


Рисунок 2 – Точечный график сравнения отфильтрованных значений скаляра полученных с помощью FDF и LES-FD

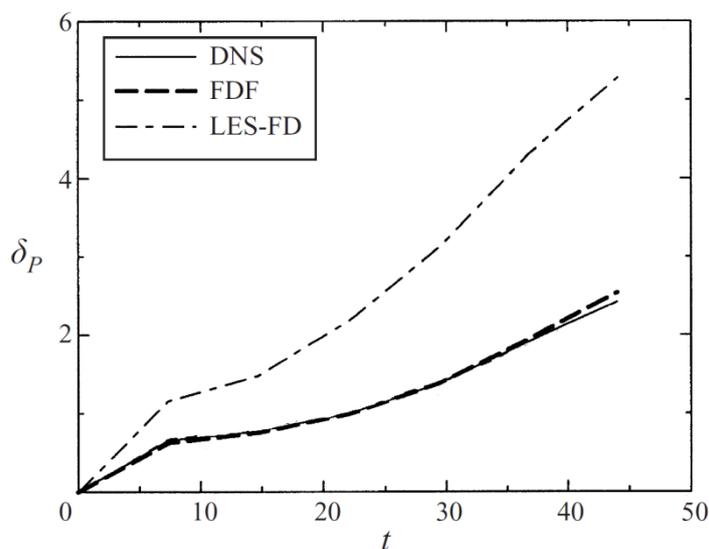


Рисунок 3 – Изменение массовой доли конечного продукта со временем

Преимущество FDF подхода над традиционным LES-FD проявляется особенно в реагирующих течениях. Такая неконсистенция метода LES-FD, которая стимулирует использование FDF, проиллюстрировано на рисунке 3, где показано изменение массовой доли конечного продукта со временем. Где также результаты LES расчетов сравниваются с данными DNS. По сравнению с LES-FD результаты LES показывают очень близкую согласованность с результатами DNS.

**6. Заключение.** Основной целью этой работы является исследование методологии “фильтрованная функция плотности” для моделирования крупных вихрей турбулентных реагирующих течений. Показано что FDF является мощным инструментом при моделировании реагирующих течений. Этот метод похож на метод функция плотности вероятности (PDF), который используется в подходе Рейнольдса. Здесь FDF используется для обработки скалярных величин потока. Здесь так же как в методах PDF, эффект химических реакций получаются в замкнутом виде.

Смоделированное уравнение переноса для FDF решается численно Лагранжевым методом Монте-Карло. Показано что Лагранжевый метод Монте-Карло по сравнению с традиционным методом конечных разностей, хорошо подавляет эффект численной диффузии. Этот подход применен для LES задачи развивающегося по времени слоя смешивания. Полученные результаты сравниваются с результатами традиционного метода моделирования крупных методов, где влияния флуктуации подсеточного масштаба пренебрегаются, и с данными прямого численного моделирования (DNS) течения с идентичными значениями физических параметров. Консистенция FDF подхода и сходимость схемы Монте-Карло показываются с помощью сравнений с результатами LES-FD реагирующих течений. Преимущество FDF над LES-FD проявляется при проведении сравнительного анализа с данными DNS. Показано что эффекты флуктуации подсеточного масштаба имеют большое влияние на решение фильтрованной скорости химической реакции. Таким образом, моделирование реагирующих турбулентных течений с помощью FDF имеет большую перспективу в будущем.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Libby, P.A., Williams, F.A. (Eds): *Turbulent Reacting Flows*, Academic Press, London, UK, chap. 5, pp. 185–218, 1994.
- [2] Jones, W. P., “Turbulence Modeling and Numerical Solution Methods for Variable Density and Combusting Flows”, in “*Turbulent Reacting Flows*” (P. A. Libby and F. A. Williams, Eds.) pp. 309–374, Academic Press, 1994.
- [3] Givi, P. 1994 Spectral and random vortex methods in turbulent reacting flows. In *Turbulent Reacting Flows* (ed. P. A. Libby & F. A. Williams), chap. 8, pp. 475–572. Academic.
- [4] Correa, S.M., “A Review of NO<sub>x</sub> Formation Under Gas-Turbine Combustion Conditions,” *Combust. Sci. Technol.*, vol. 87, pp. 329-362, 1992.
- [5] Menter F.R. *Methoden, Moeglichkeiten und Grenzen numerischer Stroemungsberechnungen*. Numet. Erlangen, 2002.
- [6] R. S. Rogallo and P. Moin, “Numerical simulation of turbulent flow,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 16, 99 1984.
- [7] Whither Turbulence? *Turbulence at the Crossroads*, Lecture Notes in Physics, edited by J. L. Lumley, Springer, New York, 1990, Vol. 357.
- [8] Givi, P. 1989 Model free simulations of turbulent reactive flows. *Prog. Energy Combust. Sci.* 15, 1–107.
- [9] Madnia, C. K. & Givi, P. 1993 Direct numerical simulation and large eddy simulation of reacting homogeneous turbulence. In *Large Eddy Simulations of Complex Engineering and Geophysical Flows* (ed. B. Galperin & S. A. Orszag), chap. 15, pp. 315–346. Cambridge University Press.
- [10] S. B. Pope. *Computations of turbulent combustion: Progress and challenges*. *Proc. Combust. Inst.*, 23:591–612, 1990.
- [11] T. Poinsot and D. Veynante. *Theoretical and Numerical Combustion*. R. T. Edwards, Inc., Philadelphia, PA, second edition, 2011.
- [12] J. Janicka and A. Sadiki. Large eddy simulation of turbulent combustion systems. *Proc. Combust. Inst.*, 30:537–547, 2005.
- [13] P. Givi. Filtered density function for subgrid scale modeling of turbulent combustion. *AIAA J.*, 44(1):16–23, 2006.
- [14] A. A. Aldama, “Filtering techniques for turbulent flow simulations,” *Lecture Notes in Engineering* (Springer, New York, 1990), Vol. 49.
- [15] J. H. Ferziger, “Higher level simulations of turbulent flows,” Stanford University Report No. TF-16, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California, 1981.
- [16] T. A. Zang and U. Piomelli, “Large eddy simulation of transitional flow,” in Ref. 11, Chap. 11, pp. 209–227.
- [17] T. M. Eidson, “Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Benard problem using subgrid modelling,” *J. Fluid Mech.* 158, 245 (1985).
- [18] S. B. Pope, “Computations of turbulent combustion: Progress and challenges,” in *Proceedings of the 23rd Symposium (International) on Combustion* (The Combustion Institute, Pittsburgh, 1990), pp. 591–612.
- [19] S. B. Pope, “PDF methods for turbulent reactive flows,” *Prog. Energy Combust. Sci.* 11, 119 (1985).
- [20] F. Gao and E. E. O’Brien, “A large-eddy simulation scheme for turbulent reacting flows,” *Phys. Fluids A* 5, 1282 (1993).
- [21] M. Germano, “Turbulence: The filtering approach,” *J. Fluid Mech.* 238, 325 (1992).
- [22] C. Dopazo and E. E. O’Brien, “Statistical treatment of non-isothermal chemical reactions in turbulence,” *Combust. Sci. Technol.* 13, 99 (1976).
- [23] R. Borghi, “Turbulent combustion modeling,” *Prog. Energy Combust. Sci.* 14, 245 (1988).
- [24] S. B. Pope, “Lagrangian PDF methods for turbulent flows,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 26, 23 (1994).
- [25] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications* (Springer, New York, 1989).

#### REFERENCES

- [1] Libby, P.A., Williams, F.A. (Eds): *Turbulent Reacting Flows*, Academic Press, London, UK, chap. 5, pp. 185–218, 1994.
- [2] Jones, W. P., “Turbulence Modeling and Numerical Solution Methods for Variable Density and Combusting Flows”, in “*Turbulent Reacting Flows*” (P. A. Libby and F. A. Williams, Eds.) pp. 309–374, Academic Press, 1994.

- [3] Givi, P. 1994 Spectral and random vortex methods in turbulent reacting flows. In *Turbulent Reacting Flows* (ed. P. A. Libby & F. A. Williams), chap. 8, pp. 475–572. Academic.
- [4] Correa, S.M., "A Review of NO<sub>x</sub> Formation Under Gas-Turbine Combustion Conditions," *Combust. Sci. Technol.*, vol. 87, pp. 329-362, 1992.
- [5] Menter F.R. *Methoden, Möglichkeiten und Grenzen numerischer Stroemungsberechnungen*. Numet. Erlangen, 2002.
- [6] R. S. Rogallo and P. Moin, "Numerical simulation of turbulent flow," *Annu. Rev. Fluid Mech.* 16, 99 1984.
- [7] *Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads*, Lecture Notes in Physics, edited by J. L. Lumley, Springer, New York, 1990, Vol. 357.
- [8] Givi, P. 1989 Model free simulations of turbulent reactive flows. *Prog. Energy Combust. Sci.* 15, 1–107.
- [9] Madnia, C. K. & Givi, P. 1993 Direct numerical simulation and large eddy simulation of reacting homogeneous turbulence. In *Large Eddy Simulations of Complex Engineering and Geophysical Flows* (ed. B. Galperin & S. A. Orszag), chap. 15, pp. 315–346. Cambridge University Press.
- [10] S. B. Pope. *Computations of turbulent combustion: Progress and challenges*. *Proc. Combust. Inst.*, 23:591–612, 1990.
- [11] T. Poinso and D. Veynante. *Theoretical and Numerical Combustion*. R. T. Edwards, Inc., Philadelphia, PA, second edition, 2011.
- [12] J. Janicka and A. Sadiki. *Large eddy simulation of turbulent combustion systems*. *Proc. Combust. Inst.*, 30:537–547, 2005.
- [13] P. Givi. *Filtered density function for subgrid scale modeling of turbulent combustion*. *AIAA J.*, 44(1):16–23, 2006.
- [14] A. A. Aldama, "Filtering techniques for turbulent flow simulations," *Lecture Notes in Engineering* (Springer, New York, 1990), Vol. 49.
- [15] J. H. Ferziger, "Higher level simulations of turbulent flows," *Stanford University Report No. TF-16*, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California, 1981.
- [16] T. A. Zang and U. Piomelli, "Large eddy simulation of transitional flow," in *Ref. 11*, Chap. 11, pp. 209–227.
- [17] T. M. Eidson, "Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Benard problem using subgrid modelling," *J. Fluid Mech.* 158, 245 (1985).
- [18] S. B. Pope, "Computations of turbulent combustion: Progress and challenges," in *Proceedings of the 23rd Symposium (International) on Combustion* (The Combustion Institute, Pittsburgh, 1990), pp. 591–612.
- [19] S. B. Pope, "PDF methods for turbulent reactive flows," *Prog. Energy Combust. Sci.* 11, 119 (1985).
- [20] F. Gao and E. E. O'Brien, "A large-eddy simulation scheme for turbulent reacting flows," *Phys. Fluids A* 5, 1282 (1993).
- [21] M. Germano, "Turbulence: The filtering approach," *J. Fluid Mech.* 238, 325 (1992).
- [22] C. Dopazo and E. E. O'Brien, "Statistical treatment of non-isothermal chemical reactions in turbulence," *Combust. Sci. Technol.* 13, 99 (1976).
- [23] R. Borghi, "Turbulent combustion modeling," *Prog. Energy Combust. Sci.* 14, 245 (1988).
- [24] S. B. Pope, "Lagrangian PDF methods for turbulent flows," *Annu. Rev. Fluid Mech.* 26, 23 (1994).
- [25] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications* (Springer, New York, 1989).

## ХИМИЯЛЫҚ ӘСЕРЛЕСУШІ ТУРБУЛЕНТТІ АҒЫНДАРДЫҢ ҮЛКЕН ҚҰЙЫНДАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ ӘДІСІ ҮШІН ФИЛЬТРЛЕНГЕН ТЫҒЫЗДЫҚ ФУНКЦИЯСЫН ЗЕРТТЕУ

М. Қ. Іңкәрбеков, А. Қалтаев

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** турбуленттік, фильтрленген тығыздық функциясы, үлкен құйындарды моделдеу, Монте-Карло әдісі, тура сандық моделдеу.

**Аннотация.** Жұмыста "фильтрленген тығыздық функциясы" (FDF) әдістемесі зерттелген және сығылмайтын әсерлесуші турбулентті ағындардың үлкен құйындарды модельдеу (LES) әдісіне қолданылған. Бұл әдістемеді химиялық реакциялардың әсері тұйықталған түрде келеді, ал торасты шамалардың әсері және конвекция модельденеді. FDF тасымал теңдеуі Лагранждық Монте-Карло әдісі арқылы сандық шешіледі. FDF тәсілінің консистенциясы, және оның Монте-Карло шешімінің жинақтылығы тура сандық модельдеу әдісінің нәтижелерімен салыстыру арқылы көрсетіледі. FDF арқылы алынған нәтижелер DNS мәліметтерімен ең жақын сыбайластық көрсетеді.

Поступила 07.07.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 208 – 214

ON SPECTRAL ZETA FUNCTIONS OF THE LAPLACE EQUATION  
WITH THE INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS  
OF THE POTENTIAL

T. Sh. Kal'menov, D. Suragan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: suragan@list.ru

**Keywords:** boundary condition of the potential, Laplace equation, spectral zeta function.

**Abstract.** In the present paper we prove that a real valued spectral zeta function of the Laplace operator with a nonlocal boundary value integral condition is maximized in a ball among all domains of given measure in multidimensional Euclidean space with a dimension not less than three  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . By using the Feynmann-Kac formula and spherical rearrangement, Luttinger proved [10] that a ball is the maximizer of the partition function of the Dirichlet Laplacian among all domains of the same volume as the ball. The partition function and the zeta function can be related directly. Our result is an analogue of the Luttinger type inequality for the Laplace equation with the Dirichlet condition and extends our previous three dimensional result. The Newton potential can be related to the nonlocal boundary value problem of the Laplace operator, so we also prove an isoperimetric inequality for the Newton potential. The proof follows Kac's method of probabilistic potential theory.

УДК 517.956

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯХ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМ  
ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПОТЕНЦИАЛА

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** граничная условия потенциала, уравнение Лапласа, спектральная дзета-функция.

**Аннотация.** В этой статье мы доказываем, что вещественная спектральная дзета-функция нелокального оператора Лапласа максимизируется в шаре среди всех областей данной меры в многомерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . Используя формулу Фейнмана-Каца и сферическую перестановку, Люттингер доказал [10], что шар является максимайзером функции разбиения оператора Лапласа с граничным условиям Дирихле среди всех областей данной меры. Функция разбиения и дзета-функция связаны прямым соотношением. Наш результат является аналогом неравенства Люттенгера для уравнения Лапласа с краевым условием Дирихле и обобщает наш предыдущий результат для трехмерного случая. Доказательство следует из метода Каца о вероятностной потенциальной теории.

**1. Введение и основной результат.** Пусть  $\Omega$ -односвязная гладкая ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n_y}$  обозначает внешнюю нормальную производную на границе  $\partial\Omega$ ,

$$\varepsilon_d(x-y) = \frac{1}{(d-2)s_d} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, \quad d \geq 3,$$

это фундаментальное решение оператора Лапласа, а  $s_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$  это площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^d$  и  $|x-y|$  это стандартное Евклидово расстояние между  $x$  и  $y$ .

Задача (1)-(2) эквивалентна спектральной задаче для интегрального оператора [1]-[2]

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y) u(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Краевая задача (1)-(2) может быть также обобщена для более высокой степени оператора Лапласа [6]. Дискретность спектра интегрального оператора (3) позволяет упорядочить собственные значения  $(0 <) \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$  (нумерует их значения в порядке возрастания) повторяющиеся каждый раз в соответствии с кратностью. Спектральная задача (1)-(2) имеет различные интересные свойства и приложения (смотрите [1] и [8], для примера). В частности, при помощи явного вычисления (см. [7]), можно доказать, что в единичном шаре спектр Лапласиана (1)-(2) содержит спектр соответствующего Лапласиана Дирихле.

Кац [1] доказал:

$$1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_j \delta} u_j(y) \int_{\Omega} u_j(x) dx, \quad y \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\lambda_j, j = 1, 2 \dots$  и  $u_j, j = 1, 2 \dots$  являются собственными значениями и соответствуют нормирующим собственным функциям нелокальному Лапласиану (1)-(2). Аналитический факт (4) выражает то, что разложение 1 в ряд ортонормированных функций  $u_j$  суммируется к 1 для каждого  $y \in \Omega$ . Следует также отметить, что неравенства типа Березин-Ли-Яу действительны (см. [9]) для собственных значений краевой спектральной задачи (1)-(2). В [4] Кац представляет основные асимптотические формулы для собственных значений (3) в  $\mathbb{R}^d, d \geq 3$ . В этой статье мы заинтересованы в применении его вероятностных методов [1]-[4] для спектральных геометрических задач (3).

Функция

$$\zeta_{\Omega}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_j(\Omega)]^z},$$

Называется спектрально дзета-функцией, где  $\lambda_j, j = 1, 2 \dots$  это собственные значения соответствующей спектральной задачи.

Используя формулу Фейнмана-Каца и сферическую перестановку, Люттингер доказал, что шар  $\Omega^*$  является максимайзером функции разбиения Лапласиана Дирихле среди всех областей, таких как  $\Omega^*$ , для всех положительных значений времени [10], т.е.

$$Z_{\Omega}^D(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-t\lambda_j^D(\Omega)) \leq Z_{\Omega^*}^D(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-t\lambda_j^D(\Omega^*)), \quad |\Omega| = |\Omega^*|, \quad \forall t > 0,$$

где  $\lambda_i^D, i = 1, 2 \dots$  есть собственные значения Лапласиана Дирихле.

Функция разбиения и дзета-функция связаны соотношением:

$$\zeta_{\Omega}^D(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} Z_{\Omega}^D(t) dt,$$

где  $\Gamma$  это гамма-функция. Следовательно, из этого следует

$$\zeta_{\Omega}^D(z) \leq \zeta_{\Omega^*}^D(z), \quad |\Omega| = |\Omega^*|, \quad (5)$$

где  $z > d/2, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Правая часть неравенства дает точную верхнюю грань спектральной дзета-функции. И может быть точно подсчитана, когда  $z$  натуральное число.

Пример 1. Пусть  $U$  - единичная пластина, тогда

$$\zeta_U^D(2) = 0.0493 \dots$$

Следовательно, из (5) мы имеем

$$\zeta_U^D(2) \leq 0.0493 \dots, |\Omega| = |U|.$$

Это неравенство лучше чем неравенство представленное в [11]

$$\zeta_U^D(z) \leq \frac{\Gamma(z - \frac{d}{2}) \text{Vol}|\Omega|^{\frac{2z}{d}}}{\Gamma(z) (4\pi)^{\frac{d}{2}}}, z > \frac{d}{2}, \quad (6)$$

Из которого следует

$$\zeta_U^D(2) \leq 0.7853 \dots,$$

когда  $|\Omega| = |U|$ . Однако, важно отметить что в (6)  $z$  это произвольное действительное число, большее чем  $\frac{d}{2}$ .

Условие  $z > \frac{d}{2}$  в (5) необходимо для абсолютной сходимости рядов [12], но в случае  $z \leq \frac{d}{2}$  можно использовать процесс регуляризации, чтобы получить абсолютную сходимость рядов.

Пример 2. В  $\Omega \subset R^2$ , сумма

$$\zeta_{\Omega}^D(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^D(\Omega)} = \infty, \Omega \subset R^2.$$

Однако, используя следующую регуляризацию мы находим, что  $U \equiv \Omega \subset R^2$  это единичная пластина, тогда

$$\tilde{\zeta}_{\Omega}^D(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k^D(U)} - \frac{1}{4k} \right) = -0.3557 \dots,$$

-урегуляризованная  $\zeta_{\Omega}^D(1)$ .

В [7] мы точно вычислили собственные значения спектральной задачи (1)-(2) в шаре. И так мы получили аналогию неравенства (5) для нелокального оператора Лапласа (1)-(2), т.е. основной результат этого раздела это

**Теорема 1.1.** Пусть  $\Omega \subset R^d, d \geq 3$  есть открытая ограниченная область. Для любого  $\rho \in R, \rho > \frac{d}{2}$

$$\zeta_{\Omega}(\rho) \leq \zeta_{\Omega^*}(\rho), \quad (7)$$

где  $\zeta_{\Omega}$  - это спектральная дзета-функция нелокального оператора Лапласа (1.1)-(1.2) и  $\Omega^*$  - это такой шар, что  $|\Omega^*| = |\Omega|$ .

**2. Предварительные замечания.** Пусть  $\Omega$  ограниченное измеримое множество в  $R^d$ . Его симметрическая перестановка  $\Omega^*$  - открытый шар с центром в нуле и мерой, равной мере  $\Omega$ , т.е.  $|\Omega^*| = |\Omega|$ . Пусть  $u$  неотрицательная измеримая функция, стремящаяся к бесконечности, в том смысле, что все ее подмножества, состоящие из положительных значений имеют конечную меру.

В определении симметрической убывающей перестановки  $u$  может быть использовано разложение layer-cake [13], которое выражает неотрицательную функцию  $u$

$$u(x) = \int_0^{\infty} X\{u(x) > t\} dt \quad (8)$$

где  $X$  - характеристическая функция соответствующей области.

Определение 2.1. Функция

$$u^*(x) = \int_0^{\infty} X\{u(x) > t\}^* dt$$

называется symmetric decreasing rearrangement неотрицательной измеримой функции  $u$ .

Лемма 2.2. [13] Для каждой неотрицательной измеримой функции  $u \in L^2(\Omega)$  имеем

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u^*\|_{L^2(\Omega)}$$

Пусть  $x(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_d(t))$  -  $d$ -мерное Броуновское движение, т.е.  $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_d(t)$  - независимый Виенровский процесс (смотрите [5] или более позднюю книгу [15]). По определению

$$Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\} = \int_{\Omega} (2\pi\tau)^{-d/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x - y|^2\right) dx \quad (9)$$

где  $Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\}$  означает вероятность нахождения  $y + x(\tau)$  в  $\Omega \in R^d$  во время  $\tau$ .

Лемма 2.3. Пусть  $\Omega$  – ограниченное измеримое множество в  $R^d$ ,  $d \geq 3$  и  $\Omega^*$  – его симметрическая перестановка. Для любого  $\tau > 0$

$$\int_{\Omega} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\} dy \leq \int_{\Omega^*} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega^*\} dy$$

Геометрически, это означает, что Броуновские частицы, выходящие из  $\Omega$  чаще покидают  $\Omega$ , чем те, которые выходят из шара  $\Omega^*$  с таким же объемом как у  $\Omega$ .

*Доказательство.* Вернемся к неравенству Рица [13]

$$\int_{R^d} \int_{R^d} f(y)g(x - y)h(y)dydx \leq \int_{R^d} \int_{R^d} f^*(y)g^*(x - y)h^*(y)dydx \quad (10)$$

Где  $f^*$ ,  $g^*$ ,  $h^*$  симметрические убывающие перестановки положительно измеримых функций  $f, g, h$  соответственно. Теперь обратим внимание, что для  $\tau > 0$  функция  $\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x|^2\right)$  симметрическая строго-убывающая функция, т.е. не меняет свою формулу при перестановке, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\} dy &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} (2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x - y|^2\right) dx dy \\ &= \int_{R^d} \int_{R^d} X_{\Omega}(x)(2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x - y|^2\right) X_{\Omega}(y) dx dy \\ &\leq \int_{R^d} \int_{R^d} X_{\Omega^*}(x)(2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x - y|^2\right) X_{\Omega^*}(y) dx dy \\ &= \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} (2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x - y|^2\right) dx dy = \\ &= \int_{\Omega^*} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega^*\} dy \end{aligned}$$

где  $X_{\Omega}(x)$  – характеристическая функция  $\Omega$ , т.е.  $X_{\Omega}(x) = 1$  если  $x \in \Omega$ ,  $X_{\Omega}(x) = 0$  если  $x \in R^d \setminus \Omega$ .

Вычислим математическое ожидание (Винеровский интеграл) для  $A \subset \Omega \subset R^d$ ,  $d \geq 3$

$$\begin{aligned} E\left\{\int_0^{\infty} X_A(y + x(\tau))d\tau\right\} &= \int_0^{\infty} E\{X_A(y + x(\tau))\}d\tau \\ &= \int_0^{\infty} P\{y + x(\tau) \in A\}d\tau = \int_0^{\infty} \int_A \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{2\tau}\right\} dx d\tau \\ &= \int_A \int_0^{\infty} \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{2\tau}\right\} d\tau dx = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \int_A \frac{1}{|y - x|^{d-2}} dx \\ &= \int_A \bar{\varepsilon}_d(y - x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}_j \int_A u_j(x) dx u_j(y) \end{aligned}$$

где  $\bar{\varepsilon}_d = 2\varepsilon_d$ ,  $\bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  – собственные значения (3) и  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  – соответствующие нормализующие собственные функции. Таким же образом вычисляем

$$\begin{aligned}
 & E \left\{ \int_0^\infty \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau X_A(y + x(\tau)) dt \right\} \\
 &= \int_0^\infty \int_0^t E \{ X_\Omega(y + x(\tau)) X_A(y + x(\tau)) \} d\tau dt = \int \int_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < \infty} E \{ X_\Omega(y + x(\tau_1)) X_A(y + x(\tau_2)) \} d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int \int_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < \infty} \int_A \int_\Omega P(y | x_1; \tau_1) P(x_1 | x_2; \tau_2 - \tau_1) dx_1 dx_2 d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_A \int_\Omega \bar{\varepsilon}_d(x_1 - y) \bar{\varepsilon}_d(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 = \sum_{j=1}^\infty \bar{\lambda}_j^2 \int_A u_j(x) dx u_j(y).
 \end{aligned}$$

Также для каждого неотрицательного целого  $k$  и любого  $y \in \Omega$  имеем

$$E \left\{ \int_0^\infty \left( \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau \right)^k X_A(y + x(t)) dt \right\} = \sum_{j=1}^\infty \bar{\lambda}_j^{k+1} k! \int_A u_j(x) dx u_j(y). \quad (11)$$

Отсюда следует, что

Лемма 2.4. Пусть  $A \subset \Omega \subset R^d, d \geq 3$ . Для любого  $y \in \Omega$  и достаточно маленького  $\mu > 0$  имеем

$$\int_0^\infty E \left\{ \exp \left( -\mu \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau \right) X_A(y + x(t)) \right\} dt = \sum_{j=1}^\infty \frac{\bar{\lambda}_j}{1 + \mu \bar{\lambda}_j} \int_A u_j(x) dx u_j(y) \quad (12)$$

*Доказательство.* Разлагая обе части (12) в ряд Тейлора относительно  $\mu \ll 1$  и используя (11) мы легко увидим, что (12) выполняется.

Лемма 2.5. Для любого  $\beta > 0$

$$\sum_{j=1}^\infty \exp \left( -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j} \right) \bar{\lambda}_j = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_\Omega \int_0^\infty \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob} \left\{ \int_0^t X_\Omega(y + x(\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0 \right\} dt dy \quad (13)$$

*Доказательство.* Инвертируя (12) относительно  $\mu$ , получаем

$$\int_0^\infty \text{Prob} \left\{ \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau > \beta; y + x(\tau) \in A \right\} dt = \sum_{j=1}^\infty \exp \left( -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j} \right) \bar{\lambda}_j \int_A u_j(x) dx u_j(y), y \in \Omega$$

Пусть теперь  $A$  –  $d$ -шар, радиуса  $r$  и с центром в  $y$ : разделим обе части на объем  $A$  при  $r \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob} \left\{ \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau > \beta | x(t) = 0 \right\} dt = \sum_{j=1}^\infty \exp \left( -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j} \right) \bar{\lambda}_j u_j^2(y) \quad (14)$$

Здесь мы воспользовались

$$\text{Prob} \left\{ \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau > \beta | x(t) = 0 \right\} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob} \left\{ \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau > \beta | y + x(t) \in A \right\}}{\text{Prob} \{ y + x(t) \in A \}}$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob} \{ y + x(t) \in A \}}{|A|} = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}$$

Интегрируя (14) по  $\Omega$  в соответствии с  $y$  мы получаем

$$\sum_{j=1}^\infty \exp \left( -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_j} \right) \bar{\lambda}_j = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_\Omega \int_0^\infty \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob} \left\{ \int_0^t X_\Omega(y + x(\tau)) d\tau > \beta | x(t) = 0 \right\} dt dy$$

Если мы сейчас положим  $\tau = \beta\eta$  то мы получим (13).

**3. Доказательство Теоремы 1.1.** Перепишем (13) в эквивалентную форму

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_\Omega \int_0^\infty \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob} \left( \int_0^t \chi_\Omega(y + x(2\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0 \right) dt dy = \\
 & \sum_{j=1}^\infty \exp \left( -\beta \lambda_j(\Omega) \right) \frac{1}{\lambda_j(\Omega)}, \forall \beta > 0, \forall y \in \Omega,
 \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\lambda_j(\Omega), j = 1, 2, \dots$  и  $u_j, j = 1, 2, \dots$  являются собственными значениями и соответствующими нормируемыми собственными функциями нелокального оператора Лапласа (1)-(2) в  $\Omega$  и  $\chi_\Omega(x)$  это характеристическая функция  $\Omega$ , т.е.  $\chi_\Omega(x) = 1$  при  $x \in \Omega, \chi_\Omega(x) = 0$  при  $x \in R^d \setminus \Omega$ .

По Лемме 2.3 (см. [1]) мы имеем

$$\int_{\Omega} \text{Prob} \left( \int_0^t \chi_\Omega(y + x(2\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0 \right) dy \leq \int_{\Omega^*} \text{Prob} \left( \int_0^t \chi_{\Omega^*}(y + x(2\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0 \right) dy$$

для любого  $\beta > 0$ .

Поэтому, из (15) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\beta\lambda_j(\Omega)) \frac{1}{\lambda_j(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\beta\lambda_j(\Omega^*)) \frac{1}{\lambda_j(\Omega^*)} \quad (16)$$

для любого  $\beta > 0$ .

Применяя преобразования Меллина

$$\frac{1}{\lambda^l} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} \exp(-\beta\lambda) \beta^{l-1} d\beta$$

к неравенству (16), получаем

$$\zeta_{\Omega}(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega^*)} = \zeta_{\Omega^*}(\rho) \quad (17)$$

для любого  $\rho > d/2$ . Это завершает Теорему 1.1.

Замечание 3.1. Доказательство Теоремы 1.1. гораздо проще когда  $p$  – натуральное число.

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^p(\Omega)} = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \varepsilon_d(y_1 - y_2) \dots \varepsilon_d(y_p - y_1) dy_1 \dots y_p, \quad (18)$$

$$p \in N, \quad p > \frac{d}{2}.$$

Из неравенства Браскампа-Либа-Люттингера следует, что

$$\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \varepsilon_d(y_1 - y_2) \dots \varepsilon_d(y_p - y_1) dy_1 \dots y_p \leq \int_{\Omega^*} \dots \int_{\Omega^*} \varepsilon_d(y_1 - y_2) \dots \varepsilon_d(y_p - y_1) dy_1 \dots y_p, \quad (19)$$

что доказывает

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^p(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^p(\Omega^*)}, \quad p \in N, \quad p > \frac{d}{2}, \quad (20)$$

где  $\Omega^*$  - шар и  $|\Omega^*| = |\Omega|$ .

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность профессору А. Липтеву, факультет математики, Имперский колледж Лондона за его полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кас М. On some connections between probability theory and differential and integral equations // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, – 1951, – P. 189-215.
- [2] Кас М. An application of probability theory to the study of Laplaces equation // Ann. Soc. Polon. Math., – 1953, – N 25, – P. 122-130.
- [3] Кас М. Integration in function spaces and some of its applications. – 1980. – PISA.
- [4] Кас М. Distribution of eigenvalues of certain integral operators // Mich. Math. J., – 1955, – No 3, – P. 141-148.
- [5] Kalmenov T. Sh., Suragan D. On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian // AIP Conference Proceedings, – 2013, – Vol. 1611, – P. 19-24.
- [6] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations, – 2012, – No 48, – P. 604-608.
- [7] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, – 2009, – No 80, – P. 646-649.
- [8] Saito N. Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian // Appl. Comput. Harmon. Anal., – 2008, – No 25, – P. 68-97.

- [9] Laptev A. Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces // Journal of Functional Analysis, – 1997, –No 151, – P. 531-545.  
[10] Luttinger J. M. Generalized isoperimetric inequalities // J. Math. Phys., – 1973, –No 14, – P. 586-593.  
[11] Harrell E. M., Hermib L. Differential inequalities for Riesz means and Weyl-type bounds for eigenvalues // Journal of Functional Analysis, – 2008, –No 254, – P. 3173-3191.  
[12] Eskin G. Lectures on Linear Partial Differential Equations. – 2011. – Amer. Math. Soc.  
[13] Lieb E., Loss M. Analysis, 2nd ed. – 2001. – Amer. Math. Soc.  
[14] Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. – 2006. – Birkhauser, Basel.  
[15] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics, 2nd ed. – 1983. – Mir Publishers, Moscow.

#### REFERENCES

- [1] Кас М. *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951, 189-215.  
[2] Кас М. *An application of probability theory to the study of Laplaces equation*, Ann. Soc. Polon. Math., – 1953, 25, 122-130.  
[3] Кас М. Integration in function spaces and some of its applications. 1980. PISA.  
[4] Кас М. *Distribution of eigenvalues of certain integral operators*, Mich. Math. J., 1955, 3, 141-148.  
[5] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian*, AIP Conference Proceedings, 2013, 1611, 19-24.  
[6] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation*, Differential Equations, – 2012. 48, 604-608.  
[7] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 2009. 80, 646-649.  
[8] Saito N. *Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2008, 25, 68-97.  
[9] Laptev A. *Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces*, Journal of Functional Analysis, 1997, 151, 531-545.  
[10] Luttinger J. M. *Generalized isoperimetric inequalities*, J. Math. Phys., 1973, 14, 586-593.  
[11] Harrell E. M., Hermib L. *Differential inequalities for Riesz means and Weyl-type bounds for eigenvalues*, Journal of Functional Analysis, 2008, 254, 3173-3191.  
[12] Eskin G. Lectures on Linear Partial Differential Equations. 2011. Amer. Math. Soc.  
[13] Lieb E., Loss M. Analysis, 2nd ed., 2001. Amer. Math. Soc.  
[14] Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. 2006. Birkhauser, Basel.  
[15] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics, 2nd ed., 1983. Mir Publishers, Moscow.

### ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТЫ ЛАПЛАС ТЕНДЕУІ ҮШІН СПЕКТРАЛДЫҚ ЗЕТА ФУНКЦИЯЛАР ЖАЙЫНДА

Т. Ш. Кәлменов, Д. Сұраған

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** потенциалдың шекаралық шарты, Лаплас теңдеуі, спектралдық зета функциясы.

**Аннотация.** Жұмыста локалды емес Лаплас операторы үшін нақты мәнді спектралдық зета функциясын көп өлшемді евклидтік  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$  кеңістігіндегі өлшемі бірдей обьлыстардың ішінде шар максималдаытындығын дәлелдейміз. Бұл нәтиже негізінде Дирихле шекаралық шартымен Лаплас теңдеуіне арналған Люттингер теңсіздігінің баламасы болып табылады және біздің бұрынғы үш өлшемді жағдайда алынған нәтижемізді жалпылайды. Дәлелдеу Кацдың потенциалдық ықтималдық теориясынан туындайды.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 215 – 221

**ABOUT NATURE OF DEPENDENCE OF OWN VALUES  
OF THE OPERATOR OF STORM LIOUVILLE  
ON COEFFICIENT OF THE BOUNDARY CONDITION**

**A. B. Imanbaeva, S. T. Ahmetova, A. Sh. Shaldanbaev**

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

**Keywords:** Own values, operator Shturma-Liuvillya.

**Abstract.** We will consider in space of  $L^2(0,1)$  operator of Storm Liouville

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$y(0) = y'(1) + ay(1) = 0, \quad (1.2)$$

where  $a$ -real number, and  $\lambda$ -spectral parameter.

It is easy to establish that the operator (1.1)-(1.2) is symmetric and if  $a \neq -1$ , rated own vectors of the operator Shturma-Liuvillya (1.1)-(1.2) form orthonormalized basis of space of  $L^2(0,1)$  [1].

Own values of the operator (1.1)-(1.2) depend on an and change at change of  $a$ . There is a question, what this dependence, in particular, whether there is no collision or consolidation of own values of the operator Shturma-Liuvillya (1.1)-(1.2).

We will note that such tasks arise, at division of variable regional tasks for the equations with private derivatives.

УДК 517.91

**О ХАРАКТЕРЕ ЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ  
ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ  
ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ**

**А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** Собственные значения, оператор Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе исследована зависимость собственных значений оператора Штурма-Лиувилля  $Ly = -y''(x) = \lambda y(x)$ ,  $y(0) = y'(1) + ay(1) = 0$  от параметра  $a$ .

**Введение.**

1. Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$y(0) = y'(1) + ay(1) = 0, \quad (1.2)$$

где  $a$ - вещественное число, и  $\lambda$ - спектральный параметр.

Легко установить, что оператор (1.1)-(1.2) симметричен и если  $a \neq -1$ , то нормированные собственные векторы оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0,1)$  [1].

Собственные значения оператора (1.1)-(1.2) зависят от  $a$  и меняются при изменении  $a$ . Возникает вопрос, какова эта зависимость, в частности, не происходит ли столкновение или уплотнение собственных значений оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2).

Отметим, что такие задачи возникают, при разделении переменных краевых задач для уравнений с частными производными.

**2. Методы исследований.** Общее решение дифференциального уравнения

$$-y''(x) = \lambda y(x) \quad (2.1)$$

имеет вид

$$y(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda} + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, \quad (\text{при } \lambda \neq 0) \quad (2.2)$$

где  $A, B$ - произвольные постоянные зависящие, вообще говоря, от спектрального параметра  $\lambda$ . Подставив (2.2) в граничное условие (1.2), получим систему уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных  $A, B$ .

$$\begin{cases} y(x, \lambda)|_{x=0} = A = 0, \\ y'(1, \lambda) + ay(1, \lambda) = -\sqrt{\lambda}A \sin \sqrt{\lambda} + B \cos \sqrt{\lambda} + a \left[ A \cos \sqrt{\lambda} + B \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right] = 0, \Rightarrow \\ B \cos \sqrt{\lambda} + aB \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = B \left( \cos \sqrt{\lambda} + a \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, собственные значения оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) являются корнями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda} + a \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0. \quad (2.3)$$

**3. Результаты исследований.** Предположим, что  $a > 0$ , тогда

$$\Delta(\lambda) = a \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a} + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} \right).$$

Если  $\lambda = 0$ , то  $\Delta(0) = 1 + a > 1$ , поэтому величина  $\lambda = 0$  не является собственным значением.

Если  $\lambda = -\mu^2 \leq 0$ , то

$$\begin{aligned} \Delta(-\mu^2) &= \frac{a \cos i\mu}{i\mu} \left[ \frac{i\mu}{a} + i\operatorname{th}\mu \right] = a \operatorname{ch}\mu \left[ \frac{\mu}{a} + \operatorname{th}\mu \right], \quad \operatorname{th}\mu = \frac{e^\mu - e^{-\mu}}{e^\mu + e^{-\mu}}, \\ \left[ \frac{\mu}{a} + \operatorname{th}\mu \right]' &= \frac{1}{a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \mu} > \frac{1}{a} > 0. \\ \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\mu}{a} + \operatorname{th}\mu \right] &= -\infty, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\mu}{a} + \operatorname{th}\mu \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение  $F(\mu) = \operatorname{th}\mu + \frac{\mu}{a}$  на числовой оси  $(-\infty, +\infty)$  имеет единственный корень  $\mu = 0$ , тогда из  $\lambda = -\mu^2$  имеем  $\lambda = 0$ . Поэтому в этом случае ( $a > 0$ ) отрицательные собственные значения отсутствуют, и все собственные значения (если есть) положительны ( $a > 0 \Rightarrow \lambda_n > 0$ ).

Если  $\lambda = \mu^2 > 0$ , то

$$\Delta(\lambda)\Big|_{\lambda=\mu^2} = \frac{a \cos \mu}{\mu} \left( \operatorname{tg} \mu + \frac{\mu}{a} \right) = \frac{a \cos \mu}{\mu} \cdot F(\mu). \quad (3.1)$$

Если  $\cos \mu_0 = 0$ , то из уравнения  $\Delta(\mu_0^2) = 0$  имеем  $\sin \mu_0 = 0$ , тогда  $1 = \sin^2 \mu_0 + \cos^2 \mu_0 = 0$ , что невозможно. Таким образом, если  $\Delta(\mu_0^2) = 0$ , то  $\cos \mu_0 \neq 0$ , поэтому  $F(\mu_0) = \operatorname{tg} \mu_0 + \frac{\mu_0}{a} = 0$ . Обратно, если  $F(\mu_0) = 0$  и  $\mu_0 \neq 0$ , то  $\Delta(\mu_0^2) = 0$ . Множество нулей функции  $\Delta(\mu^2)$  совпадает с множеством, отличных от нуля, корней уравнения  $F(\mu_0) = 0$ , поэтому детально изучим свойства функции  $F(\mu_0)$ . Поскольку  $\lambda = \mu_n^2$ , то ограничимся изучением лишь неотрицательных корней уравнения  $F(\mu) = 0$ . Функция  $F(\mu) = \operatorname{tg} \mu + \frac{\mu}{a}$  положительна в тех интервалах, где  $\operatorname{tg} \mu > 0$ , т.е. при  $n\pi < \mu < n\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , поэтому в этих интервалах корни уравнения  $F(\mu) = 0$  отсутствуют. Пусть  $n\pi - \frac{\pi}{2} < \mu < n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , тогда

$$F\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\infty, \quad F(n\pi) = \frac{n\pi}{a} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$F'(\mu) = \frac{1}{\cos^2 \mu} + \frac{1}{a} > \frac{1}{a} > 0.$$

Следовательно, функция монотонно возрастает в интервале  $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  от  $-\infty$  до  $\frac{n\pi}{a} > 0$ , и обращаясь в нуль лишь в одной точке  $\mu_n$ . Таким образом, уравнение  $F(\mu) = 0$  имеет бесконечное множество положительных корней расположенных в интервалах  $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т.е. имеет место неравенство

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < \mu_n(a) < n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Теперь изучим поведение корней  $\mu_n(a)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  при изменении параметра  $a$  от 0 до  $+\infty$ . Из уравнения  $F(\mu) = 0$  имеем  $\operatorname{tg} \mu_n = -\frac{\mu_n}{a}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

$$\mu_n = n\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\mu_n}{a}\right) = n\pi - \operatorname{arctg} \frac{\mu_n}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Тогда

$$1) \lim_{a \rightarrow +\infty} \mu_n(a) = n\pi - \operatorname{arctg} 0 = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$2) \lim_{a \rightarrow 0} \mu_n(a) = n\pi - \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При изменении параметра  $a$  в пределах от 0 до  $+\infty$  корни  $\mu_n(a)$  не слипаются, что видно из неравенства

$$\mu_{n+1}(a) - \mu_n(a) = (n+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{\mu_{n+1}(a)}{a} - n\pi + \operatorname{arctg} \frac{\mu_n(a)}{a} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\mu_n(a)}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_{n+1}(a)}{a} > \pi + 0 - \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\inf_{a>0, m, n} |\mu_n(a) - \mu_m(a)| \geq \frac{\pi}{2}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

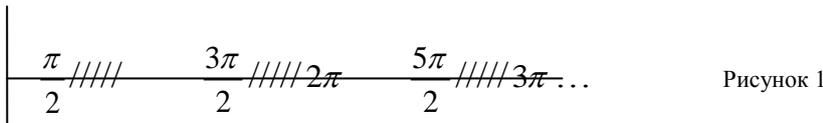
По теореме о неявной функции корни  $\mu_n(a)$  непрерывно дифференцируемо зависит от параметра  $a$  [2.стр.95]. Продифференцировав уравнение  $F(\mu) = 0$  по параметру  $a$ , получим дифференциальное уравнение движения нулей  $\mu_n(a)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  при изменении параметра  $a$ .

$$\frac{\dot{\mu}_n}{\cos^2 \mu_n} + \frac{\dot{\mu}_n}{a} - \frac{\mu_n}{a^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $(\dot{\cdot})$ - знак дифференцирования по параметру  $a$ . Преобразуем полученное дифференциальное уравнение, принимая во внимания исходное уравнение  $F(\mu) = 0$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\cos^2 \mu} + \frac{1}{a} \right) \cdot \dot{\mu}(a) &= \frac{\mu(a)}{a^2}; \\ \operatorname{tg} \mu_n &= -\frac{\mu_n}{a}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \mu_n = 1 + \frac{\mu_n^2}{a^2}, \\ \frac{1}{\cos^2 \mu_n} &= 1 + \frac{\mu_n^2}{a^2}, \quad \left( 1 + \frac{\mu_n^2}{a^2} + \frac{1}{a} \right) \cdot \dot{\mu} = \frac{\mu_n}{a^2}, \quad (a^2 + a + \mu_n^2) \cdot \dot{\mu}_n = \mu_n, \\ \dot{\mu}_n &= \frac{\mu_n}{a^2 + a + \mu_n^2} > 0, \quad \forall a > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следовательно, при изменении параметра  $a$  в сегменте  $[0, +\infty)$  функция  $\mu_n(a)$  принимает все значения из сегмента  $\left[ n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi \right]$  монотонно возрастая от  $n\pi - \frac{\pi}{2}$  до  $n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (см. рисунок 1).



Оценим скорость стремления к своим граничным значениям корней  $\mu_n(a)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  при применении параметра  $a$ . По теореме Лагранжа [2.стр.16] имеем

$$\begin{aligned} F(\mu_n) - F(n\pi) &= 0 - \frac{n\pi}{a} = F'(\xi)(\mu_n - n\pi) = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\cos^2 \xi} \right) (\mu_n - n\pi), \\ \mu_n - n\pi &= \frac{-\frac{n\pi}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\cos^2 \xi}} = -\frac{n\pi}{1 + \frac{a}{\cos^2 \xi}}, \quad \mu_n(a) < \xi < n\pi, \end{aligned}$$

$$\mu_n = n\pi - \frac{n\pi}{1 + \frac{a}{\cos^2 \xi}}, \quad \mu_n(a) \prec \xi \prec n\pi,$$

$$0 \prec n\pi - \mu_n = \frac{n\pi}{1 + \frac{a}{\cos^2 \xi}} \prec \frac{n\pi}{1+a}, \quad \forall a \succ 0.$$

**Следствие 3.1.**  $0 \prec 1 - \frac{\mu_n(a)}{n\pi} \prec \frac{1}{1+a}, \quad 0 \prec a \prec +\infty.$

Теперь получим оценку для другой границы.

$$\mu_n(a) - \mu_n(0) = \dot{\mu}_n(\xi) \cdot a = \frac{\mu_n(\xi) \cdot a}{a^2 + a + \mu_n^2(\xi)} \prec \frac{a}{\mu_n(\xi)},$$

$$0 \prec \xi \prec a, \Rightarrow \mu_n(0) \prec \mu_n(\xi) \prec \mu_n(a), \Rightarrow \frac{1}{\mu_n(\xi)} \prec \frac{1}{\mu_n(0)},$$

$$0 \prec \mu_n(a) - \mu_n(0) \prec \frac{a}{\mu_n(0)} = \frac{a}{n\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Следствие 3.2.**  $0 \prec \mu_n(a) - n\pi + \frac{\pi}{2} \prec \frac{2}{\pi} \cdot a \quad (\text{и } \delta a \rightarrow 0).$

Нами доказана следующая теорема 3.1.

**Теорема 3.1.** Если  $a \geq 0$ , то положительные нули функции

$$\Delta(\mu^2) = a \frac{\sin \mu}{\mu} + \cos \mu \tag{3.6}$$

локализованны в интервалах

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \leq \mu_n(a) \prec n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.7}$$

При изменении параметра  $a$  от 0 до  $+\infty$  нули  $\mu_n(a)$  монотонно возрастают от  $n\pi - \frac{\pi}{2}$  до  $n\pi$  (см. рисунок 1).

Имеют места равенства

$$\begin{aligned} 1) \lim_{a \rightarrow +0} \mu_n(a) &= n\pi - \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 2) \lim_{a \rightarrow +\infty} \mu_n(a) &= n\pi, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \tag{3.8}$$

и неравенства

$$\begin{aligned} 1) \mu_{n+1}(a) - \mu_n(a) &\succ \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 2) 0 \prec n\pi - \mu_n(a) &\prec \frac{n\pi}{1+a}, \quad \forall a \geq 0 \quad (a \rightarrow +\infty); \\ 3) 0 \prec \mu_n(a) - n\pi + \frac{\pi}{2} &\prec \frac{a}{n\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad (a \rightarrow +0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Нули  $\mu_n(a)$  являются решениями нелинейного дифференциального уравнения

$$\dot{\mu}_n(a) = \frac{\mu_n(a)}{a^2 + a + \mu_n^2(a)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Интервал  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  не содержит нулей функции  $\Delta(\mu^2)$  при всех  $a \geq 0$ .

**Теорема 3.2.** Если  $a \geq 0$ , то все собственные значения оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) положительны и удовлетворяют неравенств

$$(n\pi - \frac{\pi}{2})^2 \leq \lambda_n(a) < (n\pi)^2, \quad \forall a \gg 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

При изменении параметра  $a$  от 0 до  $+\infty$  собственные значения  $\lambda_n(a)$   $n = 1, 2, \dots$  монотонно возрастают от  $(n\pi - \frac{\pi}{2})^2$  до  $(n\pi)^2$ .

Имеют места равенства

$$\begin{aligned} 1) \lim_{a \rightarrow +0} \lambda_n(a) &= (n\pi - \frac{\pi}{2})^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 2) \lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda_n(a) &= (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (3.12)$$

и неравенства

$$\begin{aligned} 1) \lambda_{n+1}(a) - \lambda_n(a) &> n\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 2) 0 < (n\pi)^2 - \lambda_n(a) &< \frac{2(n\pi)^2}{1+a}, \quad \forall a \geq 0 \quad (a \rightarrow +\infty); \\ 3) 0 < \lambda_n(a) - (n\pi + \frac{\pi}{2})^2 &< \frac{2an\pi}{n\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad (a \rightarrow +0), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

**4. Выводы.** Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [3-14].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. - Киев: 1972.
- [2] Араманович И.Г. и др. Математический анализ. - М.: Физматгиз, 1961, 350с.
- [3] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [4] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний” – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.
- [5] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний”. – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.
- [6] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.
- [7] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.
- [8] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.
- [9] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.
- [10] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве  $L^2(0,1)$ . // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.
- [11] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.
- [12] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.
- [13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.

[14] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. - 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

#### REFERENCES

- [1] Marchenko V.A. Spektral'naja teorija operatorov Shturma-Liuvillja. - Kiev: 1972.
- [2] Aramanovich I.G. i dr. Matematicheskij analiz. - M.: Fizmatgiz, 1961, 350s.
- [3] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovaniya JuK» № 27, 2002. s. 58-62.
- [4] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Respublikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij” – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 81-84.
- [5] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Respublikanskaja nauchnaja konferencija “Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij”. – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.
- [6] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g., - s. 25-30.
- [7] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g., - s. 133-136.
- [8] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovaniya sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.
- [9] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirskij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.
- [10] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve  $L^2(0,1)$ . // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.
- [11] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koeficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.
- [12] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.
- [13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010,v18,№4,p.352-369.
- [14] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevykh zadach dlja nekotorykh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

#### ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІНІҢ ШЕКАРАЛЫҚ КОЭФИЦИЕНТКЕ ТӘУЕЛДІЛІГІНІҢ СЫЙПАТЫ

А. Б. Иманбаева, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** меншікті мәндер, Штурм-Лиувилл операторы.

**Аннотация.** Бұл еңбекте  $Ly = -y''(x) = \lambda y(x)$ ,  $y(0) = y'(1) + ay(1) = 0$  Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің а параметріне тәуелділігі зерттелді.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 222 – 227

**FEATURES OF CREATION  
OF THE ELECTRONIC TEXTBOOK  
WITH THE HELP OF NEW INFORMATION TECHNOLOGY**

**A. K. Koishybekova, A. D. Ongarbaeva**

Zhetysu state university named after Ilyas Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan.

E-mail: aizhankym@inbox.ru

**Key words:** multimedia, electronic textbook, internet, audio materials science.

**Abstract.** Currently multimedia encyclopedias, electronic books and audio materials create favorable conditions for quick, creative learning disciplines pupils, students. Internet materials, electronic textbooks and publications provide an opportunity for the organization of creative work of students, as well as improve the quality of learning. Any course that has been opened in connection with the new technologies, especially the existing teaching does not exclude existing methods of teaching. This methodology of science to transform the different approaches in addition to the live view of the quality of educational services.

The flow of information within a short period of time during the development of new materials to improve their knowledge, education, learning other languages, etc. needs arise. Such is the demand of the market economy society. Lifelong learning and education (lifelonglearning) economically developed countries, the concept of the successful implementation of virtually all universities.

According to scientists the world and man, that the transition to electronic textbooks, textbooks rose to a new technological level. Thus, e-books and electronic publications, professional level, you need to work to live.

**ЖАНА АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР КӨМЕГІМЕН  
ЭЛЕКТРОНДЫҚ ОҚУЛЫҚТЫ ҚҰРУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ**

**А. Қ. Қойшыбекова, А. Д. Онғарбаева**

І. Жансүгіров атындағы ЖМУ, Талдықорған, Қазақстан

**Тірек сөздер:** мультимедиялық, электронды оқулық, интернет, аудио материалдар ғылым.

**Аннотация.** Мультимедиялық энциклопедия, электронды оқулықтар мен түрлі дыбыстық таспа материалдары бүгінгі таңда оқушы, студент жастардың қай пәнді болмасын тез әрі терең, шығармашылықпен игеруіне мейлінше қолайлы жағдай тудырып отыр. Интернеттегі материалдар, электронды оқу құралдары мен электронды оқу басылымдар оқушылардың шығармашылықпен жұмыс жасауына және оқытудың сапасын жоғарлатудың жүзеге асуына мүмкіндік береді. Әрине жаңа технологияға байланысты ашылып отырған аталмыш мүмкіндіктердің қайсысы болмасын оқытуда бұрыннан бар, қалыптасқан оқыту әдістерін жоққа шығармаса керек. Қайта сол әдістеме ғылымындағы түрлі амал-тәсілдерді толықтырып, жандандырып, түрлендіре отырып білім сапасын көруге қызмет етеді.

Ақпараттық ағымдар заманында қысқа мерзімде жаңа материалды меңгеру, өз білім-білігін үнемі жетілдіріп отыру, басқа білім саласын, басқа тілдер үйрену және т.с.с. қажеттіліктер туады. Себебі нарықтық экономика қоғамының талабы осындай. Ғұмыр бойы оқу – білімдену (lifelonglearning) тұжырымдамасын экономикалық жағынан жоғары дамыған елдердің барлық дерлік университеттері табысты жүзеге асыруды.

Дүниежүзі ғалымдарының пікірі мен болжауы бойынша адам баласы электрондық оқулықтарға көшіп, оқулық жасау деңгейі жаңа технологиялық сатыға көтерілді. Сондықтан электронды оқу құралдары және электронды басылымдармен білікті деңгейде жұмыс істей алу - өмір қажеттілігі.

Қазақстан Республикасындағы білімді ақпараттандыру жүйесі “Қазақстан Республикасы орта білім жүйесін ақпараттандыру” мемлекеттік бағдарламасы және “Қазақстан Республикасы ұлттық ақпараттық инфрақұрылымын қалыптастыру мен дамыту” мемлекеттік бағдарламалар негізінде қалыптасып, даму процесін жалғастыруда. Білім беру жүйесін ақпараттандыру ісі білім беру жүйесін түбегейлі түрде өзгертеді. Мұндай жағдай алдыңғы сапқа оқыту материалдарын электрондық құралдар арқылы беруді көздейді.

Бірінші кезекте оларға электрондық басылымдар, электрондық оқулықтар, мультимедиялық оқу құралдары мен әр түрлі құралғыларға жазылған электрондық жазбалар (аудио, видео, құндақтар) жатады. Әрбір жалпы және кәсіби білім беретін пәндерден оқу-әдістемелік материалдардың мәліметтік базалары электрондық оқулықта жинақталып, қолда бар компьютерлік техника арқылы сабақта қолданылуы талап етіледі. ХХІ ғасырда қоғам қажеттілігін қанағаттандыру үшін білім беру саласында төмендегідей міндеттерді шешу көзделіп отыр. Олар: білім сапасын көтеру, компьютерлендіру, интернет, компьютерлік желі, электронды пошта және телекоммуникацияны пайдалану, электронды оқу құралдары, электронды оқу басылымдары мен электронды оқулықтарды даярлау.

Жаңа электронды оқу құралдары мен электронды оқулықтардың дүниеге келуімен берілетін білім мазмұны да өзгерері сөзсіз. Олардың атқаратын қызметтерінің де ауқымы кең. Сонымен қатар, оқушылар компьютерлік технология арқылы дүниежүзілік білім әлеміне еніп, онда қажетті ақпараттық мәліметтермен таныса алады.

Мультимедиялық энциклопедия, электронды оқулықтар мен түрлі дыбыстық таспа материалдары бүгінгі таңда оқушы, студент жастардың қай пәнді болмасын тез әрі терең, шығармашылықпен игеруіне мейлінше қолайлы жағдай тудырып отыр. Интернеттегі материалдар, электронды оқу құралдары мен электронды оқу басылымдар оқушылардың шығармашылықпен жұмыс жасауына және оқытудың сапасын жоғарлатудың жүзеге асуына мүмкіндік береді. Электронды оқу материалының ішкі мазмұны үнемі интернет желісі және басқа да электронды кітапханалар арқылы толықтырылып отыратыны белгілі, сондықтан ол ақпарат жинақтаудың қайнар көзі [1].

Әрине жаңа технологияға байланысты ашылып отырған аталмыш мүмкіндіктердің қайсысы болмасын оқытуда бұрыннан бар, қалыптасқан оқыту әдістерін жоққа шығармаса керек. Қайта сол әдістеме ғылымындағы түрлі амал-тәсілдерді толықтырып, жандандырып, түрлендіре отырып білім сапасын көруге қызмет етеді.

Ақпараттық ағымдар заманында қысқа мерзімде жаңа материалды меңгеру, өз білім-білігін үнемі жетілдіріп отыру, басқа білім саласын, басқа тілдер үйрену және т.с.с. қажеттіліктер туады. Себебі нарықтық экономика қоғамының талабы осындай. Ғұмыр бойы оқу – білімдену (lifelong learning) тұжырымдамасын экономикалық жағынан жоғары дамыған елдердің барлық дерлік университеттері табысты жүзеге асыруды.

Дүниежүзі ғалымдарының пікірі мен болжауы бойынша адам баласы электрондық оқулықтарға көшіп, оқулық жасау деңгейі жаңа технологиялық сатыға көтерілді. Сондықтан электронды оқу құралдары және электронды басылымдармен білікті деңгейде жұмыс істей алу - өмір қажеттілігі.

Электронды оқу құралдарын пайдалану ХХ ғасырдың алпысыншы жылдарында бастау алған үрдіс. Жеке компьютердің техникалық және дидактикалық мүмкіндіктері (дыбысты көшіру, жауапты дискіге микрофон арқылы жазу, эталонмен салыстыру, мәтінді жоғары-төмен, оңға-солға жылжыту, CD-ROM негізінде мультимедиялық құралдар арқылы мәтінді, дыбысты, графиканы, мультимедия мен бейнені біріктіру және т.б.) мәдени аралық қатынастардың тиімділігін анағұрлым арттырады [2].

Бүгінгі, ақпараттар аясының кеңейіп, адамзаттың онымен жұмыс жасау мүмкіндігі артып отырған күнде жеке пәнді оқытуда тек белгілі бір оқулықпен немесе оқу әдістемелік құралдардың жинағымен шектелуге болмайды. Әр азаматтың өз білімін жан-жақты шыңдап, келешекте бәсекеге қабылетті мамандық иесі болуына мектеп қабырғасында оқытылатын әрбір пәннің қосатын үлесі аз емес. Жыл сайын әр пән бойынша мектеп оқулығы, әртүрлі дидактикалық оқу құралдарымен қатар, электрондық оқулықтармен толықтырылып отыр. Бұл бүгінгі күннің кезек күттірмес қажеттілігі, әрі талабы. Сонымен бірге оқу-әдістемелік жинақтар (ОӘЖ) оқу-әдістемелік кешендер (ОӘК) жарыққа шығып, қолданыс тауып отыр.

Біздің ойымызша оқу әдістемелік кешен (комплекс) мен оқу әдістемелік жинақ (комплект) арасындағы айырмашылықты түсіну үшін Д.Д.Зуевтің келесі айтқаны дұрыс: Ол «Біз, кез келген сыныптың оқулықтар жинағынан, яғни жабық жүйеден ерекшелену үшін, дидактикалық құралдардың ашық жүйесін атау мақсатында, оқу (оқу-әдістемелік) кешені деген терминді енгіземіз», - деп атап көрсеткен. Осыған байланысты, ОӘК оқу құралдарының жүйесі ретінде оларды құрастыру кезінде ескеруге тиісті бірқатар модификациялар мен нұсқалардан тұрады.

ОӘК әртүрлі болып құрылғанымен қызметіне қарай, педагогикалық келесі түрдегі модельдік сипаттамасы болып табылады.

1. Пәннің алдын-ала жобаланған оқу үрдісі жүйелік-әдістемелік құралы болып табылады.
2. Оқытудың әртүрлі дидактикалық құралдарын, оқыту мен тәрбиелеу мақсаттарына бағындыра отырып, біртұтас етіп біріктіреді.
3. Білім беру стандарты бойынша оқытылатын пәннің мазмұнын, оқушылардың білім, білік дағдыларын қадағалап қана қоймай оны аша отырып, жүзеге асыруға әсер етеді.
4. Жаңа білімдердің, жаңашыл ойлар мен оқу құралдардың жинақталуына мүмкіндік береді, педагогтардың шығармашылық дамуына талпындырады.

Оқу әдістемелік кешен ғылыми-практикалық білім аймағы бойынша оқушының білім, білік дағдыларын активті және шығармашылық меңгеруін қамтамасыз ететін, келтірілген материалдарды қамтуы қажет. Оқу-әдістемелік кешендерді жаңа ақпараттық технологиялар құралдары көмегімен немесе олардың көмегінсіз құрылған деп ажыратуға болады.

Электрондық оқулық қағаз оқулықтан көрнекілігімен, мәтіннің қысқа түрде берілуімен, бейне, әрі аудиодыбыстармен қамтылуымен және білімді интерактивті тексеру, тапсырмаларды орындау нәтижелерін қадағалау арқылы оқушының мұғаліммен бірге, сондай-ақ өзбетінше білімін жетілдіруіне мүмкіндік беретіндігімен ерекшеленеді[3].

Электрондық оқулықта мультимедиалық мүмкіндіктер оқушының психологиялық ерекшеліктерін ескере отырып қолданылды. Атап айтқанда, оқу мәтінін оқушы тек тындап немесе тек оқып отырып, сондай-ақ тындап, әрі оқып отырып меңгеру мүмкіндіктері қарастырылды.

Оқу әдістемелік кешенді құрудың формасы иілгіш, динамикалық түрде болуы керек. Сонымен бірге теориялық материалдармен қатар, әдістемелік бөліктерді қамтып, оқушылардың, оқу материалын жете түсініп, өз бетінше ізденісін, талабын оятатын деңгейге бағытталуы қажет. Оқу әдістемелік кешеннің құрылымы білім беру аясының дамуына байланысты жаңарып отыруы тиіс.

Оқу құралында моделденетін оқу қызметінің әлеуметтік тапсырыс арқылы анықталады. Бүгінде ол-өз бетінше ойлап, әрекет жасай алатын, қажетті ақпаратты тауып, талдап, пайдалана білетін жеке тұлғаның дамуын қалыптастыру болып табылады. Оқу құралы оқу және тәрбиелеу үрдісінің маңызды құралы ретінде оқушы мен мұғалімге арналған. Оқушы үшін ол ақпараттар көзі, оны меңгеру және өзін-өзі бақылау үшін қолданылады. Мұғалім үшін оқушылардың оқу танымына жетекшілігін бағдарлау, оқытуды бақылау және жекелеу үшін қолданылады.

Жаңа ақпараттық технологиялар пайда болмастан бұрын, сарапшылар мынадай жағдайға назар аударған. Егер меңгерілетін материал дыбыс арқылы (аудио) берілсе, 4/1 көлемі есте қалады екен. Ал ақпарат көру арқылы берілсе, оның 3/1 көлемі есте сақталады. Осы екі әдіс (есту және көру арқылы) бірдей қолданылса, онда ақпараттың 50%-ы меңгерілетін болған. Білім алу процесіне студент өзі белсенді қатысып отырса, онда материалдың меңгерілуі 75%-ға дейін жоғарлайды екен [4].

Сонымен, мультимедиа дегеніміз берілетін ақпаратты біріктіру әдісі арқылы меңгерту. Ол мәтін және бір қалыптағы бейнелер (мәтін, сурет пен фотосуреттер), мәтін және қозғалатын бейнелер (мультипликация және видео) және дыбыс (цифрланған және MIDI) болуы мүмкін. Аудио ақпарат ән, музыка, сөйлеу, дыбыстық эффекттерді қамтиды. Бейне ақпараттың аудио ақпаратпен салыстырғанда қолданылатын элементтері аса түседі. Бұған фото, әр түрлі суреттер, интерьер, символдар, сканерден өткізілген бейнелер жатады. Бейне файлды қолдану тиімдірек, өйткені ақпараттың түр-түсі, мөлшері мен көлемі және дыбыстық компоненті материалды толық меңгеруіне әсер етіп, кейін оны қалпына келтіру қабілетін арттырады.

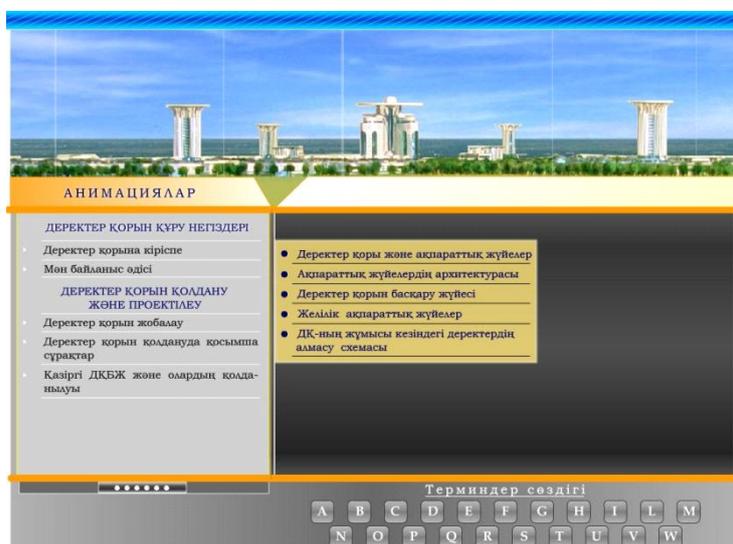
Гипермәтін-терминдерден, ұғымдардан, кестелерден, графиктер мен диаграммалардан тұратын мәліметтер базасы ретінде берілетін ақпараттық оқыту ортасы. Гипермәтін аудио, видео, бейне материалдармен толықтырылады. Қазіргі гипермәтіндік (немесе гипермедиа) мәліметтер

арнайы HTML (Hyper Text Markup Language – гипермәтіндерді жасау тілі) тілінде жасалады. Сонымен қоса, бүгінгі таңда гипермәтіндік форматтардың мынандай түрлері де бар: DHTML, PHP, XML, CSS, JS және т.б.

Қазіргі кезде пайдаланып жүрген білімді ақпараттандыру құралдары мен форманың көптүрлілігі оқу үрдісінің дидактикалық тиімділігін максимальды жетістікке жеткізілуі тиіс. Сонымен бірге, қазіргі кездегі ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың жекелеген құралдарын әр түрлі сабақтарда, мәселен, ақпараттық іздеу, тәжірбиелік зерттеу және өздігінен оқуға, сондай-ақ оқушылардың ақпараттық өңдеу әрекетінде алған білімдерін көрсету кезінде кешенді түрде пайдаланған кезде ғана дидактикалық тиімділікке қол жеткізуге болады.

Мектеп информатикасында 11-сыныпта «Деректер қорын басқару жүйесі» тақырыбын оқытуды жетілдіруде электронды оқу құралын қолдану мақсатында келесі құралды ұсынамын.

Аталған электронды оқулығы оқыту процесін бүтіндей қамтиды. Ол оқытудың технологиясы бойынша теориялық, практикалық сабақтар блогі, оқушының өздік жұмысына (ОӨЖ) арналған блогі, терминдер сөздігі, оқушыға арнайы тапсырмалар, тестілеу және аудио-видео материалдарынан тұрады. «Деректер қорын басқару жүйесі» тақырыбын оқыту информатика пәніне қосымша электрондық оқулығы жұмыс бағдарламасы мен стандарты тақырыптық жоспарға негізделіп жасалған. Бағдарламаны қосқаннан кейін экранда төмендегідей сурет (заставка) шығады (1-сурет).



1-сурет – Электронды оқу құралының алғашқы беті

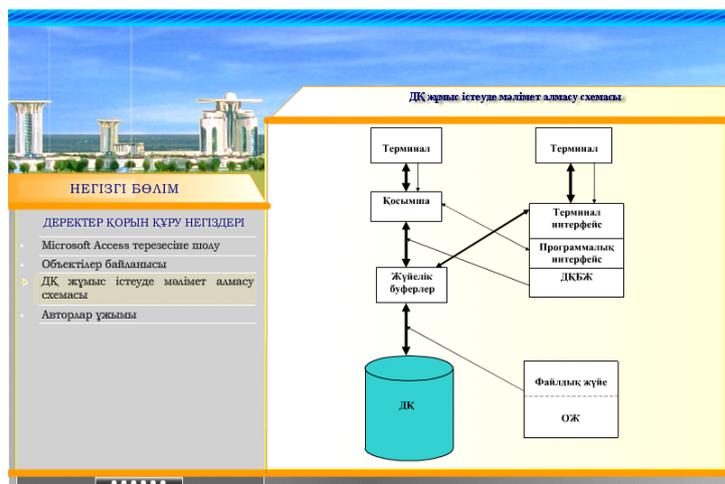
Қолданушыларға қажетті мәліметтерді тез табу үшін оқулықтың бас бет формасында негізгі меню орналасады. Ол жеті негізгі менюді қамтиді. Олар: теориялық материалдар, практикалық сабақтар, ОӨЖ, терминдер сөздігі, тапсырмалар, анимациялар, тестілеу және авторлар.

Тақырыптардың әрқайсысының ішінен қатысты тақырыпшалар шығады. Мысалы, 1-суретте деректер қорының негіздері тақырыбы көрсетілген. Сол сияқты анимациялар тақырыбын ашатын болсақ, Macromedia flash бағдарламасында дайындалған анимация (2-сурет) шығады.

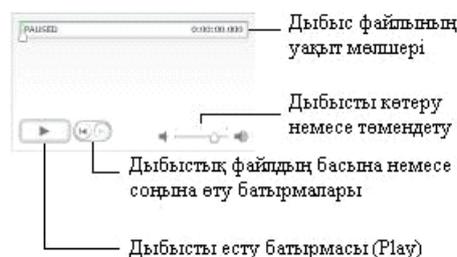
Практикалық сабақтар мен ОӨЖ сабақтары шығатын беттің төменгі оң жағында Macromedia Flash MX 2008 өнімінде жасалған аудио плеер орналасқан. Аудио плеерден әр сабаққа байланысты қысқаша дыбыстық мәлімет естуге болады (3-сурет).

Электрондық оқулықта бейнефильм қолдану да жоспарланған. Сабақ бетінің оң жағындағы Содан кейін экранда Windows Media Player арқылы бейнефильм көрсетіледі.

Қорыта келе, жаңа ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдаланудың басты мақсаты-оқушылардың оқу материалдарын толық меңгеруі үшін оларды практикалық жағынан тиімді ұсынылуына мүмкіндік беру. Бұл мақсаттарға жету жолында электронды оқулықтар, электронды оқыту құралдары, тексеру бағдарламалары, оқыту бағдарламалары сияқты бағдарламалық өнімдер қызмет етеді. Ақпараттық және коммуникациялық технологияны оқу-тәрбие үрдісіндегі қолданудың бірден-бір құралы, ол оқу пәндеріне негізделіп жасалынған электронды оқыту құрал-



2-сурет – Электронды оқу құралында анимацияларды көру беті



3-сурет – Аудио плеерді іске қосу

дары болып табылады. Ал электронды оқыту құралдары өз кезегінде оқытудың сапасын арттырып, оқушыны өз мамандығына қызықтырып, шығармашылық шабытын шыңдап, ғылыми көзқарасын қалыптастырады. Электронды оқыту құралдары оқу материалдарын меңгеруді жылдамдатады, ескірген оқу материалдарын тездетіп жаңалауға, жаңарған ақпараттармен толықтырып отыруға, оқу үрдісінде кездесетін тәжірбиелі жұмыстарды еш қиындықсыз көрсетуге т.б. мол мүмкіндік береді. Осындай үлкен мүмкіндіктің нәтижесі мамандық сапасын арттырып, еңбек нарығындағы бәсекеге қабілетті мамандар даярлауда көмектесері сөзсіз.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] “Қазақстан Республикасы ұлттық ақпараттық инфрақұрылымын қалыптастыру мен дамыту” мемлекеттік бағдарламасы. Президент Жарлығы №573, 16.03.2001 ж.
- [2] Государственный стандарт РК. Информационные технологии. Электронное учебное издание. СТ РК 34.017-2005.
- [3] Тажигулова А. И. Конструирование электронных учебников. // “Информационные технологии в Казахстане”, №1, 2007. – С. 42 – 43.
- [4] Әжібекова Ж. Оқу процесінде гипермәтіндік электрондық оқулықтарды енгізу. // “Информатика негіздері”, №3, 2003. – 5-7 б.
- [5] Х. Жантелі. Электронды оқулық құрудың программалық-әдістемелік комплексі. Шымкент.
- [6] К. Халықова, Г.Қашағанова. Электрондық оқулық – оқыту тиімділігін арттыру құралы ретінде. Ұлт тағылымы, Алматы 2007, №1/(2)
- [7] Информатика және компьютерлік техника. /Қазақ тілі терминдерінің сапалық ғылыми түсіндірме сөздігі. «Мектеп» баспасы, 2002
- [8] Г. Халықова және т.б. Электронды оқулықты дайындаудың талаптары. // Халықаралық ғылыми-әдістемелік конференциясының еңбектері. Шымкент. –2004. -469 б.
- [9] Л.Ф. Добро, О.Е. Митина, В.И. Чижикова. Использование в Интернет электронного учебника по механике, <http://www.ict.edu.ru>.
- [10] «Информатика негіздері» журналы 2006 жылы, 4-шілде
- [11] «Информатика негіздері» журналы 2006 жылы, 16-қазан
- [12] <http://45minut.kz>
- [13] К.З.Халықова, А.Р. Тұрғанбаев, Б.Ф. Бостанов. Программалау тілдерін оқыту. Delphi ортасы. Оқу құралы. – Алматы, 2005ж.
- [14] Симонович С.В Информатика базовый курс, Питер, 2003 г

- [15] «Қазақстан Республикасының Индустриалдық-инновациялық дамуының 2003-2015 жылдарға арналған стратегиясы» Қазақстан Республикасы Президентінің 2003 жылғы 17 мамырдағы № 1096 Жарлығы
- [16] Халықова К.З., Өскенбаева А.К. Электронды оқу құралдарын жасаудың әдістері мен құралдары. Вестник КазНПУ им. Абая. №2, 2006 г.
- [17] Әжібекова Ж. Оқу процесінде гипермәтіндік электрондық оқулықтарды енгіз. // «Информатика негіздері», №3, 2003.-5-7б.
- [18] Е.Аленичева, Н.Монастырев. Электронный учебник (проблемы создания и оценки качества) // Высшее образование в России. №1, 2001. 121-123-б.
- [19] Балапанов Е.К., Бөрібаев Б., Дәлетқұлов А.Б. Жаңа информациялық технологиялар: информатикадан 30 сабақ. Алматы ЖТІ. 2005. 374 бет
- [20] П.Лапин «Самочитель Flash MX» Москва - Санкт-Петербург, 2003г.

#### REFERENCES

- [1] Formation and development of the national information infrastructure "program. №573, 16.03.2001 the decree of the President.
- [2] State standard of RK. Information Technology. E Butterworth izdanie. ST RK 34.017-2005.
- [3] A. Tazhigulov I. Konstrwirovanie e-ўcebnikov. // "Information Technologies in Kazakhstan", No. 1, 2007. - S. 42 - 43.
- [4] Azhibekov, J. Hypertext introduction of electronic textbooks in the educational process. // "Computer Basics" 3, 2003. 5-7.
- [5] H. Janteli. E-books creation of software and methodical kompleksi. Shymkent.
- [6] K. Khalikov, G. Qařařanova. E as a means of improving the effectiveness of teaching and learning. Heritage of the Nation, 2007, 1 / (2)
- [7] computer science and computer engineering. / Kazakh language explanatory dictionary of terms of qualitative research. "School" Publishing House, 2002
- [8] G. Khalikov, etc. Electronic textbooks requirements. // Proceedings of the International scientific and methodical conference. Shymkent. -2004. -469 P.
- [9] LF Welcome, OE Rally, VI Chizhikova. İspolzovanie in Internet élektronnogo ўcebnika along the mechanic, <http://www.ict.edu.ru>.
- [10] "The Foundations of Computer Science" magazine in 2006, July 4
- [11] "The Foundations of Computer Science" magazine in 2006, October 16
- [12] <http://45minut.kz>
- [13] K.Z.Xalqova, AR Turganbaev, BG Bostanov. Programming languages. Delphi environment: Textbook. - Almaty, 2005.
- [14] Simonovich SV Computer Basic course, Peter, 2003
- [15] "industrial-innovative development of the Republic of Kazakhstan for 2003-2015 strategiyası" Respwblıkası Prezidentiniń Decree No. 1096 dated May 17, 2003
- [16] Khalikov Short Өскенбаева AK Электронды әдістері of textbooks and the media. Vestnik KazNPW IM. Abaya. 2, 2006
- [17] Azhibekov, J. Type in hypertext electronic textbooks in the educational process. // "Computer Basics", №3, 2003.-5-7б.
- [18] E.Aleniçeva, N.Monastrev. Electronic tutorial (Quality problems and assessment creation) // Higher Education in Russia. №1, 2001. 121-123-6.
- [19] EK Balapanov is, Buribaev B. Däletqulov A.B. Jaña Information Technology: Information on page 30 sabaq. Almaty. JTİ. 2005. 374
- [20] P.Lapin "Tutorial Flash MX" Moscow - St. Petersburg, 2003.

#### ОСОБЕННОСТИ СОЗДАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА ПРИ ПОМОЩИ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИИ

А. К. Койшыбекова, А. Д. Онгарбаева

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан

**Ключевые слова:** мультимедия, электронный учебник, интернет, аудио материалы, наука.

**Аннотация.** В настоящее время мультимедийные энциклопедии, электронные учебники и аудио материалы создают благоприятные условия для быстрого, творческого изучения разных дисциплин учениками, студентами. Интернет-материалы, электронные учебные пособия и издания дают возможность для организации творческой работы учеников, а также повышают качество обучения. Любой курс, который был открыт в связи с новой технологией, особенности существующей преподавания, не исключает существующие методы преподавания. Эта методология науки для преобразования различных подходов в дополнение к живой вид на качество образовательных услуг.

Поток информации в течение короткого периода времени, в течение разработке новых материалов для улучшения их знаний, образования, изучения других языков и т.д. потребности возникают. Такие, как спрос рыночной экономики общества. Пожизненное обучение и образование (lifelong learning) экономически развитые страны, концепция успешной реализации практически всех университетов.

По мнению ученых мира и человека, что переход к электронным учебникам, учебники вырос до нового технологического уровня. Таким образом, электронные книги и электронные издания, профессиональный уровень, нужно работать, чтобы жить.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 228 – 234

**THE COMPARATIVE ANALYSIS OF ENERGY AND  
ANGULAR CHARACTERISTICS OF THE GENERATED PARTICLES  
IN  $\bar{P}P$ -INTERACTIONS AT 22.4 AND 32 GeV/C**

**E. G. Boos, T. Temiraliyev, M. Izbasarov, V. V. Samoilo, R. A. Tursunov, A. I. Fedosimova**

Physico-Technical Institute, Almaty, Kazakhstan

**Abstract.** At 22.4 and 32 GeV /c in non-annihilation channel distributions on pseudorapidities of particles in interactions with large multiplicities ( $n \geq 8$ ) differ from distributions for all multiplicities ( $n \geq 2$ ). In the annihilation channel pseudorapidity distribution practically does not change with multiplicity for considering antiproton primary momenta.

Distributions of pairs azimuthal angles difference  $\Delta\phi$  have similar quasilinear dependence in annihilation and non-annihilation channels at 22.4 and 32 GeV/c. The comparison with a hypothesis of independent emission of particles indicates the excess of pairs with small values of a difference  $\Delta\phi$ .

УДК 539.12

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И  
УГЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕНЕРИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ  
В  $\bar{P}P$ - ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ 22.4 И 32 ГэВ/С**

**Э. Г. Боос, Т. Темиралиев, М. Избасаров, В. В. Самойлов, Р. А. Турсунов, А. И. Федосимова**

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

**Аннотация.** При 22,4 и 32 ГэВ/с в неаннигиляционном канале распределения по псевдобыстроатам частиц во взаимодействиях с большой множественностью ( $n \geq 8$ ) отличаются от распределений для всех множественностей ( $n \geq 2$ ). В аннигиляционном канале распределение псевдобыстроты практически не меняется с изменением множественности для рассматриваемых первичных импульсов антипротонов.

Распределения разности азимутальных углов пар  $\Delta\phi$  имеют одинаковую квазилинейную зависимость в аннигиляционном и неаннигиляционном каналах при 22.4 и 32 ГэВ/с. Сравнение с гипотезой независимого испускания частиц указывает на избыток пар с малыми значениями разности  $\Delta\phi$ .

Множественное образование частиц в антипротон-протонных столкновениях возникают в результате аннигиляции антипротонов с протонами, а также в неаннигиляционных каналах, аналогичные неупругим процессам, протекающим в протон-протонных взаимодействиях [1-4].

В работе анализируются экспериментальные данные полученные в антипротон-протонных взаимодействиях при импульсе 32 ГэВ/с, зарегистрированных во Французской 5 м водородной пузырьковой камере (ВПК) «Мирабель» [2] и при 22.4 ГэВ/с в Дубненской 2 м ВПК «Людмила» [3], экспонированных на Серпуховском ускорителе У-70 (г.Серпухов, Россия).

Исследование азимутального углового распределения вторичных частиц, рожденных в ядерных взаимодействиях, является важнейшим источником информации о механизме этих взаимодействий. Азимутальный угол  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) вторичной частицы определяется как угол между начальной плоскостью, содержащей продольные импульсы вторичных частиц и

импульс первичной частицы, и плоскостью, перпендикулярной направлению движения первичной частицы [5].

В работе [6] при первичном импульсе антипротона 22,4 ГэВ/с показано, что распределение вылета вторичных заряженных частиц по азимутальному углу  $\varphi$  не согласуется с изотропным распределением. Плотное распределение  $\varphi$  наблюдается в интервалах углов  $30^\circ \div 150^\circ$  и  $210^\circ \div 330^\circ$  в антипротон – протонной аннигиляции, а в неаннигиляционном канале в интервалах углов  $45^\circ \div 135^\circ$  и  $225^\circ \div 315^\circ$ . В этой связи проведен анализ распределения по азимутальному углу  $\varphi$  вторичных заряженных частиц в антипротон – протонных взаимодействиях при 32 ГэВ/с. (статистика в 3 раза больше, чем в эксперименте при 22,4 ГэВ/с).

Распределения вторичных заряженных частиц по азимутальному углу  $\varphi$  в неаннигиляционном канале антипротон – протонных взаимодействий при 32 ГэВ/с приведены для всех множественностей ( $n \geq 2$ ) на рисунке 1a и для множественностей  $n \geq 8$  на рисунке 1b, а для антипротон – протонной аннигиляции, приведены для всех множественностей ( $n \geq 2$ ) на рисунка 1c и для множественностей  $n \geq 8$  на рисунке 1d.

Из рисунка 1 видно, что распределения по  $\varphi$  во взаимодействиях с большой множественностью ( $n \geq 8$ ) не отличаются от распределений для всех множественностей ( $n \geq 2$ ), а также наблюдается идентичность распределений  $\varphi$  в аннигиляционном и неаннигиляционном каналах.

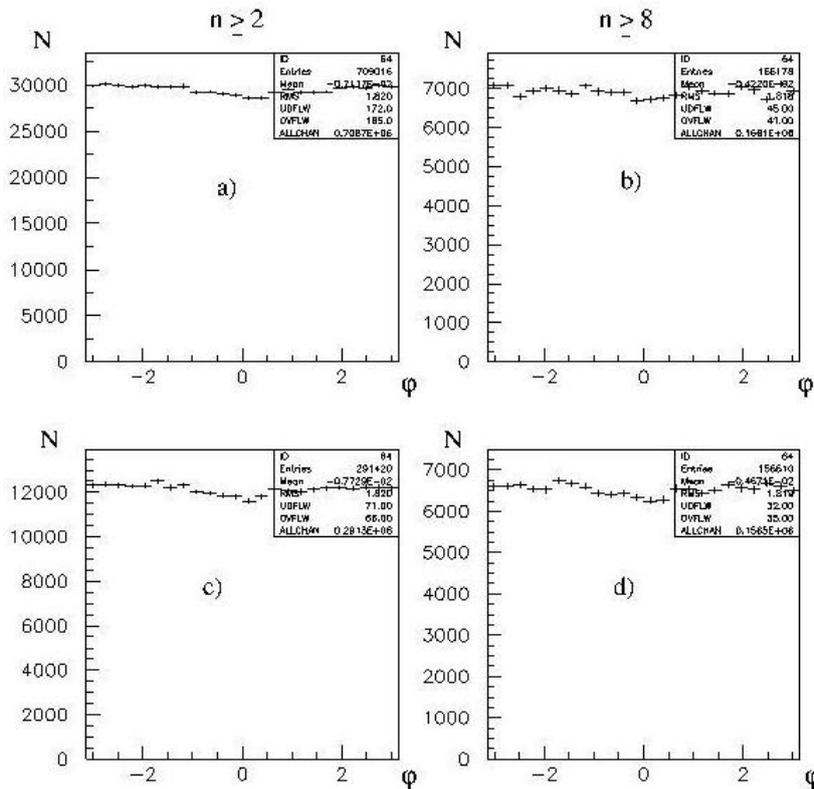


Рисунок 1 – Распределения частиц по азимутальному углу при 32 ГэВ/с: a, b – неаннигиляционный канал, c, d – антипротон-протонная аннигиляция

Распределения псевдобыстрот  $\eta = \lg \operatorname{tg} \Theta$  частиц, образованных во взаимодействиях антипротонов с протонами при двух первичных импульсах антипротона 22.4 и 32 ГэВ/с, которые приведены соответственно на рисунке 2 а, б для неаннигиляционных  $\bar{p}p$ -взаимодействий для всех множественностей  $n \geq 2$  и для множественностей  $n \geq 8$ . На рисунке 3 представлены аналогичные данные как на рисунке 2 для аннигиляционного канала  $\bar{p}p$ -взаимодействий. Среднее значение  $\langle \eta \rangle$  и дисперсия  $D_\eta$  приведены в таблице 1.

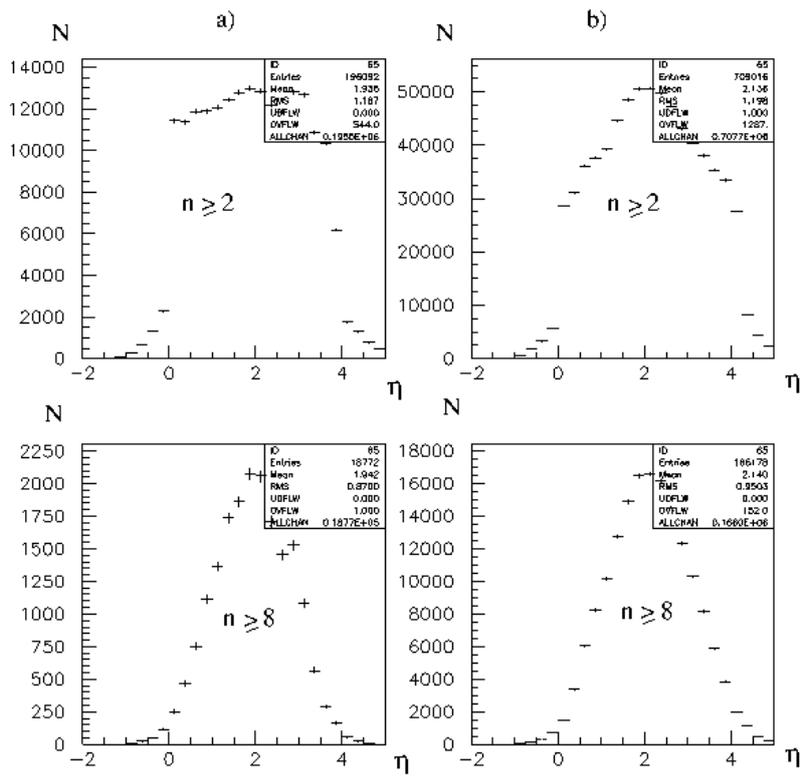


Рисунок 2 – Распределение псевдобыстроты частиц в неаннигиляционном канале  $\bar{p}p$ -взаимодействий при импульсе 22.4 – (а) и 32 ГэВ/с – (б)

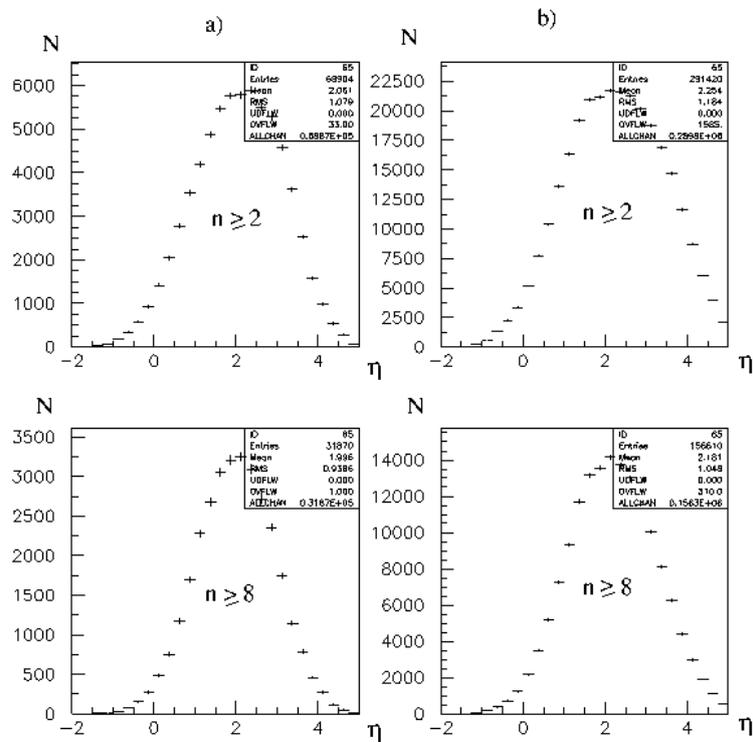


Рисунок 3 – Распределение псевдобыстроты частиц в аннигиляционном канале  $\bar{p}p$ -взаимодействий при импульсе 22.4 –(а) и 32 ГэВ/с – (б)

Таблица 1 – Количество частиц  $N$ , среднее значение  $\langle \eta \rangle$  и дисперсия  $D_\eta$

| Эксперимент               | Параметр   |                        |          |
|---------------------------|------------|------------------------|----------|
|                           | $N$ частиц | $\langle \eta \rangle$ | $D_\eta$ |
| Неаннигиляционный канал   |            |                        |          |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 2$ ) | 196092     | 1.936±0.004            | 1.187    |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 8$ ) | 18772      | 1.942±0.014            | 0.870    |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 2$ )   | 709016     | 2.136±0.003            | 1.198    |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 8$ )   | 166178     | 2.140±0.005            | 0.950    |
| Аннигиляционный канал     |            |                        |          |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 2$ ) | 68904      | 2.061±0.008            | 1.079    |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 8$ ) | 31870      | 1.996±0.011            | 0.939    |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 2$ )   | 291420     | 2.254±0.004            | 1.184    |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 8$ )   | 156610     | 2.181±0.006            | 1.048    |

Из данных таблицы 1 видно, что распределение частиц по квазибыстротам для всех множественностей  $n \geq 2$  шире, чем во взаимодействиях с множественностью  $n \geq 8$  в неаннигиляционных и аннигиляционных каналах при одиноковом первичном импульсе антипротона. Различие более заметно в неаннигиляционном канале. Максимумы распределений и средние значения псевдобыстроты приходятся ожидаемому значению  $\eta \sim 2$  при первичном импульсе 22.4 ГэВ/с и  $\eta \sim 2.2$  при 32 ГэВ/с. С ростом первичной энергии от 22.4 и до 32 ГэВ происходит смещение  $\eta$ -распределений в сторону увеличения на величину  $\Delta \langle \eta \rangle \sim 0.2$ . Эта закономерность повторяется и в аннигиляционных каналах.

Распределение разности псевдобыстрот  $\Delta \eta$  двух частиц в зависимости от разности азимутального угла  $\Delta \varphi$  этих частиц и распределение по  $\Delta \eta$ ,  $\Delta \varphi$  в аннигиляционном канале для всех множественностей ( $n \geq 2$ ) приведены на рисунке 4 при первичном импульсе антипротона 22.4 ГэВ/с (а) и при 32 ГэВ/с (б).

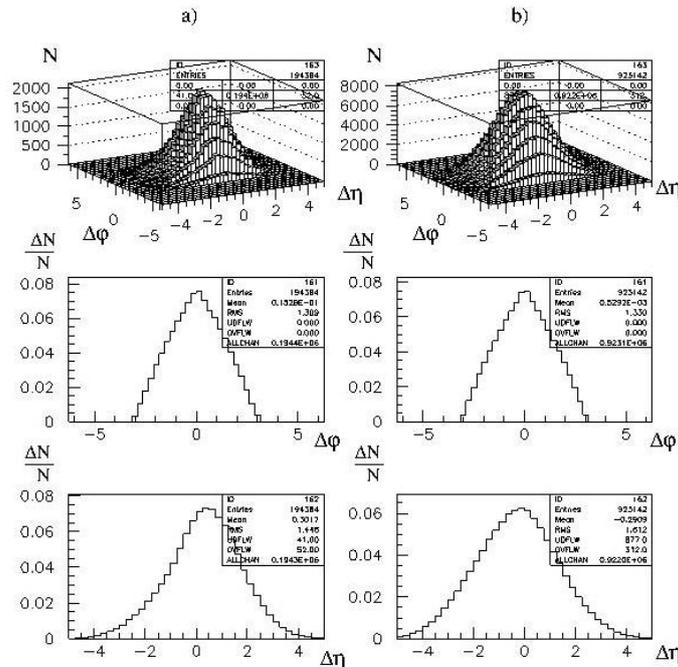


Рисунок 4 – Зависимость  $\Delta \eta_{ik}$  от  $\Delta \varphi_{ik}$  и распределения  $\Delta \eta$ ,  $\Delta \varphi$  в аннигиляционном канале при импульсе 22.4 ГэВ/с (а) и при 32 ГэВ/с (б) для  $n \geq 2$

На рисунке 5 приведены аналогичные данные, как на рисунке 4, для неаннигиляционного канала  $\tilde{p}p$  - взаимодействий при импульсе 22,4 ГэВ/с – (а) и при 32 ГэВ/с (б).

Видно, что распределения разности азимутальных углов пар  $\Delta\varphi$  имеют одинаковую квазилимитную зависимость в аннигиляционных и неаннигиляционных каналах при импульсе первичного антипротона 22,4 и 32 ГэВ/с.

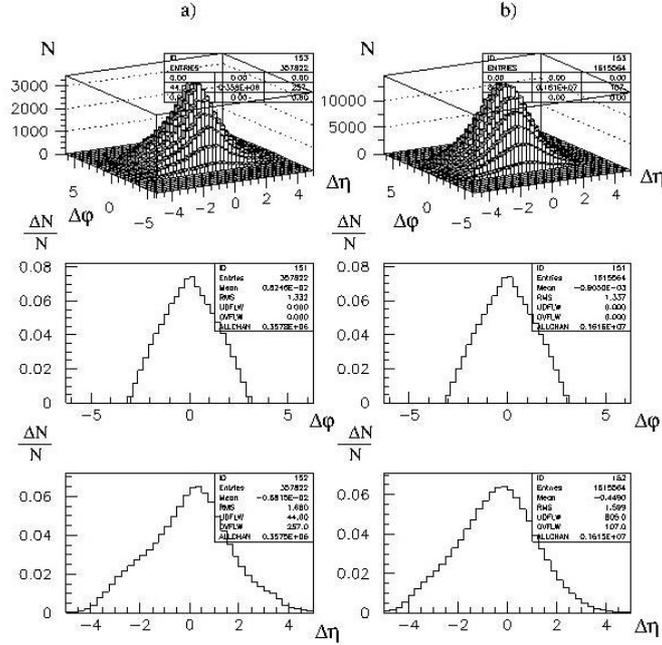


Рисунок 5 – Зависимость  $\Delta\eta_{ik}$  от  $\Delta\varphi_{ik}$  и распределения  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\varphi$  в неаннигиляционном канале при импульсе 22.4 (а) и 32 ГэВ/с (б) для  $n \geq 2$

Средние значения величины  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\varphi$  и их дисперсии для неаннигиляционного и аннигиляционного каналов для всех множественностей приведены в таблице 2. В таблице 2 также приведены данные для множественностей  $n \geq 8$  при первичном импульсе 22.4 ГэВ/с [6] и при 32 ГэВ/с [7].

Распределение  $\Delta\eta_{ik}$  описывается достаточно хорошо функцией Гаусса, в то время как распределение по  $\Delta\varphi_{ik}$  имеет симметричный вид, описываемый линейной зависимостью вида

$$\frac{\Delta N}{N \Delta\varphi_{ik}} = a - b \Delta\varphi_{ik}, \text{ где } a_{NA} = 0.290 \pm 0.003; b_{NA} = 0.103 \pm 0.002 \text{ в неаннигиляционном канале и}$$

$$a_A = 0.290 \pm 0.003; b_A = 0.103 \pm 0.002 \text{ в аннигиляционном канале.}$$

Из сопоставления этих данных следует, что в азимутальной плоскости взаимодействия валентные кварков (антикварков) не изменяет вида азимутального углового распределения вторичных мезонов. Это одна из существенных особенностей проявления квантовой хромодинамики в процессах мягкой адронизации.

Если принять, что максимально возможные разности  $\Delta\varphi_{ik}$  совпадают с данными эксперимента, т.е.  $(\Delta\varphi_{ik}) = \pm 3.14$  радиан, то максимальная плотность частиц

$$\left( \frac{dw}{d\Delta\varphi_{ik}} \right)_{\max} = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{6.28} = 0.16 \text{ значительно меньше экспериментального значения}$$

$$\left( \frac{dw}{d\Delta\varphi_{ik}} \right)_{\max} = 0.290 \pm 0.003.$$

Таблица 2 – Количество частиц  $N$ , среднее значение разности квазибыстрот  $\Delta\eta$  и азимутального угла  $\Delta\varphi$  и их дисперсии  $D_{\Delta\eta}$  и  $D_{\Delta\varphi}$

| Эксперимент               | Параметр   |                                 |                     |                              |                  |
|---------------------------|------------|---------------------------------|---------------------|------------------------------|------------------|
|                           | $N$ частиц | $\langle \Delta\varphi \rangle$ | $D_{\Delta\varphi}$ | $\langle \Delta\eta \rangle$ | $D_{\Delta\eta}$ |
| Неаннигиляционный канал   |            |                                 |                     |                              |                  |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 2$ ) | 357822     | 0.0082                          | 1.332               | - 0.0068                     | 1.680            |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 8$ ) | 69146      | - 0.0014                        | 1.291               | 0.1327                       | 1.249            |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 2$ )   | 1615564    | 0.0009                          | 1.337               | -0.4490                      | 1.599            |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 8$ )   | 627225     | 0.0028                          | 1.318               | -0.1886                      | 1.358            |
| Аннигиляционный канал     |            |                                 |                     |                              |                  |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 2$ ) | 194384     | 0.0153                          | 1.309               | 0.3017                       | 1.446            |
| 22.4 ГэВ/с ( $n \geq 8$ ) | 121911     | 0.0132                          | 1.295               | 0.3294                       | 1.317            |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 2$ )   | 923142     | 0.0005                          | 1.330               | -0.2909                      | 1.612            |
| 32 ГэВ/с ( $n \geq 8$ )   | 649217     | 0.0036                          | 1.320               | -0.1803                      | 1.500            |

Количественно экспериментальные данные существенно расходятся с моделью изотропного и независимого вылета вторичных частиц.

Из этого сопоставления можно сделать вывод, что количество коррелированных «узких» пар частиц в эксперименте значительно превышает величину, ожидаемую при равномерном, изотропном и некоррелированном испускании заряженных мезонов.

Количественное значение этого отличия может являться важным экспериментальным критерием для выбора физической модели мягкой адронизации кварков в неупругих антипротон – протонных взаимодействиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ward C.N., Ward P.R. et al. // Nucl. Phys. 1979, v. B153, p. 299.
- [2] Власов Е.В., Бабинцев В.В. и др. // Препринт ИФВЭ, 81 – ОЭИПК, Е – 122, Серпухов, 1981.
- [3] Boos E.G., Ermilova D.I. et al. // Nuovo Cimento, 1978, v. 47A, p. 377.
- [4] Абрамовский В.А. // Вестник Нижегородского Государственного университета, 2013, т. 2, № 75, стр. 59 – 63.
- [5] Азимов С.А., Чернов Г.М. Статистические методы в физике высоких энергий. // Издательство «Фан» Узбекской ССР, Ташкент, 1970.
- [6] Boos Э.Г., Темиралиев Т. и др. // Труды IX конференции научного объединения немцев Казахстана, Алматы, 2014, стр. 88-95.
- [7] Boos Э.Г., Темиралиев Т. и др. // Вестник НАЕН РК (в печати).

#### REFERENCES

- [1] Ward C.N., Ward P.R. et al. // Nucl. Phys. 1979, v. B153, p. 299.
- [2] Vlasov E.V., Babintsev V.V., et al. Preprint IHEP 81 - OEIPK, E - 122, Serpukhov, 1981. (in Russ.).
- [3] Boos E.G., Ermilova D.I. et al. Nuovo Cimento, 1978, v. 47A, p. 377.
- [4] Abramovskiy V.A. Journal of the Nizhny Novgorod State University, 2013, vol. 2, № 75, pp. 59 - 63. (in Russ.).
- [5] Azimov S.A., Chernov G.M. Statistical methods in high-energy physics. Publishing house "Fan" of the Uzbek SSR, Tashkent, 1970. (in Russ.).
- [6] Boos E.G., Temiraliev T., et al. Proceedings of the IX Conference of the Scientific Association of Germans of Kazakhstan, Almaty, 2014, pp. 88-95. (in Russ.).
- [7] Boos E.G., Temiraliev T., et al. Herald NAEN RK (in press). (in Russ.).

**ИМПУЛЬСИ 22.4 ЖӘНЕ 32 ГЭВ/С  $\bar{P}P$  - ӘРЕКЕТТЕСТІКТЕРДЕ ПАЙДА БОЛҒАН  
БӨЛШЕКТЕРДІҢ ЭНЕРГЕТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ БҰРЫШТЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН  
САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ**

Э. Г. Боос, Т. Темірәлиев, М. Ізбасаров, В. В. Самойлов, Р. А. Турсунов, А. И. Федосимова

Физика-техникалық институты, Алматы, Қазақстан

**Аннотация.** 22.4 және 32 ГэВ/с импульстерінде аннигиляциялық емес арнада көптігі үлкен ( $n \geq 8$ ) әрекеттестіктерде бөлшектердің псевдотездігі бойынша үлестірілімінің барлық көптіктер үшін ( $n \geq 2$ ) үлестірілімінен айырмашылығы бар. Қарастырылатын антипротонның бастапқы импульстерінде аннигиляциялық арнада псевдотездік үлестірілімінің көптіктің өзгеруіне қарай өзгерісі байқалмайды.

22.4 және 32 ГэВ/с импульстерінде аннигиляциялық және аннигиляциялық емес арналарда жұптардың азимуталдық бұрыштарының айырымының  $\Delta\phi$  үлестірілімінде біркелкі квазисызықтық тәуелділік орындалады. Бөлшектердің тәуелсіз ұшып шығу болжамымен салыстыру айырым шамасы  $\Delta\phi$  аз бөлшектер жұбының басымдығын көрсетеді.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 234 – 241

# THE TECHNIQUE OF USING A SPREADSHEET IN PHYSICS AT SCHOOL COURSE SCENARIO CREATION OF A COMMON STRUCTURE OF THE TRANSFORMER

Zh. A. Musiraliev

Kazakh state women's teacher training university, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: musiraliev1945@mail.ru

**Key words:** Transformer, spreadsheet, MS Excel, physics

**Abstract.** In this paper, we consider the use of a spreadsheet for designing transformers. Displaying visibility and ease of use MS Excel to determine the parameters of plates and the number of turns of the windings. Scripting to give it a name, and changed to a range of cells. In this case, the cells the mouse to highlight the cell on the page, easy band. If it does not preclude the window can be set aside. At the end of the script window to program the cell to sense the script window. This scenario is changing the meaning of the cells in the window. User can change any of its. Such 32 hours. At the end of the script. The transformer can be designed in a number of restrictions. There is a separation of the magnetic power cord. The magnetic attraction is the geometrical characteristics of sense. Sok recognized enough power to limit the area of the window may have a short window rolls for wrapping.

# МЕКТЕП КУРСЫНДАҒЫ ФИЗИКА ПӘНІНЕ ЭЛЕКТРОНДЫҚ КЕСТЕНІ ҚОЛДАНУ ӘДІСІ ТРАНСФОРМАТОРДЫҢ ЖАЛПЫ ҚҰРЫЛЫМЫН ЖАСАУ СЦЕНАРИИ

Ж. А. Мүсіралиев

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

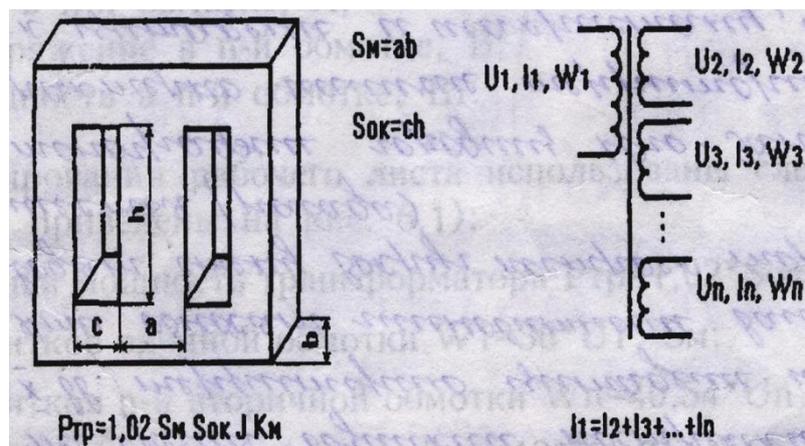
**Тірек сөздер:** трансформатор, электрондық кесте, MS Excel, физика.

**Аннотация.** Жұмыста электрондық кестені трансформаторды жобалау есебіне қолдану жолы қарастырылған. Трансформатордың пластиналарының параметрлерін, орам сандарын анықтау үшін MS Excel-ді пайдаланудың өте қолайлы және тиімді екендігі көрсетілді. Сценарииді жасауда қолданушы оған ат беруге, және өзгерген ұяшықтардың диапазонын енгізуге міндетті. Бұл жағдайда ұяшықтар қою рамкамен қоршалғандықтан, жұмыс парақта қрек ұяшықты тышқанмен ерекшелеу арқылы, диапазонды беру оңай.

Егер терезе кедергі жасаса оны шетке ысырып қоюға болады. Сценарийді қосу тереземен жұмыс аяқталған соң программа сценарий ұяшық мағынасы деген терезені шығарады. Бұл терезеде барлық сценарийдің өзгермелі ұяшықтарының мағынасы берілген. Қолданушы оның кез келгенін өзгерте алады. Мұндай ұяшықтардың саны 32-ге дейін. Осымен сценарийді жасау жұмысы аяқталады. Трансформаторды жобалауда өңдеуші шек қою қатарына тап болады. Берілген магнитті-сымда қуаттың бөлінуі байқалады. Магнитті-сымның геометриялық мінездемесі де мағыналы болып келеді. Оның  $S_{0k}$  терезе ауданына да шек қою таңылғандықтан, жеткілікті қуаттың өзінде терезе қажетті орамды орауға аздық етуі мүмкін. Терезенің оң жағындағы орналасқан батырмалар қолданушының сценарийге қандай операциялар орындау керектігін көрсетеді. Жаңа сценарийді енгізгенде жұмыс парағы жаңа қолданылған сценарийлердегі ұяшық мағыналарымен сәйкес қайта саналады және қабылданады.

Сценарийі өзімен компьютер жадында жазылып қойылған жұмыс парағының ұяшық мағыналарының терімін қарастырады. Мұндай терім (сценарийі) бірнешеу болуы мүмкін, және қолданушы оның бірін таңдауға мүмкіндігі бар. Excel терминінде сценарийді қолдану «не-егер» типті талдау деп аталады. Егер ұяшыққа бірқатар мағына енгізсе қолданушы өзінің есебіне, кестесіне, диаграммасына және т.б не болатынын көре алатынын айта кету қажет. Сценарийлермен жұмыс істеуге сценарий диспетчері мүмкіндік береді.

Көрсетілген мысалдың сапасы ретінде электротехникадағы трансформаторды есептеуден сценарийлерді қандай жағдайда қолдану және тиімділігін қарастырамыз. Оны келесі бейнемен қисынға келтіреміз. Трансформатордың магнитті-сымы болады. Осы магнитті-сымды керек терім шығу күші бар трансформаторды жасауға қолдануға болатындығын анықтау керек. Егер қолдануға болса онда оның орам параметрі қандай болуы қажет. 1-суретте осы тапсырманың берілген мәліметтерін көрсетеді.



1-сурет – Трансформаторды есептеу үшін бастапқы мәліметтер

Трансформаторды жобалауда өңдеуші шек қою қатарына тап болады. Берілген магнитті-сымда қуаттың бөлінуі байқалады. Магнитті-сымның геометриялық мінездемесі де мағыналы болып келеді. Оның  $S_{0k}$  терезе ауданына да шек қою таңылғандықтан, жеткілікті қуаттың өзінде терезе қажетті орамды орауға аздық етуі мүмкін. Магнитті-сымның геометриясында өңдеуші тек  $b$ -пластина терім жуандығын ғана ауыстыра алады. Терімдегі пластина санын өзгерту арқылы магнитті-сымның  $S_m$  көлденең қима ауданын басқаруға болады. Магнитті-сым терезесінде орам орналастыру сонымен қатар оңашалау үлгісіне әсер етеді. Сондықтан да ауыспалы есепте және сапада терезені  $K_m$  мыс коэффициентімен толтыру қолданылған. Екінші қатарлы орамдардың параметрлері күш теріміне және алынатын күшке байланысты мүлде әр түрлі болуы мүмкін. Барлық орамның жиынтық қуаты берілген бөлікті шамадан тыс асырмауы керек. Күштің мөлшеріне байланысты  $W_n$  орамының орам саны, ал ток мөлшеріне  $d_n$  сым диаметрі тәуелді болады.  $W_n$  және  $d_n$  мөлшерлері  $n$  үшін қажетті терезе ауданының үлесін анықтайды. Берілген мысалдағы есеп КПД трансформатордың бекітілген мағынасы (0,85), болат коэффициентімен толтыру (0,9), магнитті-сымның денесіндегі индукция (1,2 Т), ток жиілігі (50Гц) үшін өткізіледі.

Есепте сонымен қатар келесі өзгергіштер қолданылған: а – магнитті-сымның ені, см; с – терезе ені, см; h – терезе биіктігі, см; J – орамдағы ток тығыздығы, А/мм<sup>2</sup>; In – n орамдағы ток, А; Un – n-ші орамдағы күш, В; Pn – n -ші орамдағы қуат, Вт.

Жұмыс парағын құруда келесі формулалар қолданылады (2.2-суреттен басқа):

1. Трансформатордың габаритті қуаты  $P_{TP} = 1,02 * S_{ok} * S_M * J * K_M$ ;
2. Орамдағы кіріс орам сандары  $W_1 = 36 * U_1 / S_M$ ;
3. n-ші орамның орам саны  $W_n = 40,54 * U_n / S_M$ ;
4. n-ші орамдағы сым диаметрі  $d_n = 1.13 * \sqrt{I_n / J}$ .

Есептеу жүргізілетін жұмыс парағының түрі 2-суретте көрсетілген.

|    | A                                | B        | C                            | D                        | E  | F                  | G | H              |
|----|----------------------------------|----------|------------------------------|--------------------------|----|--------------------|---|----------------|
| 1  |                                  |          | <b>Расчет трансформатора</b> |                          |    |                    |   |                |
| 2  | Параметр                         | Значение |                              | Выходные данные          |    |                    |   |                |
| 3  | Ширина магнитопровода см         | 2,5      |                              | U <sub>2</sub> , В       | 6  | I <sub>2</sub> , А | 2 | W <sub>2</sub> |
| 4  | Толщина магнитопровода см        | 3        |                              | U <sub>3</sub> , В       | 15 | I <sub>3</sub> , А | 1 | W <sub>3</sub> |
| 5  | Ширина окна см                   | 1,7      |                              | U <sub>4</sub> , В       | 15 | I <sub>4</sub> , А | 1 | W <sub>4</sub> |
| 6  | Высота окна см                   | 4,7      |                              | U <sub>5</sub> , В       | 20 | I <sub>5</sub> , А | 1 | W <sub>5</sub> |
| 7  | Плотность тока А/мм <sup>2</sup> | 3,5      |                              | U <sub>6</sub> , В       | 0  | I <sub>6</sub> , А | 0 | W <sub>6</sub> |
| 8  | Кэффициент заполнения            | 0,35     |                              | U <sub>7</sub> , В       | 0  | I <sub>7</sub> , А | 0 | W <sub>7</sub> |
| 9  | Входное напряжение В             | 220      |                              |                          |    |                    |   |                |
| 10 |                                  |          |                              |                          |    |                    |   |                |
| 11 | Результат                        |          |                              | <b>Первичная обмотка</b> |    |                    |   |                |
| 12 | Факт габ мощ                     |          | 74,88                        | W <sub>1</sub>           |    |                    |   | 1056           |
| 13 | Треб габ мощ                     |          | 72,94                        | d <sub>1</sub> мм        |    |                    |   | 0,32           |
| 14 | Площ окна см <sup>3</sup>        |          | 7,99                         |                          |    |                    |   |                |
| 15 | Треб пл окна см <sup>3</sup>     |          | 5,18                         |                          |    |                    |   |                |
| 16 | Вых мощ Вт                       |          | 62                           |                          |    |                    |   |                |

2-сурет – Есептеу үшін берілген мәліметтер

Барлық берілгендер бірнеше таблицаларға топтастырылған. «Шығыс мәліметтері» таблицасы 3-суретте толығымен көрсетілген. Көрсетілген есептегіш форма трансформатрда бары алтының екінші қатарларының орамы рұқсат етіледі, бірақ олардың саны ұлғаюы мүмкін.

|  | D                  | E  | F                  | G | H              | I   | J                 | K    | L                   | M  |
|--|--------------------|----|--------------------|---|----------------|-----|-------------------|------|---------------------|----|
|  | Выходные данные    |    |                    |   |                |     |                   |      | Мощность            |    |
|  | U <sub>2</sub> , В | 6  | I <sub>2</sub> , А | 2 | W <sub>2</sub> | 32  | d <sub>2</sub> мм | 0,85 | P <sub>2</sub> , Вт | 12 |
|  | U <sub>3</sub> , В | 15 | I <sub>3</sub> , А | 1 | W <sub>3</sub> | 81  | d <sub>3</sub> мм | 0,6  | P <sub>3</sub> , Вт | 15 |
|  | U <sub>4</sub> , В | 15 | I <sub>4</sub> , А | 1 | W <sub>4</sub> | 81  | d <sub>4</sub> мм | 0,6  | P <sub>4</sub> , Вт | 15 |
|  | U <sub>5</sub> , В | 20 | I <sub>5</sub> , А | 1 | W <sub>5</sub> | 108 | d <sub>5</sub> мм | 0,6  | P <sub>5</sub> , Вт | 20 |
|  | U <sub>6</sub> , В | 0  | I <sub>6</sub> , А | 0 | W <sub>6</sub> | 0   | d <sub>6</sub> мм | 0    | P <sub>6</sub> , Вт | 0  |
|  | U <sub>7</sub> , В | 0  | I <sub>7</sub> , А | 0 | W <sub>7</sub> | 0   | d <sub>7</sub> мм | 0    | P <sub>7</sub> , Вт | 0  |
|  |                    |    |                    |   |                |     |                   |      | Сумма               | 62 |

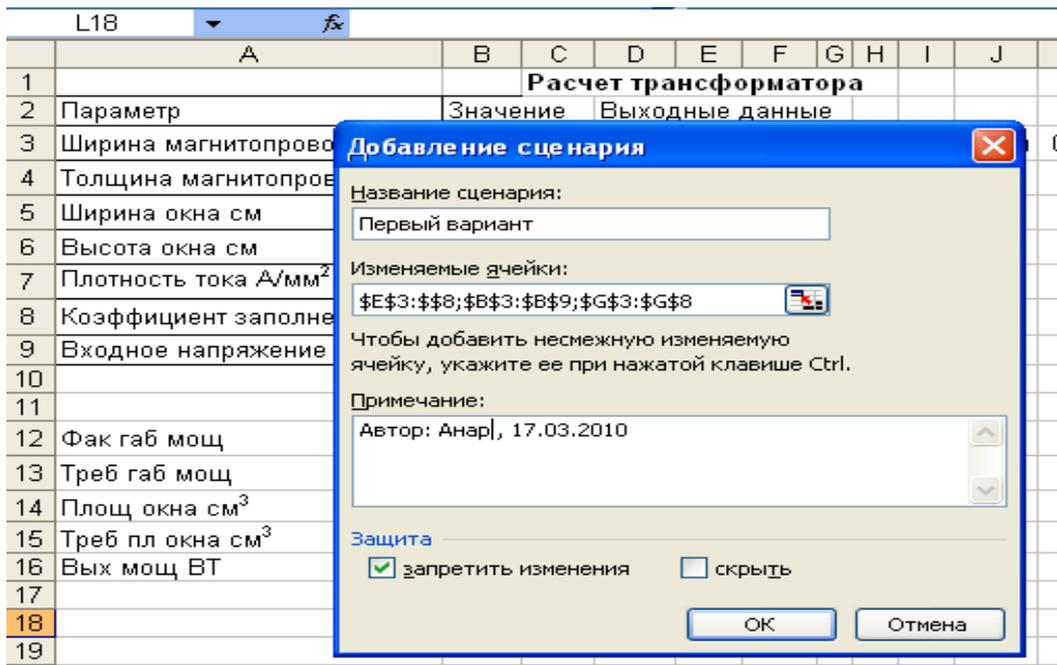
3-сурет

Жұмыс парағының форматталуы туралы бірнеше сөз. Сандық мәліметі бар ұяшықтар үшін форматтаудан сәйкес форматтау таңдалған. Негізгі параметрлі ұяшықтар кою рамкамен қоршалған

(құралдар тақтасындағы рамка сызығы арқылы). Бағаналарды индексті өзгергіштер атымен толтыру үшін, белгілі қосымшадағы Түзету (Правка) атты менюдегі Сервис (W2, W3, W4,...) параметры да қосылатын авто толтыруды қолдану ыңғайлы. 1.2 бөлімде егер ұяшықтағы мәліметтер санмен аяқталса автотолтыруда автоматты түрде өседі және барлық форматтар сақталып отырады. Барлық парақтар өзгертуден қорғалған, қою рамкалы ұяшықтан басқа. Формуланы параққа жазуда көптеген абсолютті сілтемелер қолданылған.

Символды енгізуді тездету үшін бұл жағдайда формула деңгейіндегі доллар «\$» белгісін енгізу ыңғайлы.

2.2.1-суреттен қолданушы трансформаторды есептеуде 19 параметрге дейін өзгерте алады. Бұл параметрлердің сандық мағынасы көптеген қиыстыруды құрастырады. Әрине парақпен жұмыс істеуде есеп үшін компьютер жадына бірнеше берілген мәлімет терімдерін ұстау ыңғайлы. Олардың сақталуының екі түрі бар: кітапта жаңа жұмыс парақтар ашу немесе сценарииді қолдану. Сценарии диспетчерін қолдану үшін «Сервис→Сценарии» командасы қолданылады.

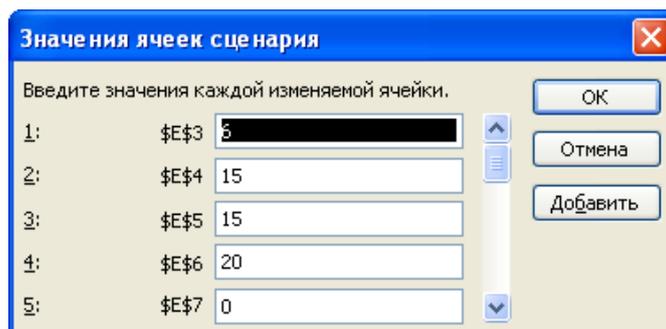


4-сурет – Жаңа сценарийдің құрылуы

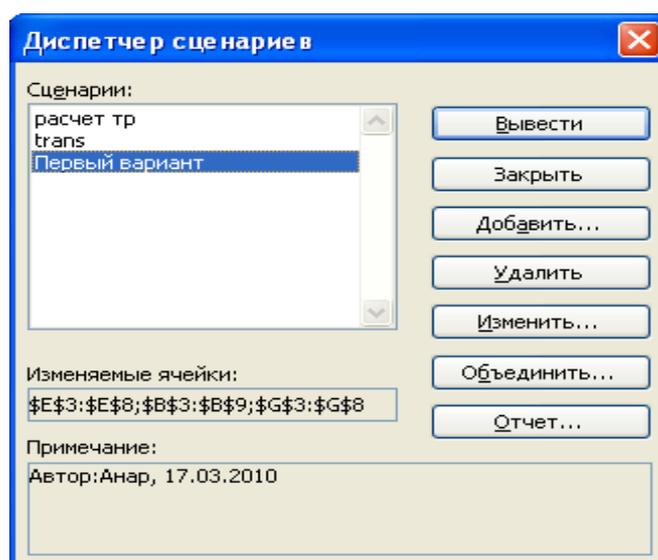
Егер де бірде бір сценарии ашылмаған болса программа сценарииді жасау терезесін активтейді, ол 2.2.3-суретте көрсетілген. Бұл қосу – диспетчер сценариийін деген кнопканы басу арқылы іске асады.

Сценарииді жасауда қолданушы оған ат беруге, және өзгерген ұяшықтардың диапазонын енгізуге міндетті. Бұл жағдайда ұяшықтар қою рамкамен қоршалғандықтан, жұмыс парақта крек ұяшықты тышқанмен ерекшелуеу арқылы, диапазонды беру оңай. Егер терезе кедергі жасаса оны шетке ысырып қоюға болады. Сценарииді қосу тереземен жұмыс аяқталған соң программа сценариийі ұяшық мағынасы деген терезені шығарады. Бұл терезеде барлық сценариийдің өзгермелі ұяшықтарының мағынасы берілген. Қолданушы оның кез келгенін өзгерте алады. Мұндай ұяшықтардың саны 32-ге дейін. Осымен сценарииді жасау жұмысы аяқталады.

2.2.5-суретте сценариийі диспетчер терезесі бейнеленген. Терезенің оң жағындағы орналасқан батырмалар қолданушының сценариийге қандай операциялар орындау керектігін көрсетеді. Жаңа сценариийді енгізгенде жұмыс парағы жаңа қолданылған сценариилердегі ұяшық мағыналарымен сәйкес қайта саналады және қабылданады.



5-сурет – Ұяшық мәндерін өзгерту



6-сурет – Сценарий диспетчері терезесі

Жасалған сценариимен екі үлгінің есептеу нәтижесін жасауға болады. Олардың біріншісі 6-суретте көрсетілген «структура типі» (Осы суретті салуда есептеу нәтижесі бар бірнеше жұмыс парағы есептеу нәтижесінің экранда орналасуы үшін жасырылған.

Есептеу нәтижесін жасау үшін қолданушы қандай ұяшықта есептеу нәтижесі бар екенін көрсетуі керек. Бұл нақты тапсырмаға тәуелді туынды ұяшық терімдері. Программа нәтижені жеке парақта шығарады. Бұл есептеу нәтижесінде өзгермелі және нәтижелі ұяшық мағынасы келтіріледі. Құрылым жасалуы үшін мәліметтер кесте түрінде беріледі. Құрылым өзгермелі және нәтижелі ұяшықтарды жеке қарауға мүмкіндік береді. Бұл есептеу нәтижесінде екі сценарий мәліметі қолданылды. Суреттен есептеу нәтижесінің ақпараттылығы ұяшық мекен жайын жол тақырыбы ретінде қолдануды төмендетеді.

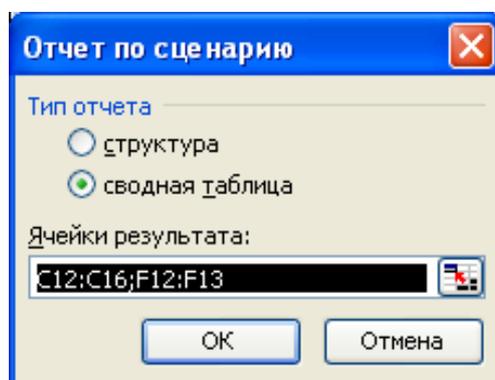
Есептеу нәтижесін сыртқы бейнесін жақсарту үшін, қосымша атаулар кірістіруге болады. (Қою →Атау →Кірістіру). Бұл жағдайда олар нәтижелі ұяшықтарға қолданылады. d1\_мм атауын соңғы ұяшыққа программаның ойлап тапқаны өте қызықты. Мен ұяшықтарға атау бергенде F13, программа оның айналасындағы ұяшықтарды тексеріп және оның тақырыбының оң жақ ұяшықта сақталғанын түсінеді. Атауда үтір, бос орын, жіберуге болмайтын символдар болғандықтан программа оларды сызықпен ауыстырады және дайын түрін береді: d1\_мм. Бұл ұсыныс ризашылықпен қабылданады.

Егерде қолданушы есептеу нәтижесін екінші типті «құрама кесте» жасағысы келсе ол сценарий бойынша есептеу нәтижесі терезесіне құрама кесте жайын орналастыруы керек. Автоматты есептеу нәтижесін енгізгенде сұраныс және құрама кесте деген құралдар тақтасын активтендіріледі онымен барлық басқа құрама кестелер сияқты жұмыс жасауға болады.

|    | A | B   | C | D     | E                 | F                         | G | H         |
|----|---|---|---|-------|-------------------|---------------------------|---|-----------|
| 1  |   |   |   |       |                   |                           |   |           |
| 2  |   | <b>Структура сценария</b>   |   |       |                   |                           |   |           |
| 3  |   |   |   |       | Текущие значения: |                           |   | расчет тр |
| 4  |   |   |   |       |                   | Автор: Анар ,<br>17.03.10 |   |           |
| 5  |   | <b>Изменяемые:</b>  |   |       |                   |                           |   |           |
| 6  |   | \$E\$3  |   | 6     |                   |                           |   | 6         |
| 7  |   | \$E\$4  |   | 15    |                   |                           |   | 15        |
| 8  |   | \$E\$5  |   | 15    |                   |                           |   | 15        |
| 9  |   | \$E\$6  |   | 20    |                   |                           |   | 20        |
| 10 |   | \$E\$7  |   | 0     |                   |                           |   | 0         |
| 11 |   | \$E\$8  |   | 0     |                   |                           |   | 0         |
| 12 |   | <b>Результат:</b>   |   |       |                   |                           |   |           |
| 13 |   | \$C\$12   |   | 74,88 |                   |                           |   | 74,88     |
| 14 |   | \$C\$13   |   | 72,94 |                   |                           |   | 72,94     |
| 15 |   | \$C\$14   |   | 7,99  |                   |                           |   | 7,99      |
| 16 |   | \$C\$15   |   | 5,18  |                   |                           |   | 5,18      |
| 17 |   | \$C\$16   |   | 62    |                   |                           |   | 62        |
| 18 |   |   |   |       |                   |                           |   |           |
| 19 |   | Примечания: столбец "Текущие значения" представляет значения изменяемых ячеек |   |       |                   |                           |   |           |
| 20 |   | момент создания Итогового отчета по Сценарию. Изменяемые ячейки для каждого   |   |       |                   |                           |   |           |
| 21 |   | сценария выделены серым цветом.   |   |       |                   |                           |   |           |
| 22 |   |   |   |       |                   |                           |   |           |
| 23 |   |   |   |       |                   |                           |   |           |
| 24 |   |   |   |       |                   |                           |   |           |

Готово

7-сурет – Бірінші типті сценарийдің есептеу нәтижесі



8-сурет – Сценарий есептеу нәтижесін таңдау

Кең ауқымды есептеулерді жасау үшін сценарии және есептеулер қолданылады. Есептеу нәтижесінің құрылымынан кестелі мәліметтерді өңдеуді автоматтау үшін сценариидің ең бірінші қолданылатынын көреміз. Құрылым және құрама кестелер өзімен кестелерді форматтауды ұсынады.

|    | A  | B                 | C       | D       | E       | F       | G       | H       | I | J |
|----|--|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---|---|
| 1  | \$E\$3:\$E\$8;\$B\$3:\$B\$9;\$G\$3:\$G\$82 | (Все)             |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 2  |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 3  |  | Ячейки результата |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 4  | \$E\$3:\$E\$8;\$B\$3:\$B\$9;\$G\$3:\$G\$8  | \$C\$12           | \$C\$13 | \$C\$14 | \$C\$15 | \$C\$16 | \$F\$12 | \$F\$13 |   |   |
| 5  | trans                                      | 74,88             | 72,94   | 7,99    | 5,18    | 62      | 1056    | 0,32    |   |   |
| 6  | вар  | 74,88             | 72,94   | 7,99    | 5,18    | 62      | 1056    | 0,32    |   |   |
| 7  | Первый вариант                             | 74,88             | 72,94   | 7,99    | 5,18    | 62      | 1056    | 0,32    |   |   |
| 8  | расчет тр                                  | 74,88             | 72,94   | 7,99    | 5,18    | 62      | 1056    | 0,32    |   |   |
| 9  |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 10 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 11 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 12 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 13 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 14 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 15 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 16 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 17 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 18 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 19 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 20 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 21 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 22 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 23 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 24 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |
| 25 |  |                   |         |         |         |         |         |         |   |   |

9-сурет – Сценарийдің екінші типті есептеу нәтижесі

## ӘДЕБИЕТ

- [1] Единый государственный экзамен: Физика: Контр. измерит. материалы/Под ред. Г.С.Ковалевой. – М.: Просвещение, 2003. с.30.
- [2] Единый государственный экзамен: Физика: 2004 - 2005. Контр. измерит. Материалы / Под ред. Г.С.Ковалевой. – М.: Просвещение, 2005. с.119.
- [3] G.M. Mahmoud, A.M. Mohamed, S.A.Aly// Physica A, v.292, 2001, p.193.
- [4] C.Hayashi. Nonlinear Oscillators in Physical Systems. – NY: McGraw-Hill, 1964.
- [5] Журнал «Информатика и образование».– 2003.–№12.
- [6] Журнал «Информатика и образование».– 2003.–№4.
- [7] Семакин И.Г. Информатика 7-9 (базовый курс).–М: Лаборатория Базовых знаний, 2003.
- [8] Семакин И.Г. Задачник-практикум (часть 2).–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2002.
- [9] Бордовская Н.А., Реан А.А. Педагогика. Санкт-Петербург: Питер, 2000.
- [10] Варламов С.Д., Эминов П.А.. Сурков В.А.Использование Microsoft Office в школе. Учебно-методическое пособие для учителей. Физика. М: ИМА-пресс, 2003.
- [11] Вильямс Р., Маклин К. Компьютеры в школе. М.: Прогресс, 1998.
- [12] Высоцкий И. Р., Компьютер в образовании, //Информатика и образование,2000,№ 1.
- [13] Дьячук П.П., Лариков Е.В. Применение компьютерных технологий обучения в средней школе. Красноярск: Изд-во КГПУ, 1996.
- [14] Игнатова И.Г., Н.Ю. Соколова. Информационные коммуникационные технологии в образовании // Информатика и образование- М.: 2003-№3.
- [15] Кавтрев А. Ф., Компьютерные модели в школьном курсе физики. Журнал «Компьютерные инструменты в образовании», № 2, Санкт-Петербург, Информатизация образования, 1998.
- [16] Кавтрев А. Ф., Опыт использования компьютерных моделей на уроках физики в школе. «Дипломат», Сб. РГПУ им. А. И. Герцена «Физика в школе и вузе», Санкт-Петербург, Образование, 1998.
- [17] Львовский М. Б., Львовская Г. Ф. Преподавание физики с использованием компьютера. // Информатика и образование — М.1999, № 5.

- [18] Плотникова И.А. Методика тестового контроля в старших классах// Информатика и образование- М.: 2000- №1.
- [19] Подласый И. П., Педагогика. Новый курс: Учебник для студентов пед. вузов: В 2 кн.-М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2000-Кн. 2.: Процесс воспитания.
- [20] Подласый И. П., Педагогика. Новый курс: Учебник для студентов пед. вузов: В 2 кн.-М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2000- Кн. 1: Общие основы. Процесс обучения.

#### REFERENCES

- [1] Uniform State Exam: Physics: Counter. measure. materials / Ed. G.S.Kovalevoy. - М.: Education, 2003. p.30.
- [2] A single state exam Physics: 2004 - 2005. Counter. measure. materials / Ed. G.S.Kovalevoy. - М.: Education, 2005. p.119.
- [3] G.M. Mahmoud, A.M. Mohamed, S.A.Aly // Physica A, v.292, 2001, p.193.
- [4] C.Hayashi. Nonlinear Oscillators in Physical Systems. - NY: McGraw-Hill, 1964.
- [5] The journal "Information and education».- 2003.-№12.
- [6] The magazine "Computer science and education».- 2003.-№4.
- [7] IG Semakin Computer 7-9 (basic course) .- Moscow: Laboratory of Basic Knowledge, 2003.
- [8] IG Semakin Book of problems Workshop (Part 2) .- М.: Laboratory of Basic Knowledge, 2002.
- [9] Bordovskaya NA, AA Rean Pedagogy. St. Petersburg: Peter, 2000.
- [10] SD Varlamov, Eminem PA .. Surkov V.A.Ispolzovanie Microsoft Office at school. Educational handbook for teachers. Physics. M: IMA-Press, 2003.
- [11] Williams R., Maclean C. Computing in schools. М.: Progress, 1998.
- [12] Vysotsky IR, computers in education, // Informatics and Education, 2000, № 1.
- [13] Djachuk PP, Larikov EV The use of computer technology in high school. Krasnoyarsk Univ KSPU, 1996.
- [14] Ignatova IG, NY Sokolov. Information Communication Technologies in Education // Information and education-M.: 2003.-№3.
- [15] Kavtrev AF, computer models in the school physics course. The magazine "Computer Tools in Education», № 2, St. Petersburg, Informatization of Education, 1998.
- [16] Kavtrev AF experienced in the use of computer models in physics lessons at school. "Diplomat", Proc. RSPU. Herzen "Physics in schools and universities," St. Petersburg, Education, 1998.
- [17] MB of Lviv, Lviv GF Teaching Physics with a computer. // Information and education - M.1999, № 5.
- [18] IA Plotnikova Methods of test control in high school // Information and education-M.: 2000- №1.
- [19] Podlas IP Pedagogy. New course: textbook for students ped. universities: In 2 kn. М.: humanity. ed. VLADOS Center, 2000 kN. 2.: The process of education.
- [20] Podlas IP Pedagogy. New course: textbook for students ped. universities: In 2 kn. М.: humanity. ed. VLADOS center, 2000- Bk. 1: General principles. The learning process.

### МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ТАБЛИЦЫ ПО ФИЗИКЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ СЦЕНАРИЙ СОЗДАНИЯ ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ ТРАНСФОРМАТОРА

Ж. А. Мусиралиев

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** трансформатор, электронная таблица, MS Excel, физика.

**Аннотация.** В работе рассматривается применение электронной таблицы для проектирования трансформаторов. Показано наглядность и удобства использования MS Excel при определении параметров пластин и количества витков обмоток. Сценарии, чтобы дать ему имя, и изменил в диапазоне ячеек. В этом случае клетки, крест мыши, чтобы выделить ячейку на странице, легко полосы. Если это не исключает окно может быть отменено. В конце окне сценария программировать клетку, чтобы почувствовать в окне сценария. Этот сценарий изменения значения ячеек в окне. Пользователь может изменить любой из его. Таких клеток в 32 часов число. В конце работы трансформатор может быть выполнен в нескольких ограничений. Существует разделение магнитного шнур питания. Магнитное притяжение геометрические характеристики смысле. Сок признаны достаточно сил, чтобы ограничить область окна могут иметь короткое окно в рулонах для упаковки. Кнопки, расположенные на правой стороне окна, сценарий пользователя для выполнения каких-либо операций. При вводе нового листа сценарий к новой ячейке в соответствии со значениями сценария будут приниматься и рассматриваться.

Поступила 07.07.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 242 – 246

**VOLUME MATERIAL FOR SPINTRONICS  
ON BASIS OF INTERMETALLIDE  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$**

**Yu. A. Ryabikin, O. V. Zashkvara, V. V. Klimenov, A. T. Isova, S. Zh. Tokmoldin**

Institute of Physics and Technology, Almaty, Kazakhstan

E-mail: yuar-39@mail.ru

**Keywords:** intensity, solid, cell, semiconductor, resistivity.

**Abstract.** The increase of the amount of information without losing speed transmission has always been the most important task of solid state physics. In this regard, in recent years there is an intensively developing new solid-state physics – spintronics. In the article the question on possibility of use under certain conditions, the alloy-based intermetallic compound  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  as the bulk material for spintronics. Used to date materials in spintronics with the necessary set of properties (semiconducting and ferromagnetic) could only be made in the form of thin films.

As far as we know in the literature still lack information about the preparation of bulk materials for spintronics. The applicability of the same bulk materials may allow to significantly extend the capabilities of spintronics. Moreover, it is important that the Curie temperature of the material substantially above ambient ( $T_C=C$ ). All this gives us hope that the proposed volume of material based on intermetallic compound  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  will find wide application in spintronics, but also will allow a new look at the problem of obtaining three-dimensional materials for spintronics. In addition, there is a possibility in case of need-based intermetallic compound  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  samples in the form of thin films. The authors propose to use in spintronics, a new surround material – alloy-Zn-based intermetallic compound  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$ . Alloy-Zn stoichiometric composition (17 weight. percent cobalt) has a complex cubic lattice with 52 atoms in the unit cell. The solid solutions of introduction of the temperature coefficient of resistivity are negative, indicating that these alloys exhibit semiconductor properties. Measurements by EPR showed that for samples with a concentration From  $C=23-24$  is a ferromagnetic interaction between the ions. The combination of features of the ferromagnetic and semiconductor properties of the bulk solid solutions on the basis of intermetallic compound  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  may be useful for their use in spintronics.

УДК 541.122:538.214

**ОБЪЕМНЫЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ СПИНТРОНИКИ  
НА ОСНОВЕ ИНТЕРМЕТАЛЛИДА  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$**

**Ю. А. Рябкин, О. В. Зашквара, В. В. Клименов, А. Т. Исова, С. Ж. Токмолдин**

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** интенсивность, твердое тело, ячейка, полупроводник, электросопротивление.

**Аннотация.** Повышение объема передаваемой информации без потери скорости ее передачи всегда являлось важнейшей задачей физики твердого тела. В связи с этим в последние годы интенсивно развивается новое направление физики твердого тела – спинтроника.

В статье рассмотрен вопрос о возможности использования при определенных условиях сплава на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  в качестве объемного материала для спинтронике. Используемые до сих пор материалы в спинтронике с необходимым набором свойств (полупроводниковые и ферромагнитные) могли быть изготовлены только в виде тонких пленок. Насколько нам известно в литературе до сих пор отсутствуют сведения о получении объемных материалов для спинтронике. Применимость же объемных материалов может позволить существенно расширить возможности спинтронике. К тому же очень важно, что температура Кюри предлагаемого материала значительно выше комнатной ( $T_K=398\text{K}$ ). Все это позволяет

надеяться, что предлагаемый объемный материал на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  найдет широкое применение в спинтронике, а также позволит по-новому взглянуть на проблему получения объемных материалов для спинтроники. Кроме того, имеется возможность в случае необходимости получения на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  образцов и в виде тонких пленок.

Авторы предлагают использовать в спинтронике новый объемный материал – сплав Co-Zn на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$ . Сплав Co-Zn стехиометрического состава (17 вес. процентов кобальта) имеет сложную кубическую решетку с 52 атомами в элементарной ячейке. У твердых растворов внедрения температурный коэффициент электросопротивления имеет отрицательное значение, что свидетельствует о том, что эти сплавы проявляют полупроводниковые свойства. Измерения методом ЭПР показали, что у образцов с концентрацией кобальта  $C=23-24$  процента происходит появление ферромагнитного взаимодействия между ионами Co. Сочетание особенностей ферромагнитных и полупроводниковых свойств объемных твердых растворов на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  может оказаться полезным для использования их в спинтронике.

Спинтроника сравнительно новая, быстро развивающаяся область науки и техники, основанная на передаче информации не с помощью электрических свойств электронов (электрического тока), а использующая перенос магнитных составляющих (спиновые характеристики электронов) ориентированных спинов из ферромагнетика в немагнитный полупроводник (ПП) [1, 2]. Проводимые в этом направлении работы являются весьма актуальными, поскольку появляется возможность создания одноэлектронных систем логических структур и спин-информационных систем, в которых информационной ячейкой памяти служит спин электрона: один спин – один бит информации [3].

Если использовать в качестве эмиттеров (источников) поляризованных электронов ферромагнитные металлы (ФМ), то обычно достижимая степень поляризации спинов в этом случае не превышает 10%. Почти 100% степень поляризации спинов была получена в системах ПП-EuO и ПП-халькогенидные шпинели. К сожалению, ферромагнитные свойства в этих системах проявляются лишь при низких температурах [4,5], что ограничивает их практическое использование. Кроме того, технические трудности с получением хорошего электрического контакта между ФМ и ПП также создают дополнительные проблемы в использовании подобных систем, которые к тому же изготавливаются только в пленочном виде. Становится ясным, что решением этих проблем, хотя бы частичным, является создание ферромагнитных полупроводников (ФП) с температурой Кюри ( $T_K$ ) выше комнатной. В последнее время появились сообщения о синтезе в США пленочных ферромагнетиков в системе твердых растворов  $\text{Gd-Mn-Sb}$ ,  $\text{Gd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{GeP}_2$  (т.н. разбавленные МП) с  $T_K$  выше комнатной [6, 7]. Недавно российскими учеными также были получены соединения, имеющие  $T_K$  выше комнатной ( $\text{CdGeAs}_2:\text{Mn}$ ,  $\text{ZnSiAs}_2:\text{Mn}$ ) [8,9,10]. Это первые успехи в получении ФП с  $T_K$  выше комнатной. К сожалению, все эти системы получены в пленочном виде. Однако, развитие спинтроники требует разнообразных по составу и свойствам новых ФП.

Для устранения указанных недостатков авторы предлагают использовать в спинтронике новый объемный материал - сплав Co-Zn на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  (электронное состояние с концентрацией  $\sim (21/13)$  эл/ат). На основе ингредиентов Co и Zn сплавы для исследования готовились из цинка чистотой 99,99% и Co чистотой 99,99% в корундовых тиглях в шахтной печи сопротивления под покровом расплавленной буры. Сплав разливали в стальные разъемные изложницы для получения слитков диаметром 10 и 22 см. Для приведения в равновесие пробы были подвергнуты длительному ступенчатому отжигу.

Некоторые свойства сплава Co-Zn приведены в работе [11]. Сплав Co-Zn стехиометрического состава (17 вес. процентов Co) имеет сложную кубическую решетку с 52 атомами в элементарной ячейке, упорядоченно расположенными по узлам решетки. Исследование электрических характеристик сплавов Co-Zn в области концентраций Co 13-24 вес. процентов показало, что у твердых растворов внедрения (концентр. Co больше 17 вес. процентов) температурный коэффициент электросопротивления имеет отрицательное значение (рисунки 1 и 2).

Этот факт, а также величина электросопротивления в этой области концентраций Co свидетельствует о том, что эти сплавы проявляют полупроводниковые свойства. Измерения методом ЭПР показали [12], что для образцов с концентрацией Co  $C = 23-24$  вес. процентов интенсивность сигнала магнитного резонанса увеличилась почти на три порядка по сравнению с образцом с концентрацией 13 весовых процентов Co.

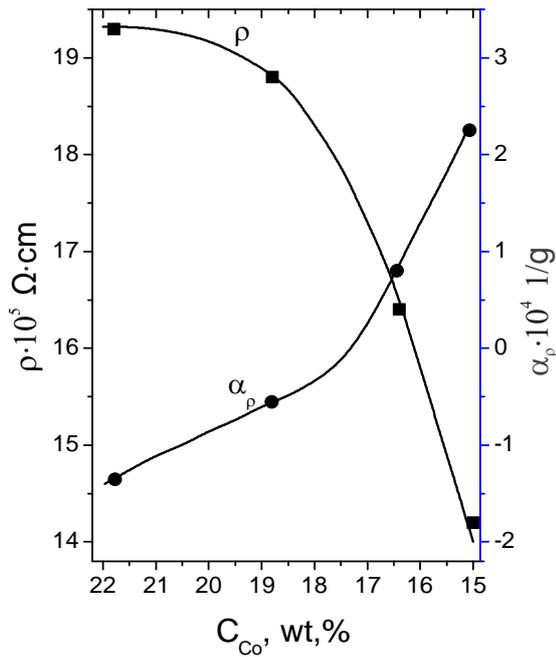


Рисунок 1 – Зависимость удельного электросопротивления ( $\rho$ ) и его термического коэффициента ( $\alpha_\rho$ ) сплавов системы кобальт-цинк от концентрации кобальта

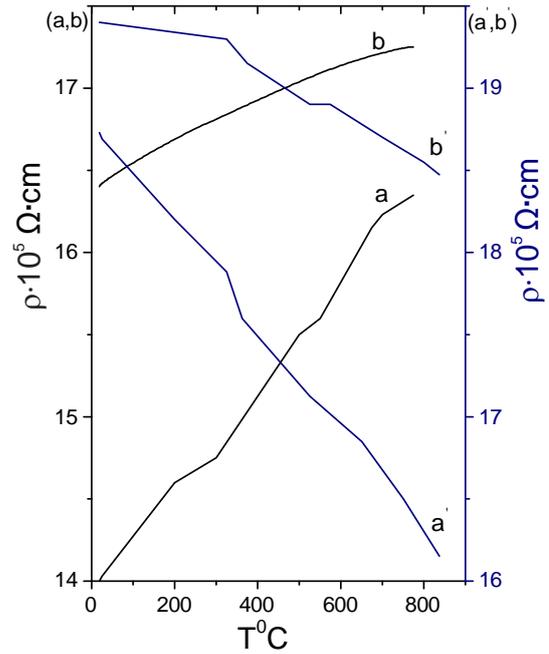


Рисунок 2 – Электросопротивление сплавов системы кобальт-цинк: a – c=17,0; b – c=18,5; a' – c=20,75; b' – c=23,8 ат. % Co

Это свидетельствует о появлении ферромагнитного взаимодействия между ионами кобальта при этих концентрациях. Для образца сплава с концентрацией 24 вес. Процентом Co наблюдается ЭПР сигнал, состоящий из двух линий (рисунок 3). Это позволяет заключить, что в этом случае происходит образование двух магнитных подрешеток кобальта, внутри которых его ионы взаимодействуют ферромагнитно между собой. Эта особенность предлагаемого материала может представлять дополнительный интерес для экспериментов по спинтронике. Температурные измерения на образце с концентрацией 25 вес. процентов Co показали, что для него  $T_K = 398\text{K}$  [11].

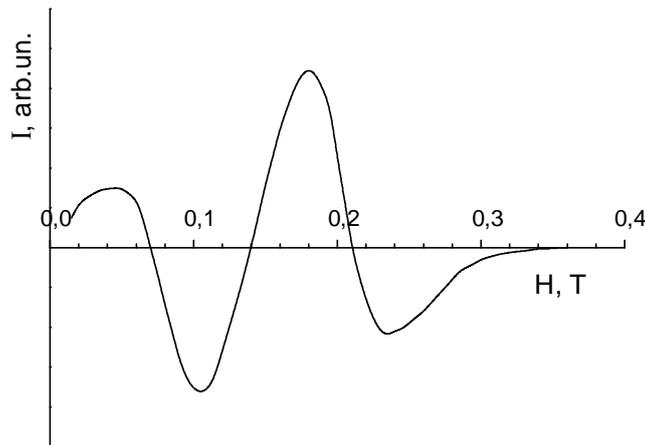


Рисунок 3 – Спектр ЭПР системы кобальт-цинк при концентрации кобальта c = 24 ат%

Таким образом сочетание особенностей ферромагнитных и полупроводниковых свойств объемных твердых растворов на основе интерметаллида  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  может оказаться полезным для их использования в спинтронике.

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта №77 от 16.09.2012 «Разработка стабильных квантово-размерных спиновых наноструктур для телепортации неравновесных когерентных квантовых состояний» Министерства образования и науки Республики Казахстан.*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zutic S, Das Sarma // *Rev. Mod. Phys.*-2004.-№76.-P. 323.  
 [2] Ohno H. // *Science.*- 1998. - №281. P. 951-956.  
 [3] Matsukura F., Ohno H., Shen H., Sugawara Y.// *Phys. Rev. B.*- 1998.-№57- 2037.  
 [4] Edmonds K.M., Wang K.Y., Campion R.P., Neumann A.C., Farley N.R.S., Gallagher B.L., Foxon C.T.// *Appl. Phys. Lett.*- 2002.- №81- 4991.  
 [5] Edmonds K.M, Boguslawski P., Wang K.Y., Campion R.P., Novikov S.N., Farley N.R., Gallagher B.L., Foxon C.T., Sawicki M., Dietl T., Buongiorno Nardelli M., Bernholc J. // *Phys. Rev. Lett.*- 2004.-№ 92.- 1.  
 [6] Medvedkin Gennadiy A., Ishibashi Takayuki, Nishi Takao, Hayata Koji, Hasegawa Yoichi, Sato Katsuaki.//*Jpn. J. Appl. Phys. L.*- 2000.- №39.- 949.  
 [7] Medvedkin G.A., Hirose K., Ishibashi T., Nishi T., Voevodin V.G., Sato K., Growth J.// *Cryst.*- 2002.-№ 236.- 609.  
 [8] Демин Р.В., Королева Л.И., Маренкин С.Ф., Михайлов С.Г., Новоторцев В.М., Калинин В.Т., Аминов Т.Г., Шимчак Р., Шимчак Г., Баран М. // Письма в ЖТФ.-2004.- №30.- 81.  
 [9] Королева Л.И., Павлов В.Ю., Заширинский Д.М., Маренкин С.Ф., Варнавский С.А., Шимчак Р., Добровольский В., Киланский Л. // ФТТ.-2007.-№49.- 2022.  
 [10] Королева Л.И., Заширинский Д.М., Хапаева Т.М., Маренкин С.Ф., Шимчак Р., Крзуманска Б., Добровольский В., Киланский Л.// ФТТ.- 2009.- №51.- 286.  
 [11] Мелихов В.Д., Пресняков А.А. Структура и свойства электронных фаз// Наука,-1973.- с.199.-Алма-Ата.  
 [12] Рябикин Ю.А., Мелихов В.Д., Зашквара О.В. // ФММ.- 1996.-№81.- 36.

## REFERENCES

- [1] Zutic S, Das Sarma. *Rev. Mod. Phys.* **2004**, №76, P.323. (in Eng)  
 [2] Ohno H. *Science*, **1998**, №281, P.951. (in Eng)  
 [3] Matsukura F., Ohno H., Shen H., Sugawara Y. *Phys. Rev. B*, **1998**, №57, P.2037. (in Eng)  
 [4] Edmonds K.M., Wang K.Y., Campion R.P., Neumann A.C., Farley N.R.S., Gallagher B.L., Foxon C.T. *Appl. Phys. Lett.*, **2002**, №81, P.4991. (in Eng)  
 [5] Edmonds K.M, Boguslawski P., Wang K.Y., Campion R.P., Novikov S.N., Farley N.R., Gallagher B.L., Foxon C.T., Sawicki M., Dietl T., Buongiorno Nardelli M., Bernholc J. *Phys. Rev. Lett*, **2004**, №92, P.1.  
 [6] Medvedkin Gennadiy A., Ishibashi Takayuki, Nishi Takao, Hayata Koji, Hasegawa Yoichi, Sato Katsuaki. *Jpn. J. Appl. Phys. L*, **2000**, №39, P.949. (in Eng)  
 [7] Medvedkin G.A., Hirose K., Ishibashi T., Nishi T., Voevodin V.G., Sato K., Growth J. *Cryst.*, **2002**, № 236, P.609. (in Eng)  
 [8] Demin R.B., Koroleva L.I., Marenkin S.F., Mikhailov S.G., Novotortsev V.M., Kalinnikov V.T., Aminov T.G., Shimchak R., Shimchak G., Baran M., *Pisma v JTF*, **2004**, №30, P.81. (in Russ.)  
 [9] Koroleva L.I., Pavlov V.Yu., Zashirinskii D.M., Marenkin S.F., Varnavskii C.A., Shimchak R., Dobrovolskii V., Kilansky L. *FTT*, **2007**, №49, P.2022. (in Russ.)  
 [10] Koroleva L.I., Zashirinskii D.M., Hapaeva T.M., Marenkin S.F., Shimchak R., Krzumanska B., Dobrovolskii V.D., Kilansky L. *FTT*, **2009**, №51, P.286. (in Russ.)  
 [11] Melikhov V.D., Presnyakov A.A. *The structure and properties of the electronic phase, Nauka*, **1973**, 199p. Alma-Ata. (in Russ.)  
 [12] Ryabikin Yu.A., Melikhov V.D., Zashkvara O.V. *FMM*, **1996**, №81, P.36. (in Russ.)

Co<sub>5</sub>Zn<sub>21</sub> ИНТЕРМЕТАЛИД НЕГІЗІНДЕГІ СПИНТРОНИКАҒА АРНАЛҒАН КӨЛЕМДІ МАТЕРИАЛ

Ю. А. Рябикин, О. В. Зашквара, В. В. Клименов, А. Т. Исова, С. Ж. Токмолдин

Физика-техникалық институт, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** қарқындылық, қатты дене, ұяшық, жартылай өткізгіш, электр кедергі.

**Аннотация.** Авторлар спинтроникада жаңа материал (Co<sub>5</sub>Zn<sub>21</sub> интерметаллиді негізіндегі Co-Zn қорытпасын) қолдануды ұсынып отыр. Құрамы стехиометриялық Co-Zn қорытпа элементар ұяшығында 52 атомы бар күрделі кубты торға ие. Қатты қоспаларда электрлік кедергінің температуралық коэффициентін ендіру теріс мәнге ие. Бұл осы қорытпалар жартылай өткізгіштік қасиет көрсететінінің дәлелі. ЭПР әдісі бойынша өлшеу, кобальт концентрациясы С=23-24 пайызды құрайтын үлгіде Co иондар арасында ферромагниттік байланыс пайда болатындығын көрсетті. Co<sub>5</sub>Zn<sub>21</sub> интерметаллид негізіндегі көлемді қатты қоспалардың ферромагниттік және жартылай өткізгіштік қасиеттер ерекшеліктерінің үйлесімділігі, оларды спинтроникада қолдану пайдалы болуы мүмкін.

Таратылатын ақпараттың көлемін таралу жылдамдығын жоғалтпай арттыру бұл қатты дене физикасының маңызды мәселелесі болып табылады. Бұған байланысты соңғы жылдары қатты дене физикасының спинтроника деп аталатын жаңа саласы қарқынды дамуда.

Мақалада спинтроникаға арналған көлемді материал ретінде  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  интерметалиді негізіндегі қорытпаны белгілі бір жағдайда қолдану мүмкіндіктері қарастырылады. Спинтроникада әліде қолданылатын қажетті қасиеттер (жартылай өткізгішті және ферромагнитті) жыйынтығы бар материалдар, жұқа қабықша ретінде жасалатын. Бізге белгілісі әдебиеттерде әлі де спинтроникаға арналған көлемді материалдарды алу жөніндегі мәліметтер кездеспейді. Көлемді материалдарды қолдану, спинтроника мүмкіндігін біршама кеңейту мүмкін. Сонымен қатар ұсынылып отырылған материалдың Кюри температурасы, бөлме температурасынан біршама жоғары ( $T_K=398\text{K}$ ) болғандығы өте маңызды. Бұның бәрі ұсынылып отырылған  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  интерметалиді негізіндегі көлемді материал спинтроникада қолданыс табады деген сенімге арқау болады. Бұған қоса қажет болған жағдайда  $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$  интерметалиді негізіндегі үлгілерді жұқа қабықша ретінде жасау мүмкіндігі бар.

*Поступила 07.07.2015 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 246 – 249

### EXCLUSION OF SMALL DENOMINATORS IN THE TWO-BODY PROBLEM

**M. D. Shinibaev<sup>1</sup>, A. A. Bekov<sup>1</sup>, E. A. Akinbekov<sup>2</sup>, B. N. Rakhimzhanov<sup>3</sup>,  
M. K. Baubekova<sup>4</sup>, G. A. Abdulaeva<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>JSC «National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>South-Kazakhstan State University after M.Auezov, Shymkent, Kazakhstan;

<sup>3</sup>Kokshetausky State University after Sh.Ualikhanov, Kokshetau, Kazakhstan;

<sup>4</sup>South-Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shinibaev\_maxsut@mail.ru, bekov@mail.ru

**Keywords:** resonance, orbits, small denominator, the gravitational field, the force function, Earth satellite, polar coordinates.

**Abstract.** It is known that the problems of the mechanics of space flight in the majority cannot be solved in closed form in quadratures, therefore, apply various approximate methods for solving systems of differential equations of motion. One of the important methods of the study of perturbed motion of a space object associated with the construction of new types of intermediate orbits. All intermediate orbit, used in mechanics of space flight, can be divided into three types [1,3]:

- 1) the unperturbed Keplerian orbit;
- 2) semi-analytical intermediate orbit;
- 3) Nekipelova intermediate orbit.

Each of them has certain advantages and flaws. Give a brief description of the intermediate orbit.

The choice of the Keplerian orbit best when the eccentricity of the investigated orbit is small and the amount of time the movement is small. As soon as the eccentricity of the orbit is equal to and greater than the limit Laplace  $e = 0,667$  of keplero the ellipse becomes unacceptable, so as decision submitted by the ranks, becoming divergent and to save the required accuracy of the calculations required values have to take into account a large number of members of these series.

Furthermore the orbits of type 1, 2 and type 3 can be resonant. That is, regardless of the decision of the investigator (in the odds) appear «small denominators». Therefore, as of today universal variables without «small denominators» is the question of the hour.

In the article are built such variables in the problem of two bodies.

## ИСКЛЮЧЕНИЕ «МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ» В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

М. Д. Шинибаев<sup>1</sup>, А. А. Беков<sup>1</sup>, Е. А. Акинбеков<sup>2</sup>, Б. Н. Рахимжанов<sup>3</sup>,  
М. К. Баубекова<sup>4</sup>, Ж. А. Абдулаева<sup>4</sup>

<sup>1</sup>АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup>Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан;

<sup>3</sup>Кокшетауский государственный университет им. Ш.Уалиханова, Кокшетау, Казахстан;

<sup>4</sup>Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** резонанс, орбита, малый знаменатель, поле тяготения, силовая функция, спутник Земли, полярные координаты.

**Аннотация.** Известно, что задачи механики космического полета в большинстве своем не могут быть проинтегрированы в замкнутом виде в квадратурах, поэтому применяются различные приближенные методы решения систем дифференциальных уравнений. Один из актуальных методов изучения возмущенного движения космического объекта связан с построением новых типов промежуточных орбит. Все промежуточные орбиты, применяемые в механике космического полета можно условно разделить на три вида [1, 3]:

- 1) невозмущенные кеплеровские орбиты;
- 2) полуаналитические промежуточные орбиты;
- 3) некеплеровские промежуточные орбиты.

Каждая из них обладает преимуществами и изъянами. Дадим краткую характеристику промежуточных орбит.

Выбор кеплеровской орбиты выгоден, когда эксцентриситет исследуемой орбиты мал и промежуток времени движения невелик. Как только эксцентриситет орбиты становится равным или больше предела Лапласа  $e = 0,667$  кеплеров эллипс становится неприемлемым, так как решения, представленные рядами, становятся расходящимися и для сохранения требуемой точности вычислений искомых величин приходится учитывать большое количество членов этих рядов.

Кроме того все орбиты и типа 1, и типа 2, и типа 3 могут быть резонансными, то есть в решениях независимо от исследования (в коэффициентах) появляются «малые знаменатели». Поэтому на сегодня актуальны универсальные переменные без «малых знаменателей». В статье построены такие переменные в задаче двух тел.

Пусть тело P совершает движение около центра масс тела P<sub>0</sub>, тогда в пределах задачи двух тел имеем следующие дифференциальные уравнения движения [1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\vec{r}, x, y, z$  – радиус-вектор и координаты тела P;  $\mu = f(m_0 + m)$ ;  $f$  – постоянная тяготения;  $m_0$  – масса центрального тела P<sub>0</sub>;  $m \approx 0$  – масса пробного тела P.

Дифференциальные уравнения (1) допускают интегралы площадей:

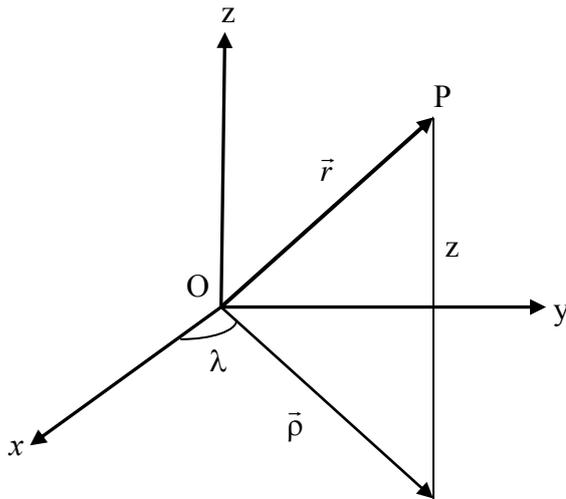
$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = C_1, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = C_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = C_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и интеграл энергии

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad V^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

где  $h$  – постоянная интеграла энергии и  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$  – постоянная интеграла площадей.

Перейдем к цилиндрической системе координат  $\rho, \lambda, z$ , где  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ ,  $\rho$  – проекция  $\vec{r}$  на плоскость Oxy (где O – центр масс тела P<sub>0</sub>),  $\lambda = \angle(x, \rho)$  – истинная долгота.



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \lambda, \\ y &= \rho \sin \lambda, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальные уравнения (1) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{\mu \rho}{r^3} &= 0, & \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} \right) &= 0; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из второго уравнения (4) имеем другую форму записи интеграла площадей

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = C, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{C}{\rho^2},$$

где  $C$  – постоянная интеграла площадей.

Введем новые безразмерные переменные в следующем виде [2]:

$$w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho} = \frac{\mu}{C^2} z w, \quad (5)$$

тогда после перехода от (4) к уравнениям Клеро-Лапласа [1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u &= \frac{\mu}{C^2} (1 + s^2)^{-\frac{3}{2}}, & u &= \frac{1}{\rho}, & \frac{d^2 s}{d\lambda^2} + s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\lambda^2} + w &= (1 + s^2)^{-\frac{3}{2}}, & \frac{d^2 s}{d\lambda^2} + s &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

При резонансе из (5)  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $w \rightarrow 0$ , и в случае отсутствия «финальных движений»  $z$  ограниченная функция  $z < \rho$ , поэтому из (6)-(7)  $s = \xi \cdot w$ , где  $\xi = \frac{\mu z}{C^2}$  – безразмерная ограниченная величина, следовательно, при  $\rho \rightarrow \infty$  переменные  $w \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$  позволяют исключить «малые знаменатели».

Таким образом, мы нашли непрерывные универсальные безразмерные переменные  $w, \xi, s$  для задачи двух тел, которые не теряют смысла, как в резонансных, так и в нерезонансных областях движения пробного тела, что имеет практическую значимость во всех резонансных задачах теории космического полета.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К.Абалакин, Е.П.Аксенов, Е.А.Гребеников, В.Г.Демин, Ю.А.Рябов.– М.: Наука, 1976.– 864 с.
- [2] Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли.– Алматы, 2010.- 132 с.
- [3] Шинибаев М.Д. Поступательные движения пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральной поле тяготения.- Алматы: РИО ВАК РК, 2001.- 128 с.

## REFERENCES

- [1] Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoj mehanike i astrodinamike / V.K.Abalakin, E.P.Aksenov, E.A.Grebenikov, V.G.Demin, Ju.A.Raybov.–M.: Nauka, 1976.-864 s. (in Russ)
- [2] Shinibaev M.D. Postupatelno- vrashatelnye dvizhenij tverdogo tela v stacionarnom i nestacionarnom pole taygoteniya Zemli.– Almaty: Gilim, 2010.– 132 s. (in Russ).
- [3] Shinibaev M.D. Postupatelnye dvizhenij passivno gravitiruyoushego tela v centralnom i necentralnom pole taygotenia.- Almaty: RIO VAK RK, 2001.– 128 s. (in Russ).

## «КІШІ БӨЛГІШТЕРДІ» ЕКІ ДЕНЕ ЕСЕБІНДЕ ЖОЮ ӘДІСІ

М. Д. Шыныбаев<sup>1</sup>, А. А. Беков<sup>1</sup>, Е. А. Ақынбеков<sup>2</sup>, Б. Н. Рахымжанов<sup>3</sup>,  
М. К. Баубекова<sup>4</sup>, Ж. А. Абдулаева<sup>4</sup>

- <sup>1</sup>«Ұлттық Ғарыштық Зерттеулер мен Технологиялар Орталығы» АҚ, Алматы, Қазақстан;  
<sup>2</sup>М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан;  
<sup>3</sup>«Ш.Ұалиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті», Көкшетау, Қазақстан;  
<sup>4</sup>Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** резонанс, орбита, кіші бөлгіш, тартылыс өрісі, күш функциясы, Жер серігі, полярлық координаттар.

**Аннотация.** Ғарыштық ұшу механикадағы дифференциалдық тендеулер нақты түрде интегралданбайды, сондықтан түрлі жуықтап интегралдау әдістері қолданылады. Ғарыштық объектінің ауытқу қозғалысын зерттеудің өзекті әдістерінің бірі аралық орбитаның жаңа түрін құруға байланысты Ғарыштық ұшу механикасында қолданылатын барлық аралық орбиталарды шартты түрде үшке бөлуге болады:

- 1) ауытқымаған кеплер орбиталары;
- 2) жартылай аналитикалы орбиталар, олар кеплер элементтеріне сүйенеді;
- 3) кеплер элементтеріне тәуелсіз орбиталар.

Бұлардың ерекшеліктеріне байланысты тиімді және тиімсіз жақтары бар.

Қысқаша сипаттама беріп өтейік. Кеплер орбитасы эксцентриситет Лаплас шектеуіне тәуелді,  $e = 0,667$  болғанда шешімді бейнелейтін қатарлар жинақталмай қалады да қолданыстан жарамсыздық танытады.

Тағы да 1,2 типті және 3-ші типті орталық орбиталар резонанстық қозғалыста болуы мүмкін. Осыған байланысты шешімдердегі коэффициенттерде «кіші бөлгіштер» пайда болады. Сондықтан әзір «кіші бөлгішсіз» айнымалыларды орнату өзекті проблема қатарына кіреді.

Мақалада осындай универсалдық айнымалылар екі дене есебінде орнатылды.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 250 – 256

**STABILITY AND BIFURCATION OF RESONANCE  
DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS (RDS)**

**К. В. Бапаев<sup>1</sup>, С. С. Сламжанова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>I. Zhansugurov Zhetysu university, Taldykorgan, Kazakhstan

**Key words:** difference-dynamic system, normalization bifurcation, resonance, strong stability.

**Abstract.** A nonlinear difference-dynamical systems (DDS) with parameter are considered in critical case complex-conjugate  $m$ -pair roots modulo equal to one.

Such DDS are subdivided neatly into resonance and no resonance from mathematical point of view. However, as a practical matter, this subdivision is conditioned character, when, for example, coefficients of DDS are known approximately.

Each resonance DDS is arbitrarily near (in terms of coefficients) to some no resonance DDS, and vice versa. It is not clear a priori, how these DDS are connected by conditions of stability. We arrive to statement of a new problem about strong stability, strong instability and to change of DDS's stability with continuous depending in parameters.

Preliminary a method of normalization is used to DDS for solving these problems, an interconnection is established between of normalization's types, ordinary (at fixed parameter's value), continuously (when the parameter is changed continuously on defined domain).

Problems on the strong stability and changing of stability are considered in detail. The results provide to make non trivial conclusions by property of DDS about DDS's stability close to resonance.

УДК 517.962

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ РЕЗОНАНСНЫХ  
РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (РДС)**

**К. В. Бапаев<sup>1</sup>, С. С. Сламжанова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Жетысуский университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан

**Ключевые слова:** разностно-динамическая система, бифуркация, резонанс, сильная устойчивость.

**Аннотация.** В работе рассматриваются нелинейно разностно-динамические системы (РДС) с параметром в критическом случае  $m$ -пар комплексно-сопряженных корней по модулю равных единице.

С математической точки зрения такие РДС-ы четко подразделяются на резонансные и нерезонансные. Однако, с практической точки зрения, когда, например, коэффициенты РДС известны лишь, приближенно подобная классификация носит условный характер.

Любая резонансная РДС сколь угодно близка (в смысле коэффициентов) к некоторой нерезонансной РДС, и наоборот. Априори неясно как связаны свойствами устойчивости этих РДС. Это приводит нас к постановке новой задачи, о сильной устойчивости, сильной неустойчивости и смене устойчивости РДС с непрерывно зависящим от параметра.

Для решения этих задач предварительно применяется к РДС метод нормализации, устанавливается взаимосвязь между типами нормализации, обычной (при фиксированном значении параметра), непрерывной (когда параметр непрерывно меняется в определенной области).

Подробно изучена задача о сильной устойчивости и смене устойчивости. Полученные результаты позволяют по свойствам резонансных РДС сделать нетривиальный вывод об устойчивости РДС близких к резонансным.

Объект исследования, задача об устойчивости в критическом случае РДС, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет  $m$ -пар комплексно-сопряженных корней по модулю равных единице, были в ряде работ [1–20].

В предлагаемой работе мы рассмотрим РДС зависящие от параметра связанные с указанными критическими случаями.

С математической точки зрения такие РДС-ы подразделяются на резонансные и нерезонансные [6]. Однако, с практической точки зрения, когда, например, коэффициенты РДС известны, лишь приближенные, подобная классификация носит условный характер. Любая резонансная РДС, сколь угодно близка (в смысле близости коэффициентов) к некоторой нерезонансной РДС, и наоборот. Априори неясно, как связаны свойства устойчивости этих РДС.

Для изучения интересующей нас связи рассматривается РДС непрерывно зависящая от  $\varepsilon$ . Вводится понятие сильной устойчивости. Такой РДС в точке  $\varepsilon_0$ . Строится непрерывная нормальная форма, рассматриваемая РДС на основе которой, для некоторых типов резонансных РДС получены условия сильной устойчивости и выделены случаи бифуркации свойства устойчивости.

I. Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = A(\varepsilon)x_n + X(\varepsilon, x_n) \quad (1_\varepsilon)$$

правой части которой непрерывно зависят от параметра  $\varepsilon \in U$ , где  $R \supset U$  - некоторый интервал.

Будем говорить, что РДС  $(1_\varepsilon)$  устойчива в точке  $\varepsilon_0 \in U$  если нулевое решение РДС  $(1_{\varepsilon_0})$  устойчиво по Ляпунову.

Определение 1. РДС (1) сильно устойчива (неустойчива) в точке  $\varepsilon_0 \in U$  если существует такая  $\delta$  - окрестность точки  $\varepsilon_0$  что  $(1_\varepsilon)$  устойчива (неустойчива) при всех  $\varepsilon$  из этой окрестности. В противном случае,  $\varepsilon_0$  - точка бифуркации свойства устойчивости.

Задача о сильной устойчивости и бифуркациях может решаться на линейном и нелинейном уровнях.

В первом случае основную роль играет поведение собственных чисел и структура нормальной формы матрицы  $A(\varepsilon)$  [3].

Для выявления нелинейных эффектов, связанных с прохождением РДС  $(1_\varepsilon)$  через резонанс будем предполагать выполненными следующие требования:

а) при  $\forall \varepsilon \in U$  матрица  $A(\varepsilon)$  имеет  $m$  - пар комплексно – сопряженных собственных чисел  $e^{\pm i\varphi_s(\varepsilon)}$ .

б) существует линейное непрерывное по  $\varepsilon$  преобразование, приводящее  $A(\varepsilon)$  к непрерывной по  $\varepsilon$  матрице, в которой комплексно – сопряженных по модулю единице собственным числом, соответствует диагональный блок. Все остальные собственные числа имеют при  $\forall \varepsilon \in U$  по модулю меньших единицы.

**Определение 2.** РДС  $(1_\varepsilon)$  обладает внутренним резонансом в точке  $\varepsilon_0$ , если существует целочисленный  $m$  - мерный вектор  $l$  с взаимно простыми компонентами такой, что справедливо сравнение:

$$(l, \varphi(\varepsilon_0)) = \sum_{j=1}^m l_j \varphi_j(\varepsilon_0) \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (1)$$

число  $\|l\| = \sum_{j=1}^m |l_j|$  - называется порядком резонанса.

При сделанных выше ограничениях, именно, резонансные точки являются точками “подозрительными” на бифуркацию.

II. Укороченные РДС в комплексных переменных примет вид:

$$z_{n+1} = \text{diag} \left( e^{i\varphi_1(\varepsilon)} \dots e^{i\varphi_m(\varepsilon)} \right) z_n + \sum_{j=L}^{\infty} f^{(j)}(\varepsilon, z_n, \bar{z}_n) \quad (2)$$

$L \geq 2$ , где  $f^{(j)}$  –  $m$ -мерные вектор – формы с непрерывными по  $\varepsilon$  коэффициентами.

Эффективным методом исследования устойчивости РДС (2) при фиксированном  $\varepsilon$  в резонансных и нерезонансных случаях является приведение исходной РДС к нормальной форме [7, 12, 13]. Однако для задачи о сильной устойчивости обычная нормальная форма мало пригодна, поскольку нормализующее преобразование будет разрывным по  $\varepsilon$  в резонансных точках.

В связи с этим возникает вопрос о существовании для РДС (2) непрерывной нормальной формы.

Применяя к РДС (1) суперпозиции бесконечных количество полиномиальных преобразований [7-9] получим, по понятиям устойчивости эквивалентную с (2) следующую РДС:

$$y_{n+1} = \Lambda(\varepsilon)y_n + \sum_{j=2}^{\infty} \bar{\Pi}^{(j)}(\varepsilon, y_n, \bar{y}_n), \quad (3)$$

где  $\bar{\Pi}^{(j)}$  – векторная форма  $j$ -го порядка с коэффициентами непрерывно зависящими от параметра  $\varepsilon$ , которую обозначим через  $\bar{\Pi}_{p,q}^{(j)}$  при члена  $y_n^p * \bar{y}_n^q$  здесь  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_m), \quad p_j, q_j \geq 0 \text{ - целые, } \|p\| = \sum_{\tau=1}^m p_{\tau}, \quad \|p + q\| = j.$$

**Определение 3.** [17] Бивекторы  $(p, q)$  и соответствующие им коэффициенты и члены в  $S$ -ых уравнениях РДС – а (3) назовет резонансными, если существует такие  $\varepsilon_* \in U$ , что справедливо равенство

$$(p - q - \delta_s, \varphi(\varepsilon_*)) \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (4)$$

Обозначим через  $P_U^{(s)}$  – множество всех резонансных бивекторов в  $s$ -ых уравнениях. Это множество имеет вид  $P_U^{(s)} = P_{U,0}^{(s)} \cup P_{U,1}^{(s)}$ , где  $P_{U,0}^{(s)}$  – множество бивекторов тождественного резонанса т.е.  $p = q + \delta_s$ .  $P_{U,1}^{(s)}$  – множество бивекторов внутреннего резонанса т.е.  $p - q - \delta_s = \chi \cdot \kappa$ , где  $\chi \neq 0$  – младшая норма последних векторов равна  $\|\kappa\| - 1$  где  $\kappa$  – соответствующий резонансный вектор.

**Теорема 1.** При любом выборе непрерывных по  $\varepsilon$  нерезонансных коэффициентов в (3), в ней можно так подобрать непрерывные резонансные коэффициенты, что будет существовать непрерывное в  $U$  замены переменных в РДС ( $2_{\varepsilon}$ )

$$z_n = \Pi(\varepsilon, y_n, \bar{y}_n) \quad (5)$$

переводящее ее к непрерывной нормальной форме:

$$y_{sn+1} = e^{i\varphi_s(\varepsilon)} y_{sn} + \sum_{P_U^{(s)}} \bar{\Pi}_{p,q}^{(s)} y_n^p y_n^{-q} \quad (6)$$

сравним структуру РДС (6) со структурой обычной нормальной формы при некотором фиксированном  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Обозначим

$$P_{\varepsilon_0}^{(s)} = \left\{ (p, q) / (p - q - \delta_s, \varphi(\varepsilon_*)) \equiv 0 \pmod{2\pi} \right\}.$$

Очевидно, что  $P_{\varepsilon_0}^{(s)} \subseteq P_U^{(s)}$ .

При обычной нормализации, в нормальной форме содержатся только члены с  $(p, q) \in P_{\varepsilon_0}^{(s)}$ . В системе же (6) кроме них, присутствуют еще те, для которых  $(p, q) \in P_U^{(s)} \setminus P_{\varepsilon_0}^{(s)}$ . Обе формы совпадут в точке  $\varepsilon$  только в том случае, если  $P_U^{(s)} \setminus P_{\varepsilon_0}^{(s)} = \emptyset$ . В проколотой же окрестности точки  $\varepsilon_0$  они различны, если  $\varepsilon_0$  - резонансная точка. Обычная нормализация будет непрерывной лишь в том случае, когда  $P_U^{(s)} = \emptyset$ . Если  $\varepsilon_0$  единственная резонансная точка в  $U$ , то в этой точке коэффициенты обычных и непрерывных нормальных форм совпадают.

Заметим, что при любом способе нормализации коэффициенты нормализующего преобразования, при членах  $j$ -го порядка участвует в образовании коэффициентов нормальной формы, не ранее  $L + j - 1$ -го порядка ( $L$  - младший порядок нелинейных членов).

III. Пусть точка  $\varepsilon_0$  резонансная, и порядок единственного младшего резонанса равна  $1 + L = 2N + 1$  причем,  $\varepsilon_0$  - изолированный корень сравнения (1). В качестве области  $U$  возьмем малую окрестность точки  $\varepsilon_0$ , что в проколотой окрестности  $U^0$  нет резонансов порядка  $< 2N + 3$ .

Проведя непрерывную нормализацию до  $2N + 1$ -го порядка включительно, получим [18].

$$y_{sn+1} = e^{i\varphi_s(\varepsilon)} y_{sn} + \alpha(\varepsilon) \bar{y}_{sn}^{\kappa - \delta_s} + y_{sn} \sum_{\|p\|=N} \alpha_p^{(s)} \omega_n^p + O_\varepsilon(\|y_n\|)^{2N+2} \quad (7_\varepsilon)$$

где все коэффициенты непрерывны и ограничены для  $\forall \varepsilon \in U$ .  $\delta_s$  - символ Кронекера  $\omega_n = (\omega_{1n} \dots \omega_{mn})$ ,  $\omega_\tau = y_n \cdot \bar{y}_n$ .

В большинство случаев РДС (7<sub>ε</sub>) в  $2N$ -ом приближении (модельная РДС) обладает семейством решения  $V_0(\varepsilon, \omega_n) = (\gamma^0(\varepsilon), \omega_n)$ , где  $\gamma^0$  удовлетворяют системе уравнений

$$B(\varepsilon_0) \gamma^0 = 0, \text{ где } B(\varepsilon_0) = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_m \\ b_1 \dots b_m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\alpha_s = a_s + ib_s$$

необходимым и достаточным условием устойчивости модельной РДС (7<sub>ε</sub>) являются существование среди семейства  $V_0$  знак определенных функций [4].

**Лемма 1.** Если матрица  $B(\varepsilon)$  сохраняет ранг в  $U$  и число отличных от нуля компонент векторов  $a = (a_1 \dots a_m)$  или  $b = (b_1 \dots b_m)$  превосходит ранг матрицы  $B$ , то модельная РДС (7<sub>ε</sub>) имеет семейство непрерывных по  $\varepsilon$  решений:

$$V(\varepsilon, \omega_n) = (\gamma(\varepsilon), \omega_n), \quad \varepsilon \in U, V(\varepsilon_0, \omega_n) = V_0 \quad (9)$$

Для того, чтобы среди (9) имелось знако-определенные при всех  $\varepsilon \in U^0$ , необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) *Rang*  $B = 2$  существует такие  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  что:

$$\text{sign} D_{\nu_1 \nu_2} = \text{sign} D_{\nu_2 \nu_3} = -\text{sign} D_{\nu_1 \nu_3} \quad (10)$$

$$D_{j\tau}^0 = a_j^0 b_\tau^0 - a_\tau^0 b_j^0$$

2) *Rang*  $B = 1$  и существует такие  $j, \tau$  что:

$$\text{sign} a_j^0 a_\tau^0 = -1(\text{sign} b_j^0 b_\tau^0) \quad (11)$$

Вычислим полную разность функции (9) в силу системы (7<sub>ε</sub>)

$$\Delta V_n = W_{N+1}(\varepsilon, \omega) + O_\varepsilon(\|y_n\|^{2N+3})$$

Здесь  $W_{N+1}$  - форма  $N+1$  - го порядка от  $\omega_n$ .

Обозначим через  $G^0$  множество тех  $\gamma^0$ , для которых  $W_{N+1}(\varepsilon_0, \omega_n)$  - определенно-отрицательна. Через  $M_0$  - обозначим множество решений (8), а через  $M_0^+$  - множество строго положительных решений.

**Теорема 2.** Пусть РДС (7) такова, что матрица  $B$  сохраняет ранг и  $G_0 \neq \emptyset$ , тогда а) РДС (7) сильно асимптотически устойчива в точке  $\varepsilon_0$ , если выполняются (10) или (11) и  $G_0 \cap M_0^+ \neq \emptyset$ ; б) РДС (7) сильно неустойчива в точке  $\varepsilon_0$ , если  $G^0 \cap (M_0 / M_0^+) \neq \emptyset$ .

IV. При нарушении условий теоремы 2 зачастую наблюдается бифуркация свойства устойчивости. Чтобы показать это, проведем в каждой точке  $\varepsilon \in U$  обычную нормализацию РДС (2) до  $2N+1$  - го порядка включительно:

$$y_{sn+1}^* = e^{i\varphi_s(\varepsilon)} y_{sn}^* + y_{sn}^* \sum_{\|p\|=N} \alpha_p^{(s)*}(\varepsilon) \omega_n^p + O_\varepsilon^*(\|y_n\|^{2N+2}). \quad (12)$$

При  $N > L$ ,  $\alpha_p^{(s)*}(\varepsilon) = \alpha_p^{(s)}(\varepsilon)$ , а нелинейности  $O^*$  - неограниченны при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ . Если  $N = L$  то  $\alpha_p^{(s)*}(\varepsilon) = \alpha_p^{(s)}$  и  $\alpha_p^{(s)*}$  также неограниченны в точке  $\varepsilon_0$ .

Положим,  $\alpha_s(\varepsilon) = |\alpha_s| \exp(i\beta(\varepsilon))$  и отождествим углы  $\beta(\varepsilon)$  с точками тригонометрического круга. Рассмотрим все возможные треугольники, образованные тройками точек  $\beta_{v_1}^0, \beta_{v_2}^0, \beta_{v_3}^0$ .

**Лемма 2.** Для выполнения условия (10) (соответственно (11)) необходимо и достаточно чтобы среди  $\beta_{v_1}^0, \beta_{v_2}^0, \beta_{v_3}^0$  - имеется остроугольной (все треугольники вырождаются, причем хотя бы один вырождается в диаметр). Основным случаем при нарушении (10) или (11), характеризуются тем, что все треугольники либо вырождаются в точку либо тупоугольные. В этом случае, существует такая нумерация углов, что

$$\beta_1^0 \leq \beta_2^0 \leq \dots \leq \beta_m^0 < \beta_1^0 + \pi \quad (13)$$

При выполнении (13) РДС (7) неустойчива [8,9].

**Теорема 3.** Пусть  $G_0 \neq \emptyset$  и  $N > L$ . Тогда если существует строго положительный вектор  $\gamma^0 \in G_0$  и выполняется (13), то  $\varepsilon_0$  - точка бифуркации типа взрывной неустойчивости. Асимптотическая устойчивость в  $U^0$  сменяется неустойчивостью в точке  $\varepsilon_0$ .

При доказательстве теоремы 3 существенно используется совпадение коэффициентов при членах тождественного резонанса (7) и (12) [16].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ulam S.M. A collection of Mathematical Problems». Interscience Fracts in Pure and Applied Mathematics, 8 (1960).
- [2] Zehuder E. Homoclinic points near elliptic fixed p-ints. Comm. Pure and Apple Math, 26 (1973). P. 131-182.
- [3] Арнольд В.Н. О матрицах, зависящих от параметра. 1971, с.10-14, УМН.Т., вып. 2 (158).
- [4] Шиманов К.Н., Казеева Н.И. Основная теорема о критических случаях разностных систем. ДУ, 1971. Т. 7. №5.
- [5] Mira C. Traversie dun cas critique pour une recurrence de deuxiem arde, sons l effect dun variation de parametre. C.R. Acad. Sci Paris, 268 A (1969).
- [6] Мира С. Метод определения области устойчивости двойных точек нелинейного разностного уравнения. В кн.: Чувствительность автоматических систем. – Москва, «Наука» 1968.
- [7] Бапаев К.Б. Нормализация систем нелинейных разностных уравнений, КазНУ-НГУ, препринт №1, 1995. Алматы-Новосибирск, С. 60.
- [8] Бапаев К.Б. Устойчивость решения системы нелинейных разностных уравнений в одном критическом случае. КазНУ-НГУ, препринт №2, 1995. Алматы-Новосибирск, С.46
- [9] Бапаев К.Б. Устойчивость систем разностных уравнений в критическом случае при наличии резонанса и в случаях близких к критическим. КазНУ-НГУ, препринт №3, С.64.

- [10] Бапаев К.Б. Устойчивость дискретных систем в критическом случае. ДАН. Москва. 1996. Т. 349, №4. С. 442-445.
- [11] Бапаев К.Б. Устойчивость решений нелинейных итерационных систем уравнений. Динамика сплошной среды. выпуск 114, 1999. С.16-20.
- [12] Бапаев К.Б. Нормальная форма нелинейных РДС. I. Мат. журн. Алматы 2003. Т. 3, №1. С. 42-54.
- [13] Бапаев К.Б. Нормальная форма нелинейных РДС. II., Мат. журн. Алматы, 2004. Т. 4, №1. С.33-40.
- [14] Бапаев К.Б., Бапаева С.К., Жунусова А.Т. О существовании m-параметрических суммируемых многообразий для РДС. Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской Конференции, Т. 2. Казань. 2012. С.119-128.
- [15] Бапаев К.Б. Устойчивость ДДС при нескольких резонансах, Докл. НАН РК. № 5, 1999. С.3-12.
- [16] Бапаев К.Б. Устойчивость ДДС в критическом случае, Докл. НАН РК. № 6, 1999. С. 5-27.
- [17] Бапаев К.Б., Нысамбаев Ж.Н. О структуре резонансных членов разностных уравнений, ИА РК, препринт. №14, 1995. С.1-6.
- [18] Бапаев К.Б., Сламжанова С.С. О критерии ограниченности разностно-динамических систем (РДС). Збірник Наукових II Раць. Міжнародної Конференції. «Наука Сучасність Викайки XXI Століття». Частина V. Центр Наукових Публікацій. М. Київ. 31 січня 2014 року. С. 7-10.
- [19] Бапаев К.Б., Сламжанова С.С. О некоторых задачах дискретных динамических систем. Актуальные проблемы современной науки. №5 (78) 2014. Москва. ISSN 1680-2721. С. 97-103.
- [20] Бапаев К.Б. Исследование периодических решений нелинейных РДС с помощью функций Ляпунова. В печати.

## REFERENCES

- [1] S.M. Ulam. A collection of Mathematical Problems». Interscience Fracts in Pure and Applied Mathematics, 8 (1960).
- [2] E. Zehuder. Homoclinic points near elliptic fixed p-ints. Comm. Pure and Apple Math, 26 (1973). P. 131-182
- [3] Arnol'd B.N. O matritsakh, zavisiashikh ot parametra. UMN T. vip 2(158). 1971. P. 10-14.
- [4] Shimanov K.N., Kazeeva N.I. Osnovnaya teorema o kriticheskikh sluchaiakh raznostnykh sistem. DU, T. 7, № 5. 1971.
- [5] Mira C. Traversie dun cas critique pour une recurrence de deuxiem arde, sons l effect dun variation de parametre.- C.R. Acad. Sci Paris, 268 A (1969).
- [6] Mira S. Metod opredelenia oblasti ustoichivosti dvoynykh toчек nelineinogo raznostnogo uravneniya. V kn.: Chuvstvitel'nost' avtomaticheskikh sistem -Moskva, Nauka. 1968.
- [7] Bapaev K.B. Normalizatsiya sistem nelineinykh raznostnykh uravnenii. KazNU –NGU, preprint № 1. 1995. Almaty-Novosibirsk. P. 60.
- [8] Bapaev K.B. Ustoichivost' reshenia sistemy nelineinykh raznostnykh uravnenii v odnom kriticheskom sluchae. KazNU –NGU, preprint № 2. 1995, Almaty-Novosibirsk. P. 46.
- [9] Bapaev K.B. Ustoichivost' sistem raznostnykh uravnenii v kriticheskom sluchae pri nalichii rezonansa i v sluchaiyakh blizkikh k kriticheskim. KazNU –NGU, preprint № 3. P. 64.
- [10] Bapaev K.B. Ustoichivost' diskretnykh sistem v kriticheskom sluchae. DAN, Moskva. 1996. Т. 349. № 4. P. 442-445.
- [11] Bapaev K.B. Ustoichivost' reshenii nelineinykh iteratsionnykh sistem uravnenii. Dinamica sploshnoi sredy. vypusk 114, 1999. P. 16-20.
- [12] Bapaev K.B. Normal'naia forma nelineinykh RDS. I. Mat. Journ. Almaty, 2003. Т. 3, №1, P. 42-54.
- [13] Bapaev K.B. Normal'naia forma nelineinikh RDS. II., Mat. Journ. Almaty, 2004. Т. 4, №1, P. 33-40.
- [14] Bapaev K.B., Bapaeva S.K. Zhunusova A.T. O sushestvovanii m-parametricheskikh summiruemykh mnogoobrazii dlia RDS. Analiticheskaiа mekhanika, ustoichivost' i upravlenie, Trudy X Mezhdunarodnoi Chetaevskoi konferencii, T. 2, Kazan' 2012. P. 119-128.
- [15] Bapaev K.B. Ustoichivost' DDS pri neskol'kikh rezonansakh. Doklady NAN RK. № 5, 1999. P.3-12
- [16] Bapaev K.B. Ustoichivost' DDS v kriticheskom sluchae. Doklady NAN RK. № 6, 1999. P.5-27.
- [17] Bapaev K.B., Nysambaev Zh.N. O strukture rezonansnykh chlenov raznostnykh uravnenii. IA RK. Preprint №14, 1995. P.1-6.
- [18] Bapaev K.B., Slamzhanova S.S. O kriterii ogranichenosti raznostno-dinamicheskikh sistem (RDS). Zbirnik Naukovykh II Rats'. Mizhnarodnoi konferentsii «Nauka Cuchastnost' Vikaiki XXI Stolettia». Chastina V. Tsentр Naukovykh Publikatsii. M. Kiiв. 31 sichniya 2014 roku. P.7-10.
- [19] Bapaev K.B., Slamzhanova S.S. O nekotorykh zadachakh diskretnykh dinamicheskikh sistem. Aktual'nye problemy sovremennoi nauki. №5 (78). 2014. Moskva. ISSN 1680-2721. P. 97-103.
- [20] Bapaev K.B. Issledovanie periodicheskikh reshenii nelineinykh RDS s pomosh'iyu funktsii L'iyapunova. V pechati.

**РЕЗОНАНСТЫ АЙЫРМА-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ  
ОРНЫТЫҚТЫЛЫҒЫ МЕН БИФУРКАЦИЯЛАНУЫ.**

**К. Б. Бапаев<sup>1</sup>, С. С. Сламжанова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup> И. Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған, Қазақстан

**Тірек сөздер:** айырымды-динамикалық жүйе, бифуркация, резонанс, табанды орнықтылық, уздіксіз нормалдау,.

**Аннотация.** Жұмыста сызықты емес параметрден тәуелді айырымды-динамикалық жүйенің бірінші жуықтауының мінездемелік түберлерінің модулдері бірге тең  $m$ -комплекттік түйіндес болған дүдімал жағдайдың орнықтылығы қарастырылған. Математикалық тұрғыдан мұндай айырылымдылық-динамикалық жүйелер резонансты және резонансты емес болып екіге айырылады. Дегенмен практикалық тұрғыдан динамикалық жүйелердің коэффициенттері тек жуықша анықталатын болғандықтан жүйелерді жоғарыда айтылғандай бөлу шартты мінездемелік сипат алады. Өйткені кез келген резонансты айырымды-динамикалық жүйе (коэффициенттерінің жуықтығы бойынша) белгілі бір резонансты емес айырымдық динамикалық жүйеге жақын болады және керісінше.

Міне осы жақындық бізді айырымдық-динамикалық жүйелерді сапалы зерттеу теориясында тағанды орнықтылық, тағанды орнықсыздық және параметрден үздіксіз тәуелді айырымдық динамикалық жүйелердің орнықтылығының айырбасталуы есебін қоюға алып келді.

Бұл есепті шешу үшін алдын-ала айырымдық-динамикалық жүйеге нормалдау әдісі қолданылды, онда қарапайым нормалдау (параметір тұрақты ді қабылдағанда) мен үздіксіз нормалдау (параметр белгі бір үздіксіз өзгергенде) арасында байланыстар орнатылады.

Тағандық орнықтылықпен тағандық орнықсыздықтар тереңдетіліп қарастырылды, алынған нәтижелер айырымдық-динамикалық жүйелердің резонанстық қасиеттері бойынша олардың резонансқа жақын жағдайлары үшін тұжырым жасауға мүмкіндік алынды.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 256 – 261

### ELLIPTIC MOTION TYPE OF RESONANCE SATELLITES AT INTERVALS $\alpha_4 < w < \alpha_3$ IN THE CASE OF A SMALL TILT ORBIT TO THE MAIN PLANE

M. D. Shinibaev<sup>1</sup>, A. A. Bekov<sup>1</sup>, Zh. S. Kukiev<sup>2</sup>, T. D. Berdalieva<sup>2</sup>,  
A. K. Zhamedinova<sup>2</sup>, B. N. Rakhimzhanov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>JSC "NCKIT", Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Syrdaria University, Zhetysai, Kazakhstan;

<sup>3</sup>Kokshetau State University named after Sh. Ualikhanov, Kokshetau, Kazakhstan.

E-mail: shinibaev\_maxsut@mail.ru

**Keyword:** resonance, orbits, small denominator, the gravitational field, the force function, Earth satellite, polar coordinates

**Abstract.** Writing the differential equations of motion of the body in the geocentric coordinates, integrating them through a Fourier series, or a Taylor series or Poisson series can find that kind  $m\omega_1 + n\omega_2 \approx 0$  of small divisors appear in the coefficients of series representing solutions. There  $m, n$  - integers,  $\omega_1, \omega_2$  - rate of movements. These small dividers are so-called "small- denominators." At the same time the existence of solutions, analytic, smooth convergence solutions in the form of a series of essentially depends on the arithmetic properties of numbers  $m, n$  and the quality of the differential equations [1].

This big problem is far from over and decides this day, both in the theory of differential equations and in the theory of motion resonant satellites. A wide variety of tasks performed by satellites, making it virtually an important systematic study of a fairly broad class of resonance rotation reverse it - the so-called nominal movements [2]. Especially important are the new variables to-that do not make any sense, as in the non-resonant and resonant in the

areas of motion of the satellite. [3] The problem of resonances and small denominators consists of "academic" and "engineering," issues. But if the first is enough to take care of the stability of the resonant motion, the second - "dissipative factor" has to "load on board satellite» in the form of a system of active stabilization. Clearly, an adequate solution of the first problem, give a reliable basis for solving the second.

In the context of the above subject, developed in the article is relevant in all areas of science where there is a "small denominators" and resonances of various kinds.

УДК 531.1+629.195

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП ДВИЖЕНИЯ РЕЗОНАНСНОГО ИСЗ НА ИНТЕРВАЛЕ $\alpha_4 < w < \alpha_3$ В СЛУЧАЕ МАЛОГО НАКЛОНА ОРБИТЫ К ОСНОВНОЙ ПЛОСКОСТИ

М.Д. Шинибаев<sup>1</sup>, А.А. Беков<sup>1</sup>, Ж.С. Кукиев<sup>2</sup>, Т.Д. Бердалиева<sup>2</sup>,  
А.К. Жамединова<sup>2</sup>, Б.Н. Рахимжанов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup>Университет Сыр-Дария, Жетысай, Казахстан;

<sup>3</sup>Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, Казахстан

**Ключевые слова:** резонанс, орбита, малый знаменатель, поле тяготения, силовая функция, спутник Земли, полярные координаты.

**Аннотация.** Записав дифференциальные уравнения движения тела в геоцентрических координатах, интегрируя их посредством рядов Фурье, либо рядов Тейлора или рядов Пуассона можно обнаружить, что малые делители вида  $m\omega_1 + n\omega_2 \approx 0$  появляются у коэффициентов рядов представляющих решения. Здесь  $m, n$  – целые числа,  $\omega_1, \omega_2$  – частоты движений. Эти малые делители представляют собой, так называемые, «малые знаменатели». При этом существование решения, аналитичность, гладкость, сходимое решений в виде рядов существенно зависит от арифметических свойств чисел  $m, n$  и качеств самих дифференциальных уравнений [1].

Эта большая проблема далека от завершения и решается, по сей день, как в теории дифференциальных уравнений, так и в теории движения резонансных ИСЗ.

Большое разнообразие задач, выполняемые спутниками, делает практически важным систематическое изучение достаточно широкого класса резонансов вращения с обращением – так называемых номинальных движений [2]. Особенно важны новые переменные, которые не теряют смысл, как в нерезонансных, так и в резонансных зонах движения ИСЗ [3]. Проблема резонансов и малых знаменателей состоит из «академических» и «инженерных» вопросов. Но если в первой достаточно позаботиться об устойчивости резонансного движения, то во второй – «диссипативный фактор» приходится «загружать на борт спутника» в форме той или иной системы активной стабилизации. Ясно, что адекватное решение первой задачи даст надежные основы для решения второй.

В контексте изложенного тема, разрабатываемая в статье, актуальна во всех областях науки, где есть «малые знаменатели» и резонансы различных видов.

Пусть пассивный ИСЗ совершает движение в поле тяготения центрального и внешнего тела, тогда силовую функцию в геоцентрических координатах можно представить так [4]:

$$U = \frac{M}{r} + \frac{1}{2}vr^2 + \frac{1}{2}(v' - v)z^2, \quad (1)$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр;  $x, y, z$  – геоцентрические координаты ИСЗ;  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ; параметры  $v$  и  $v'$  подбираются так, чтобы получались наблюдаемые движения узла и перигея орбиты.

Дифференциальные уравнения движения с учетом (1) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= vx, & \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= vy, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= v'z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Они допускают интеграл площадей в основной плоскости  $Oxy$  интеграл площадей

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C \quad (3)$$

и в пространстве  $Oxyz$  интеграл энергий

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2(U + h), \quad (4)$$

где  $C$  – постоянная интеграла площадей;  $h$  – постоянная интеграла энергии.

В случае резонанса  $r \rightarrow \infty$  и функция  $r(t)$  становится кусочно-непрерывной. В каждой резонансной точке  $r(t)$  терпит разрыв 1-го рода.

Введем новые переменные, которые позволяют исключить «малые знаменатели», и которые не теряют смысла, как в резонансной, так и в нерезонансной зоне движения ИСЗ.

Пусть орбита ИСЗ имеет малый наклон к основной плоскости, тогда

$$z \neq 0, \quad z^2 \approx 0, \quad s = \frac{z}{\rho} \neq 0, \quad s^2 \approx 0, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

где  $s$  – тангенс широты. Теперь перепишем (2) в переменных Хилла [5]:

$$\frac{d^2w}{d\nu^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right)w - 1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d^2s}{d\nu^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right)s = 0, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{\mu^2}{C^3} w^2, \quad (6)$$

где:

$$\alpha = \frac{\nu C^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(\nu' - \nu)C^6}{\mu^4}, \quad w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad (7)$$

$\alpha - const$ ,  $\beta - const$ ,  $w$  – переменная Хилла,  $\nu$  – истинная долгота.

Уравнение (5) допускает понижение порядка

$$d\nu = \frac{w dw}{\sqrt{-w^4 + 2w^3 + Hw^2 + \alpha}}, \quad (8)$$

где  $H = \frac{2hC^2}{\mu^2}$  – постоянная интегрирования, для действительных движений подкоренной полином положителен.

В [4, 5] было установлено, что подкоренной полином положителен на двух интервалах:

А)  $\alpha_4 \leq w \leq \alpha_3$ ;

В)  $\alpha_2 \leq w \leq \alpha_1$ ,

где корни  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ , причем  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – положительные корни,  $\alpha_4$  – отрицательный корень.

В случае эллиптического типа движения  $\alpha > 0$ ,  $H < 0$  и (8) имеет вид

$$d\nu = \frac{w dw}{\sqrt{-w^4 + 2w^3 - Hw^2 + \alpha}}, \quad (9)$$

На интервале А) совершен переход от (9) к нормальной форме Лежандра

$$d\nu = \mu_0 \frac{w d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{10}$$

где:  $k^2 = \frac{\alpha_{43}\alpha_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{42}}$ ,  $\mu_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31}\alpha_{42}}}$ ,  $k$  – модуль эллиптического интеграла,  $\varphi$  – промежуточная переменная,  $\varphi = am\nu$  – амплитуда  $\nu$ ,

$$0 < k < 1, \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i \quad (k, i = 1, 2, 3, 4),$$

$$w = \frac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \varphi}; \quad \sin^2 \varphi = \frac{\alpha_{31}(w - \alpha_4)}{\alpha_{43}(\alpha_1 - w)}; \tag{11}$$

если  $w = \alpha_4$ , то  $\varphi = 0$ ; если  $w = \alpha_3$ , то  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Рассмотрим резонансный случай, когда  $\rho \rightarrow \infty$  из (7)  $w \rightarrow 0$ .

Из (11) при  $w = 0$  имеем

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{\alpha_{31}(-\alpha_4)}{\alpha_{43}\alpha_1}}, \tag{12}$$

здесь  $\alpha_4 < 0$ , поэтому подкоренное выражение положительно, причем значение его со знаком (-) не укладывается в рассматриваемый интервал  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Исходя из этого, резонансу соответствует одна точка на оси  $O\varphi$ :

$$\varphi_{\delta\dot{a}\zeta} = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha_{31}\alpha_4}{\alpha_{43}\alpha_1}}, \tag{13}$$

причем

$$0 < \varphi_{\delta\dot{a}\zeta} < \frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

поэтому график  $w(\varphi)$  имеет вид (рисунок 1):

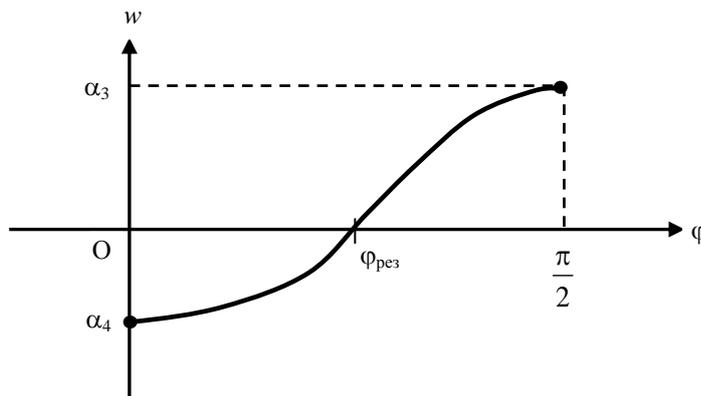


Рисунок 1

Таким образом, нерезонансных зон два:

$$0 \leq \varphi_{\dot{p}} < \varphi_{\delta\dot{a}\zeta}, \quad \varphi_{\delta\dot{a}\zeta} < \varphi_{\dot{p}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из (7) имеем

$$\rho = \frac{\tilde{N}^2}{\mu w}, \quad \text{при } w = \alpha_4 < 0, \quad \rho_4 = \frac{\tilde{N}^2}{\mu \alpha_4} < 0; \quad \varphi = 0,$$

при резонансе  $w = 0$ ,  $\rho_{\partial \dot{a}_c} = \infty$ ;  $\varphi = \varphi_{\partial \dot{a}_c}$ ;

при  $w = \alpha_3 > 0$ ,  $\rho_3 = \frac{\tilde{N}^2}{\mu \alpha_3} > 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Из графика  $\rho(\varphi)$  (рисунок 2) видно, что функция терпит разрыв при  $\varphi = \varphi_{\partial \dot{a}_c}$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ , причем  $\rho \neq 0$  ни в одной точке, так как на интервале  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  ни в одной точке  $w \neq \infty$  (рисунок 1).

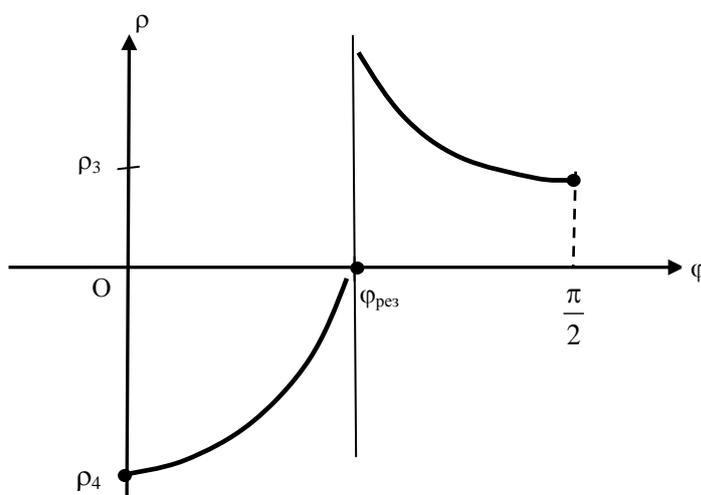


Рисунок 2

Таким образом, переменные Хилла  $w, \nu, \varphi$  могут быть использованы для исследования движения резонансных ИСЗ, так как они не теряют смысла, как на резонансных, так и нерезонансных зонах движения этих спутников.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [4] Колмогоров А.Н. Доклады АН СССР .– 1953, №5.– Т.93.– С.763-766.  
 [5] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.– М.: Наука, 1965.– 416 с.  
 [6] Молчанов А.Д. Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы // Пространство и время.– 2013, №1 (11). – С.34-48.  
 [7] Шинибаев М.Д., Беков А.А. и др. Об орбитальном движении направляемого космического объекта в поле тяготения центрального и внешнего тела // Доклады НАН РК.– 2014, №3.– С.21-26.  
 [8] Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли.– Алматы: Гылым, 2010.– 132 с.

#### REFERENCES

- [4] Kolmogorov A.N. Doklady AN SSSR .– 1953, №5.– V.93.– p.763-766 (in Russ).  
 [5] Beletskii V.V. The movement of an artificial satellite of the center of mass.– M.: Nauka, 1965.– 416 s. (in Russ).  
 [6] Molchanov A.D. The hypothesis of the resonance structure of the solar system. Space and Time.– 2013, №1 (11). – p.34-48 (in Russ).  
 [7] Shinibaev M.D., Bekov A.A. i dr. On the orbital motion directed the space object in the gravitational field of the central and outer body. Reports of NAS RK.– 2014, №3.– p.21-26 (in Russ).  
 [8] Shinibaev M.D. Translational-rotational motion of a rigid body in stationary and non-stationary Earth's gravitational field.– Almaty: Gylym, 2010.– 132 p. (in Russ).

**ОРБИТАСЫ НЕГІЗГІ ЖАЗЫҚТЫҚҚА АЗ КӨЛБЕУДЕГІ РЕЗОНАНСТЫҚ  
ЖЖС  $\alpha_4 < w < \alpha_3$  ИНТЕРВАЛЫНДАҒЫ ЭЛЛИПС ТИПТІ ҚОЗҒАЛЫСЫ**

**М. Д. Шыныбаев<sup>1</sup>, А. А. Беков<sup>1</sup>, Ж. С. Көкеев<sup>2</sup>, Т. Д. Бердалиева<sup>2</sup>,  
А. К. Жәмединова<sup>2</sup>, Б. Н. Рахимжанов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>«Ұлттық Ғарыштық Зерттеулер мен Технологиялар Орталығы» АҚ, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup>«Сыр-Дария университеті», Жетісай, Қазақстан;

<sup>3</sup>«Ш.Уалиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті», Көкшетау, Қазақстан

**Тірек сөздер:** резонанс, орбита, кіші бөлгіш, тартылыс өрісі, күш функциясы, Жер серігі, полярлық координаттар.

**Аннотация.** Жерцентрлік координаттарда жазылған дифференциалдық теңдеулерді Фурье қатарына, немесе Тейлор қатарына, немесе Пуассон қатарына жіктеп интегралдасақ шешімдерде кіші бөлгіш  $m\omega_1 + n\omega_2 \approx 0$  пайда болады. Мұнда  $m, n$  – бүтін сандар,  $\omega_1, \omega_2$  – бұрыштық жылдамдықтар. Осы «кіші бөлгіштер» қатар мүшелеріне кіреді. Бұл жағдайда шешімдердің бар болуы, басқада түрлі қасиеттері  $m, n$  сандарының арифметикалық қасиеттеріне байланысты болады [1].

Проблема әлі шешілмеген, ол ЖЖС қозғалысында да, сызықтық емес дифференциал-дық теңдеулер теориясында да, және резонанстық теорияда да өзекті.

Жасанды жер серіктерінің атқаратын жұмыстарының түрлеріне байланысты түрлі резонанстық қозғалыстарды зерттеу өзекті болып тұр [2]. Өсіресе резонанстық және резонанстық емес аумақтарда бірдей орынды болатын айналымылар өте қажет [3].

«Резонанстар» және «кіші бөлгіштер» екі аспекттен тұрады «академиялық» және «инженерлік». Біріншісі орнықтылықты тексерумен орындалса, екіншісі стабилизациямен байланысты. Екіншісі нақты шешілуі үшін біріншісі шешілуі қажет.

Айтылғандарға байланысты мақаладағы зерттеулер өзекті болып табылады.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 261 – 269

**SYNTHESIS OF THIN SILICON CARBIDE FILMS  
BY ION IMPLANTATION TECHNIQUE**

**B. Zh. Seitov, I. K. Beisembetov, K. Kh. Nussupov, N. B. Beisenkhanov,  
B. K. Kenzhaliev, D. I. Bakranova**

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan.  
E-mail: seitov\_b85@mail.ru, rector@kbtu.kz, beisen@mail.ru

**Key words:** silicon carbide, ion implantation, structure, crystallization.

**Abstract.** In paper, the synthesis of the amorphous silicon carbide layer by implantation of carbon ions with an energy of 2,5 keV and a dose of  $2,7 \times 10^{17} \text{ cm}^{-2}$  into silicon wafers was carried out. The mathematical decomposition of the IR absorption spectrum of the film was made. It is shown that 18.6% of the total amount of Si-C-bonds is there at the surface and in the volume of silicon carbide nanocrystals, and an amorphous component of 81.4% is the amount of the shortened (17.0%) and elongated (64.4%) optically active Si-C-bonds in the Si-C-clusters. Changes in the composition and an increase of the layer density during of implantation leads to the transformation of the profile

shape of carbon atom distribution to a rectangular ones with an appearance of a sharp boundary "SiC film - Si substrate", allowing to use the X-ray reflectometry technique. By using X-ray reflectometry and Henke software, it was shown that the film density is  $2.71 \text{ g/cm}^3$ . By simulation using Release software, the main parameters of the multilayer system of 15.8 nm thickness, consisting of layers of  $\text{SiO}_2$  (0.8 nm),  $\text{SiC}_{0,8}$  (2.0 nm),  $\text{SiC}_{0,6}$  (13.0 nm) on silicon substrate were determined. The results can be used in nano- and micro-electronics as well as at the synthesis of anti-reflective coatings and silicon surface passivation at solar cell manufacturing.

УДК 537.311:322

## СИНТЕЗ ТОНКИХ ПЛЕНОК КАРБИДА КРЕМНИЯ МЕТОДОМ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ

Б. Ж. Сейтов, И. К. Бейсембетов, К. Х. Нусупов,  
Н. Б. Бейсенханов, Б. К. Кенжалиев, Д. И. Бакранова

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** карбид кремния, ионная имплантация, структура, кристаллизация.

**Аннотация.** В работе осуществлен синтез аморфного слоя карбида кремния имплантацией в пластины кремния ионов углерода с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$ . Выполнено математическое разложение ИК-спектра поглощения пленки. Показано, что 18,6% общего количества Si-C-связей находится в объеме и поверхности нанокристаллов карбида кремния, а аморфная составляющая 81,4% представляет собой сумму укороченных (17,0%) и удлиненных (64,4%) оптически активных Si-C-связей в составе Si-C-кластеров. Изменение состава и увеличение плотности слоя в процессе имплантации приводит к трансформации формы профиля распределения атомов углерода в прямоугольную с появлением резкой границы «пленка SiC – подложка Si», позволяющей использовать метод рентгеновской рефлектометрии. Методом рентгеновской рефлектометрии и с помощью программы Henke показано, что плотность пленки составляет  $2,71 \text{ г/см}^3$ . Моделированием с помощью программы Release определены основные параметры многослойной системы толщиной 15,8 нм, состоящей из слоев  $\text{SiO}_2$  (0,8 нм),  $\text{SiC}_{0,8}$  (2,0 нм),  $\text{SiC}_{0,6}$  (13,0 нм) на подложке кремния.

Результаты могут быть использованы в нано- и микроэлектронике, а также при синтезе просветляющих покрытий и пассивации поверхности кремния при производстве солнечных элементов.

**Введение.** Высокая подвижность электронов, большие величины напряженности электрического поля пробоя в сочетании с достаточно большой шириной запрещенной зоны ( $E_g = 2.3\text{--}3.5 \text{ эВ}$  в зависимости от политипа) и прекрасными термомеханическими характеристиками обуславливают огромный интерес к использованию карбида кремния для изготовления полупроводниковых приборов различного назначения [1-5]. Карбид кремния также используется в качестве жаростойких материалов, используемых для конструкций передней стенки термоядерных реакторов, в покрытиях корпуса космических кораблей типа «Спейс Шаттл» [6], а также при изготовлении буров и нарезных дисков из SiC и т.д.

Аморфные тонкопленочные слои на основе кремния ( $\text{SiO}_2$ , SiN, a-SiC:H, и так далее) для просветляющих покрытий, диффузионных барьеров и пассивации слоев широко изучены в производстве солнечных элементов. Пассивирующие слои  $\text{SiO}_2$  и SiN являются особо привлекательными для изготовления высокоэффективных кремниевых солнечных элементов. Тем не менее, они имеют негативные недостатки, такие как необходимость высокотемпературных процессов, трудности в процессе фотолитографии и низкую термическую стабильность [7-9]. Гидрогенизированный аморфный карбид кремния [a-SiC:H] была изучен в качестве пассивирующих слоев солнечных элементов благодаря широкой запрещенной зоне, замечательному коэффициенту теплового расширения, соответствующего кремниевым пластинам, высокой термической и механической стабильности, превосходной стоимости по сравнению с другими материалами и пр.

Использование ионно-лучевых методов синтеза позволяет посредством имплантации ионов углерода  $\text{C}^+$  в кремниевую подложку создавать слои SiC на заданной глубине в необходимой стехиометрии и с малым уровнем загрязнений [10-13]. В данной работе исследуются характеристики пленок SiC, синтезированных имплантацией ионов углерода с энергией 2,5 кэВ в пластины монокристаллического кремния.

**Эксперимент.** Имплантация углерода была произведена в монокристаллические пластины Si ориентации (100) размером  $7 \times 7 \times 0,3$  мм<sup>3</sup> и удельным сопротивлением 4–5 Ом·см [14, 15]. Для предотвращения разогрева образца (20–25°C) плотность ионного тока не превышала 3 мкА/см<sup>2</sup>. Осуществлен синтез пленок SiC путем имплантации ионов <sup>12</sup>C<sup>+</sup> с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup> в Si.

Состав и структура пленки карбида кремния были исследованы методом ИК-спектроскопии с использованием ИК-спектрометра Nicolet iS-50 (Thermo Scientific, USA). Параметры пленок также были исследованы методом рентгеновской рефлектометрии при малых углах скольжения  $\theta$  путем регистрации угловой зависимости коэффициента отражения с использованием двух спектральных линий  $\text{CuK}\alpha$  (0,154 нм) и  $\text{CuK}\beta$  (0,139 нм) на установке CompleXRay С6. Селекция спектральных линий  $\text{CuK}\alpha$  и  $\text{CuK}\beta$  из полихроматического спектра осуществлялась с помощью полупрозрачного и объемного монохроматоров из пиролитического графита с углом мозаичности  $0,5^\circ$  [16, 17].

Математическое моделирование данных рентгеновской рефлектометрии по определению параметров пленок карбида кремния осуществлено с помощью современной программы Release [18].

### Результаты

Предварительно проведен расчет профиля  $NC$  распределения атомов углерода по глубине подложки Si (рисунок 1), который является распределением Гаусса, построенным в соответствии с выражением:

$$N(x) = \frac{D}{\Delta R_p (2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2}\right], \quad (1)$$

где  $x$  – расстояние от поверхности, а величины  $R_p(E)$  и  $\Delta R_p(E)$  оценочно определены как 6,3 нм и 3,7 нм, соответственно, из данных [19].

Отношение концентраций атомов  $N_C/N_{Si}$  в пике распределений для ионов  $C^+$  составляет величину  $N_C/N_{Si} = 5,9$ , которая в максимуме распределения выбрана большой, чтобы изучить возможность получения обогащенных углеродом поверхностных тонких слоев методом ионной имплантации. Однако получение столь высокой концентрации ионов углерода с энергией 2,5 кэВ при имплантации дозой  $2,7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup> может оказаться невозможным вследствие интенсивных процессов распыления поверхности. Можно провести приблизительную оценку толщины слоя, подвергшегося распылению. В случае малых доз ионов, когда состав имплантируемого слоя

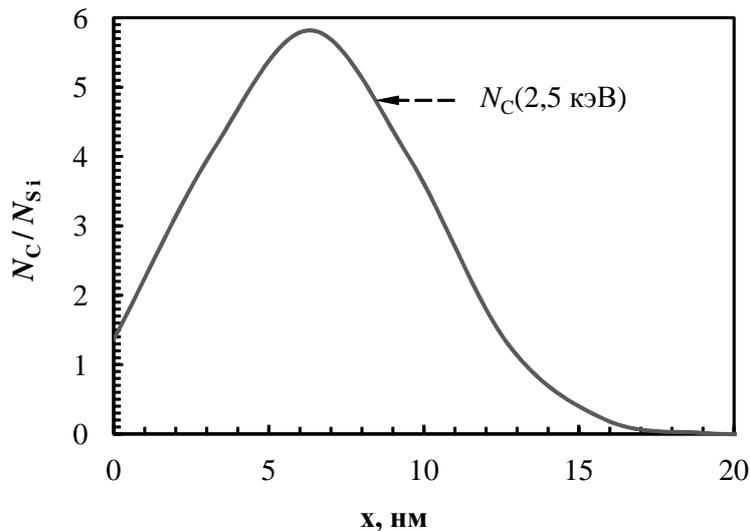


Рисунок 1 – Гауссов расчетный имплантационный профиль распределения в Si ионов <sup>12</sup>C с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup>, построенный в соответствии с данными  $R_p(E)$  и  $\Delta R_p(E)$  по Gibbons et al. [19]

существенно не изменяется в процессе имплантации, можно использовать выражение для толщины распыленного слоя  $h = DK/N_0$ , где  $D$  – доза ионов ( $\text{м}^{-2}$ ),  $N_0$  – концентрация атомов в мишени ( $\text{м}^{-3}$ ),  $K$  – коэффициент распыления, или число атомов, выбиваемых одним падающим ионом. В этом случае коэффициент распыления определяется из выражения, приведенном в [20], согласно модели, описывающей механизм катодного распыления. Толщина распыленного слоя в случае имплантации ионов углерода с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$  в кремний была определена аналогично как в [21] и составила 31,5 нм. Это существенно превосходит толщину слоя на рисунке 1 и сравнима с ней, если бы имплантация производилась в карбид кремния. Таким образом, концентрация углерода в слое  $N_C/N_{Si}$  должна быть существенно менее 5,9 и распределение атомов углерода имеет форму плато. Изменение состава и увеличение плотности слоя приводит к уменьшению проективного пробега  $R_p$  и страгглинга  $\Delta R_p$  и профиль распределения атомов углерода становится прямоугольным. Появление резкой границы «пленка SiC – подложка Si» позволяет предположить, что можно провести измерения толщины и плотности пленки  $\text{SiC}_{0,7}$  методом рентгеновской рефлектометрии и наблюдать осцилляции интенсивности рентгеновских отражений.

Действительно, были обнаружены осцилляции интенсивности, отнесенные к интерференции рентгеновских отражений в слое  $\text{SiC}_{0,43}$  (рисунок 2а). Первый минимум отражения с интенсивностью  $I_l = 304083$  импульсов наблюдается под углом  $2\theta = 0,420^\circ$ . Величина угла полного внешнего отражения была оценочно определена как угол, где интенсивность отражения приблизительно равна половине максимума  $I = I_l/2 = 152042$  импульса, то есть  $2\theta_c = 0,480^\circ$  (рисунок 2б, таблица 1), или  $\theta_c = 0,240^\circ = 4.189$  мрад. С помощью программы Henke [22] определено, что это значение  $\theta_c$  соответствует плотности пленки  $2,71 \text{ г/см}^3$ , занимающей промежуточное значение между плотностью Si ( $2,33 \text{ г/см}^3$ ) и SiC ( $3,21 \text{ г/см}^3$ ) и близко к плотности слоя  $\text{SiC}_{0,43}$ .

Приблизительная оценка толщин слоев проведена по формуле  $2d \sin \theta = \lambda$ , или, учитывая малые значения углов  $\theta$ ,  $d = \lambda/2\theta$  нм, где  $\lambda$  – длина волны  $\text{CuK}_\alpha$  (0,154 нм) или  $\text{CuK}_\beta$  (0,139 нм) излучения, а  $2\theta$  – расстояние между минимумами пика (таблица 2). Толщина полученного слоя  $\text{SiC}_{0,43}$  оказалась около 22 нм.

Моделированием с помощью программы Release [18] получена теоретическая кривая, близкая к экспериментальной (рисунок 3).

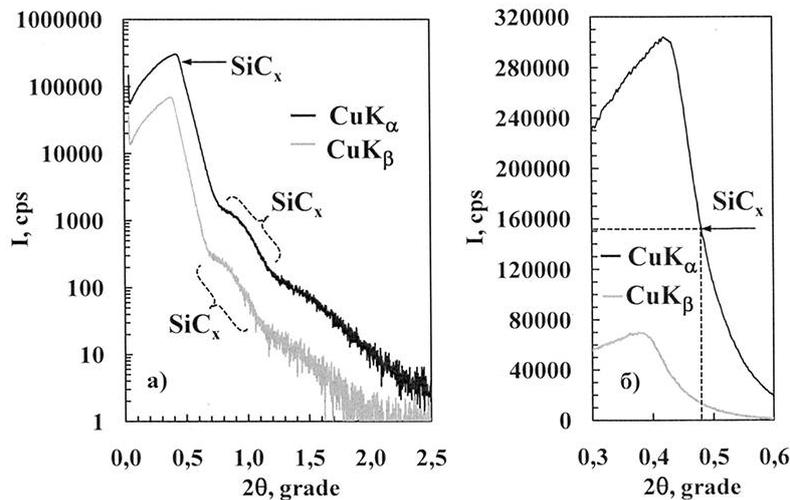


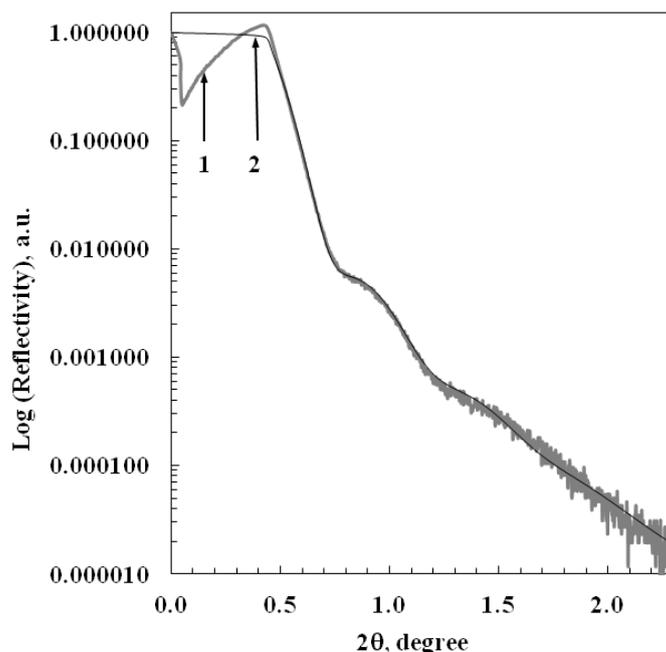
Рисунок 2 – Рентгеновская рефлектометрия с использованием двух спектральных линий  $\text{CuK}_\alpha$  (0,154 нм) и  $\text{CuK}_\beta$  (0,139 нм) параметров пленки  $\text{SiC}_{0,43}$ , синтезированной имплантацией в кремний ионов углерода с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$

Таблица 1 – Определение плотности слоя SiC по программе Henke

| Пленка         | $I_{\max}$ | $I_{\max}/2$ | $2\theta_c$ | $\theta_c$ | $\theta_c$ | $\rho, \text{ г/см}^3$ |
|----------------|------------|--------------|-------------|------------|------------|------------------------|
| $\text{SiC}_x$ | 304083     | 152042       | 0.480       | 0.24       | 4.189      | 2.71                   |

Таблица 2 – Определение толщины слоя SiC<sub>x</sub> по формуле  $2d \cdot \sin\theta = \lambda$ , или  $d = \lambda / 2\theta$ 

| Пленка           | $(2\theta)_j$ | $(2\theta)_i$ | $j - i$ | $2\theta_{av} = [(2\theta)_j - (2\theta)_i] / (j - i)$ | $\lambda$ | $d = \lambda / 2\theta$ , nm |
|------------------|---------------|---------------|---------|--|-----------|------------------------------|
| SiC <sub>x</sub> | 1.166         | 0.776         | 1       | 0.39   | 0.15420   | 22.7                         |
| SiC <sub>x</sub> | 1.062         | 0.686         | 1       | 0.3760   | 0.13924   | 21.2                         |

Рисунок 3 – Моделирование с помощью программы Release [18] данных рентгеновской рефлектометрии параметров пленок SiC<sub>x</sub> после имплантации в кремний ионов углерода с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$ 

Основные параметры многослойной системы, для которой получено приемлемое совпадение экспериментальной и расчетной кривых, были следующие:

- 1) слой SiO<sub>2</sub> (толщина  $d = 0.8$  нм, плотность  $\rho = 2.2 \text{ г/см}^3$ , шероховатость поверхности  $\sigma = 0.75$  нм);
- 2) слой SiC<sub>0.8</sub> ( $d = 2.0$  нм,  $\rho = 3.01 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 2.0$  нм);
- 4) слой SiC<sub>0.6</sub> ( $d = 13.0$  нм,  $\rho = 2.86 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 2.0$  нм);
- 5) подложка Si ( $\rho = 2.33 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 1.0$  нм).

Общая толщина слоя оказалась 15.8 нм, что сравнимо с расчетной. Плотность слоя SiC<sub>x</sub> и концентрация углерода оказалась выше, чем оценивалось из результатов рентгеновской рефлектометрии, а толщина меньше. Это может быть обусловлено приблизительными значениями критического угла полного внешнего отражения при оценках из эксперимента и более точными оценками при моделировании.

На рисунке 4 приведен ИК-спектр поглощения имплантированного ионами углерода (2,5 кэВ,  $2,7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$ ) слоя кремния после имплантации. В спектре наблюдается широкий пик в области  $500 - 950 \text{ см}^{-1}$ , характерный для Si-C слоя. Выполнено математическое разложение ИК-спектра слоя карбида кремния, который представлен как сумма 9 компонент спектра. Определены положение, площадь и амплитуда каждой компоненты.

Сразу после имплантации отсутствие явно выраженной преобладающей компоненты при  $794 \text{ см}^{-1}$  указывает на некристаллическую природу слоя, хотя наличие компонент с максимумами на  $801,7$  и  $842,0 \text{ см}^{-1}$  указывает на присутствие тетраэдрических связей и мелкодисперсных нанокристаллов. Кроме того, наличие нескольких компонент с максимумами на  $928,3$ ,  $908,0$ ,  $764,0$ ,  $724,0$ ,  $679,8$  и  $644,6 \text{ см}^{-1}$  (таблица 3) явно указывают на аморфную природу имплантированного слоя и превалирование Si-C-связей нететраэдрической ориентации. Высокая концентрация углерода также предполагает значительное количество C-C-связей по сравнению с количеством

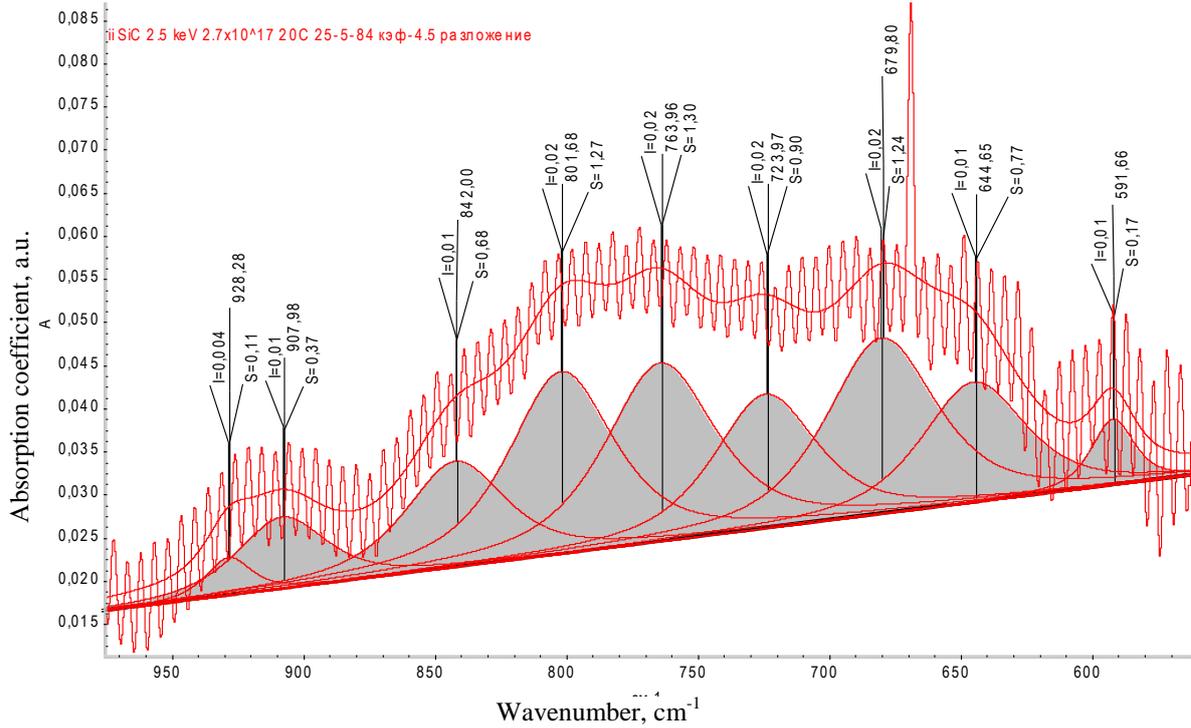


Рисунок 4 – Математическое разложение ИК-спектра поглощения слоя кремния имплантированного ионами углерода ( $E = 2.5$  кэВ,  $D = 2.7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup>), полученного с применением эталонного образца

Si–C-связей. Кроме того, высокодозовая имплантация ( $E=2,5$  кэВ,  $D=2,7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup>) предполагает снижение количества атомов углерода в имплантированном слое за счет распыления поверхностного слоя, сравнимого по толщине с величиной  $R_p$  ионов углерода в кремнии.

Следует выделить следующие основные компоненты при: 764,0, 724,0, 679,8, 644,6 и 591,6 см<sup>-1</sup>, отражающие количество слабых удлинённых Si–C-связей аморфного карбида кремния, компоненты при 801,7, 842,0, 908,0 и 928,3 см<sup>-1</sup>, характерные для укороченных Si–C-связей, преобладающих на поверхности мелких нанокристаллов (менее 5 нм) [23] и в кластерах. Из отношения площади 1,27 отн.ед. компоненты при 801,7 см<sup>-1</sup> к общей площади SiC-пика 6,8 отн.ед. можно оценить, что около 18,6% общего количества Si–C-связей находится в объёме и поверхности нанокристаллов карбида кремния. Эта величина может отражать степень кристалличности слоя карбида кремния. Аморфная составляющая 81,4% представляет собой сумму укороченных (0,11; 0,37; 0,68 – 17,0%) и удлинённых (1,30; 0,90; 1,24; 0,77; 0,17 – 64,4%) оптически активных Si–C-связей в составе Si–C-кластеров. Таким образом, соотношение аморфной и кристаллической составляющих после имплантации можно считать как (81,4/18,6)%, или (5,53/1,27) отн.ед. Из этого следует, что среди образовавшихся во время имплантации Si–C-связей могут быть также связи, расстояния и углы между атомами которых в точности соответствуют расположению атомов в кристаллитах SiC. Полученные результаты не противоречат данным авторов [24], которые методом электронной дифракции обнаружили кристаллиты карбида кремния сразу после имплантации. Авторы обнаружили рефлексы слабоупорядоченных структур  $\beta$ -SiC и диффузные кольца аморфного углерода на электронограммах образцов до отжига.

Таблица 3 – Площади  $S$  и сумма девяти компонент SiC-пика при волновых числах  $w$  для ИК-спектров слоев кремния с гауссовым профилем распределения C в Si ( $E=2,5$  кэВ,  $D=2,7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup>)

| Параметр             | Si-C- связи          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                      | $w, \text{ см}^{-1}$ | 928,3 | 908,0 | 842,0 | 801,7 | 764,0 | 724,0 | 679,8 | 644,6 | 591,6 |
| $S, \text{ отн.ед.}$ | 0,11                 | 0,37  | 0,68  | 1,27  | 1,30  | 0,90  | 1,24  | 0,77  | 0,17  | 6,8   |
| $S, \%$              | 1,6                  | 5,4   | 10,0  | 18,6  | 19,1  | 13,2  | 18,2  | 11,3  | 2,5   | 100,0 |

### Заклучение

1. Проведены исследования структуры и состава тонкого аморфного слоя карбида кремния, синтезированного имплантацией в кремний ионов углерода с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$ .

2. Выполнено математическое разложение ИК-спектра поглощения пленки. Основываясь на пропорциональности между площадью компоненты и количеством соответствующих Si–C-связей, определены площади  $S$  для 9 компонентов спектра. Показано, что 18,6% общего количества Si–C-связей находится в объеме и поверхности нанокристаллов карбида кремния, а аморфная составляющая 81,4% представляет собой сумму укороченных (17,0%) и удлиненных (64,4%) оптически активных Si–C-связей в составе Si–C-кластеров.

3. Показано, что достижение высокой расчетной концентрации атомов  $N_C/N_{Si}$  в пике распределения  $N_C/N_{Si} = 5,9$ , при имплантации ионов углерода с энергией 2,5 кэВ и дозой  $2,7 \times 10^{17} \text{ см}^{-2}$  является невозможным вследствие интенсивных процессов распыления поверхности (31,5 нм). Изменение состава и увеличение плотности слоя в процессе имплантации приводит к трансформации формы профиля распределения атомов углерода в прямоугольную с появлением резкой границы «пленка SiC – подложка Si», позволяющей использовать метод рентгеновской рефлектометрии.

4. Методом рентгеновской рефлектометрии и с помощью программы Henke показано, что плотность пленки составляет  $2,71 \text{ г/см}^3$  и соответствует составу  $SiC_{0,43}$ . Моделированием с помощью программы Release получена теоретическая кривая, близкая к экспериментальной. При этом основные параметры многослойной системы толщиной 15,8 нм были следующие: 1) слой  $SiO_2$  (толщина  $d = 0,8 \text{ нм}$ , плотность  $\rho = 2,2 \text{ г/см}^3$ , шероховатость поверхности  $\sigma = 0,75 \text{ нм}$ ); 2) слой  $SiC_{0,8}$  ( $d = 2,0 \text{ нм}$ ,  $\rho = 3,01 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 2,0 \text{ нм}$ ); 3) слой  $SiC_{0,6}$  ( $d = 13,0 \text{ нм}$ ,  $\rho = 2,86 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 2,0 \text{ нм}$ ); 4) подложка Si ( $\rho = 2,33 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 1,0 \text{ нм}$ ).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Wu, K.Zhou, C.Y. Yue, J. Wei, Y. Pan. Recent progress in synthesis, properties and potential applications of SiC nanomaterials // *Progress in Materials Science*. 72. 2015. P. 1–60.
- [2] Goldberg Y, Levinshtein ME, Romyantsev SL. Silicon carbide. In: Levinshtein ME, Romyantsev SL, Shur MS, editors. *Properties of advanced semiconductor materials GaN, AlN, SiC, BN, SiC, SiGe*. John Wiley & Sons, Inc.; 2001. p. 93–148.
- [3] Presser R, Nickel KG. Silica on silicon carbide. *Crit Rev Solid State* 2008;33:1–99.
- [4] Silicon Carbide. A. Review of Fundamental Questions and Applications to Current Device Technology // Ed. by Choyke W.J., Matsunami H.M., Pensl G., Vol. I, II. Berlin: Akademie, 1998.
- [5] Kukushkin S.A., Osipov A.V., Gordeev S.K., Korzhagina S.B. Nonequilibrium Heteroepitaxy of Silicon Carbide on Silicon // *Tech. Phys. Lett.* 2005. 31(10). P.859–861.
- [6] Oguri K., Sekigawa T. Heat resistant material and hot structure member both space shuttle, space shuttle, and method for producing heat resistant material for space shuttle. United State Patent. Sep.16, 2004. Pub. № US 2004/0180242 A1.
- [7] Kobayashi H., Imamura K., Kim W.B., Im S.S., Asuha. Nitric acid oxidation of Si (NAOS) method for low temperature fabrication of  $SiO_2/Si$  and  $SiO_2/SiC$  structures // *Appl. Surf. Sci.* 2010. 256. P.5744–5756.
- [8] Araki K., Yamaguchi M. An Si concentrator cell by single photolithography process // *Sol. Energ. Mat. Sol. C*. 2001. 65. P.437–443.
- [9] Lucovsky G: Atomic structure and thermal stability of silicon suboxides in bulk thin films and in transition regions at Si-SiO<sub>2</sub> interfaces // *J. Non. Cryst. Solids*. 1998. 227. P.1–14.
- [10] Liangdeng Y., Intarasiri S., Kamwanna T., Singkarat S. Ion beam synthesis and modification of silicon carbide. In book: *Ion beam applications in surface and bulk modification of insulators*. Austria, Vienna: IAEA-TECDOC-1607. 2008. P. 63–92.
- [11] Lindner J.K.N.. High-dose carbon implantations into silicon: fundamental studies for new technological tricks. *Appl.Phys. A*. 2003. Vol. 77. P. 27–38.
- [12] Borders J.A., Picraux S.T., Beezhold W. Formation of SiC in silicon by ion implantation. *Appl.Phys.Lett.* 1971. V. 18. 11. P. 509–511.
- [13] Bayazitov R.M., Haibullin I.B., Batalov R.I., Nurutdinov R.M., Antonova L.Kh., Aksenov V.P., Mikhailova G.N. Structure and photoluminescent properties of SiC layers on Si, synthesized by pulsed ion-beam treatment. *Nucl. Instrum. and Meth. in Phys. Res. B*. 2003. V. 206. P. 984–988.
- [14] Nussupov K. Kh. and Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si // In book: *Silicon Carbide - Materials, Processing and Applications in Electronic Devices*. Moumita Mukherjee (Ed.). Chapter 4. Rijeka, Croatia: *InTech*. 2011. P. 69–114.
- [15] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers // *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*. 2008. 19. P. 254–262.
- [16] Touryanski A.G., Vinogradov A.V., Pirshin I.V. X-ray reflectometer // Patent no. 6041098, US Cl. 378–70. Official Gazette March 21, 2000. P. 2960.

- [17] Турьянский А., Герасименко Н., Пиршин И., Сенков В. Многофункциональный рентгеновский рефлектометр для исследования наноструктур // *Наноиндустрия*. 2009. 5. С.40-45.
- [18] Апрелов С.А. Многоволновая рентгеновская рефлектометрия для анализа многокомпонентных пространственно упорядоченных структур. Автореф. канд. дисс. (2007). 23 с.
- [19] Gibbons J. F., Johnson W.S., and Mylroie S.W. *Projected Range Statistics: Semiconductors and Related Materials*. 2nd Ed. Stroudsburg, Penn: Dowden, Hutchinson and Ross, Inc. 1975.
- [20] Смирнов В.И. Физико-химические основы технологии электронных средств. Ульяновск: УЛГТУ, 2006. – 22 с.
- [21] K.Kh. Nussupov, N.B. Beisenkhanov, S.K. Zharikov, I.K. Beisembetov, B.K. Kenzhaliev, T.K. Akhmetov, and B.Zh. Seitov. Structure and Composition of Silicon Carbide Films Synthesized by Ion Implantation // *Physics of the Solid State*, 2014, Vol. 56, No. 11, pp. 2307–2321.
- [22] Henke B.L., Gullikson E.M., Davis J.C. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. – 1993. –Vol.54 (2). – P. 181. ([http://henke.lbl.gov/optical\\_constants/](http://henke.lbl.gov/optical_constants/)).
- [23] Бейсембетов И.К., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Жариков С.К., Кенжалиев Б.К., Ахметов Т.К., Сеитов Б.Ж. Распределение атомов углерода в кремнии после высокодозовой имплантации ионов C<sup>+</sup> в Si // *Известия НАН РК. Серия физико-математическая*. – 2013. – № 6. – С. 50–59.
- [24] Kimura T., Kagiyama Sh. and Yugo Sh. Structure and annealing properties of silicon carbide thin layers formed by ion implantation of carbon ions in silicon. // *Thin Solid Films*. – 1981. – 81. – P. 319–327.

## REFERENCES

- [1] R. Wu, K.Zhou, C.Y. Yue, J. Wei, Y. Pan. Recent progress in synthesis, properties and potential applications of SiC nanomaterials // *Progress in Materials Science*. 72. 2015. P. 1–60.
- [2] Goldberg Y, Levinshtein ME, Romyantsev SL. Silicon carbide. In: Levinshtein ME, Romyantsev SL, Shur MS, editors. *Properties of advanced semiconductor materials GaN, AlN, SiC, BN, SiC, SiGe*. John Wiley & Sons, Inc.; 2001. p. 93–148.
- [3] Presser R, Nickel KG. Silica on silicon carbide. *Crit Rev Solid State* 2008;33:1–99.
- [4] *Silicon Carbide. A Review of Fundamental Questions and Applications to Current Device Technology* // Ed. by Choyke W.J., Matsunami H.M., Pensl G., Vol. I, II. Berlin: Akademie, 1998.
- [5] Kukushkin S.A., Osipov A.V., Gordeev S.K., Korchagina S.B. Nonequilibrium Heteroepitaxy of Silicon Carbide on Silicon // *Tech. Phys. Lett*. 2005. 31(10). P.859-861.
- [6] Oguri K., Sekigawa T. Heat resistant material and hot structure member both space shuttle, space shuttle, and method for producing heat resistant material for space shuttle. United State Patent. Sep.16, 2004. Pub. № US 2004/0180242 A1.
- [7] Kobayashi H., Imamura K., Kim W.B., Im S.S., Asuha. Nitric acid oxidation of Si (NAOS) method for low temperature fabrication of SiO<sub>2</sub>/Si and SiO<sub>2</sub>/SiC structures // *Appl. Surf. Sci*. 2010. 256. P.5744-5756.
- [8] Araki K., Yamaguchi M. An Si concentrator cell by single photolithography process // *Sol. Energ. Mat. Sol. C*. 2001. 65. P.437-443.
- [9] Lucovsky G: Atomic structure and thermal stability of silicon suboxides in bulk thin films and in transition regions at Si-SiO<sub>2</sub> interfaces // *J. Non. Cryst. Solids*. 1998. 227. P.1-14.
- [10] Liangdeng Y., Intarasiri S., Kamwanna T., Singkarat S. Ion beam synthesis and modification of silicon carbide. In book: *Ion beam applications in surface and bulk modification of insulators*. Austria, Vienna: IAEA-TECDOC-1607. 2008. P. 63–92.
- [11] Lindner J.K.N.. High-dose carbon implantations into silicon: fundamental studies for new technological tricks. *Appl.Phys. A*. 2003. Vol. 77. P. 27-38.
- [12] Borders J.A., Picraux S.T., Beezhold W. Formation of SiC in silicon by ion implantation. *Appl.Phys.Lett*. 1971. V. 18. 11. P. 509–511.
- [13] Bayazitov R.M., Haibullin I.B., Batalov R.I., Nurutdinov R.M., Antonova L.Kh., Aksenov V.P., Mikhailova G.N. Structure and photoluminescent properties of SiC layers on Si, synthesized by pulsed ion-beam treatment. *Nucl. Instrum. and Meth. in Phys. Res. B*. 2003. V. 206. P. 984–988.
- [14] Nussupov K. Kh. and Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si // In book: *Silicon Carbide - Materials, Processing and Applications in Electronic Devices*. Moumita Mukherjee (Ed.). Chapter 4. Rijeka, Croatia: *InTech*. 2011. P. 69–114.
- [15] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers // *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*. 2008. 19. P. 254–262.
- [16] Touryanski A.G., Vinogradov A.V., Pirshin I.V. X-ray reflectometer // Patent no. 6041098, US Cl. 378–70. Official Gazette March 21, 2000. P. 2960.
- [17] Touryanski A., Gerasimenko N., Pirshin I., Senkov V. *Mnogofunktsionalnyii rentgenovskii reflektometr dlya issledovaniya nanostruktur*. *Nanoindustriya*. 2009. 5. pp. 40-45. (In Russ).
- [18] Апрелов С.А. *Mnogovolnovaya rentgenovskaya reflektometriya dlya analiza mnogokomponentnykh prostranstvenno uporyadochennykh struktur*. *Aftoferat kandidatskoi dissertatsii*. 2007. 23 s. (in Russ).
- [19] Gibbons J. F., Johnson W.S., and Mylroie S.W. *Projected Range Statistics: Semiconductors and Related Materials*. 2nd Ed. Stroudsburg, Penn: Dowden, Hutchinson and Ross, Inc. 1975.
- [20] Smirnov V.I. *Fiziko-khimicheskie osnovy tehnologii elektronnykh sredstv*. Ul'yanovsk: ULGTU. 2006. 22 s. (in Russ.).
- [21] K.Kh. Nussupov, N.B. Beisenkhanov, S.K. Zharikov, I.K. Beisembetov, B.K. Kenzhaliev, T.K. Akhmetov, and B.Zh. Seitov. Structure and Composition of Silicon Carbide Films Synthesized by Ion Implantation // *Physics of the Solid State*, 2014, Vol. 56, No. 11, pp. 2307–2321.
- [22] Henke B.L., Gullikson E.M., Davis J.C. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. 1993. Vol.54 (2). – P. 181. ([http://henke.lbl.gov/optical\\_constants/](http://henke.lbl.gov/optical_constants/)).

[23] Beisembetov I.K., Nussupov K.KH., Beisenkhanov N.B., Zharikov S.K., Kenzhaliev B.K., Akhmetov T.K., Seitov B.ZH. Raspređenje atomov ugljeroda v kremnii posle visokodozovoi implantacii ionov C<sup>+</sup> v Si// Izvestia NAN RK. Seria fiziko-matematičeskaia. 2013. № 6. S. 50–59.

[24] Kimura T., Kagiya Sh. and Yugo Sh. Structure and annealing properties of silicon carbide thin layers formed by ion implantation of carbon ions in silicon. // Thin Solid Films. 1981. 81. P. 319–327.

### ЖҰҚА КРЕМНИЙ КАРБИДІ ҚАБАТТАРЫН ИОНДЫҚ ИМПЛАНТАЦИЯ ӘДІСІМЕН СИНТЕЗДЕУ

**Б. Ж. Сейтов, И. Қ. Бейсембетов, К. Х. Нүсіпов, Н. Б. Бейсенханов,  
Б. К. Кенжалиев, Д. И. Бакранова**

Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** кремний карбиді, иондық имплантация, құрылым, кристалдану.

**Аннотация.** Жұмыста, энергиясы 2,5 кэВ және дозасы  $2,7 \times 10^{17}$  см<sup>-2</sup> көміртегі иондарын кремний пластиналарына имплантациялау арқылы аморфты кремний карбиді қабатын синтездеу жүзеге асырылған. Қабыршақтың жұту ИҚ-спектрін математикалық жіктеу жүзеге асырылған. Жалпы Si–C-байланыстардың 18,6% -ы кремний карбиді нанокристалы көлемінде және бетінде орналасқандығы, ал 81,4% аморфты бөлігі Si-C кластерлер құрамындағы қысқа (17%) және ұзын (64,4%) Si-C байланыстардың қосындысынан тұратындығы көрсетілген. Имплантация процесі кезінде қабат құрамының өзгеруі және тығыздығының артуы көміртегі атомдарының таралу профилінің тікбұрышты пішінге трансформациялануына алып келеді, яғни «SiC қабыршақ – Si матрица» қатаң шекарасы пайда болады, ал бұл, рефлектометрия әдісін қолдануға мүмкіндік береді. Рентгендік рефлектометрия әдісімен және Непке бағдарламасының көмегімен қабыршақ тығыздығы 2,71 г/см<sup>3</sup> құрайтындығы көрсетілген. Release бағдарламасының көмегімен модельдеу арқылы кремний матрицасы бетіндегі SiO<sub>2</sub> (0,8 нм), SiC<sub>0,8</sub> (2,0 нм), SiC<sub>0,6</sub> (13,0 нм) қабаттардан тұратын қалыңдығы 15,8 нм көпқабатты жүйенің негізгі параметрлері анықталған.

Жұмыстың нәтижелерін нано- және микроэлектроникада, сонымен қатар күн элементтерін өндіру барысында кремний бетін пассивтендіруге және антишашыратқыш жабындар синтездеуде пайдалануға болады.

*Поступила 07.07.2015 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 269 – 276

UDC 512.95

### THE DECISION IS SINGULAR THE INDIGNANT TASK OF CAUCHY BY METHOD OF SPECTRAL DECOMPOSITION

**Shaldanbayev A.Sh., Imanbayeva A.B., Besbaev G.A.,**

YuKGU of M. Aueyev, Shymkent

shaldanbaev51@mail.ru

**Key words:** spectr, spectral decomposition, deviating argument, singular indignation.

**Abstract.** In this work essentially new method of research is offered is singular the indignant task of Cauchy, based on the spectral theory of the equations with we deviating by argument.

Many problems of mechanics, physics, equipment and other areas of science lead to the differential and integro-differential equations with small parameter at the senior derivative. Systematic research of such equations (now they are called it is singular revolted) began after emergence of the fundamental works of A. N. Tikhonov which paid attention of many researchers to the equations with small parameter at the senior derivative. In these works the general problem definition of Cauchy for systems of the nonlinear ordinary differential equations with small parameter at the senior derivative is given, and the theorems of limit transition establishing connection

between the decision initial are proved is singular the indignant task of Cauchy and the solution of the not indignant task received from initial at zero value of parameter.

One of important problems of the theory it is singular the indignant equations is creation of asymptotic decomposition of solutions of the equations in small parameter.

Among the asymptotic methods created in relation to it is singular to the indignant tasks, it should be noted very effective method of frontier layer functions offered by M. I. Vishik and L. A. Lyusternik for it is singular the indignant linear ordinary differential equations and the equations in private derivatives, A. B. Vasilyeva for it is singular the indignant nonlinear ordinary differential equations, and M. I. Imanaliyev for it is singular the indignant nonlinear integro-differential equations. This method received the name "Method of Frontier Layer Functions" now. Further development of this method is connected with works V.F. Butuzova V. A. Tupchiyeva and V. A. Trenogina

S. A. Lomov developed the method of regularization of singular indignations allowing to reduce is singular the indignant task to regularly indignant by means of which it is possible to develop bases of the general theory is singular the indignant equations. We will apply S. A. Lomov's method to a wide range of tasks to the ordinary differential equations and the equations in private derivatives.

In the real work the new method of the decision is offered is singular the indignant tasks which originates from the spectral theory of the equations with the deviating argument. The essence of a method consists in the following, the solution of a task decays in a row Fourier on own functions corresponding кр

УДК 512.95

## **РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ**

**Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.,**  
ЮКГУ им. М.Ауезова, Шымкент

**Ключевые слова:** спектр, спектральное разложение, отклоняющийся аргумент, сингулярное возмущение.

**Аннотация.** В настоящей работе, методом спектрального разложения, получено асимптотическое разложение решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка с постоянным коэффициентом.

1. Введение. Многие задачи механики, физики, техники и других областей науки приводят к дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной. Систематическое исследование таких уравнений (в настоящее время их называют сингулярно возмущенными) началось после появления фундаментальных работ А.Н.Тихонова [1-3], обративших внимание многих исследователей к уравнениям с малым параметром при старшей производной. В этих работах дана общая постановка задачи Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, и доказаны теоремы о предельном переходе, устанавливающие связь между решением исходной сингулярно возмущенной задачи Коши и решением невозмущенной задачи, получаемой из исходной при нулевом значении параметра.

Одним из важных проблем теории сингулярно возмущенных уравнений является построения асимптотических разложений решений уравнений по малому параметру.

Среди асимптотических методов, созданных применительно к сингулярно возмущенным задачам, следует отметить весьма эффективный метод погранслоевых функций, предложенный М.И.Вишиком и Л.А.Люстерником [4,5] для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, А.Б.Васильевой [6,7] для сингулярно возмущенных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, и М.И.Иманалиевым [8,9] для сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Этот метод в настоящее время получил название «Метод погранслоевых функций». Дальнейшее развитие этого метода связано с работами В.Ф.Бутузова [10,11], В.А.Тупчиева [12] и В.А.Треногина [13].

С.А.Ломов [14,15,16] разработал метод регуляризации сингулярных возмущений, позволяющий свести сингулярно возмущенную задачу к регулярно возмущенным, с помощью которого удаётся развить основы общей теории сингулярно возмущенных уравнений. Метод

С.А.Ломова применим к широкому кругу задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

В настоящей работе предлагается новый метод решения сингулярно возмущенных задач, который берёт своё начало со спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом. Суть метода заключается в следующем, решение задачи разлагается в ряд Фурье по собственным функциям соответствующей краевой задачи, затем с помощью интегрирования по частям преобразуются коэффициенты этого ряда. В результате этих преобразований, получим новое (рекуррентное) представление решения исходной задачи. Далее методом математической индукции удаётся получить асимптотическое разложение решения интересующей нас задачи. Остаток полученного разложения оценивается методом априорных оценок. С помощью прямых вычислений показывается общность полученной рекуррентной формулы, и снимаются дополнительные условия, появившиеся по ходу исследований.

## 2. Методы исследований

Рассмотрим в пространстве  $H = L^2(0,1)$  сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), \quad x \in (0,1], \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

где  $f(x) \in H$ ,  $a > 0$ , а  $\varepsilon$  – положительный малый параметр.

Существуют различные методы решения задачи (1-2), мы предлагаем метод, основанный на спектральной теории линейных операторов [17]. Дело в том, что задаче (1)-(2) соответствует линейный оператор:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x),$$

определенный на линейном многообразии, непрерывных на отрезке  $[0,1]$  и непрерывно дифференцируемых на полу интервале  $(0,1]$  функции  $y(x)$  удовлетворяющих условию:

$$y(0) = 0.$$

Пусть  $D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1] \cap C[0,1], y(0) = 0\}$  область определения, а  $R(L_\varepsilon)$  – область значений оператора  $L_\varepsilon$ . Из условия  $a > 0$  следует полуограниченность снизу оператора  $L_\varepsilon$ , что обеспечивает существование обратного и ограниченного оператора  $L_\varepsilon^{-1}$ , определенного на области значения  $R(L_\varepsilon)$ . Поскольку для любой непрерывной функции  $f(x)$  существует единственное решение задачи Коши (1)+(2), то  $R(L_\varepsilon)$  – совпадает с линейным многообразием непрерывных функций на отрезке  $[0,1]$ . Линейное многообразие непрерывных функций всюду плотно в пространстве  $H$ , поэтому обратный оператор  $L_\varepsilon^{-1}$  продолжается на все пространство  $H$  по непрерывности, следовательно, область значения замыкания оператора  $L_\varepsilon$  совпадает со всем пространством  $H$ , т.е.  $R(\overline{L_\varepsilon}) = H$ .

Нетрудно заметить, что оператор  $SL_\varepsilon$  симметричный на области определения  $D(L_\varepsilon)$ , где оператор  $S$  определен формулой:

$$Su(x) = u(1-x).$$

Очевидно, что  $\overline{SL_\varepsilon} = \overline{SL_\varepsilon}$ , поэтому область значения оператора  $\overline{SL_\varepsilon}$  также совпадает со всем пространством. Из включения  $SL_\varepsilon \subset (SL_\varepsilon)^*$  следует включение  $\overline{SL_\varepsilon} \subset \overline{(SL_\varepsilon)^*}$  и в силу замкнутости оператора  $(SL_\varepsilon)^*$  имеет место равенство:  $\overline{SL_\varepsilon} = \overline{(SL_\varepsilon)^*}$ . Поскольку, как мы уже показали, область значения оператора  $\overline{SL_\varepsilon}$  совпадает со всем пространством  $H$ , то  $\overline{SL_\varepsilon} = \overline{(SL_\varepsilon)^*}$ , следовательно,  $\overline{(SL_\varepsilon)^*} = \overline{(SL_\varepsilon)^{**}} = \overline{\overline{SL_\varepsilon}}$ , т.е. замыкание оператора  $SL$  самосопряжен в пространстве  $H$ .

С другой стороны, оператор  $(\overline{L_\varepsilon})^{-1} = \overline{L_\varepsilon}^{-1}$  принадлежит к классу Гильберта – Шмидта, поэтому является вполне непрерывным оператором в пространстве  $H$ . В конечном счете, мы получим, что оператор  $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$  самосопряжен и вполне непрерывен, поэтому по теореме Гильберта – Шмидта [18,с.226] с его собственных векторов можно составить ортонормированный базис пространства  $H$ .

Искомое решение задачи (1)-(2) разлагается в ряд Фурье по этой системе. Коэффициенты Фурье этого разложения после некоторых преобразований дают асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2). Остаток этого разложения оценивается, либо через наименьшее собственное значение оператора  $SL_\varepsilon$ , либо как следствие полуограниченности оператора  $L_\varepsilon$ .

Найдем фундаментального решения однородного уравнения:

$$\varepsilon e' + ae = 0,$$

$$e(0) = 1.$$

$$\varepsilon e' = -ae, \frac{e'}{e} = -\frac{a}{\varepsilon}, (\ln e)' = -\frac{a}{\varepsilon}, \ln e|_0^x = -\int_0^x \frac{a}{\varepsilon} dt = -\frac{a}{\varepsilon}x, \ln e(x) - \ln e(0) = -\frac{a}{\varepsilon}x,$$

$$\ln \frac{e(x)}{e(0)} = -\frac{a}{\varepsilon}x, e(x) = e(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}.$$

Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция, тогда решения задачи (1)-(2) ищем в виде:

$$y(x, \varepsilon, f) = \int_0^x K(x, t)f(t)dt, \quad (3)$$

где  $K(x, t)$  - пока неизвестная функция. Подставив (3) в (1)-(2) имеем,

$$y'(x) = K(x, x)f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} f(t)dt,$$

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = \varepsilon K(x, x)f(x) + \int_0^x \varepsilon \frac{\partial K}{\partial x} f(t)dt + \int_0^x aK(x, t)f(t)dt = \varepsilon K(x, x)f(x) +$$

$$+ \int_0^x \left[ \varepsilon \frac{\partial K}{\partial x} + aK \right] f(t)dt = f(x).$$

Следовательно, надо полагать

$$\varepsilon K(x, x) = 1, \quad \varepsilon \frac{\partial K}{\partial x} + aK = 0.$$

т.е. при каждом фиксированном значении  $t$  функция  $K(x, t)$  является решением задачи Коши соответствующего однородного уравнения. Нетрудно заметить, что искомой функцией является:

$$K(x, t) = \frac{e(x-t)}{\varepsilon}.$$

В самом деле,

$$\varepsilon K(x, t)|_{t=x} = e(0) = 1,$$

$$\varepsilon \frac{\partial e(x-t)}{\partial x} + ae(x-t) = \varepsilon e'(x-t) + ae(x-t) = 0.$$

Таким образом, для любой непрерывной функции  $f(x)$  решение задачи Коши (1)-(2) существует и имеет вид:

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x e(x-t)f(t)dt, \quad (4)$$

где  $e(x) = \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}x\right)$  - есть фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения.

Формулу (4) можно переписать в виде:

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \theta(x-t)e(x-t)f(t)dt, \quad (5)$$

где  $\theta(x)$  - функция Хевисайда. Ядро, интегрального оператора (5) является ограниченной функцией, поэтому он является ограниченным оператором на линейном многообразии непрерывных функций, а поскольку это многообразие плотно в  $L^2(0,1)$ , то оператор (5) продолжается на все пространство  $L^2(0,1)$  по непрерывности.

Таким образом, область значений замыкания оператора:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), \quad x \in [0,1]$$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\}$$

совпадает со всем пространством  $H$ .

Умножив обе части уравнения (1) скалярно на функцию  $y(x)$ , получим

$$\varepsilon(y', y) + a \cdot \|y\|^2 = (f, y).$$

В силу начального условия, имеем:

$$\varepsilon(y', y) = \varepsilon \int_0^1 y dy = \varepsilon \cdot \frac{y^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \varepsilon \frac{y^2(1)}{2} > 0,$$

Следовательно,  $a \cdot \|y\|^2 \leq (f, y) \leq \|f\| \cdot \|y\|$ ,  $a\|y\| \leq \|f\| = \|L_\varepsilon y\|$ .

Если  $f = 0$ , то из последнего неравенства следует, что  $\|y\| = 0$ , т.е.  $y(x) \equiv 0$ ,

тем самым доказана единственность найденного решения и ограниченность обратного оператора, поскольку имеет место неравенство:

$$\|y\| = \|L_\varepsilon^{-1}f\| \leq \frac{\|f\|}{a}, \quad \|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{a}$$

Далее из уравнения (1) получим оценку производной найденного решения:

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), \quad \varepsilon y'(x) = f(x) - ay(x), \quad \varepsilon \|\dot{y}\| \leq \|f\| + a\|y\| \leq 2\|f\|,$$

$$\|\dot{y}\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|f\|, \quad \|\dot{y}\|_1 = (\|\dot{y}\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} \|f\|^2 + \|f\|^2} \leq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} + 1} \cdot \|f\|.$$

Следовательно, при каждом фиксированном  $\varepsilon > 0$  обратный оператор  $L_\varepsilon^{-1}$  является компактным, более того, он принадлежит классу Гильберта – Шмидта, что является следствием ограниченности ядра интегрального оператора (5).

Если оператор  $S$  определен формулой:

$$Su(x) = u(1 - x), \tag{6}$$

то оператор  $SL_\varepsilon$  является симметричным оператором в пространстве  $H$ . В самом деле, пусть  $u, v \in D(L_\varepsilon)$ , тогда

$$\begin{aligned} (SL_\varepsilon u, v) &= (L_\varepsilon u, Sv) = \int_0^1 (\varepsilon u' + au)v(1 - x)dx = \varepsilon \int_0^1 v(1 - x)du + \\ &+ \int_0^1 au(x)v(1 - x)dx = \varepsilon v(1 - x)u|_0^1 + \int_0^1 v'(1 - x)u(x)dx + \int_0^1 au(x)v(1 - x)dx = \\ &= \int_0^1 u(x)[v'(1 - x) + av(1 - x)]dx = (u, SL_\varepsilon v). \end{aligned}$$

Из симметричности оператора  $SL_\varepsilon$  следует симметричность оператора  $(SL_\varepsilon)^{-1}$ , и поскольку оператор  $(SL_\varepsilon)^{-1}$  определен на всем пространстве  $L^2(0,1)$ , то он является самосопряженным оператором. Таким образом, оператор  $(SL_\varepsilon)^{-1}$  самосопряжен и вполне непрерывен, тогда по теореме Гильберта – Шмидта нормированные собственные векторы этого оператора составляют ортонормированный базис пространства  $L^2(0,1)$ .

Лемма 1. Если  $Su(x) = u(1 - x)$ , то нормированные собственные векторы оператора  $SL_\varepsilon$  образуют ортонормированный базис пространства  $H$ .

Теорема 1. Для сильного решения задачи Коши (1)-(2) имеет место представление:

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x), \tag{7}$$

где  $\varphi_n(x)$  - собственные векторы (функции), а  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) - собственные значения оператора  $SL_\varepsilon$ , где  $Su(x) = u(1 - x)$ ,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1) /}$$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0, 1) \cap C[0, 1], y(0) = 0\}. \tag{2) /}$$

Доказательство. Действуя оператором  $S$  на обе части уравнения (1), получим  $SL_\varepsilon y = Sf$ , следовательно,  $y(x, \varepsilon, f) = (SL_\varepsilon)^{-1}Sf(x)$ ,  $SL_\varepsilon \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\varphi_n = \lambda_n (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n$ ,  $(SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n = \frac{\varphi_n}{\lambda_n}$ ,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= (SL_\varepsilon)^{-1}Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ((SL_\varepsilon)^{-1}Sf, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \cdot \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана, она составляет основу нашего метода. В следующем пункте мы выводим асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2).

### 3. Результаты исследований

Лемма 2. Если  $f(x) \in W_2^1[0, 1]$ , то имеет место формула:

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} f(0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'), \quad (8)$$

где  $y(x, \varepsilon, f')$  - есть решение той же самой задачи Коши, но с правой частью  $f'(x)$ .

Лемма 3. Имеет место формула

$$\varepsilon \cdot \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} = (\varphi_n, e), \quad (9)$$

где  $\lambda_n$  - собственные значения, а  $\varphi_n(x)$  - собственные функций оператора  $SL_\varepsilon$ , а  $e(x)$  - фундаментальное решение однородного уравнения, т.е.

$$\begin{cases} \varepsilon e' + ae = 0, \\ e(0) = 1. \end{cases} \quad (10), (11)$$

Лемма 4. Если  $f(x) \in W_2^1[0,1]$ , то имеет место формула:

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} \cdot e(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'), \quad (12)$$

где  $e(x)$  - фундаментальное решение, соответствующего однородного уравнения, а  $y(x, \varepsilon, f')$  - решение той же самой задачи Коши (1)-(2), но с правой частью  $f'(x)$ .

Теорема 2. Если  $a > 0$  и  $f(x) \in W_2^1[0,1]$ , то решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1)-(2) удовлетворяет оценке:

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x) - f(0)e(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon \|f\|}{a^2},$$

где  $e(x)$  - фундаментальное решение однородного уравнения:

$$\varepsilon e'(x) + ae(x) = 0, \quad (10)$$

$$e(0) = 1. \quad (11)$$

Следствие 1. Если  $a > 0$ ,  $f(x) \in W_2^1[0,1]$  и  $f(0) = 0$ , то имеет место также оценка:

$$\left\| y'(x, \varepsilon, f) - \frac{f'(x) - f'(0)e(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon \|f'\|}{a^2}. \quad (13)$$

Если  $f(x) \in W_2^n[0,1]$  и  $n > 1$ , то по формуле (12) можно выводить последующие члены разложения. Например, если  $f(x) \in W_2^2[0,1]$ , то имеем

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} \cdot e(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f''), \\ y(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x) - \frac{\varepsilon}{a} \left[ \frac{f'(x) - f'(0)e(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'') \right] \\ &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)e(x)}{a} - \frac{[f'(x) - f'(0)e(x)]\varepsilon}{a^2} + \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 y(x, \varepsilon, f''). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся математической индукцией, предположим, что имеет место формула:

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]\varepsilon^k}{a^{k+1}} + (-1)^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n-1} y(x, \varepsilon, f^{(n-1)}),$$

тогда

$$y(x, \varepsilon, f^{(n-1)}) = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)e(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f^{(n)}),$$

поэтому

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]\varepsilon^k}{a^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n y(x, \varepsilon, f^{(n)}).$$

В силу ранее доказанной априорной оценки имеет место неравенство:

$$\|y(x, \varepsilon, f^{(n)})\| \leq \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{a},$$

поэтому

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]\varepsilon^k}{a^{k+1}} \right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}} \|f^{(n)}(x)\|.$$

Теорема 3. Если  $a > 0$  и  $f(x) \in W_2^n[0,1]$ , то решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1)-(2) принадлежит пространству  $W_2^{n+1}[0,1]$  и удовлетворяет оценке:

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]\varepsilon^k}{a^{k+1}} \right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}} \|f^{(n)}(x)\|.$$

Следствие 2. Если  $a > 0$ ,  $f(x) \in W_2^n[0,1]$  и  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , то имеет место оценка:

$$\left\| y(x) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1},$$

где  $\|\cdot\|_{n-1}$  – норма пространства Соболева  $W_2^{n-1}[0,1]$ .

Доказательство. Продифференцировав основное уравнения  $k$  – раз, получим /  $1 \leq k \leq n - 1$  /

$$\begin{cases} \varepsilon y^{(k+1)} + ay^{(k)} = f^{(k)}(x), \\ y^{(k)}(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда в силу формулы (13), имеем:

$$\left\| y^{(k)}(x, \varepsilon, f) - \frac{f^{(k)}(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon^2}{a^2} \|y(x, \varepsilon, f^{(k+1)})\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{a^4} \|f^{(k+1)}(x)\|^2.$$

Просуммировав эти неравенств и извлекая корень квадратный от полученной суммы, имеем:

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left\| y^{(k)}(x, \varepsilon, f) - \frac{f^{(k)}(x)}{a} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1}.$$

#### 4. Выводы

Если правая часть уравнения (1) является негладкой функцией, то наш метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с методом последовательных приближений. Дело в том, что гладкость  $n$  – го приближения, полученного последним методом, такой же как у  $f(x)$ , что приводит к большим ошибкам при численной реализации, а гладкость  $n$  – ой частичной суммы ряда Фурье бесконечно. Как нам кажется, этот момент играет существенную роль при практической реализации данного метода при конкретных ситуациях.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Математический сборник. 1948. Т.22. - №2. – с.193-204.
- [2] Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Математический сборник. 1950. 27(69) – с.147-156.
- [3] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Математический сборник. 1952. Т.31(73). - №3. – с.575-586.
- [4] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН. 1957. Т.12. - №5. – с.3-122.
- [5] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР. 1958. Т.121. - №5. – с.778-781.
- [6] Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, УМН. 1963. Т.18. - №3. – с.15-86.
- [7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М.: Наука, 1973, 272с.
- [8] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М.: Высш. шк., 1990, 200с.
- [9] Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем, Фрунзе, Илим, 1972, 356с.
- [10] Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем, Фрунзе, Илим, 1974, 352с.
- [11] Бутузов В.Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области, Дифференциальные уравнения, 1975 Т.2, №6, с.1030-1041.
- [12] Бутузов В.Ф. Угловой погранслоем в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений, Математический сборник, 1977, Т.104, №3, с.460-485.
- [13] Тупчиев В.А. Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производных, ДАН СССР, 1962, Т.143, №6, 1296-1299.
- [14] Треногин В.А. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Математический сборник, 1952, Т.31(73), №3, с.575-586.

- [15] Ломов С.А. Об одном методе регуляризации сингулярных возмущений, ДАН СССР, 1967, Т.177, №6, с.1273-1275.
- [16] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений, М.: Наука, 1981, 400с.
- [17] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений с отклоняющимися аргументами, Математический журнал, Алматы 2004, т 4, № 3(13), с.41-48.
- [18] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Т.1-2, М.: Мир, 1977.

#### REFERENCES

- [1] Tihonov A.N. O zavisimosti reshenij differencial'nyh uravnenij ot malogo parametra, Matematicheskij sbornik. 1948. T.22. - №2. - s.193-204.
- [2] Tihonov A.N. O sistemah differencial'nyh uravnenij, sodержashhiih parametry, Matematicheskij sbornik. 1950. 27(69) – s.147-156.
- [3] Tihonov A.N. Sistemy differencial'nyh uravnenij, sodержashhie malye parametry pri proizvodnyh, Matematicheskij sbornik. 1952. T.31(73). - №3. - s.575-586.
- [4] Vishik M.I., Ljusternik L.A. Reguljarnoe vyrozhdzenie i pogranichnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom, UMN. 1957. T.12. - №5. - s.3-122.
- [5] Vishik M.I., Ljusternik L.A. Ob asimptotike reshenij kraevyh zadach dlja kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij, DAN SSSR. 1958. T.121. - №5. - s.778-781.
- [6] Vasil'eva A.B. Asimptotika reshenij nekotoryh zadach dlja obyknovennyh nelinejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom pri proizvodnoj, UMN. 1963. T.18. - №3. - s.15-86.
- [7] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie razlozhenija reshenij singuljarno vozmushhennyh uravnenij, M.: Nauka, 1973, 272s.
- [8] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij, M.: Vyssh. shk., 1990, 200s.
- [9] Imanaliev M.I. Asimptoticheskie metody v teorii singuljarno vozmushhennyh integro – differencial'nyh sistem, Frunze, Ilim, 1972, 356s.
- [10] Imanaliev M.I. Kolebanija i ustojchivost' singuljarno vozmushhennyh integro – differencial'nyh sistem, Frunze, Ilim, 1974, 352s.
- [11] Butuzov V.F. Ob asimptotike reshenij singuljarno vozmushhennyh uravnenij jelliptičeskogo tipa v prjamougol'noj oblasti, Differencial'nye uravnenija, 1975 T.2, №6, s.1030-1041.
- [12] Butuzov V.F. Uglovoj pogransloj v smeshannyh singuljarno vozmushhennyh zadachah dlja giperbolicheskikh uravnenij, Matematicheskij sbornik, 1977, T.104, №3, s.460-485.
- [13] Tupchiev V.A. Asimptotika reshenija kraevoj zadachi dlja sistemy differencial'nyh uravnenij pervogo porjadka s malym parametrom pri proizvodnoj, DAN SSSR, 1962, T.143, №6, 1296-1299.
- [14] Trenogin V.A. Sistemy differencial'nyh uravnenij, sodержashhie malye parametry pri proizvodnyh, Matematicheskij sbornik, 1952, T.31(73), №3, s.575-586.
- [15] Lomov S.A. Ob odnom metode reguljarizacii singuljarnyh vozmushhenij, DAN SSSR, 1967, T.177, №6, s.1273-1275.
- [16] Lomov S.A. Vvedenie v obshhuju teoriju singuljarnyh vozmushhenij, M.: Nauka, 1981, 400s.
- [17] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimisja argumentami, Matematicheskij zhurnal, Almaty 2004, t 4, № 3(13), s.41-48.
- [18] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematičeskoj fiziki, T.1-2, M.: Mir, 1977.

#### Спектралді таралым әдісі арқылы сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу

Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.

ЮКГУ им. М.Ауезова, Шымкент

**Тірек сөздер:** спектр, спектралді таралым, ауытқыған аргумент, сингуляр әсер.

**Аннотация.** Бұл еңбекте спектралді таралым әдісі арқылы бірінші ретті коэффициенті тұрақты, кәдімгі дифференциалдық тендеудің сингуляр әсерленген Коши есебі шешілді.

Авторы:

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Иманбаева А.Б. – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н., декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Поступила 07.07.2015 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 277 – 283

UDC 517.929

## ABOUT A BASISNOST OF OWN VECTORS OF ONE CLASS OF OPERATOR BUNCHES WITH THE WAVE OPERATOR IN A BODY

**Imanbayeva A.B., Besbaev G.A., Shaldanbayev A.Sh.**

Shymkent, YuKGU of M. Auyezov

shaldanbaev51@mail.ru

**Key words:** the deviating arguments, strong resolvability, a range, a bunch of operators.

**Abstract.** An incorrectness of the minimum wave operator well-known because, zero for it is beskonechnokratny own value. As showed our researches, situation will change if to revolt him with the younger member containing spectral parameter in quality of coefficient, as a result the task assumes an air of an operator bunch. The received bunch of operators easily is factorized by means of functional differential operators of the first order which spectral properties it is easily studied by a classical method of division of variables. Direct application of a method of division of variables to an initial bunch of operators encounters not preodelimy difficulties the difficulties with Kostyuchenko A.G. task compared on degree.

УДК 517.929

## О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

**Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.**

г. Шымкент, ЮКГУ им. М.Ауезова

**Ключевые слова:** отклоняющиеся аргумент, сильная разрешимость, спектр, пучок операторов

**Аннотация.** Некорректность минимального волнового оператора общеизвестно, ибо, нуль для него является бесконечнократным собственным значением. Как показали наши исследования, положение изменится, если возмутить его младшим членом содержащим в качестве коэффициента спектральный параметр, в итоге задача принимает вид операторного пучка. Полученный пучок операторов легко факторизуется с помощью функционально-дифференциальных операторов первого порядка, спектральные свойства которых легко изучается классическим методом разделения переменных. Непосредственное применение метода разделения переменных к исходному пучку операторов наталкивается на не преоделимые трудности, сравнимые по степени трудности с задачей Костюченко А.Г.

**1. Введение.** Пусть  $\Omega \subset R^2$  - четырехугольник ограниченный отрезками:  $AB: 0 \leq y \leq 1$ ,  $x = 0$ ;  $BC: 0 \leq x \leq 1$ ,  $y = 1$ ;  $CD: 0 \leq y \leq 1$ ,  $x = 1$ ;  $DA: 0 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$  /см. Рис 1/.

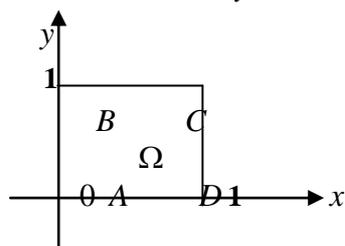


Рис. 1.

Через  $C^{1,1}(\Omega)$  - обозначим множество

функции  $u(x, t)$ , непрерывно

дифференцируемых в области  $\Omega$ , по

переменным  $x$  и  $t$ . Под границей

области  $\Omega$  понимаем совокупность

отрезков:  $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ .

Исследовать спектральные свойства операторного пучка

$$u_{xx} - u_{yy} = -2\lambda u_x + \lambda^2 u; \quad (1.1)$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = \alpha u|_{x=1}, \quad |\alpha| = 1. \quad (1.3)$$

## 2. Методы исследований

**Лемма 2.1 [1].** Пусть  $A$  - плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда

(а)  $A^*$  - существует и замкнут;

(б)  $A$  допускает замыкание, если и только если  $D(A^*)$  плотно в  $H$ , причем в этом случае  $\overline{A} = A^{**}$ .

**Лемма 2.2.** Множество функции финитных в области  $\Omega$  плотно в пространстве  $L^2(\Omega)$  [2].

**Лемма 2.3.** Если симметрический оператор  $A$  имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора  $\overline{A}$  самосопряжен в  $H$ , иначе говоря, оператор  $A$  самосопряжен в существующем в  $H$ .

**Лемма 2.4.** Оператор

$$Lu = iu_x(x, y) + u_y(x, 1 - y), \quad (2.1)$$

$$D(L) = \{u \in C^{1,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}); u|_{y=0} = 0, u|_{x=0} = \alpha u|_{x=1}, |\alpha| = 1\} \quad (2.2)$$

является симметрическим оператором в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

**Доказательство.** Пусть  $u, v \in D(L)$ , тогда

$$(Lu, v) = \int_0^1 \int_0^1 [iu_x(x, y) + u_y(x, 1 - y)] \cdot \overline{v}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 iu_x(x, y) \overline{v}(x, y) dx dy +$$

$$\int_0^1 \int_0^1 u_y(x, 1 - y) \overline{v}(x, y) dx dy = J_1 + J_2.$$

С помощью теоремы Фубини и интегрирования по частям преобразуем интегралов  $J_1, J_2$ .

$$J_1 = \int_0^1 \int_0^1 iu_x(x, y) \overline{v}(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 iu_x(x, y) \overline{v}(x, y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 i \overline{v}(x, y) d_x u \right] dy =$$

$$\int_0^1 \left[ i \overline{v}(x, y) u(x, y) \Big|_0^1 - i \int_0^1 u(x, y) \overline{v}_x(x, y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 u(x, y) \overline{i v_x(x, y)} dx \right] dy =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y) \overline{i v_x(x, y)} dx dy;$$

$$J_2 = \int_0^1 \int_0^1 u_y(x, 1 - y) \overline{v}(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^1 u_y(x, 1 - y) \overline{v}(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ - \int_0^1 \overline{v}(x, y) d_y u(x, 1 - y) \right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[ - \overline{v}(x, y) u(x, 1 - y) \Big|_0^1 + \int_0^1 u(x, 1 - y) \overline{v}_y(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^1 u(x, 1 - y) \overline{v}_y(x, y) dy \right] dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y) \overline{v}_y(x, 1 - y) dx dy;$$

Следовательно,  $(Lu, v) = \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) [iv_x(x, y) + v_y(x, 1-y)] dx dy = (u, Lv)$ .

**Лемма 2.5.** Спектральная задача

$$Lw = -w''(y) = v^2 w(y),$$

$$w(0) = w'(1) = 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$v_n = n\pi - \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_n(y) = \sqrt{2} \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)y, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0,1)$ .

**Доказательство.**

Ортогональность собственных функций  $w_n(y)$  следует из симметричности соответствующего дифференциального оператора  $L$ .

Если  $Lw_n = v_n w_n$ ,  $Lw_m = v_m w_m$ , то  $(Lw_n, w_m) = v_n (w_n, w_m)$ ,  $(v_n, Lw_m) = v_m (v_n, w_m)$ ,  $\Rightarrow v_n (w_n, w_m) = v_m (v_n, w_m)$ ,  $\Rightarrow (v_n - v_m)(w_n, w_m) = 0$ ,  $\Rightarrow (w_n, w_m) = 0$  при  $n \neq m$ .

Ортонормированность собственных функций  $v_n(x)$  показывается непосредственным вычислением, остается показать полноту.

Допустим, что для некоторой функции  $f(y)$  из  $L^2(0,1)$  имеет место равенство

$$\int_0^1 f(y) w_n(y) dy = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{т.е.} \quad \int_0^1 f(y) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Тогда имеет место также равенство

$$\int_0^1 f(y) \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)y dy = 0, \quad n = 1, 2, \dots \text{ или}$$

$$\int_0^1 f(y) \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)y dy = 0. \quad (2.4)$$

Сложив равенств (2.3) и (2.4), получим  $2 \int_0^1 f(y) \cos \frac{\pi}{2} y \cdot \sin n\pi y dy = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

В силу полноты системы функции  $\{\sin n\pi y\}$  в  $L^2(0,1)$  [1], получим

$$f(y) \cos \frac{\pi y}{2} = 0$$

почти всюду в  $(0,1)$ , следовательно,  $f(y) = 0$  почти всюду в  $(0,1)$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 2.6.** Спектральная задача

$$iv_x = \mu v(x), \quad v(0) = \alpha v(1), \quad |\alpha| = 1 \quad (2.5)$$

имеет бесконечное множество вещественных собственных значений

$$\mu_m = \arg \alpha + 2m\pi \cdot i, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6)$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_m(x) = \exp[-i(\arg \alpha + 2m\pi)x], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.7)$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0,1)$ .

**Лемма 2.7.** Если ортогональные системы  $\{\varphi_n(x)\}$  и  $\{\psi_n(x)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  полны в пространстве  $L^2(0,1)$ , то их произведение  $\{\varphi_n(x) \cdot \psi_m(y)\}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  полны в пространстве  $L^2(0,1)$ , где  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  [2].

### 3. Результаты исследований

**Теорема 3.1.** Краевая задача

$$Lu = iu_x(x, y) + u_y(x, 1-y) = f(x, y) \quad (3.1)$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{x=0} = \alpha u|_{x=1}, \quad |\alpha| = 1, \quad (3.2)$$

имеет бесконечное множество вещественных собственных значений

$$\lambda_{mn} = \arg \alpha + 2m\pi + (-1)^{n+1} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_{mn}(x, y) = \sqrt{2} \exp[-i(\arg \alpha + 2m\pi)x] \cdot \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)y,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0,1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $Su(x, y) = u(x, 1-y)$ , тогда

$$iu_x(x, y) + u_y(x, 1-y) = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + S \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y), \quad \text{мы воспользуемся этой формулой при}$$

вычислениях.

$$\text{Пусть } u_{mn}(x, y) = \sqrt{2} \exp[-i(\arg \alpha + 2m\pi)x] \cdot \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)y, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда имеют место формулы

$$i \frac{\partial}{\partial x} u_{mn}(x, y) = (\arg \alpha + 2m\pi) u_{mn}(x, y);$$

$$S \frac{\partial}{\partial y} u_{mn}(x, y) = \sqrt{2} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \exp[-i(\arg \alpha + 2m\pi)x] \cdot \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)(1-y) =$$

$$\sqrt{2} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \exp[-i(\arg \alpha + 2m\pi)x] \cdot (-1)^{n+1} \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)y = (-1)^{n+1} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) u_{mn}(x, y),$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial x} + S \frac{\partial}{\partial y} \right) u_{mn}(x, y) = \left[ \arg \alpha + 2m\pi + (-1)^{n+1} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] u_{mn}(x, y).$$

Следовательно,  $i \frac{\partial}{\partial x} u_{mn}(x, y) + u_{mny}(x, 1-y) = \lambda_{mn} u_{mn}(x, y)$ , где

$$\lambda_{mn} = \arg \alpha + 2m\pi + (-1)^{n+1} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Теорема 3.2.** Оператор

$$Lu = iu_x(x, y) + u_y(x, 1-y), \quad (3.3)$$

$$D(L) = \{u \in C^{1,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}); u|_{y=0} = 0, u|_{x=0} = \alpha u|_{x=1}, |\alpha| = 1\} \quad (3.4)$$

самосопряжен в существенном в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

**Доказательство.** Эта теорема является простым следствием теоремы 3.1, леммы 2.3 и 2.4.

До настоящего времени мы не говорили о спектре оператора  $L$  преднамеренно, ибо это понятие присуще лишь замкнутым оператором, а наш оператор до настоящего времени был незамкнутым. В силу теоремы 3.2 имеет место равенство  $\bar{L} = L^*$ .

Далее под оператором  $L$  будем понимать замыкание оператора (3.3)-(3.4) и исследуем его спектр. Собственные значения этого оператора имеют вид:  $\lambda_{mn} = \arg \alpha + 2m\pi + (-1)^{n+1} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

а) Пусть  $n = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тогда

$$\lambda_{m,2k} = \arg \alpha + 2m\pi - \left( 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \pi \left[ \frac{\arg \alpha}{\pi} + 2(m-k) + \frac{1}{2} \right] = \pi \left[ \frac{\arg \alpha}{\pi} + \frac{1}{2} + 2(m-k) \right];$$

Величина  $2(m-k)$  пробегает все четные числа, аргумент  $\alpha$  лежит в пределах  $0 \leq \arg \alpha < 2\pi$ , поэтому  $0 \leq \frac{\arg \alpha}{\pi} < 2$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{\arg \alpha}{\pi} + \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$ . Между числами  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{5}{2}$  находится лишь одно четное число 2, которое достигается при  $\frac{\arg \alpha}{\pi} = \frac{3}{2}$ . Таким образом,  $\lambda_{m,2k} \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $\frac{\arg \alpha}{\pi} \neq \frac{3}{2}$ .

б) Пусть  $n = 2k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тогда

$$\lambda_{m,2k-1} = \arg \alpha + 2m\pi(2k-1)\pi - \frac{\pi}{2} = \pi \left[ \frac{\arg \alpha}{\pi} + 2m + 2k - 1 - \frac{1}{2} \right] = \pi \left[ \frac{\arg \alpha}{\pi} - \frac{3}{2} + 2(m+k) \right];$$

Величина  $2(m+k)$  пробегает всех четных целых чисел. Имеет место неравенство:  $-\frac{3}{2} \leq \frac{\arg \alpha}{\pi} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ .

Между числами  $-\frac{3}{2}$  и  $\frac{1}{2}$  находится лишь одно четное число 0, которое достигается при  $\frac{\arg \alpha}{\pi} = \frac{3}{2}$ .

**Теорема 3.3.** Спектр оператора

$$Lu = iu_x(x, y) + u_y(x, 1-y), \quad (3.3)$$

$$D(L) = \{u \in C^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}); u|_{y=0} = 0, u|_{x=0} = \alpha u|_{x=1}, |\alpha| = 1\} \quad (3.4)$$

состоит из двух серии

$$\text{а) } \lambda_m^{(1)} = \pi \left[ \frac{\arg \alpha}{\pi} + \frac{1}{2} + 2m \right], m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \text{б) } \lambda_m^{(2)} = \pi \left[ \frac{\arg \alpha}{\pi} - \frac{3}{2} + 2m \right], m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

бесконечнократных собственных значений, т.е. каждое из этих значений принимаются бесконечное число раз, соответствующие им собственные функции образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ .

Обратный оператор  $L^{-1}$  существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{\arg \alpha}{\pi} \neq \frac{3}{2}. \quad (3.5)$$

**Теорема 3.4.** Краевая задача (1.1)-(1.3) сильно разрешима в пространстве  $L^2(\Omega)$  тогда и только тогда, когда

$$\frac{\arg \alpha}{\pi} \neq \frac{3}{2}. \quad (3.5)$$

При выполнении условия (3.5) обратный оператор  $(\bar{L})^{-1}$  существует, ограничен, но некомпактен, ибо присутствует непрерывный спектр оператора  $\bar{L}$ .

**4.Выводы.**Спектральная задача (1.2)-(1.3) имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_{mn} = \arg \alpha + 2m\pi + (-1)^{n+1} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_{mn}(x, y) = \sqrt{2} \exp[-i(\arg \alpha + 2m\pi)x] \cdot \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)y,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L_2(\Omega)$ .

Отметим, что оператор (3.3)- (3.4) является двумерным обобщением оператора рассмотренного в работах [5]- [10], которое нашло приложений к оператору теплопроводности в [11] -[13], и к некорректным задачам математической физики в [14]- [15].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными, М.: Мир, 1977, 504с.
- [2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1968.
- [3] Кальменов Т.Ш.. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент, Гылым, 1993, 327 с.
- [4] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач, М.: Наука, 1980, 207 с.
- [5] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. О полноте собственных векторов задачи Коши, Наука и образование Южного Казахстана, Шымкент, №27, 2002, С.58-62.
- [6] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи, Наука и образование ЮК, Шымкент, 2003, № 34, С. 25-31.
- [7] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал, Алматы, 2004, Т. 4, №3(13). С. 41-48.
- [8] Кальменов Т.Ш., Спабекова Г.М., Шалданбаев А.Ш. Дифференциальные уравнения на окружности с отклоняющимся аргументом, Наука и образование Южного Казахстана, серия экономика, мат., инф., физика, 2004, №4(39), С.122-127.
- [9] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К.Ж. О задаче Коши для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом, Научный журнал ПОИСК, серия естественных и технических наук, №4, г. Алматы, октябрь 2009г, с. 199-204.
- [10] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К.Ж. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом, Научный журнал ПОИСК, серия естественных и технических наук, №4, г. Алматы, октябрь 2009г, с. 204-209;
- [11] Шоманбаева М.Т. О базисности собственных функций уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Поиск», г. Алматы, №2, 2006 г.
- [12] Шоманбаева М.Т. О задаче Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Поиск», г. Алматы, №3, 2006 г.
- [13] Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. О природе спектра оператора Коши- Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Наука и образование Южного Казахстана», ЮКГУ им.М.Ауезова, 2006 г.
- [14] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка, Математические труды, г.Новосибирск, 2010, т.13, №2, с. 128-138.
- [15] Kalmenov T.Sh., A.Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and ill- posed problems, 2010, v18, №4, p.352-369.

#### REFERENCES

- [1] Mizohata S. Teorija uravnenij s chastnymi proizvodnymi, М.: Mir, 1977, 504с.
- [2] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza, М.: Nauka, 1968.
- [3] Kal'menov T.Sh.. Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa, Shymkent, Gylym, 1993, 327 s.
- [4] Dezin A.A. Obsshhie voprosy teorii granichnyh zadach, М.: Nauka, 1980, 207 s.

- [5] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, Shymkent, №27, 2002, S.58-62.
- [6] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoy i antiperiodicheskoy zadachi, Nauka i obrazovanie JuK, Shymkent, 2003, № 34, S. 25-31.
- [7] Kal'menov T.Sh., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom // Matematicheskij zhurnal, Almaty, 2004, T. 4, №3(13). S. 41-48.
- [8] Kal'menov T.Sh., Cpabekova G.M., Shaldanbaev A.Sh. Differencial'nye uravnenija na okruzhnosti s otklonjajushhimsja argumentom, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, serija jekonomika, mat., inf., fizika, 2004, №4(39), C.122-127.
- [9] Shaldanbaev A.Sh., Rustemova K.Zh. O zadache Koshi dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom, Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestvennyh i tehniceskikh nauk, №4, g. Almaty, oktjabr' 2009g, s. 199-204.
- [10] Shaldanbaev A.Sh., Rustemova K.Zh. O periodicheskoy zadache dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom, Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestvennyh i tehniceskikh nauk, №4, g. Almaty, oktjabr' 2009g, s. 204-209;
- [11] Shomanbaeva M.T. O bazisnosti sobstvennyh funkcij uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Poisk», g. Almaty, №2, 2006 g.
- [12] Shomanbaeva M.T. O zadache Nejmana dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Poisk», g. Almaty, №3, 2006 g.
- [13] Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. O prirode spektra operatora Koshi- Nejmana dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana», JuKGU im. M. Auezova, 2006 g.
- [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka, Matematicheskie trudy, g. Novosibirsk, 2010, t.13, №2, s. 128-138.
- [15] Kalmenov T.Sh., A.Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and ill- posed problems, 2010, v18, №4, p.352-369.

**Бас бөлігі толқындық оператор болған ,операторлар шоғырының бір класының меншікті векторларының базистігі туралы**

**Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.**

*г. Шымкент, ЮКГУ им. М.Ауезова*

**Тірек сөздер:** ауытқыған аргумент, әлді шешілу, спектр, операторлар шоғыры.

**Аннотация.** Толқындық кішік оператордың жайсыз екені көпке мәлім, себебі нөл нүктесі шексіз еселі меншікті мән. Біздің зерттеулеріміздің көрсетуінше, жағдайды өзгертуге болады, бұл үшін операторды спектралді параметрге көбейтілген кіші мүшемен тітіркендіру жеткілікті, сонда есебіміз операторлар шоғырының кейпіне енеді. Бұл операторлар шоғыры қарапайым операторлардың көбейтіндісіне жіктеледі, ал ол операторлар оңай зерттеледі.

**Авторы:**

Иманбаева А.Б. – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казакстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н., декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казакстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казакстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Поступила 07.07.2015 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 284 – 290

UDC 517.929

**ABOUT SPECTRAL PROPERTIES OF A TASK OF NEUMANN FOR ONE CLASS OF THE EQUATIONS WITH THE DEVIATING ARGUMENT**

**Besbaev G.A., Imanbayeva A.B., Shaldanbayev A.Sh.**

YuKGU of M. Aueyzov, Shymkent, Tauke-hana 5  
shaldanbaev51@mail.ru

**Key words:** spektr, completeness, own vectors.

**Abstract.** Work is devoted to studying of spectral properties of one operator generated by the differential equation with the deviating argument, overpopulation of own vectors of a task of Neumann for this operator is shown.

УДК 517.929

**О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ**

**Бесбаев Г.А., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.**

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент, Тауке-хана 5

**Ключевые слова:** спектр, полнота, собственные векторы.

**Аннотация.** Работа посвящена к изучению спектральных свойств одного оператора порожденного дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом, показана переполненность собственных векторов задачи Неймана для этого оператора.

**1. Введение**

**Постановка задачи.** Начиная, с 1999 года, в ЮКГУ имени М.О Ауезова, под руководством академика АН РК Кальменова Т.Ш, проводятся исследования по спектральной теории одного класса функционально- дифференциальных операторов. Не полный перечень, списка этих работ, [1-23] приведен ниже. Мы начали свои исследования с самого простейшего функционально-дифференциального оператора первого порядка [1-3], результаты этих исследований нашли приложения к волновым операторам [4-7], оператору теплопроводности [7-14], и некорректным задачам в [15-16]. Результаты работ [1-3], были перенесены на операторы с интегро-дифференциальным возмущением в [17], в работах [18-19] были продолжены исследования начатые в [6]. Некоторая часть результатов ,выше названных работ, апробированы на международных конференциях [20-23]. Настоящая работа отличается от ,выше перечисленных, не обычным видом граничного условия, в этой работе дифференциальный порядок граничного условия совпадает с порядком самого оператора, отметим ,что задачи такого рода встречаются в реальных физических проблемах [24].

Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  следующий линейный оператор

$$L_0 y(x) = y'(1-x), \quad D(L_0) = C_0^\infty(0,1).$$

Нетрудно заметить, что этот оператор является симметрическим, поэтому можно ставить задачу о расширении этого оператора [24-28]. Одним из таких расширений является следующий оператор

$$Lu(x) = u'(1-x), \quad u(x) \in C^1[0,1], \quad (1)$$

$$u'(0) = 0. \quad (2)$$

Целью работы является изучение спектральных свойств оператора (1)-(2)

## 2. Методы исследований

Пусть  $\Omega$  - открытая область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  и

$L^2(\Omega)$  - совокупность всех интегрируемых в квадрате функций на  $\Omega$ , т.е.  $f \in L^2(\Omega)$ , если  $f$  - комплекснозначная измеримая от  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ , для которой

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Определим норму следующим образом:

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Конечно, мы отождествляем функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , если они совпадают почти всюду в  $\Omega$ .

Как известно, пространство  $L^2(\Omega)$  является полным (теорема Рисса-Фишера), т.е. если  $f_n \in L^2(\Omega)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и последовательность  $\{f_n\}$  - фундаментальна, иначе говоря,  $\|f_n - f_m\|_{L^2} \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ), то существует такая функция  $f \in L^2(\Omega)$ , что  $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Будем говорить, что функций

$$\{\varphi_n(x)\} \quad (\varphi_n \in L^2(\Omega)), \quad n=1, 2, \dots$$

образуют ортонормальную систему, если они образуют ортогональную систему, т.е.

$$\int_{\Omega} \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = 0, \quad (n \neq m)$$

и удовлетворяют условию

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть функции  $\{\varphi_n\}$  образуют ортонормальную систему. Рассмотрим разложение функции  $f(x) \in L^2(\Omega)$  в ряд Фурье:

$$f(x) \sim c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots,$$

где

$$c_n = \int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx.$$

Числа  $c_n$  называются коэффициентами Фурье.

Будем называть ортонормальную систему  $\{\varphi_n\}$  полной, если из равенств

$$\int_{\Omega} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

для функции  $f(x)$  из  $L^2(\Omega)$  вытекает, что  $f = 0$ , т.е.  $f(x) = 0$  почти всюду.

**Теорема 2.1 (Лебег).** Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то  $f_1(x) = f_2(x)$  всюду кроме, быть может, множества меры нуль.

**Следствие 2.1.** Система, тригонометрических функций  $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ , полна в пространстве  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Следствие 2.2.** Система  $\{\sin n\pi x\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) полна в пространстве  $L^2(0, 1)$ .

Последним следствием мы воспользуемся в следующем подразделе настоящей работы. Эти сведения можно найти в [29].

### 3. Результаты исследований

**Теорема 3.1.** Оператор (1)-(2) имеет переполненную систему собственных векторов в пространстве  $L^2(0, 1)$ , т.е. этот оператор имеет полную и ортогональную систему собственных векторов и еще одного собственного вектора, образно говоря, оператор имеет полную +1 систему собственных векторов.

**Доказательство.** Рассмотрим спектральную задачу

$$u'(1-x) = \lambda u(x), \quad (1)$$

$$u'(0) = 0. \quad (2)$$

Продифференцировав уравнения (1), имеем

$$-u''(1-x) = \lambda u'(x), \quad -u''(x) = \lambda u'(1-x) = \lambda^2 u(x).$$

Полагая в уравнении (1)  $x=1$ , получим  $u(1) = 0$  при  $\lambda \neq 0$ . Следовательно, любой собственный вектор, соответствующий ненулевому значению оператора (1)-(2) является собственным вектором задачи Штурма-Лиувилля:

$$-u''(x) = \lambda^2 u(x), \quad (3)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (4)$$

Общее решение (при  $\lambda \neq 0$ ) уравнения (4) имеет вид

$$y(x) = A \cos \lambda x + B \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \quad A, B - const. \quad (5)$$

При  $\lambda = 0$  имеем  $y = Ax + B$ , тогда из граничного условия (4) получим  $y'(0) = A = 0$ ,  $y = B = y(1) = 0$ ,  $\Rightarrow y(x) \equiv 0$ ;

Подставив (5) в (4), имеем

$$y'(0) = [-\lambda A \sin \lambda x + B \cos \lambda x]_{x=0} = B = 0, \Rightarrow y = A \cos \lambda x;$$

$$y(1) = A \cos \lambda = 0, \Rightarrow \lambda = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, мы нашли собственных значений и собственных векторов спектральной задачи (3)-(4). Несложно заметить, что  $y_{-n}(x) = \cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x = \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)x = y_{n-1}(x)$  при  $n = 1, 2, \dots$ , поэтому отрицательные индексы не дают новых собственных векторов, а это значит, что можно ограничиться лишь неотрицательными индексами  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Задача (3)-(4) самосопряженная, поэтому ее собственные функции соответствующие, различным собственным значениям ортогональны.

Покажем полноту найденных собственных векторов (функций). Пусть, для, некоторой функции  $f(x) \in L^2(0, 1)$ , и для всех индексов  $n = 1, 2, \dots$  имеет место равенства

$$\int_0^1 f(x) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$\int_0^1 f(x) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x dx = \int_0^1 f(x) \left[ \cos n\pi x \cos \frac{\pi x}{2} - \sin n\pi x \sin \frac{\pi x}{2} \right] dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^1 f(x) \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) x dx = \int_0^1 f(x) \left[ \cos n\pi x \cos \frac{\pi x}{2} + \sin n\pi x \sin \frac{\pi x}{2} \right] dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сложив этих формул, имеем

$$\int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} \cos n\pi x dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отняв, со второй формулы первую формулу, получим

$$\int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} \sin n\pi x dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В силу полноты систем  $\{\cos n\pi x\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\{\sin n\pi x\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в пространстве  $L^2(0, 1)$  выводим, что

$$f(x) \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \quad f(x) \sin \frac{\pi x}{2} = 0$$

почти всюду в  $(0, 1)$ . Возведя, в квадрат и сложив полученных результатов, получим, что  $f^2(x) = 0$  почти всюду в интервале  $(0, 1)$ .

Нам остается показать, что найденные собственные векторы являются собственными векторами и исходной задачи. Это делается с помощью прямых вычислений. Найденные собственные векторы имеют вид

$$y_n(x) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Продифференцировав, эту формулу, получим

$$y'_n(x) = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

С другой стороны

$$y_n(1-x) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) (1-x) = \cos\left[\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x\right] = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x +$$

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x = (-1)^n \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x, \Rightarrow$$

$$(-1)^{n+1} y_n(1-x) = -\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x,$$

$$\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) (-1)^{n+1} y_n(1-x) = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x = y'_n(x).$$

В итоге мы получим, что

$$\begin{cases} y'_n(x) = (-1)^{n+1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) y_n(1-x), \\ y'_n(0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, оператор (1)-(2) имеет полную и ортогональную систему собственных векторов, кроме того, любая константа является собственным вектором этого оператора. Теорема доказана.

**4.Выводы.** Повышение дифференциального порядка граничного условия могут порождать не желательных эффектов,вроде,переполненности собственных векторов,что говорить о не корректности соответствующих краевых задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. О полноте собственных векторов задачи Коши,Наука и образование Южного Казахстана, Шымкент, №27, 2002, С.58-62.

[2] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи,Наука и образование ЮК, Шымкент, 2003, № 34, С. 25-31.

[3] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом,Математический журнал, Алматы, 2004, Т. 4, №3(13), С. 41-48.

[4] Кальменов Т.Ш.,Спабекова Г.М., Шалданбаев А.Ш.Корректность смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом, Наука и образование Южного Казахстана, серия экономика, мат., инф., физика, 2004. -№4(39), С.132-137.

[5] Кальменов Т.Ш.,Спабекова Г.М., Шалданбаев А.Ш.О методе Фурье для задачи Гурса,Наука и образование Южного Казахстана, серия экономика, мат., инф., физика, 2004, №4(39), С.128-131.

[6] Кальменов Т.Ш.,Спабекова Г.М., Шалданбаев А.Ш.Дифференциальные уравнения на окружности с отклоняющимся аргументом,Наука и образование Южного Казахстана,серия экономика,мат.,инф.,физика,2004,№4(39),С.122-127.

[7] Ахметова С.Т. О задаче Бицадзе-Самарского для волнового уравнения, Математический журнал, 2003, т. 3, №2 (8), С. 15-18.

[8] Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. О сильной разрешимости смешанной задачи с условием Дирихле для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Наука и образование Южного Казахстана», ЮКГУ им.М.Ауезова, 2006, №10(59), С.133-136.

[9] Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. О сильной разрешимости смешанной задачи для уравнения теплопроводности,«Наука и образование Южного Казахстана», ЮКГУ им.М.Ауезова, 2005, №6(46), С.120-122.

[10] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. О влиянии младшего члена на сильную разрешимость периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, Математический журнал, 2008, том 8, №27, С.40-40 .

[11] Рустемова К.Ж. О спектральных свойствах возмущенного оператора теплопроводности,Вестник НАН РК, №5, г. Алматы, сентябрь-октябрь 2010г.

[12] Шоманбаева М.Т. О базисности собственных функций уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом,«Поиск», г.Алматы, №2, 2006 г.

[13] Шоманбаева М.Т. О задаче Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом,«Поиск», г.Алматы, №3, 2006 г.

[14] Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. О природе спектра оператора Коши- Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Наука и образование Южного Казахстана», ЮКГУ им.М.Ауезова, 2006 г.

[15] Кальменов Т.Ш.,Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка,Математические труды, г.Новосибирск, 2010, т.13, №2, с. 128-138.

[16] Kalmenov T.Sh.,A.Sh.Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction,Journal of Inverse and ill- posed problems,2010,v.18,№4,pp.352-369.

[17] Рустемова К.Ж.О базисности корневых векторов для интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом,Научный журнал ПОИСК, серия естеств. и технических наук, №1, г. Алматы, март 2009г,с.164-166.

[18] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К.Ж. О задаче Коши для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. Научный журнал ПОИСК, серия естественных и технических наук, №4, г. Алматы, октябрь 2009г, с. 199-204.

[19] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К.Ж. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. Научный журнал ПОИСК, серия естественных и технических наук, №4, г. Алматы, октябрь 2009 ,с. 204-209.

[20] Ахметова С.Т. О базисности собственных векторов обобщенной спектральной задачи,Труды Международной конференции «Современные проблемы математики», Астана, 2002, С. 10-12.

[21] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. Об одной обобщенной спектральной задаче,Труды Международной научно-практической конференции «Ауезовские чтения-3», Шымкент, 2002, С. 178-181.

[22] Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений,Сборник трудов республиканской научной конференции «Дифференциальные уравнения и теория колебаний», Алматы, 2002, С.18-19.

[23] Рустемова К.Ж., Шалданбаева А.А.О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом,Труды Международной научно – практической конференции «Ауезовские чтения: М.Ауезов и актуальные проблемы казаховедения», Том 6, г. Шымкент, ЮКГУ им.М.О.Ауезова, 2008г, с. 88-90.

[24] Тихонов А.О краевых условиях,содержащих производные порядка,превышающего порядок уравнения,Математический сборник, Т.26(68),№1,1950 г,с.35-56.

[25] Нейман Дж. Математические основы квантовой механики,М.: Наука, 1964.

[26] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений,Труды ММО, 189, 1982, т.1 - 152с.

- [27] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач, М.: Наука, 1980.  
 [28] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент, Гылым, 1993.  
 [29] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными, М.: Мир, 1977.

## REFERENCES

- [1] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, Shymkent, №27, 2002, S.58-62.  
 [2] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoy i antiperiodicheskoy zadachi, Nauka i obrazovanie JuK, Shymkent, 2003, № 34, S. 25-31.  
 [3] Kal'menov T.Sh., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom, Matematicheskij zhurnal, Almaty, 2004, T. 4, №3(13), S. 41-48.  
 [4] Kal'menov T.Sh., Cpabekova G.M., Shaldanbaev A.Sh. Korrektnost' smeshannoj zadachi Koshi dlja uravnenija Laplasy s otklonjajushhimsja argumentom, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, serija jekonomika, mat., inf., fizika, 2004, №4(39), C.132-137.  
 [5] Kal'menov T.Sh., Cpabekova G.M., Shaldanbaev A.Sh. O metode Fur'e dlja zadachi Gursa, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, serija jekonomika, mat., inf., fizika, 2004, №4(39), C.128-131.  
 [6] Kal'menov T.Sh., Cpabekova G.M., Shaldanbaev A.Sh. Differencial'nye uravnenija na okruzhnosti s otklonjajushhimsja argumentom, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, serija jekonomika, mat., inf., fizika, 2004, №4(39), C.122-127.  
 [7] Ahmetova S.T. O zadache Bicadze-Samarskogo dlja volnovogo uravnenija, Matematicheskij zhurnal, 2003, t. 3, №2 (8), S. 15-18.  
 [8] Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. O sil'noj razreshimosti smeshannoj zadachi s uslovijem Dirihle dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana», JuKGU im.M.Auezova, 2006, №10(59), C.133-136.  
 [9] Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. O sil'noj razreshimosti smeshannoj zadachi dlja uravnenija teploprovodnosti, «Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana», JuKGU im.M.Auezova, 2005, №6(46), C.120-122.  
 [10] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. O vlijanii mladshogo chlena na sil'nuju razreshimost' periodicheskoy zadachi dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, Matematicheskij zhurnal, 2008, tom 8, №27, S.40-40.  
 [11] Rustemova K.Zh. O spektral'nyh svojstvah vozmushhennogo operatora teploprovodnosti, Vestnik NAN RK, №5, g. Almaty, sentjabr'-oktjabr' 2010g.  
 [12] Shomanbaeva M.T. O bazisnosti sobstvennyh funkcij uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Poisk», g. Almaty, №2, 2006 g.  
 [13] Shomanbaeva M.T. O zadache Nejmana dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Poisk», g. Almaty, №3, 2006 g.  
 [14] Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. O prirode spektra operatora Koshi- Nejmana dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana», JuKGU im.M.Auezova, 2006 g.  
 [15] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorigo porjadka, Matematicheskie trudy, g. Novosibirsk, 2010, t.13, №2, s. 128-138.  
 [16] Kal'menov T.Sh., A.Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and ill- posed problems, 2010, v. 18, №4, pp.352-369.  
 [17] Rustemova K.Zh. O bazisnosti kornevyh vektorov dlja integro-differencial'nogo uravnenija s otklonjajushhimsja argumentom, Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestv. i tehniceskikh nauk, №1, g. Almaty, mart 2009g, s.164-166.  
 [18] Shaldanbaev A.Sh., Rustemova K.Zh. O zadache Koshi dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom. Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestvennyh i tehniceskikh nauk, №4, g. Almaty, oktjabr' 2009g, s. 199-204.  
 [19] Shaldanbaev A.Sh., Rustemova K.Zh. O periodicheskoy zadache dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom. Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestvennyh i tehniceskikh nauk, №4, g. Almaty, oktjabr' 2009, s. 204-209.  
 [20] Ahmetova S.T. O bazisnosti sobstvennyh vektorov obobshhennoj spektral'noj zadachi, Trudy Mezhdunarodnoj konferencii «Sovremennye problemy matematiki», Astana, 2002, S. 10-12.  
 [21] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnoj obobshhennoj spektral'noj zadache, Trudy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Auezovskie chtenija-3», Shymkent, 2002, S. 178-181.  
 [22] Ahmetova S.T. K spektral'noj teorii uravnenij, Sbornik trudov respublikanskoj nauchnoj konferencii «Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij», Almaty, 2002, S.18-19.  
 [23] Rustemova K.Zh., Shaldanbaeva A.A. O periodicheskoy zadache dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom, Trudy Mezhdunarodnoj nauchno – prakticheskoy konferencii «Auezovskie chtenija: M.Auezov i aktual'nye problemy kazahovedenija», Tom 6, g. Shymkent, JuKGU im.M.O.Auezova, 2008g, s. 88-90.  
 [24] Tihonov A.O kraevykh uslovijah, soderzhashhijh proizvodnye porjadka, prevyshajushhego porjadok uravnenija, Matematicheskij sbornik, T.26(68), №1, 1950 g, c.35-56.  
 [25] Nejman Dzh. Matematicheskie osnovy kvantovoj mehaniki, M.: Nauka, 1964.  
 [26] Vishik M.I. Ob obshhijh kraevykh zadachah dlja jellipticheskikh differencial'nyh uravnenij, Trudy MMO, 189, 1982, t.1 - 152s.  
 [27] Dezin A.A. Obshhie voprosy teorii granichnyh zadach, M.: Nauka, 1980.  
 [28] Kal'menov T.Sh. Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa, Shymkent, Gylym, 1993.  
 [29] Mizohata S. Teorija uravnenij s chastnymi proizvodnymi, M.: Mir, 1977.

Аргументі ауытқыған тендеулердің бір класы үшін қойылған Нейманның есебінің спектралдік қасиеттері

Бесбаев Г.А., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.  
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент, Тауке-хана 5

**Тірек сөздер:** спектр, толымдылық, меншікті векторлар.

**Аннотация.** Бұл, еңбек аргументі ауытқыған дифференциалдық тендеуден туындаған, бір оператордың спектралдік қасиеттерін зерттеуге арналған, осы оператордың Нейман есебінің меншікті векторларының әсіре толымдылығы көрсетілген.

Авторы:

Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н., декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Иманбаева А.Б. – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 290 – 296

UDC 517.5

### CRITERIA OF A VOLTERROVOST OF CORRECT NARROWING OF THE OPERATOR OF DIFFERENTIATION

Imanbayeva A.B., Besbaev G.A., Shaldanbayev A.Sh.

YuKGU of M. O. Aueзов, Shymkent

shaldanbaev51@mail.ru

**Key words:** operator, formula, volterrovost, narrowing, sledov, teoriya.

**Abstract.** In work it is received criteria of a volterrovost of correct narrowing of the operator of differentiation:

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \left\{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int_0^1 y'(t) \overline{g(t)} dt, g(x) \in L_2(0,1) \right\}$$

The result is formulated in terms of function  $g(x)$ .

УДК 517.5

### КРИТЕРИИ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ КОРРЕКТНОГО СУЖЕНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.Б., Шалданбаев А.Ш.

ЮКГУ им. М.О. Ауэзова, г. Шымкент

**Ключевые слова:** вольтерровый оператор, формулы следов, теория сужения.

**Аннотация.** В работе получен критерии вольтерровости корректного сужения оператора дифференцирования:

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \left\{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int_0^1 y'(t) \overline{g(t)} dt, g(x) \in L_2(0,1) \right\}$$

Результат сформулирован в терминах функции  $g(x)$ .

1. Введение. Рассмотрим оператор дифференцирования в пространстве  $L_2(0,1)$ . Пусть оператор  $A$  порожден операцией

$$Ay(x) = y'(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

и областью определения

$$D(A) = \{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int y'(x) \overline{g(t)} dx, y(x) \in L_2(0,1) \} \quad (1.2)$$

Этот оператор изучался многими авторами [1], тем не менее многие вопросы пока остаются открытыми. Представляет интерес выяснение природы спектра оператора (1.1)+(1.2). По замечанию Дезина А.А [2] этот вопрос оказался неожиданно сложным.

Целью настоящей работы является установление критерия вольтерровости оператора (1.1)+(1.2), ранее, в работе [3], было анонсировано один необходимый признак вольтерровости этого оператора доказательство которого появилась в [4].

## 2. Методы исследований

О спектре оператора (1.1)- (1.2) известны следующие факты [1].

Теорема 2.1. Оператор  $A$  имеет непустое резольвентное множество, в частности, нуль принадлежит этому множеству. Обратно, если оператор  $A$  порожден операцией дифференцирования и нуль принадлежит его резольвентному множеству, то найдется такая граничная функция  $g(x) \in L_2(0,1)$ , которая задает область определения оператора  $A$  в виде (1.2).

Весь спектр оператора,  $A$ , однозначно определяется нулями целой функции

$$\Delta(x) = 1 - \lambda \int_0^1 e^{\lambda t} \overline{g(t)} dt \quad (2.1)$$

В случае, если  $g(x) = -1$  при  $0 \leq x \leq \alpha$ , и  $g(x) = 0$  при  $\alpha \leq x \leq 1$ , то  $\Delta(x) = e^{\lambda x}$  и, следовательно, оператор  $A$  не имеет собственных значений. Не трудно видеть, что таким граничным функциям соответствует задачи Коши

$$Ay(x) = y'(x), \quad y(\alpha) = 0 \quad (2.2)$$

Введем два числа

$$d = \max \sup g(x), \quad c = \min \sup [g(x) + 1],$$

где  $\sup f(x)$  – замыкание носителя функции  $f(x)$ .

Теорема 2.2. Оператор  $A$  имеет счетное число собственных значений тогда и только тогда, когда  $d < c$ .

Пусть  $B$  – вполне непрерывный оператор, тогда и  $|B| = (B * B)^{1/2}$  компактен.

Определение 2.1. Собственные числа оператора  $|B|$  называются  $S$  – числами оператора  $B$ .

Определение 2.2. Компактный оператор  $B$  будет называться ядерным если

$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_j(B) < +\infty \quad (2.3)$$

где  $s_j(B)$  -  $s$  - числа оператора  $B$ .

Определение 2.3. Будем говорить, что линейный ограниченный оператор  $B$ , действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , имеет конечный матричный след, если для любого

ортонормированного базиса  $\{\varphi_j\}_1^\infty$  пространства  $H$  ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (B\varphi_j, \varphi_j) \tag{2.4}$$

сходится.

Так как любая перестановка ортонормированного базиса превращает его снова в ортонормированный базис, то для оператора  $B$  с конечным матричным следом ряд (2.4) сходится

абсолютно, каков бы ни был ортонормированный базис  $\{\varphi_j\}_1^\infty$ .

Лемма 2.1. Пусть  $B$  - линейный ограниченный неотрицательный оператор. Тогда сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} (B\psi_j, \psi_j) \tag{2.5}$$

имеет одно и то же значение (конечное или бесконечное) каков бы ни был

ортонормированный базис  $\{\psi_j\}_1^\infty$  пространства  $H$ . Оператор  $B$  ядерный тогда и только тогда, когда это значение конечно.

Теорема 2.3. Для того чтобы линейный ограниченный оператор  $B$  имел конечный матричный след, необходимо и достаточно, чтобы он был ядерным. Если  $B$  ядерный, то сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} (B\psi_j, \psi_j) \tag{2.6}$$

не зависит от выбора ортонормированного базиса  $\{\psi_j\}_1^\infty$  пространства  $H$ .

Определение 2.4. Сумма (2.6) обозначается через  $SpB$ , и называется (матричным) следом оператора  $B$ .

Для формулировки основного результата нам понадобится следующее определение.

Определение 2.4. Вполне непрерывный оператор  $B$ , имеющий единственную точку спектра в нуле называется вольтерровым оператором [5].

Лемма 2.2. Если оператор  $B$  вольтерров, то

$$SpB = 0.$$

### 3. Результаты исследований

Теорема 3.1. Если оператор

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \left\{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int_0^1 y'(t)g(t)dt, g(x) \in L_2(0,1) \right\} \tag{3.1}$$

вольтерров, т.е. не имеет спектра на конечной части комплексной  $\lambda$  плоскости (отличной от нуля), то

$$2 \int_0^1 t \overline{g(t)} dt + \left( \int_0^1 \overline{g(t)} dt \right)^2 = 0 \tag{3.2}$$

Доказательство. Найдем обратный оператор к оператору  $A$ , который окажется оператором Гильберта-Шмидта. Тогда его квадрат  $(A^{-1})^2$  будет ядерным оператором. В силу теоремы 2.3

оператор  $(A^{-1})^2$  имеет конечный матричный след, который не зависит от выбора ортонормированного базиса. Если оператор  $(A^{-1})^2$  вольтерров, то по лемме 2.2 имеет место равенство

$$sp(A^{-1})^2 = 0 \tag{3.3}$$

Вычислив левую часть оператора (3.3) получим (3.2). Теперь по-подробнее.

Пусть  $f(x) \in L_2(0, 1)$ , тогда  $f(x) \in L_1(0, 1)$ . Следовательно, функция  $f(x)$  суммируема по Лебегу и почти всюду имеет место формула

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x) \tag{3.4}$$

Применив эту теорему к краевой задаче

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = \int_0^1 y'(t) \overline{g(t)} dt \tag{3.5}$$

имеем

$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 y'(t) \overline{g(t)} dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

Следовательно,

$$y(x) = A^{-1} f(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt \tag{3.6}$$

Пусть  $K(x, t) = \theta(x - t) + \overline{g(t)}$ , тогда оператор  $A^{-1}$  примет вид

$$A^{-1} f(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

Очевидно, что

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty \tag{3.7}$$

поэтому, оператор  $A^{-1}$  Гильберта-Шмидта. По известной теореме [5] оператор  $(A^{-1})^2$  ядерный. Вычислим след этого оператора. Вычисления показывают, что

$$A^{-2} f(x) = \int_0^x \int_0^t f(\xi) d\xi dt + x \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt + \int_0^1 f(t) \int_t^1 \overline{g(\xi)} d\xi dt + \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)} dt$$

(3.8) Известно [5], что функционал SpB обладает следующим свойством:

$$Sp(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot SpA + \beta \cdot SpB \tag{3.9}$$

Опираясь на эту формулу, вычислим след каждого слагаемого формулы (3.8). Из-за вольтерровости след первого слагаемого формулы (3.8) равен нулю.

$$\begin{aligned}
 Sp\left(x \cdot \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \cdot \int_0^1 \varphi_n \overline{g(t)} dt \overline{\varphi_n(x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 x \overline{\varphi_n(x)} dx = \\
 &= \left| \varphi_1 = \frac{g(t)}{\|g\|}, \varphi_n \perp g, n = 2, 3, \dots \right| = \int_0^1 \varphi_1 g(t) dt \cdot \int_0^1 x \varphi_1(x) dx = \int_0^1 \frac{g(t)}{\|g\|} \cdot \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 t \cdot \overline{\varphi_1(t)} dt = \\
 &= \frac{\|g\|^2}{\|g\|} \cdot \int_0^1 t \cdot \frac{\overline{g(t)}}{\|g\|} dt = \int_0^1 t \cdot \overline{g(t)} dt;
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 Sp\left(\int_0^1 f(t) \int_0^1 \overline{g(\xi)} d\xi dt\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n(t) \cdot \int_0^1 \overline{g(\xi)} d\xi dt \int_0^1 \overline{\varphi_n(t)} dt = \\
 &= \left| \varphi_1 = \frac{\int_0^1 g(\xi) d\xi}{\left\| \int_0^1 g(\xi) d\xi \right\|}, \varphi_j \perp \varphi_1, G(t) = \int_t^1 g(\xi) d\xi \right| = \int_0^1 \varphi_1(t) \int_t^1 \overline{g(\xi)} d\xi dt \cdot \int_0^1 \varphi_1(t) dt = \\
 &= \int_0^1 \frac{G(t)}{\|G\|} \cdot \overline{G(t)} dt \cdot \int_0^1 \frac{G(\eta)}{\|G\|} \cdot d\eta = \int_0^1 \overline{G(\eta)} \cdot d\eta = \eta \cdot G(\eta) \Big|_0^1 + \int_0^1 \eta \overline{g(\eta)} \cdot d\eta = \int_0^1 t \overline{g(t)} \cdot dt;
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 Sp\left(\int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)} dt\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \varphi_n \overline{g(t)} dt \int_0^1 \overline{g(t)} dt \overline{\varphi_n(x)} dx = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n(t) \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \overline{\varphi_n(x)} dx = \left| \varphi_1 = \frac{g(t)}{\|g\|}, \varphi_j \perp \varphi_1, j = 2, 3, \dots \right| = \\
 &= \int_0^1 \varphi_1 \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \overline{\varphi_1(x)} dx = \int_0^1 \frac{\|g\|^2}{\|g\|} dt \cdot \int_0^1 \overline{g(t)} dt \cdot \int_0^1 \frac{\overline{g(t)}}{\|g\|} dt = \left( \int_0^1 \overline{g(t)} dt \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из формул (3.8)-(3.11) получим

$$SpA^{-2} = 2 \int_0^1 t \overline{g(t)} dt + \left( \int_0^1 \overline{g(t)} dt \right)^2 \tag{3.12}$$

Утверждение теоремы следует из формул (3.12) и (3.3). Теорема доказана.

Теорема 3.2. Оператор (1.1-1.2) является вольтерровым тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$g(x) = -1, \text{ если } 0 \leq x \leq \alpha, \text{ и } g(x) = 0, \text{ если } \alpha \leq x \leq 1. \tag{3.13}$$

Доказательство. Если оператор (1.1-1.2) вольтерров, т.е. не имеет собственных значений на конечной части комплексной плоскости, то в силу [7] и [6] имеет место равенство

$$1 - \lambda \int_0^1 \overline{g(t)} e^{\lambda t} dt = e^{\alpha \lambda}, \text{ следовательно, } 1 - e^{\alpha \lambda} = \lambda \int_0^1 \overline{g(t)} e^{\lambda t} dt, \text{ тогда } \int_0^1 \overline{g(t)} e^{\lambda t} dt = \frac{1 - e^{\alpha \lambda}}{\lambda};$$

В силу единственности преобразования Фурье [8-11] для  $g(x)$  имеет место равенство (3.13).

4. Выводы. Очевидно, что функция (3.13) удовлетворяет необходимому условию (3.2), и не удовлетворяет условию  $d < c$  теоремы 2.2, в данной ситуации  $d = c$ , поэтому спектр состоит из конечного множества собственных значений, или вовсе отсутствует. Наша теорема говорит, что имеет место последний случай, любопытно отметить, что нелинейное интегральное уравнение (3.2) имеет континуум множество решений. Этого интегрального уравнения можно вывести с помощью

формулы Гаала [12], такая методика успешно применена в работах [13]- [15] для решения различных спектральных задач. Мы воспользовались теоремой Лидского [16]. Следует отметить, что формулы следов операторов применяются при решении различных задач естествознания [17]- [20].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке, Распределение собственных значений, Шымкент, «Гылым», 1996, 270 с.
- [2] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач, М.: Наука, 1980, 270 с.
- [3] Шалданбаев А.Ш., Кудайбергенова К. Об одном признаке вольтерровости сужения оператора дифференцирования, Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», 28 мая-2 июня, 2007, с. 368, Новосибирск.
- [4] Шалданбаев А.Ш., Бейсенова Н. О вольтерровости корректного сужения оператора дифференцирования, Пойск, №1, 2008, с. 200-203.
- [5] Гохберг И.Ц., М.Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М.: Наука, 1965 г, 448 с.
- [6] Левин Б.Я. Целые функции, М.: МГУ, 1971.
- [7] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени, Известия АН РК серия физ. – математическая, Алматы, 2000, С. 29-34.
- [8] Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье, М.: Гостехлит, 1948.
- [9] Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье, М.: ГИФМЛ, 1962.
- [10] Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М.: ГИФМЛ, 1963.
- [11] Винер Н, Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области, М.: Наука, 1964.
- [12] Brislawn C. Kernels of trace class operators, Proceedings of AMS vol. 104, N 4, pp. 1181-1190.
- [13] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля Вестник Башкирского университета, том 14, №2, 2009, с. 351-355.
- [14] Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д. Спектральные свойства одного класса краевых задач для парабола-гиперболического уравнения, Дифференц. уравнения, 1992, Т. 28, N 1, С. 176-179.
- [15] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент, Гылым, 1993, 328 с.
- [16] Лидский В.Б. Доклады АН СССР, 1959, Т. 125, N3, С. 485-488.
- [17] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля, Вестник МГУ, Серия 1, Математика-механика, 1982, №3, с. 6-11.
- [18] Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов, Успехи математических наук, 2006, т. 61, вып. 5(371), с. 89-148.
- [19] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка, 1977, 332 с.
- [20] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля, М.: Наука, 1984.

#### REFERENCES

- [1] Kanguzhin B.E., Sadybekov M.A. Differencial'nye operatory na otrezke, Raspredelenie sobstvennyh znachenij, Shymkent, «Gylym», 1996, 270 s.
- [2] Dezin A.A. Obshhie voprosy teorii granichnyh zadach, M.: Nauka, 1980, 270 s.
- [3] Shaldanbaev A.Sh., Kudajbergenova K. Ob odnom priznake vol'terrovosti suzhenija operatora differencirovanija, Mezhdunarodnaja konferencija «Differencial'nye uravnenija, teorija funkcij i prilozhenija», 28 maja-2 ijunja, 2007, c. 368, Novosibirsk.
- [4] Shaldanbaev A.Sh., Bejsenova N. O vol'terrovosti korrektnogo suzhenija operatora differencirovanija, Pojsk, №1, 2008, c. 200-203.
- [5] Gohberg I.C., M.G. Krejn. Vvedenie v teoriju linejnyh nesamosoprjazhennyh operatorov, M.: Nauka, 1965 g, 448 s.
- [6] Levin B.Ja. Celye funkcij, M.: MGU, 1971.
- [7] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni, Izvestija AN RK serija fiz. – matematicheskaja, Almaty, 2000, S. 29-34.
- [8] Titchmarsh J.E. Vvedenie v teoriju integralov Fur'e, M.: Gostehlit, 1948.
- [9] Bohner S. Lekcii ob integralah Fur'e, M.: GIFML, 1962.
- [10] Viner N. Integral Fur'e i nekotorye ego prilozhenija, M.: GIFML, 1963.
- [11] Viner N, Pjeli R. Preobrazovanie Fur'e v kompleksnoj oblasti, M.: Nauka, 1964.
- [12] Brislawn C. Kernels of trace class operators, Proceedings of AMS vol. 104, N 4, pp. 1181-1190.
- [13] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja Vestnik Bashkirskogo universiteta, tom 14, №2, 2009, s. 351-355.
- [14] Sadybekov M.A., Tojzhanova G.D. Spektral'nye svojstva odnogo klassa kraevykh zadach dlja parabola-giperbolicheskogo uravnenija, Differenc. uravnenija, 1992, T. 28, N 1, C. 176-179.
- [15] Kal'menov T.Sh. Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa, Shymkent, Fylym, 1993, 328s.
- [16] Lidskij V.B. Doklady AN SSSR, 1959, T. 125, N3, C. 485-488.

- [17] Shaldanbaev A.Sh. Formuly sledov dlja periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadach Shturma–Liuvillja, Vestnik MGU, Serija 1, Matematika-mehanika, 1982, №3, s. 6–11.  
[18] Sadovnichij V.A., Podol'skij V.E. Sledy operatorov, Uspehi matematicheskikh nauk, 2006, t.61, vyp.5(371), c.89-148.  
[19] Marchenko V.A. Operatory Shturma – Liuvillja i ih prilozhenija, Kiev, Naukova dumka, 1977, 332s.  
[20] Levitan B.M. Obratnye zadachi Shturma – Liuvillja, M.: Nauka, 1984.

**Жайлы тарылған дифференциалдау операторының вольтерлі болуының үзілді кесілді шарты туралы**

**Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш**  
ЮКГУ им.М.О.Ауэзова, г.Шымкент

**Тірек сөздер:** вольтерлі оператор, іздер формуласы, тарылу теориясы.

**Аннотация.** Бұл жұмыста жайлы тарылған дифференциалдау операторының :

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \left\{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int_0^1 y'(t) \overline{g(t)} dt, g(x) \in L_2(0,1) \right\},$$

вольтерлі болуының үзілді кесілді шарты табылған. Нәтижесі  $g(x)$  функциясы арқылы өрнектелген.

Авторы:

Иманбаева А.Б.– к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент.

Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н., декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент.

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауэзова, г. Шымкент.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 296 – 303

UDC 517.9

## CRITERION OF SELF-CONJUGACY OF THE VOLTAIRE OPERATOR OF STORM- LIOUVILLE IN SPACE CRANE

**Shaldanbaev A.SH., Imanbaeva A.B., Besbaev G.A.**

YuKGU of M. Auezov, Shymkent  
shaldanbaev51@mail.ru

**Key words:** prostranstvo Crane, the vltterrovoy operator, self-conjugacy on an indefinite metrics, the operator Shturma-Liuvillya.

**Astract.** In the real work the criterion of self-conjugacy of the Voltaire operator Shturma-Liuvillya in space of Crane generated by an indefinite metrics where the operator is determined by a formula  $u(x) = u(1-x)$ ,  $\forall u(x) \in L^2(0,1)$  is received.

517.9

## КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

**Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.**

ЮКГУ им. М.Ауэзова, г. Шымкент

**Ключевые слова:** пространство Крейна, вольтерровый оператор, самосопряженность по индефинитной метрике, оператор Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе получен критерий самосопряженности вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве Крейна, порожденного индефинитной метрикой  $[x, y] = (Jx, y)$  ( $x, y \in Y$ ), где оператор  $J$  определен формулой  $Ju(x) = u(1-x)$ ,  $\forall u(x) \in L^2(0,1)$ .

**1. Введение.** Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \quad x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (1.2)$$

с двумя ( $i = 1,2$ ) линейно независимыми граничными условиями (1.2), где  $a_{ij}$  ( $i = 1,2, j = 1,2,3,4$ ) - произвольные комплексные числа, т.е. предполагается, что хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} \quad (i, j = 1,2,3,4) \quad (1.3)$$

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

отличен от нуля.

Определение 1.1. Вполне непрерывный оператор не имеющий собственных векторов называется вольтерровым [1.с.197].

Определение 1.2 Оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) называется вольтерровой, если вольтерров обратный оператор  $L^{-1}$ .

Пусть  $L$  вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля тогда его сопряженный  $L^*$  также является вольтерровым.

Обозначим через  $J$  оператор, заданный формулой,

$$Ju(x) = u(1-x), \quad \forall u(x) \in L^2(0,1). \quad (1.5)$$

Очевидно, что этот оператор обладает свойствами

$$J^2 = I, J^{-1} = J^*, J^* = J,$$

что позволяет введение индефинитной  $[\cdot, \cdot]$  метрики в пространстве Крейна, а именно:

$$[x, y] = (Jx, y) \quad (x, y \in Y)$$

Определение 1.3. Вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля  $L$ , называется  $J$  симметрическим, если имеет место формула

$$[Lx, y] = [x, Ly],$$

что равносильно выполнению равенства

$$JL = L^+ J, \quad (1.6)$$

где  $L^+$ -оператор формально сопряженный к оператору  $L$ .

Постановка задачи. При каких условиях на миноры матрицы (1.4), для вольтеррового оператора Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2), имеет место формула (1.6)

## 2. Методы исследований

2.1. Пусть  $Y$ -векторное пространство над полем комплексных чисел  $C$ , и на  $Y$  задана полуторалинейная форма  $Q(x, y)$  т.е. отображение  $Y \times Y \rightarrow C$ , линейное по первому аргументу:

$$Q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \cdot Q(x_1, y) + \lambda_2 \cdot Q(x_2, y)$$

$$(x_1, x_2 \in Y, \lambda_1, \lambda_2 \in C)$$

и эрмитово симметричное:

$$Q(x,y) = Q(y,x) \quad (x,y) \in Y$$

Эрмитова форма  $Q(x,y)$  называется  $Q$ -метрикой или индефинитной метрикой. Для удобства мы используем обозначение  $Q(x,y) \equiv [x,y]$

Вектор  $x$  называется  $Q$  положительным, отрицательным или нейтральным в зависимости от того, будет ли  $[x,y] > 0$ ,  $[x,y] < 0$ , или  $[x,x] = 0$ .

Соответственно линеал (т.е. линейное многообразие)  $M$  называется неотрицательным, неположительным или нейтральным, если  $[x,y] \geq 0$ ,  $[x,y] \leq 0$  или  $[x,y] = 0$  для всех  $x \in M$ . Аналогично определяются положительные и отрицательные линеалы ( $[x,y] > 0$  и  $[x,y] < 0$  для всех  $x \in M$ ). Неположительные, неотрицательные линеалы объединяются общим названием – семидефинитные линеалы. Соответственно положительные и отрицательные линеалы будем называть дефинитными.

## 2.2. Пространства Крейна

Особую роль среди всех пространств с индефинитной метрикой играют пространства Крейна и Понтрягина. Предположим, что пространство  $Y$  с индефинитной метрикой  $Q(x,y) = [x,y]$  допускает разложение в прямую сумму  $Q$ -ортогональных положительного  $Y^+$  и отрицательного  $Y^-$  линеалов:

$$Y = Y^+ \oplus Y^-, \quad (2.1)$$

где символ  $\oplus$  означает  $Q$ - ортогональную прямую сумму. Разложение (2.1) называется каноническим разложением пространства  $Y$ .

Пространство  $Y$  с  $Q$ - метрикой  $[x,y]$ , допускающее разложение (2.1) в котором линеалы  $Y^+$  и  $Y^-$  являются полными, т.е. гильбертовыми пространствами по отношению к нормам  $\|x\| = [x,x]^{\frac{1}{2}}$ , ( $x \in Y^+$ ) и  $(-\|x\|) = [x,x]^{\frac{1}{2}}$  ( $x \in Y^-$ ) соответственно, называется пространством Крейна.

Каноническое разложение (2.1) позволяет ввести в пространстве Крейна  $Y$  скалярное произведение по формуле

$$(x,y) = [x^+, y^+] - [x^-, y^-]$$

$$x = x^+ + x^-, y = y^+ + y^-, x^+, y^+ \in Y^+, x^-, y^- \in Y^- \quad (2.2)$$

Здесь и далее под подпространством мы понимаем замкнутый линеал.

Следующая, лемма- очевидное следствие определений.

Лемма 2.1. Пространство Крейна со скалярным произведением (2.2)

и нормой  $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$  является гильбертовым, причем не только  $Y^+ \perp Y^-$ , но и  $Y^+ \perp Y^-$  в смысле скалярного произведения, определяемого равенством (2.2)

Величина  $\chi = \min(\dim Y^+, \dim Y^-)$  называется рангом индефинитности пространства Крейна  $Y$ .

Пусть задано пространство Крейна  $Y$ . Каноническое разложение (2.1) определяет два взаимно дополнительных проектора  $P^+, P^-$  ( $P^+ + P^- = I$  - тождественный оператор в  $Y$ ), отображающих  $Y$  на  $Y^+$  и  $Y^-$  соответственно. Проекторы  $P^+$  и  $P^-$  называются каноническими, а соответствующий оператор  $J = P^+ - P^-$  - канонической симметрией. Каноническая симметрия  $J$  обладает следующими свойствами:

$$J^2 = I, J^{-1} = J^*, J^* = J \quad (2.3)$$

где под оператором  $J^*$  понимается сопряженные к  $J$  относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  оператор.

Введение оператора  $J$  позволяет более компактно записать соотношение между индефинитной  $[\cdot, \cdot]$  и гильбертовой  $(\cdot, \cdot)$  метриками в пространстве Крейна, а именно:

$$(x, y) = [Jx, y], \quad [x, y] = (Jx, y) \quad (x \in Y) \quad (2.4)$$

Часто используется другой подход к определению пространства Крейна. Пусть в данном гильбертовом пространстве  $Y$  задан оператор  $J$ , обладающий свойствами (2.3). Определяя индефинитную метрику с помощью равенства (2.4), получим пространство Крейна. Соответствующие

проекторы  $P^+$  и  $P^-$  - спектральные проекторы оператора  $J$ , соответствующие положительной и отрицательной частям спектра, а подпространства  $Y^+$  и  $Y^-$  области значений этих операторов.

Пусть  $M$ -неотрицательный или положительный (неположительный или отрицательный) линейный оператор в пространстве Крейна  $Y$ .

Тогда

Лемма 2.2. Оператор  $P^+(P^-)$  удовлетворяет оценке

$$\|P^+x\|^2 \geq \|x\|^2/2, \quad \forall x \in M \quad (\|P^-x\|^2 \geq \|x\|^2/2, \quad \forall x \in M)$$

### 2.3. $J$ -ортонормированные системы

Напомним определение базиса. Система подпространств  $S = \{N_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , где  $\Lambda$  - произвольное множество индексов, называется базисом (из подпространств) данного банахова пространства  $H$ , если каждый элемент  $x$  этого пространства единственным образом разлагается в ряд

$$x = \sum_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha, \quad x_\alpha \in N_\alpha$$

В написанном разложении элементы  $x_\alpha$  представимы в виде  $x_\alpha = P_\alpha x$  ( $P_\alpha$ -проекторы в  $H$ ). Данный базис в  $H$  называется безусловным базисом (базисом Шаудера), если при любых перестановках его членов он остается базисом пространства  $H$ . Мы будем иметь дело со случаем сепарабельного гильбертова пространства. Следовательно, дальнейшие утверждения и определения будут формулироваться для этого случая.

Базис  $\{N_i\}_i^\infty$  Гильбертова пространства  $H$  называется базисом, эквивалентным ортогональному, если в  $H$  найдется эквивалентное скалярное произведение, в котором этот базис ортогонален (т.е.  $N_i \perp N_j$  при  $i \neq j$ )

Данный базис из подпространств эквивалентен ортогональному тогда и только тогда, когда он безусловен [2]

Рассмотрим частный случай, когда подпространства  $N_i$  одномерны т.е.

$N_i = \text{Lin}(e_i)$  Базис  $\{e_i\}$  называется базисом Рисса гильбертова пространства  $H$ , если в  $H$  найдется эквивалентное скалярное произведение, в котором этот базис ортонормирован. Базис Рисса всегда почти нормирован, т.е. найдутся положительные постоянные  $C_1, C_2$  такие, что  $C_1 \leq \|e_j\| \leq C_2$  для всех  $j = 1, 2, \dots$ . Любой базис Рисса является почти нормированным безусловным базисом данного гильбертова пространства. Верно и обратное, т.е. безусловный почти нормированный базис-базис Рисса. Приведем другое полезное свойство базиса Рисса. Данный базис  $\{\varphi_i\}$  является базисом Рисса тогда и только тогда когда найдутся постоянные

$C_1, C_2 > 0$  такие, что для любых комплексных чисел  $\gamma_j$  натуральных  $n$  имеем [2]

$$C_1 \cdot \sum_{j=1}^n |\gamma_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j \varphi_j \right\|^2 \leq C_2 \cdot \sum_{j=1}^n |\gamma_j|^2$$

Система векторов  $S = \{e_i\}_1^\infty$ , называется  $J$ - ортонормированной системой в данном сепарабельном пространстве Крейна  $Y$ , если  $[e_i, e_j] = \pm \delta_{ij}$  для всех  $i, j \in N$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. Как и в случае обычного гильбертова пространства, мы можем рассматривать в  $Y$  базисы и безусловные базисы (базисы Шаудера). Базис  $\{\varphi_i\}_1^\infty$ , в пространстве Крейна  $Y$  назовем  $J$ - ортонормированным, если его можно представить в виде объединения конечного множества векторов и  $J$ - ортонормированного множества  $S$  (т.е. при всех  $\varphi_i, \varphi_j \in S$ ) имеем что  $[\varphi_i, \varphi_j] = 0$  при  $i \neq j$ ,  $[\varphi_i, \varphi_i] = \pm 1$ , причем эти множества  $J$  ортогональны друг другу.

В пространстве Крейна  $Y$  всегда можно построить  $J$ -ортонормированный базис. Действительно, рассмотрим каноническое разложение  $Y = Y^+ + Y^-$ . Подпространства  $Y^\pm$  равномерно дефинитны, и метрики  $[\cdot, \cdot]$ ,  $-[\cdot, \cdot]$  определяют в  $Y^\pm$  обычные скалярные произведения. Базис в  $Y$  есть объединение ортонормированных базисов (относительно этого скалярного произведения) в  $Y^\pm$ . Очевидно, что данный базис-базис Рисса в  $Y$ .

Лемма 2.3. Всякий  $J$ -ортонормированный (или почти  $J$ -ортонормированный) безусловный базис почти нормирован.

Для ограниченного или неограниченного с плотной областью определения оператора  $A: Y \rightarrow Y$  мы можем определить сопряженный относительно данной индефинитной метрики оператор  $A^C$ . Обычный сопряженный оператор (в смысле гильбертовой метрики) обозначается через  $A^*$ .

Пусть  $A: Y \rightarrow Y, D(A) = Y$ . Оператор  $A^C: Y \rightarrow Y$ , определенный на линейном  $D(A^C) = \{y \in Y: \text{существует } z \in Y \text{ такой, что } [Ax, y] = [x, z] \text{ для всех } x \in D(A)\}$  формулой  $A^C y = z$ , назовем  $J$ -сопряженным с оператором  $A$ .

Отметим простую связь между  $J$ -сопряженным оператором  $A^C$  к данному оператору  $A$  с плотной в  $Y$  областью определения и обычным сопряженным оператором  $A^*: A^C = JA^*$ .

Пусть  $Y$ -пространство Крейна. Плотно определенный оператор  $A: Y \rightarrow Y$  называется  $J$ -симметрическим, если

$$[Ax, y] = [x, Ay]$$

для всех  $x, y \in D(A)$ .

Симметричность означает, что  $ACA^C$ . Замкнутый, с плотной областью определения оператор  $A: Y \rightarrow Y$  называется  $J$ -самосопряженным, если  $A = A^C$ .

Мы ограничимся этим беглым обзором теории операторов в пространствах с индефинитными метриками, более полные сведения приведены в [3]

Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) являются квадратами корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} + \Delta_{24} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\Delta_{ij}$  вычисляются по формуле (1.3) [5.с.35]. Эта функция относится к классу целых функций экспоненциального типа [6.с.42], для которых справедлива лемма 2.4. [7.с.31] см. также [8],[9].

Лемма 2.4. Если функция экспоненциального типа  $f(z)$  не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где  $a, b$  - некоторые комплексные числа.

Лемма 2.5. Оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \Delta_{13} = 0, \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0, \quad (2.6)$$

где  $\Delta_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  находятся по формуле (1.3).

Достаточность условий (2.6) следует из формулы (2.5), а необходимость является следствием леммы 2.4.

Лемма 2.6.. Если оператор Штурма-Лиувилля (1.1)-(1.2) вольтерров, то существует комплексное число  $k$ , такое, что граничные условия (1.2) эквивалентны к граничным условиям [4]

$$y(0) = ky(1), y'(0) = -ky'(1), k \in \mathbb{C}$$

В работе [7] приведено подробное доказательство этой леммы.

Лемма 2.7. Если  $L$  обратимый оператор Штурма-Лиувилля, а оператор  $J$  определен формулой (1.5), то равенство (1.6) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Delta_{13}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{13}}}{\overline{\Delta(0)}}, \frac{\Delta_{12} + \Delta_{32}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{12} + \Delta_{14}}}{\overline{\Delta(0)}}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\Delta_{32} + \Delta_{34}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{14} + \Delta_{34}}}{\overline{\Delta(0)}}, \frac{\Delta_{32} + \Delta_{12}}{\Delta(0)} = \frac{\overline{\Delta_{14} + \Delta_{12}}}{\overline{\Delta(0)}},$$

где  $\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$ ,  $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ).

**3. Результаты исследований**

Теорема 3.1. Если  $L$  вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля вида

$$Ly = -y''(x); x \in (0,1) \tag{3.1}$$

$$y(0) = ky(1), y'(0) = -ky'(1), k \in \mathbb{C} \tag{3.2}$$

то равенство

$$JL = L^+ J \tag{1.6}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$k + \bar{k} = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. В нашем случае матрица (1.4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{pmatrix},$$

поэтому  $\Delta_{12} = 1, \Delta_{13} = 0, \Delta_{14} = k, \Delta_{32} = -k, \Delta_{24} = 0, \Delta_{34} = -k^2$  (3.4)

В силу вольтерровости оператора  $L$  имеет место неравенство

$$\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} = 1 - k^2 \neq 0$$

Подставив, найденных величин (3.4) в (2.7), имеем

$$\Delta_{12} + \Delta_{32} = 1 - k, \overline{\Delta_{12}} = 1, \overline{\Delta_{14}} = \bar{k}, \Rightarrow$$

$$\frac{1 - k}{1 - k^2} = \frac{1 + \bar{k}}{1 - \bar{k}^2}, \frac{1}{1 + k} = \frac{1}{1 - \bar{k}}, 1 - \bar{k} = 1 + k, \Rightarrow \bar{k} + k = 0;$$

$$\frac{\Delta_{32} + \Delta_{34}}{\Delta(0)} = \frac{-k - k^2}{1 - k^2} = \frac{\bar{k} - \bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2}, \frac{-k(1 + k)}{1 - k^2} = \frac{\bar{k}(1 - \bar{k})}{1 - \bar{k}^2},$$

$$\Rightarrow \frac{-k}{1 - k} = \frac{\bar{k}}{1 + \bar{k}}, -k(1 + \bar{k}) = \bar{k}(1 - k), \Rightarrow -k - |k|^2 = \bar{k} - |k|^2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k = \bar{k}, \bar{k} + k = 0;$$

$$\frac{\Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta(0)} = \frac{-k}{1 - k^2} = \frac{\bar{k}}{1 - \bar{k}^2}, -k(1 - \bar{k}^2) = \bar{k}(1 - \bar{k}^2), \Rightarrow$$

$$-k + k\bar{k}^2 = \bar{k} - \bar{k}k^2, -k + \bar{k}|k|^2 = \bar{k} - k|k|^2, \bar{k} + k - k|k|^2 - \bar{k}|k|^2 = 0,$$

$$\bar{k} + k - |k|^2(k + \bar{k}) = 0, (k + \bar{k})(1 - |k|^2) = 0 \text{ при } \bar{k} + k = 0.$$

4. **Выводы.** Если  $\bar{k} + k = 0$ , то оператор  $JL$  самосопряжен в существенном в пространстве  $L^2(0,1)$ , где оператор  $J$  определен формулой (1.5), это означает, что оператор Штурма-Лиувилля (3.1)-(3.2) самосопряжен в существенном в пространстве с индефинитной метрикой, порожденной скалярным произведением  $[u,v] = (Ju,v)$ , где (...) - означает скалярное произведение в пространстве  $L^2(0,1)$ . В самом деле, из формулы (1.6) следует, что

$$JL = L^+ J \quad \text{и} \quad L^* J = (JL)^*$$

следовательно,  $JL \subset (JL)^* \Rightarrow \overline{JL} \subset \overline{(JL)^*} = (JL)^*$ . Теперь остается заметить формулу [10]

$$\overline{(JL)}^{-1} = \overline{(JL)}^{-1}$$

и ограниченной обратимости оператора  $JL$ .

Отметим, что к теме настоящей работы посвящены многочисленные работы, не полный перечень [11-22], которых приведено ниже.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Функциональный анализ СМБ, М.: Наука, 1972.
- [2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамо сопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М.: Наука, 1972.
- [3] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения, Новосибирск, Наука, 2000.
- [4] Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля, Математические заметки РАН, 1994, Т.56, вып.1, С.143-145.
- [5] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка, 1977, 329с.
- [6] Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент, М.: Наука, 1983, 176с.
- [7] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени, Известия АН РК, серия физ.-мат., 2000, №3, С. 29-34.
- [8] Левин Я.Б. Целые функции, М.: МГУ, 1971.
- [9] Ибрагимов И.И. Избранные вопросы теории аналитических функций, Баку, Элм, 1984, 384с.
- [10] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.1, М.: Мир, 1977. -357с.
- [11] Шоманбаева М.Т. О базисности собственных функций уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Поиск», г. Алматы, №2, 2006 г.
- [12] Шоманбаева М.Т. О задаче Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, «Поиск», г. Алматы, №3, 2006 год.
- [13] Кальменов Т.Ш.. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент, Гылым, 1993, 327 с.
- [14] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка, Математические труды, г. Новосибирск, 2010, т.13, №2, с. 128-138.
- [15] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. О полноте собственных векторов задачи Коши, Наука и образование Южного Казахстана, Шымкент, №27, 2002, С.58-62.
- [16] Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи, Наука и образование ЮК, Шымкент, 2003, № 34, С. 25-31.
- [17] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом, Математический журнал, Алматы, 2004, Т. 4, №3(13), С. 41-48.
- [18] Кальменов Т.Ш., Спабекова Г.М., Шалданбаев А.Ш. Дифференциальные уравнения на окружности с отклоняющимся аргументом, Наука и образование Южного Казахстана, серия экономика, мат., инф., физика, 2004, №4(39), С.122-127.
- [19] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К.Ж. О задаче Коши для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом, Научный журнал ПОИСК, серия естественных и технических наук, №4, г. Алматы, октябрь 2009г, с. 199-204.
- [20] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К.Ж. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом, Научный журнал ПОИСК, серия естественных и технических наук, №4, г. Алматы, октябрь 2009г, с. 204-209;
- [21] Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. О природе спектра оператора Штурма-Лиувилля для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, Наука и образование Южного Казахстана, ЮКТУ им.М.Ауезова, 2006 г.
- [22] Kalmenov T.Sh., A.Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and ill- posed problems. 2010, v. 18, №4, pp.352-369.

#### REFERENCES

- [1] Funkcional'nyj analiz SMB, M.: Nauka, 1972.
- [2] Gohberg I.C., Krejn M.G. Vvedenie v teoriju linejnyh nesamo soprjazhennyh operatorov v gil'bertovom prostranstve, M.: Nauka, 1972.
- [3] Egorov I.E., Pjatkov S.G., Popov S.V. NEKLASSICHESKIE differencial'no-operatornye uravnenija, Novosibirsk, Nauka, 2000.
- [4] Bijarov B.N., Dzhumabaev S.A. Kriterij vol'terrovosti kraevykh zadach dlja uravnenija Shturma-Liuvillja, Matematicheskie zametki RAN, 1994, T.56, vyp.1, C.143-145.
- [5] Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija, Kiev, Naukva dumka, 1977, 329s.
- [6] Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent, M.: Nauka, 1983, 176s.
- [7] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni, Izvestija AN RK, serija fiz.-mat., 2000, №3, S. 29-34.
- [8] Levin Ja.B. Celye funkcii, M.: MGU, 1971.
- [9] Ibragimov I.I. Izbrannye voprosy teorii analiticheskikh funkcij, Baku, Jelm, 1984, 384c.
- [10] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki, t.1, M.: Mir, 1977. -357c.

- [11] Shomanbaeva M.T. O bazisnosti sobstvennyh funkcyj uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Poisk», g. Almaty, №2, 2006 g.
- [12] Shomanbaeva M.T. O zadache Nejmana dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, «Poisk», g. Almaty, №3, 2006 god.
- [13] Kal'menov T.Sh.. Kraevye zadachi dlja linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh giperbolicheskogo tipa, Shymkent, Gylym, 1993, 327 s.
- [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka, Matematicheskie trudy, g. Novosibirsk, 2010, t.13, №2, s. 128-138.
- [15] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, Shymkent, №27, 2002, S.58-62.
- [16] Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoy i antiperiodicheskoy zadachi, Nauka i obrazovanie JuK, Shymkent, 2003, № 34, S. 25-31.
- [17] Kal'menov T.Sh., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. K spektral'noj teorii uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom, Matematicheskij zhurnal, Almaty, 2004, T. 4, №3(13), S. 41-48.
- [18] Kal'menov T.Sh., Spabekova G.M., Shaldanbaev A.Sh. Differencial'nye uravnenija na okruzhnosti s otklonjajushhimsja argumentom, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, serija jekonomika, mat., inf., fizika, 2004, №4(39), C.122-127.
- [19] Shaldanbaev A.Sh., Rustemova K.Zh. O zadache Koshi dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom, Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestvennyh i tehniceskikh nauk, №4, g. Almaty, oktjabr' 2009g, s. 199-204.
- [20] Shaldanbaev A.Sh., Rustemova K.Zh. O periodicheskoy zadache dlja uravnenija pervogo porjadka s otklonjajushhimsja argumentom, Nauchnyj zhurnal POISK, serija estestvennyh i tehniceskikh nauk, №4, g. Almaty, oktjabr' 2009g, s. 204-209;
- [21] Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. O prirode spektra operatora Koshi-Nejmana dlja uravnenija teploprovodnosti s otklonjajushhimsja argumentom, Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana, JuKGU im.M.Auezova, 2006 g.
- [22] Kalmenov T.Sh., A.Sh. Shaldanbaev. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and ill- posed problems. 2010, v. 18, №4, pp.352-369.

**Вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының Крейннің кеңістігінде жалқы болуының үзілді кесілді шарты туралы**

**Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.**

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

Кіліт сөздер: Крейннің кеңістігі, вөлтерлі оператор, индефинитті метрика бойынша жалқы оператор, Штурм-Лиувилл операторы.

Аннотация. Бұл еңбекте вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының индефинитті метрикалы Крейннің кеңістігінде жалқы оператор болуының үзілді кесілді шарттары табылған, әңгіме, мына,  $[x, y] = (Jx, y)$  ( $x, y \in Y$ ) метрика туралы болып отыр, мұндағы  $J$  дегеніміз былай,

$$J u(x) = u(1-x) \quad \forall u(x) \in L^2(0,1),$$

анықталған.

Авторы:

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казакстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Иманбаева А.Б. – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казакстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Бесбаев Г.А. – к.ф.-м.н., декан высшей школы ИТиЭ Южно-Казакстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Поступила 07.07.2015 г.

МАЗМУНЫ

**Жер маңындағы ғарыштық кеңістіктегі үрдістер**

|   |    |
|---|----|
| <i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н.</i> Алматы үстінде ионосферадағы жазғы түндегі қалыпсыздықтардың әсері.....   | 5  |
| <i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю.Г.</i> Алматы үстінде F2-қабатындағы электрондық концентрацияның түнгі ұлғаю механизмі.....  | 12 |
| <i>Жумабаев Б.Т., Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю.Г.</i> Кешкі терминаторлардан шығарылатын толқындардың параметрлерін зерттеу.....   | 19 |
| <i>Соколова О.И., Андреев А.Б., Бурлаков Г.В., Качусова О.Л., Крякунова О.Н., Левин Ю.Н., Николаевский Н.Ф.</i> «Алма-Ата» магниттік обсерваториясында геомагниттік өрістің эксперименттік деректердің тіркелуін бақылау..... | 26 |
| <i>Сомсиков В.М., Андреев А.Б., Жумабаев Б.Т.</i> SATI мәліметтерінің Мезосферада толқын ашынуының мерзім ерекшеліктерін жүргізу және жерсеріктермен бақылау.....   | 33 |
| <i>Козин И.Д., Федулina И.Н.</i> Күн жарқылдары және радиотолқынның таралуы.....  | 40 |
| <i>Козин И.Д., Федулina И.Н., Васильев И.В., Проценко В.А., Кирпун В.В.</i> Радиоэфирдің бос еместігін бақылау құрылғысы.....   | 46 |
| <i>Козин И.Д., Федулina И.Н.</i> Радиотолқындардың трансionoсфералық таралуы.....   | 49 |

**Жер қыртысындағы геодинамикалық процесстерің зерттеуінің жер-ғарыштық әдістері**

|  |    |
|--|----|
| <i>Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Хачикян Г.Я., Мукашев К.М., Садыков Т.Х.</i> Ғарыштық сәулелердегі мюондар және жер қыртысындағы процесстер.....  | 54 |
| <i>Жантаев Ж.Ш., Жумабаев Б.Т., Хачикян Г.Я., Тойшиев Н., Кайратқызы Д.</i> 21-24 күн циклінің күннің және глобалді сейсмикалық белсенділіктерінің вариациясы.....                             | 63 |
| <i>Хачикян Г.Я., Ким А.С., Инчин А.С., Лозбин А.</i> Сейсмо-ионосфералық байланыс: DEMETER ЖЖС деректері бойынша электронды температурасының және электронды концентрациясының вариациясы..... | 71 |
| <i>Хачикян Г.Я., Демченко Б.И., Шестакова Л.И., Садыкова А.Б.</i> Жер сілкінісінің пайда болу себептеріне жиілігің жұлдызды уақытына байланысы (мысалы ретінде Алматы облысы).....             | 79 |
| <i>Бибосинов А.Ж., Шигаев Д.Т., Кайранбаева А.Б.</i> Георадиолокация арқылы гидротехникалық ғимаратының техникалық күйінің зерттеу және сараптама әдістерін қолдану.....                       | 86 |
| <i>Бибосинов А.Ж., Нурақынов С.М.</i> ЖАЗ мәліметтері арқылы урбанизациялық аймақтардың қазіргі геодинамикалық үдерістерін картографиялау.....   | 92 |
| <i>Виляев А.В., Стихарный А.П., Серикбаева Э.Б.</i> Георадиолокация арқылы гидротехникалық ғимаратының техникалық күйінің зерттеу және сараптама әдістерін қолдану.....                        | 98 |

**Теориялық және тәжірибелік зерттеулер**

|   |     |
|---|-----|
| <i>Асанова А.Т.</i> Аралас туындылары бар гиперболалық теңдеулердің арнайы түрдегі жүйесі үшін жазықтықтағы периодты есеп туралы.....   | 104 |
| <i>Кәрімов Ә.М.</i> Жер атмосферасындағы шашыраудың индикатрисаны көрсеткіші есептігі.....  | 117 |
| <i>Алдашев С.А., Уаисов Б.</i> Көп өлшемді Геллерстедт теңдеуіне спектрлік Дирихле және Пуанкаре есептерінің бір мәнді шешімділік критериясы.....   | 120 |
| <i>Ахметова С.Т., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувил теңдеуінің Коши есебіне кері есепті шешудің бір тәсілі туралы.....   | 124 |
| <i>Глеубергенов М.И., Василина Г.К.</i> Аналитикалық түрде берілген интегралдық көпбейненің стохастикалық орнықтылығы туралы.....   | 129 |
| <i>Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувил операторының тегі жалқы болуының белгілері туралы.....   | 138 |
| <i>Сергалиев А.С., Хаджиева Л.А.</i> Бұрғылау бағанының қозғалыс теңдеуі үшін стационарлы шекаралық есептегі жалпыланған функция әдісі.....   | 144 |
| <i>Қойшыбекова А.Қ.</i> Бізді қоршаған орта мәселелеріндегі математикалық үлгілеу.....  | 150 |
| <i>Лебедев И.А., Темиралиев А.Т., Федосимова А.И.</i> Алыс және жақын корреляцияларды алтын ядроларының 10.7 А-ГэВ фотоэмпульсия ядроларымен эрекеттесуінде зерттеу.....                      | 154 |
| <i>Бақтыбаев Қ., Дәлелханқызы А., Қойлық Н.О., Бақтыбаев М.К.</i> Ядролық реакциялардың күшті байланысқан каналдар әдісі бойынша $^{28,30,32}\text{Si}$ изотоптарындағы шашырау процессі..... | 159 |
| <i>Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувил операторының меншікті мәндерінің еселі болуының бір белгісі туралы.....  | 167 |
| <i>Бәләл Ш., Даржанова А.Б.</i> Жүктелгенфункционалдық теңсіздіктер туралы.....   | 172 |
| <i>Сарсенгельдин М.М., Бижигитова Н.Т.</i> Жылуөткізгіштік теңдеуінің жылжымалы аймақтарда аналитикалық шешімі.....   | 182 |
| <i>Жахаев Б.К.</i> Представления $S_n$ На некоторых корневых деревьях в свободной право-коммутативной алгебре.....  | 185 |
| <i>Ахметова С.Т., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувил теңдеуінің Коши есебінің әлді шешімінің Фүрелік кейпі.....   | 192 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Иңқарбеков М.Қ., Қалтаев А.</i> Химиялық әсерлесуші турбулентті ағындардың үлкен құйындарды модельдеу әдісі үшін фильтрленген тығыздық функциясын зерттеу.....  | 197 |
| <i>Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувилл операторының меншікті мәндерінің шекаралық коэффициентке тәуелділігінің сыйпаты.....   | 215 |
| <i>Қойшыбекова А.Қ., Онғарбаева А.Д.</i> Жана ақпараттық технологиялар көмегімен электрондық оқулықты құру ерекшеліктері.....  | 222 |
| <i>Боос Э.Г., Темірәлиев Т., Избасаров М., Самойлов В.В., Турсунов Р.А., Федосимова А.И.</i> Импульсі 22.4 және 32 ГэВ/С $\overline{PP}$ - әрекеттестіктерде пайда болған бөлшектердің энергетикалық және бұрыштық сипаттамаларын салыстырмалы талдау..... | 228 |
| <i>Мүсіраліев Ж.А.</i> Мектеп курсындағы физика пәніне электрондық кестені қолдану әдісі Трансформатордың жалпы құрылымын жасау сценаріі.....  | 234 |
| <i>Рябкин Ю.А., Заишквара О.В., Клименов В.В., Исова А.Т., Токмолдин С.Ж.</i> $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$ интерметаллид негізіндегі спинтроникаға арналған көлемді материал.....   | 242 |
| <i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Ақынбеков Е.А., Рахымжанов Б.Н., Баубекова М.К., Абдулаева Ж.А.</i> «Кіші бөлгіштерді» екі дене есебінде жою әдісі.....  | 246 |
| <i>Бапаев К.Б., Сламжанова С.С.</i> Резонансты айырма-динамикалық жүйелердің орнытықтылығы мен бифуркациялануы.....  | 250 |
| <i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Көкеев Ж.С., Бердалиева Т.Д., Жәмединова А.К., Рахимжанов Б.Н.</i> Орбитасы негізгі жазықтыққа аз көлбеудегі резонанстық ЖЖС $\alpha_4 < \omega < \alpha_3$ интервалындағы эллипс типті қозғалысы.....                       | 256 |
| <i>Сейтов Б.Ж., Бейсембетов И.Қ., Нүсіпов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Бакранова Д.И.</i> Жұқа кремний карбиді қабаттарын иондық имплантация әдісімен синтездеу.....  | 261 |
| <i>Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.</i> Спектралді таралым әдісі арқылы сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу.....  | 269 |
| <i>Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Бас бөлігі толқындық оператор болған операторлар шоғырының бір класының меншікті векторларының базистігі туралы.....  | 277 |
| <i>Бесбаев Г.А., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Аргументі ауытқыған теңдеулердің бір класы үшін қойылған Нейманның есебінің спектралдік қасиеттері.....   | 284 |
| <i>Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Жайлы тарылған дифференциалдау операторының вөлтерлі болуының үзілді кесілді шарты туралы.....  | 290 |
| <i>Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.</i> Вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының Крейннің кеністігінде жалқы болуының үзілді кесілді шарты туралы.....   | 296 |

СОДЕРЖАНИЕ

**Процессы в околоземном космическом пространстве**

|   |    |
|---|----|
| <i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н.</i> Проявление летней ночной аномалии в ионосфере над Алматы.....   | 5  |
| <i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю.Г.</i> Механизмы ночных увеличений электронной концентрации в F2-слое над Алматы.....  | 12 |
| <i>Жумабаев Б.Т., Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю.Г.</i> Исследование параметров волн, генерируемых утренним и вечерним терминаторами.....  | 19 |
| <i>Соколова О.И., Андреев А.Б., Бурлаков Г.В., Качусова О.Л., Крякунова О.Н., Левин Ю.Н., Николаевский Н.Ф.</i> Контроль регистрации экспериментальных данных геомагнитного поля в магнитной обсерватории «Алма-Ата»..... | 26 |
| <i>Сомсиков В.М., Андреев А.Б., Жумабаев Б.Т.</i> Особенности сезонного поведения волновых возмущений мезосферы по данным SATI и по спутниковым наблюдениям.....  | 33 |
| <i>Козин И.Д., Федулina И.Н.</i> Солнечные вспышки и распространение радиоволн.....   | 40 |
| <i>Козин И.Д., Федулina И.Н., Васильев И.В., Проценко В.А., Кирпун В.В.</i> Прибор контроля занятости радиозфира.....   | 46 |
| <i>Козин И.Д., Федулina И.Н.</i> Трансионосферное распространение радиоволн.....  | 49 |

**Наземно-космические методы исследования геодинамических процессов в земной коре**

|  |    |
|--|----|
| <i>Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Хачикян Г.Я., Мукашев К.М., Садыков Т.Х.</i> Мюоны в космических лучах и процессы в земной коре.....  | 54 |
| <i>Жантаев Ж.Ш., Жумабаев Б.Т., Хачикян Г.Я., Тойшиев Н., Кайраткызы Д.</i> Вариации солнечной и глобальной сейсмической активности в 21-24 солнечных циклах.....                | 63 |
| <i>Хачикян Г.Я., Ким А.С., Инчин А.С., Лозбин А.</i> Сейсмо-ионосферные связи: вариации электронной температуры и электронной концентрации по данным ИСЗ DEMETER.....            | 71 |
| <i>Хачикян Г.Я., Демченко Б.И., Шестакова Л.И., Садыкова А.Б.</i> Частота возникновения землетрясений в зависимости от звездного времени (на примере Алматинского региона).....  | 79 |
| <i>Бибосинов А.Ж., Шигаев Д.Т., Кайранбаева А.Б.</i> Методы диагностирования и оценки технического состояния гидротехнических сооружений георадиолокационными методами.....      | 86 |
| <i>Бибосинов А.Ж., Нуракунов С.М.</i> Картографирование процессов современной геодинамики на урбанизированных территориях по данным ДЗЗ.....                                     | 92 |
| <i>Виляев А.В., Стихарный А.П., Серикбаева Э.Б.</i> Оценка влияния рельефа методом сплайновой регрессии при изучении инфракрасного эмиссионного излучения поверхности Земли..... | 98 |

**Теоретические и экспериментальные исследования**

|  |     |
|--|-----|
| <i>Асанова А.Т.</i> О периодической задаче на плоскости для системы гиперболических уравнений со смешанными производными специального вида.....  | 104 |
| <i>Каримов А.М.</i> Вычисление показателя индикатрисы рассеяния в земной атмосфере.....  | 117 |
| <i>Алдашев С.А., Уаисов Б.</i> Критерий однозначной разрешимости спектральных задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного уравнения Геллерстедта.....  | 120 |
| <i>Ахметова С.Т., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Об одном методе решения обратной задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля.....  | 124 |
| <i>Глеубергенов М.И., Василина Г.К.</i> О стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия.....   | 129 |
| <i>Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.</i> О признаках самосопряженности в существенном операторе Штурма-Лиувилля.....  | 138 |
| <i>Сергалиев А.С., Хаджиева Л.А.</i> Метод обобщенных функций в стационарной краевой задаче для уравнения динамики буровой колонны.....  | 144 |
| <i>Койшыбекова А.К.</i> Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.....  | 150 |
| <i>Лебедев И.А., Темиргалиев А.Т., Федосимова А.И.</i> Исследование дальних и ближних корреляций во взаимодействиях ядер золота 10.7 А·ГэВ с ядрами фотоэмulsion.....                                | 154 |
| <i>Бактыбаев К., Далелханкызы А., Койлык Н.О., Бактыбаев М.К.</i> Описание процессов рассеяния <sup>3</sup> He на изотопах <sup>28,30,32</sup> Si методом сильной связи каналов ядерных реакций..... | 159 |
| <i>Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.</i> Об одном необходимом признаке кратности собственных значений оператора Штурма-Лиувилля.....  | 167 |
| <i>Билал Ш., Даржанова А.Б.</i> О весовых функциональных неравенствах.....   | 172 |
| <i>Сарсенгельдин М.М., Бижигитова Н.Т.</i> Аналитическое решение уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.....   | 182 |
| <i>Жахаев Б.К.</i> Еркін оң-коммутативті алгебраның кейбір түбірлі ағаштарындағы $S_n$ тобының көрсетілімдері.....   | 185 |
| <i>Ахметова С.Т., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> О Фурье представлении сильного решения задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля.....  | 192 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Инкарбеков М.К., Калтаев А.</i> Исследование фильтрованной функции плотности для моделирования крупных вихрей химически реагирующих турбулентных течений.....   | 197 |
| <i>Иманбаева А.Б., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.</i> О характере зависимости собственных значений оператора Штурма-Лиувилля от коэффициента граничного условия.....   | 215 |
| <i>Койшыбекова А.К., Онгарбаева А.Д.</i> Особенности создания электронного учебника при помощи новых информационных технологии.....  | 222 |
| <i>Боос Э.Г., Темиралиев Т., Избасаров М., Самоилов В.В., Турсунов Р.А., Федосимова А.И.</i> Сравнительный анализ энергетических и угловых характеристик генерированных частиц в $\overline{PP}$ - взаимодействиях при 22.4 и 32 ГэВ/С.....  | 228 |
| <i>Мусиралиев Ж.А.</i> Методика использования электронной таблицы по физике в школьном курсе   |     |
| Сценарий создания общей структуры трансформатора.....  | 234 |
| <i>Рябкин Ю.А., Зашквара О.В., Клименов В.В., Исова А.Т., Токмолдин С.Ж.</i> Объемный материал для спинтроники на основе интерметаллида $Co_5Zn_{21}$ .....  | 242 |
| <i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Акинбеков Е.А., Рахимжанов Б.Н., Баубекова М.К., Абдулаева Ж.А.</i> Исключение «малых знаменателей» в задаче двух тел.....   | 246 |
| <i>Бапаев К.Б., Сламжанова С.С.</i> Об устойчивости и бифуркации резонансных разностно-динамических систем (РДС).....  | 250 |
| <i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Кукиев Ж.С., Бердалиева Т.Д., Жамединова А.К., Рахимжанов Б.Н.</i> Эллиптический тип движения резонансного ИСЗ на интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$ в случае малого наклона орбиты к основной плоскости..... | 256 |
| <i>Сейтов Б.Ж., Бейсембетов И.К., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Бакранова Д.И.</i> Синтез тонких пленок карбида кремния методом ионной имплантации.....  | 261 |
| <i>Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.</i> Решение сингулярно возмущенной задачи Коши методом спектрального разложения.....  | 269 |
| <i>Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> О базисности собственных векторов одного класса операторных пучков с волновым оператором в главной части.....   | 277 |
| <i>Бесбаев Г.А., Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> О спектральных свойствах задачи неймана для одного класса уравнений с отклоняющимся аргументом.....   | 284 |
| <i>Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Критерии вольтерровости корректного сужения оператора дифференцирования.....  | 290 |
| <i>Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б., Бесбаев Г.А.</i> Критерий самосопряженности вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве Крейна.....   | 296 |

CONTENTS

**Processes in the near Earth cosmic space**

|  |    |
|--|----|
| <i>Yakovets A.F., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G., Abdrakhmanov N.</i> Midlatitude summer nighttime anomaly effect in the ionosphere over Almaty.....   | 5  |
| <i>Yakovets A.F., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G.</i> Mechanisms of Nighttime Enhancements in the Electron Concentration in the F2-Layer Maximum of the Midlatitude Ionosphere.....   | 12 |
| <i>Zhumabayev B.T., Yakovets A.F., Gordienko G.I., Litvinov Yu.G.</i> Studying Parameters of Waves Generated by Dawn and Dusk Solar Terminators.....   | 19 |
| <i>Sokolova O.I., Andreev A.B., Burlakov G.V., Kachusova O.L., Kryakunova O.N., Levin Yu.N., Nikolaevskiy N.F.</i> The control of registration of experimental data of geomagnetic field in the "Alma-Ata" magnetic observatory..... | 26 |
| <i>Somsikov V.M., Andreev A.B., Zhumabaev B.T.</i> Peculiarities of seasonal behavior of wave disturbances in the mesosphere according to SATI and satellite observations.....   | 33 |
| <i>Kozin I.D., Fedulina I.N.</i> Solar flares and propagation of radio waves.....  | 40 |
| <i>Kozin I.D., Fedulina I.N., Vasiliev I.V., Protsenko V.A., Kirpun V.V.</i> The device for monitoring of radiochannel Occupancy.....  | 46 |
| <i>Kozin I.D., Fedulina I.N.</i> Transionospheric propagation of radiowaves.....   | 49 |

**Ground-space based research methods of geodynamic processes in the Earth crust**

|  |    |
|--|----|
| <i>Zhantayev Zh.Sh., Breusov N.G., Khachikyan G.Ya., Mukashev K.M., Sadykov T.Kh.</i> Muons in cosmic rays and processes in Earth's crust.....   | 54 |
| <i>Zhantayev Zh.Sh., Zhumabayev B.T., Khachikyan G.Ya., Toishiev N., Kairatkyzy D.</i> Variations of solar and global seismic activity in 21-24 solar cycles.....  | 63 |
| <i>Khachikyan G.Ya., Kim A.S., Inchin A.S., Lozbin A.</i> Seismo-ionospheric relationships: variations in electron temperature and electron density measure by the DEMETER satellite.....                    | 71 |
| <i>Khachikyan G.Ya., Demchenko B.I., Shestakova L.I., Sadykova A.B.</i> Frequency of earthquake occurrence depending on sidereal time (for Almaty region).....   | 79 |
| <i>Bibossinov A.Zh., Shigaev D.T., Kairanbayeva A.B.</i> Methods of diagnosis and evaluation technical state of hydraulic structures by GPR.....   | 86 |
| <i>Bibossinov A.Zh., Nurakynov S.M.</i> Mapping of modern geodynamic processes in urban areas using remote sensing data.....   | 92 |
| <i>Vilyayev A.V., Stihamyi A.P., Serikbaeva E.B.</i> Assessing the impact of the relief by method of spline regression in the study of the emission of infrared radiation from the surface of the Earth..... | 98 |

**Theoretical and experimental researches**

|  |     |
|--|-----|
| <i>Asanova A.T.</i> About the periodic problem on the plane for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives a special form.....  | 104 |
| <i>Karimov A.M.</i> The calculation index of scattering in the earth's atmosphere.....   | 117 |
| <i>Aldashev S.A., Uaisov B.</i> The criterion of one-valued solvability of Dirichlet and Poincare spectral problems for Gellerstedt multidimensional equation.....   | 120 |
| <i>Ahmetova S.T., Imanbaeva A.B., Shaldanbaev A.Sh.</i> About one method of the solution of the return task of Cauchy for the Storm Liouville equation.....  | 124 |
| <i>Tleubergenov M.I., Vassilina G.K.</i> On the stochastic stability analytically given integral manifold.....   | 129 |
| <i>Imanbaeva A.B., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh.</i> About self-conjugacy signs in essential the operator of Storm Liouville.....   | 138 |
| <i>Sergaliyev A., Khajiyeva L.</i> The method of generalized functions in stationary boundary value problem for equation of the dynamics of the drill-string.....  | 144 |
| <i>Koishybekova A.K.</i> Mathematical modeling in environmental issues.....  | 150 |
| <i>Lebedev I.A., Temiraliyev A.T., Fedosimova A.I.</i> Research of long-range and short-range correlations in interactions of 10.7 AGeV gold nuclei with photoemulsion nuclei.....                               | 154 |
| <i>Baktybaev K., Dalelkhankyzy A., Koilyk N.O., Baktybaev M.K.</i> Description of scattering processes <sup>3</sup> He isotopes <sup>28,30,32</sup> Si strong coupling method channels of nuclear reactions..... | 159 |
| <i>Imanbaeva A.B., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh.</i> About one necessary sign of frequency rate of own values of the operator of Storm Liouville.....   | 167 |
| <i>Bilal Sh., Darzhanova A.B.</i> Weighted functional inequalities.....  | 172 |
| <i>Sarsengeldin M.M., Bizhigitova N.T.</i> Analytical solution of the heat equation with discontinuous coefficients.....   | 182 |
| <i>Zhakhayev B.K.</i> Representations of $S_n$ on some rooted trees in free right-commutative algebra.....   | 185 |
| <i>Ahmetova S.T., Imanbaeva A.B., Shaldanbaev A.Sh.</i> About fourier submission of the strong solution of the task of Cauchy for the storm liouville equation.....  | 192 |
| <i>Inkarbekov M.K., Kaltayev A.</i> Investigation of filtered density function for large eddy simulation of chemically reacting turbulent flows.....   | 197 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Imanbaeva A.B., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh.</i> About nature of dependence of own values of the operator of storm liouville on coefficient of the boundary condition.....  | 215 |
| <i>Koishybekova A.K., Ongarbaeva A.D.</i> Features of creation of the electronic textbook with the help of new information technology.....   | 222 |
| <i>Boos E.G., Temiraliyev T., Izbasarov M., Samoilov V.V., Tursunov R.A., Fedosimova A.I.</i> The comparative analysis of energy and angular characteristics of the generated particles in $\bar{P}P$ -interactions at 22.4 and 32 GeV/C.....      | 228 |
| <i>Musiraliev Zh.A.</i> The technique of using a spreadsheet in physics at school course scenario Creation of a common structure of the transformer.....   | 234 |
| <i>Ryabikin Yu.A., Zashkvara O.V., Klimenov V.V., Isova A.T., Tokmoldin S.Zh.</i> Volume material for spintronics on basis of intermetallide $\text{Co}_5\text{Zn}_{21}$ .....   | 242 |
| <i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Akinbekov E.A., Rakhimzhanov B.N., Baubekova M.K., Abdulaeva G.A.</i> Exclusion of small denominators in the two-body problem.....  | 246 |
| <i>Bapaev K.B., Slamzhanova S.S.</i> Stability and bifurcation of resonance difference-dynamical systems (RDS).....  | 250 |
| <i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Kukiev Zh.S., Berdalieva T.D., Zhamedinova A.K., Rakhimzhanov B.N.</i> Elliptic motion type of resonance satellites at intervals $\alpha_4 < w < \alpha_3$ in the case of a small tilt orbit to the main plane..... | 256 |
| <i>Seitov B.Zh., Beisembetov I.K., Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Kenzhaliev B.K., Bakranova D.I.</i> Synthesis of thin silicon carbide films by ion implantation technique.....   | 261 |
| <i>Shaldanbayev A.Sh., Imanbayeva A.B., Besbaev G.A.</i> The decision is singular the indignant task of cauchy by method of spectral decomposition.....  | 269 |
| <i>Imanbayeva A.B., Besbaev G.A., Shaldanbayev A.Sh.</i> About a bazisnost of own vectors of one class of operator bunches with the wave operator in a body.....   | 277 |
| <i>Besbaev G.A., Imanbayeva A.B., Shaldanbayev A.Sh.</i> About spectral properties of a task of neumann for one class of the equations with the deviating argument.....  | 284 |
| <i>Imanbayeva A.B., Besbaev G.A., Shaldanbayev A.Sh.</i> Criteria of a volterrovost of correct narrowing of the operator of differentiation.....   | 290 |
| <i>Shaldanbaev A.SH., Imanbaeva A.B., Besbaev G.A.</i> Criterion of self-conjugacy of the voltaire operator of Storm- Liouville in space Crane.....  | 296 |

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

[physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

Редактор *М. С. Ахметова*  
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 14.07.2015.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
19 п.л. Тираж 300. Заказ 4.