

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (300)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2015 ж.

МАРТ – АПРЕЛЬ 2015 г.

MARCH – APRIL 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 5 – 13

ON ALGEBRAS OF DISTRIBUTIONS OF BINARY FORMULAS FOR QUITE O-MINIMAL THEORIES

B. Sh. Kulpeshov¹, S. V. Sudoplatov²

¹International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Keywords: weak o-minimality, quite o-minimality, countable categoricity, algebra of distributions, binary formula, monoid.

Abstract. Algebras of distributions of binary isolating formulas for countably categorical quite o-minimal theories are studied and their generalized commutability is proved.

УДК 510.67

ОБ АЛГЕБРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Б. Ш. Кулпешов¹, С. В. Судоплатов²

¹Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан,

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный
технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Ключевые слова: слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, счетная категоричность, алгебра распределений, бинарная формула, моноид.

Аннотация. В настоящей работе исследованы алгебры распределений бинарных изолирующих формул для счетно категоричных вполне о-минимальных теорий и доказана их обобщенная коммутативность.

Настоящая работа касается понятия слабой о-минимальности, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M .

В работах [2-10] исследуются распределения бинарных изолирующих и полуизолирующих формул, связывающих реализации типов. В частности, в монографии [7] рассматривается общий подход к описанию бинарных связей между реализациями 1-типов на языке меток попарно неэквивалентных полуизолирующих формул. Все необходимые определения можно также найти в [7].

Пусть T – полная теория, $M \models T$, и $p(x), q(y) \in S_1(\emptyset)$ реализуются в M . Формула $\varphi(x, y)$ называется (p, q) -устойчивой (или (p, q) -полуизолирующей), если существует элемент $a \in M$ такой, что $\models p(a)$ и $\varphi(a, M) \subseteq q(M)$. Будем говорить, что a полуизолирует b посредством (p, q) -устойчивой формулы $\varphi(x, y)$, если выполняется $\models p(a)$, $\models q(b)$ и $\models \varphi(a, b)$. Если дополнительно формула $\varphi(a, y)$ является главной над $\{a\}$, то говорят, что a изолирует b , а формула $\varphi(x, y)$ называется (p, q) -изолирующей.

Определим для каждой (p, q) -полуизолирующей формулы $\varphi(x, y)$ двухместное отношение $R_{p, \varphi, q} := \{(a, b) \mid M \models p(a) \wedge \varphi(a, b)\}$. При условии $(a, b) \in R_{p, \varphi, q}$ пара (a, b) называется (p, φ, q) -дугой. Если $\varphi(a, y)$ – главная формула (над a), то (p, φ, q) -дуга (a, b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x, y)$ является $(p \leftrightarrow q)$ -формулой, т.е. одновременно (p, q) - и (q, p) -устойчивой, то множество $[a, b] := \{(a, b), (b, a)\}$ называется (p, φ, q) -ребром. Если (p, φ, q) -ребро $[a, b]$ состоит из главных (p, φ, q) - и (q, φ^{-1}, p) -дуг, где $\varphi^{-1}(x, y)$ обозначает $\varphi(y, x)$, то $[a, b]$ называется *главным (p, φ, q) -ребром*. Дуги (a, b) , у которых пары (b, a) не являются дугами ни по каким (q, p) -формулам, будем называть *необращаемыми*.

Для типов $p(x), q(y) \in S_1(\emptyset)$ обозначим через $PF(p, q)$ множество $\{\varphi(x, y) \mid \varphi(a, y) \text{ – главная формула, } \varphi(a, M) \subseteq q(M), \text{ где } \models p(a)\}$. Пусть $PE(p, q)$ – множество пар $(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ формул из $PF(p, q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a, y)$ и $\psi(a, y)$.

Очевидно, что $PE(p, q)$ является отношением эквивалентности на множестве $PF(p, q)$. Заметим, что каждому $PE(p, q)$ -классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E . Таким образом, фактор-множество $PF(p, q)/PE(p, q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $PFS(p, q)$ и $PFN(p, q)$, где $PFS(p, q)$ состоит из $PE(p, q)$ -классов, соответствующих главным ребрам, а $PFN(p, q)$ состоит из $PE(p, q)$ -классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Зафиксируем полную теорию T . Пусть $U = U^- \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} U^+$ – некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ – через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные меточные функции $v(p, q): PF(p, q)/PE(p, q) \rightarrow U$, где $p(x), q(y) \in S_1(\emptyset)$, при которых классам из $PFN(p, q)/PE(p, q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $PFS(p, q)/PE(p, q)$ – элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задается по формуле $x = y$. При этом будем считать, что $\rho_{v(p)} \cap \rho_{v(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где $v(p) := v(p, p)$, а через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{v(p, q)} \cap \rho_{v(p', q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p, q) \neq (p', q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p, u, q}(x, y)$ будут обозначаться формулы из $PF(p, q)$, представляющие метку $u \in \rho_{v(p, q)}$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ – формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \dots, p_{k+1} \in S_1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, X_2, \dots, X_k \subseteq U$ обозначим через $P(p_1, X_1, p_2, X_2, \dots, p_k, X_k, p_{k+1})$ множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1, u, p_{k+1}}(x, y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{v(p_1, p_2)}, \dots, u_k \in X_k \cap \rho_{v(p_k, p_{k+1})}$ удовлетворяют условию $\theta_{p_1, u, p_{k+1}}(a, M) \subseteq \theta_{p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_k, u_k, p_{k+1}}(a, M)$, где

$$\theta_{p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_k, u_k, p_{k+1}}(x, y) := \exists x_2, x_3, \dots, x_k (\theta_{p_1, u_1, p_2}(x, x_2) \wedge \theta_{p_2, u_2, p_3}(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta_{p_{k-1}, u_{k-1}, p_k}(x_{k-1}, x_k) \wedge \theta_{p_k, u_k, p_{k+1}}(x_k, y))$$

Тем самым, на булеане $P(U)$ множества U образуется алгебра распределений бинарных изолирующих формул с k -местными операциями $P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \dots, p_k, \cdot, p_{k+1})$, где $p_1, \dots, p_{k+1} \in S_1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S_1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется каноническая алгебра, у которой метки представлены элементами множества $\bigcup_{p,q} PF(p,q) / PE(p,q)$. Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U , отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $P(U)$.

Пример 1 (Example 2.6.1, [1]) Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q , упорядоченной как обычно, а P_1 с $Q \times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n, m)) = n$ для всех $(n, m) \in Q \times Q$.

Известно, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}, q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$. Если обратимся к меточным функциям, то имеем: $\rho_{v(q)} = \{0, 1, 2\}, \rho_{v(p)} = \{0, 3, 4, 5, 6\}, \rho_{v(p,q)} = \{7, 8, 9\}, \rho_{v(q,p)} = \{10, 11, 12\}$, где

$$\begin{aligned} \theta_0(x, y) &:= x = y, \theta_{q,1,q}(x, y) := x < y \wedge P_2(x) \wedge P_2(y), \theta_{q,2,q}(x, y) := x > y \wedge P_2(x) \wedge P_2(y), \\ \theta_{p,3,p}(x, y) &:= x < y \wedge E(x, y) \wedge P_1(y), \theta_{p,4,p}(x, y) := x > y \wedge E(x, y) \wedge P_1(y), \\ \theta_{p,5,p}(x, y) &:= x < y \wedge \neg E(x, y) \wedge P_1(y), \theta_{p,6,p}(x, y) := x > y \wedge \neg E(x, y) \wedge P_1(y), \\ \theta_{p,7,q}(x, y) &:= f(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y), \theta_{p,8,q}(x, y) := f(x) < y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y), \\ \theta_{p,9,q}(x, y) &:= f(x) > y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y), \theta_{q,10,p}(x, y) := x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y), \\ \theta_{q,11,p}(x, y) &:= x > f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y), \theta_{q,12,p}(x, y) := x < f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y). \end{aligned}$$

Алгебра $P_{v(q)}$ задается следующей таблицей Кэли:

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{1}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{2}

Для алгебры $P_{v(p)}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

.	0	3	4	5	6
0	{0}	{3}	{4}	{5}	{6}
3	{3}	{3}	{0, 3, 4}	{5}	{6}
4	{4}	{0, 3, 4}	{4}	{5}	{6}
5	{5}	{5}	{5}	{5}	{0, 3, 4, 5, 6}
6	{6}	{6}	{6}	{0, 3, 4, 5, 6}	{6}

Согласно таблицам Кэли, алгебры $P_{v(p)}$ и $P_{v(q)}$ являются коммутативными моноидами, причем моноид $P_{v(q)}$ изоморфен ограничению моноида $P_{v(p)}$ на множество $\{0, 3, 4\}$.

Определение 2. [11] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T , и пусть $\phi(x, \bar{a}), \bar{a} \in M$, – произвольная формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$ ($RC(\phi(x, \bar{a}))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq 0$, если $M \models \exists x \phi(x, \bar{a})$.

2) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq 1$, если $\phi(M, \bar{a})$ бесконечно.

3) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha + 1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют $b_i, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

– Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

– Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M, \bar{a})$.

4) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \delta$, если $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x, \bar{a})) = \alpha$ для некоторого α , то мы говорим что $RC(\phi(x, \bar{a}))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x, \bar{a})) = \infty$.

Определение 3. [12] Рангом выпуклости 1-типа p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В Примере 1 тип p не слабо ортогонален типу q , $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ и $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \emptyset$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$, $RC(p) = 2, RC(q) = 1$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{bin}(\phi(x))$, если в Определении 2 параметрически определимые отношения эквивалентности заменим на \emptyset -определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности. Тогда очевидно, что в произвольной счетно категоричной слабо о-минимальной теории бинарный ранг выпуклости одноместной формулы конечен. Следовательно, для любого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\emptyset)$ выполняется $RC_{bin}(p) < \omega$.

Определение 4. (Байжанов Б.С., [13]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, $M \models |A|^+$ -насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является слабо ортогональным типу q , если существуют A -определимая формула $H(x, y), \alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Вернемся к Примеру 1. Алгебра $P_{v(\{p, q\})}$ получается расширением алгебр $P_{v(p)}$ и $P_{v(q)}$ следующими действиями:

а) $n \cdot 0 = 0 \cdot n = \{n\}, n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

б) $7 \cdot 1 = \{8\}, 7 \cdot 2 = \{9\}, 7 \cdot 10 = \{0, 3, 4\}, 7 \cdot 11 = \{6\}, 7 \cdot 12 = \{5\}$,

- в) $8 \cdot 1 = \{8\}$, $8 \cdot 2 = \{7, 8, 9\}$, $8 \cdot 10 = \{5\}$, $8 \cdot 11 = \{0, 3, 4, 5, 6\}$, $8 \cdot 12 = \{5\}$,
 г) $9 \cdot 1 = \{7, 8, 9\}$, $9 \cdot 2 = \{9\}$, $9 \cdot 10 = \{6\}$, $9 \cdot 11 = \{6\}$, $9 \cdot 12 = \{0, 3, 4, 5, 6\}$,
 д) $10 \cdot 3 = \{10\}$, $10 \cdot 4 = \{10\}$, $10 \cdot 5 = \{12\}$, $10 \cdot 6 = \{11\}$, $10 \cdot 7 = \{0\}$, $10 \cdot 8 = \{1\}$, $10 \cdot 9 = \{2\}$,
 е) $11 \cdot 3 = \{11\}$, $11 \cdot 4 = \{11\}$, $11 \cdot 5 = \{10, 11, 12\}$, $11 \cdot 6 = \{11\}$, $11 \cdot 7 = \{2\}$, $11 \cdot 8 = \{0, 1, 2\}$, $11 \cdot 9 = \{2\}$,
 ж) $12 \cdot 3 = \{12\}$, $12 \cdot 4 = \{12\}$, $12 \cdot 5 = \{12\}$, $12 \cdot 6 = \{10, 11, 12\}$, $12 \cdot 7 = \{1\}$, $12 \cdot 8 = \{1\}$, $12 \cdot 9 = \{0, 1, 2\}$.

Нетрудно понять, что алгебра $P_{v(\{p,q\})}$ является некоммутативным моноидом с частичной операцией умножения.

Пример 5. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретации P_1 и P_2 с Q , упорядоченной как обычно. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f(a) = a$ для всех $a \in Q$.

Может быть доказано, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}$, $q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$ и f – \emptyset -определимая биекция $p(M)$ на $q(M)$. Обращаясь к меточным функциям, имеем: $\rho_{v(q)} = \{0, 1, 2\}$, $\rho_{v(p)} = \{0, 3, 4\}$, $\rho_{v(p,q)} = \{5, 6, 7\}$, $\rho_{v(q,p)} = \{8, 9, 10\}$, где

$$\theta_0(x, y) := x = y, \theta_{p,1,p}(x, y) := x < y \wedge P_1(x) \wedge P_1(y), \theta_{p,2,p}(x, y) := x > y \wedge P_1(x) \wedge P_1(y),$$

$$\theta_{q,3,q}(x, y) := x < y \wedge P_2(x) \wedge P_2(y), \theta_{q,4,q}(x, y) := x > y \wedge P_2(x) \wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,5,q}(x, y) := f(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y), \theta_{p,6,q}(x, y) := f(x) < y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,7,q}(x, y) := f(x) > y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y), \theta_{q,8,p}(x, y) := x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y),$$

$$\theta_{q,9,p}(x, y) := x > f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y), \theta_{q,10,p}(x, y) := x < f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y).$$

Алгебра $P_{v(q)}$ задается той же самой таблицей Кэли как и алгебра $P_{v(q)}$ из Примера 1. Алгебра $P_{v(p)}$ имеет ту же самую таблицу Кэли с точностью до взаимно однозначного отображения π множества $\rho_{v(p)}$ на множество $\rho_{v(q)}$: $\pi(0) = 0, \pi(1) = 3, \pi(2) = 4$. Рассмотрим алгебру $P_{v(\{p,q\})}$. Поскольку $\theta_{p,i,q} \cdot \theta_{q,j,p} = \theta_{p,k,p}$ для некоторого $k \in \{0, 1, 2\}$, а $\theta_{q,j,p} \cdot \theta_{p,i,q} = \theta_{q,l,q}$ для некоторого $l \in \{0, 3, 4\}$, то данная алгебра уже не будет коммутативной. А так как $\theta_{p,i,p} \cdot \theta_{q,j,q} = \emptyset$, то операция \cdot будет частичной.

Будем говорить, что алгебра $P_{v(\{p,q\})}$ является *обобщенно коммутативной*, если существует взаимно однозначное отображение $\pi : \rho_{v(p)} \rightarrow \rho_{v(q)}$, свидетельствующее о том, что алгебры $P_{v(p)}$ и $P_{v(q)}$ изоморфны (т.е. когда их таблицы Кэли совпадают с точностью до π), и для любых $l \in \rho_{v(p,q)}$, $m \in \rho_{v(q,p)}$ имеет место $\pi(l \cdot m) = m \cdot l$.

Можно доказать, что в Примере 5 алгебра $P_{v(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативной. В то время как алгебра $P_{v(\{p,q\})}$ из Примера 1 не является обобщенно коммутативной, поскольку не существует изоморфизма между $P_{v(p)}$ и $P_{v(q)}$, а также например, $10 \cdot 7 = \{0\}$, $7 \cdot 10 = \{0, 3, 4\}$, т.е. $10 \cdot 7 \subset 7 \cdot 10$.

Определение 6. [14] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, $M - |A|^+$ – насыщенная, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q , если существует A -определимая биекция $f : p(M) \rightarrow q(M)$. Будем

говорить, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно, что в Примере 5 теория $\text{Th}(M)$ является вполне о-минимальной, а в Примере 1 теория $\text{Th}(M)$ не является вполне о-минимальной. В работе [15] были полностью описаны счетно категоричные вполне о-минимальные теории. Следующая теорема представляет описание алгебры распределений бинарных изолирующих формул для пары не слабо ортогональных типов в произвольной счетно категоричной вполне о-минимальной теории.

Теорема 7. Пусть T – счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические типы, p не слабо ортогонален q . Тогда алгебра $P_{v(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативным моноидом.

Доказательство Теоремы 7. Пусть M – модель теории T . Так как p не слабо ортогонален q , то в силу вполне о-минимальности T существует \emptyset -определяемая функция $f : p(M) \rightarrow q(M)$, являющаяся локально монотонной биекцией $p(M)$ на $q(M)$. В силу бинарности счетно категоричной вполне о-минимальной теории существует $n < \omega$ такой, что $RC(p) = RC(q) = n$, т.е. существуют \emptyset -определяемые отношения эквивалентности $E_1^p(x, y), \dots, E_{n-1}^p(x, y)$ и $E_1^q(x, y), \dots, E_{n-1}^q(x, y)$, разбивающие $p(M)$ и $q(M)$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, при этом $E_1^p(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^p(a, M)$ и $E_1^q(b, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^q(b, M)$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$.

Не умаляя общности, предположим что f – локально возрастающая функция на $p(M)$, т.е. f является строго возрастающей на каждом E_1^p -классе. Рассмотрим следующие меточные формулы:

$$\begin{aligned} \theta_0(x, y) &:= x = y, \\ \theta_{p,1,p}(x, y) &:= x < y \wedge E_1^p(x, y), \quad \theta_{q,1,q}(x, y) := x < y \wedge E_1^q(x, y), \\ \theta_{p,2,p}(x, y) &:= x > y \wedge E_1^p(x, y), \quad \theta_{q,2,q}(x, y) := x > y \wedge E_1^q(x, y), \\ \theta_{p,3,p}(x, y) &:= x < y \wedge \neg E_1^p(x, y) \wedge E_2^p(x, y), \quad \theta_{q,3,q}(x, y) := x < y \wedge \neg E_1^q(x, y) \wedge E_2^q(x, y), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_{p,2n-1,p}(x, y) &:= x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y), \quad \theta_{q,(2n-1),q}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y), \\ \theta_{p,2n,p}(x, y) &:= x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y), \quad \theta_{q,(2n),q}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y), \\ \theta_{p,2n+1,q}(x, y) &:= f(x) = y, \quad \theta_{q,4n+2,p}(x, y) := x = f(y), \\ \theta_{p,2n+2,q}(x, y) &:= f(x) < y \wedge E_1^q(f(x), y), \quad \theta_{q,4n+3,p}(x, y) := x > f(y) \wedge E_1^p(x, f(y)), \\ \theta_{p,2n+3,q}(x, y) &:= f(x) > y \wedge E_1^q(f(x), y), \quad \theta_{q,4n+4,p}(x, y) := x < f(y) \wedge E_1^p(x, f(y)), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_{p,4n+1,q}(x, y) &:= f(x) > y \wedge \neg E_{n-1}^q(f(x), y), \quad \theta_{q,6n+2,p}(x, y) := x < f(y) \wedge \neg E_{n-1}^p(x, f(y)). \end{aligned}$$

Осталось понять, что для любых меток l, m таких, что $l \in \{2n+1, \dots, 4n+1\}$ и $m \in \{4n+2, \dots, 6n+2\}$, имеет место равенство $l \cdot m = m \cdot l$ с точностью до изоморфизма между алгебрами $P_{v(p)}$ и $P_{v(q)}$.

Случай 1. $\theta_{p,l,q}(x, y) \equiv f(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y)$.

Если $\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$, то очевидно что $l \cdot m = \{0\} = m \cdot l$.

Если $\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x > f(y) \wedge E_1^q(x, f(y))$, то в силу того, что f – строго возрастающая

функция на каждом E_1^p -классе, мы имеем: $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge E_1^p(x, y)$, и $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) \equiv x > y \wedge E_1^q(x, y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_i^q(x, f(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f(y))$ для некоторого $1 \leq i \leq n-2$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$ (где $a \in p(M)$), то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^q(x, y) \wedge E_{i+1}^q(x, y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y)$.

Случай 2. $\theta_{p,l,q}(x, y) \equiv f(x) < y \wedge \neg E_i^q(f(x), y) \wedge E_{i+1}^q(f(x), y)$

Предположим вначале, что формула $\theta_{q,m,p}(x, y)$ эквивалентна одной из следующих формул: $x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$ или $x > f(y) \wedge E_1^q(x, f(y))$. Тогда если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x, y) \wedge E_{i+1}^q(x, y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_s^q(x, f(y)) \wedge E_{s+1}^q(x, f(y))$. Предположим вначале, что $i = s$. Тогда можно понять, что $l \cdot m = \{0, 1, 2, \dots, 2i + 2\}$ и $m \cdot l = \{0, 1', 2', \dots, (2i + 2)'\}$.

Предположим теперь, что $i + 1 \leq s$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{s+1}^p(a, M)/E_s^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^p(x, y) \wedge E_{s+1}^p(x, y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{s+1}^p(a, M)/E_s^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_s^p(x, y) \wedge E_{s+1}^p(x, y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^q(x, y) \wedge E_{s+1}^q(x, y)$.

Пусть теперь $s + 1 \leq i$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x, y) \wedge E_{i+1}^q(x, y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x < f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y)$.

Случай 3. $\theta_{p,l,q}(x, y) := f(x) < y \wedge \neg E_{n-1}^q(f(x), y)$.

Предположим, что формула $\theta_{q,m,p}(x,y)$ эквивалентна одной из трех следующих формул: $x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$, $x > f(y) \wedge E_1^q(x, f(y))$ или $x > f(y) \wedge \neg E_1^q(x, f(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f(y))$. Тогда если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Предположим теперь, что $\theta_{q,m,p}(x,y) := x > f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Тогда можно понять, что $l \cdot m = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ и $m \cdot l = \{0, 1', 2', \dots, (2n)'\}$. \square

Следствие 8. Пусть T – счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $p_1, p_2, \dots, p_k \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические попарно не слабо ортогональные 1-типы. Тогда

1) Для любых $s, i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_s$ таких, что $1 \leq s \leq k$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq k$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq k$, выполняется $P_{v(\{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}\})} \cong P_{v(\{p_{j_1}, \dots, p_{j_s}\})}$;

2) Для любых s, i_1, i_2, \dots, i_s таких, что $1 \leq s \leq k-1$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq k$, алгебра $P_{v(\{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}\})}$ является подмоноидом моноида $P_{v(\{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}, p'\})}$, где $p' \in \{p_1, \dots, p_k\}$ и $p' \neq p_{i_l}$ для всех $1 \leq l \leq s$;

3) $P_{v(\{p_1, \dots, p_k\})}$ – обобщенно коммутативный моноид.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.
- [2] A. Pillay, Countable models of stable theories // Proceedings of the American Mathematical Society, 89 (1983), pp. 666-672.
- [3] B.S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. – Novosibirsk: NSTU, 1999. – P. 5-28.
- [4] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.
- [5] S.V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 169 (2010), pp. 680-695.
- [6] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 9 (2012), pp. 161-184.
- [7] S.V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk: NSTU, 2014.
- [8] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 380-407.
- [9] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 408-433.
- [10] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum, 9 (2014), pp. 1029-1033.
- [11] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.
- [12] B.Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of \aleph_0 -categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, volume 45, issue 2, 2007, pp. 354-367.
- [13] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.
- [14] Б.Ш. Кулпешов, Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 227 (2003), С. 26-31.
- [15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

REFERENCES

- [1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.
- [2] A. Pillay, Countable models of stable theories // Proceedings of the American Mathematical Society, 89 (1983), pp. 666-672.
- [3] B.S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. – Novosibirsk: NSTU, 1999. – P. 5-28.
- [4] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.
- [5] S.V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 169 (2010), pp. 680-695.
- [6] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 9 (2012), pp. 161-184.
- [7] S.V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk: NSTU, 2014.
- [8] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 380-407.
- [9] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 408-433.
- [10] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum, 9 (2014), pp. 1029-1033.
- [11] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.
- [12] B.Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of \aleph_0 -categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, volume 45, issue 2, 2007, pp. 354-367.
- [13] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.
- [14] Kulpeshov B.Sh. Rank of convexity and orthogonality in weakly o-minimal theories // News of NAS RK. Physico-mathematical series, 227 (2003), pp 26-31. (in Russ.).
- [15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

**О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАР ҮШІН БИНАРЛЫҚ ФОРМУЛАЛАРДЫҢ
АЛГЕБРАЛАРДАҒЫ ТАРАЛЫМЫ ТУРАЛЫ**

Б. Ш. Құлпешов¹, С. В. Судоплатов²

¹Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

²РФА СБ С. Л. Соболев атындағы математика институті, Новосібір мемлекеттік техникалық университеті,
Новосібір мемлекеттік университеті, Новосібір, Ресей

Тірек сөздер: әлсіз о-минималдық, әбден о-минималдық, есептік категориялық, таралым алгебрасы, бинарлық формула, моноид.

Аңдатпа. Осы жұмыста есептік-категориялық әбден о-минималдық теориялар үшін бинарлық жекеленгіш формулалардың алгебралардағы таралымы зерттеленді және олардың қорытындылау коммутативтігі дәлелденді.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 14 – 17

PROSPECTS OF WIRELESS SENSOR NETWORKS

K. T. Bazhikov, A. O. Kasimov, S. A. Usembayeva, M. Kaliev

KazNU named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan. E-mail: bajyk@mail.ru

Keywords: wireless sensor networks, telecommunication.

Abstract. Wireless sensor networks are one of the most promising directions of development of modern telecommunications technologies and materials, transmitting them to the base station via node, via the wireless communication.

Wireless sensor network is a distributed network of unmanned miniature electronic devices that collect data on the characteristics of the environment.

УДК 621.395.4:004.438

СЫМСЫЗ СЕНСОРЛЫ ЖЕЛІЛЕРДІҢ ҚОЛДАНУ БОЛАШАҒЫ

К. Т. Бажиков, А. О. Касимов, С. А. Усембаева, М. Калиев

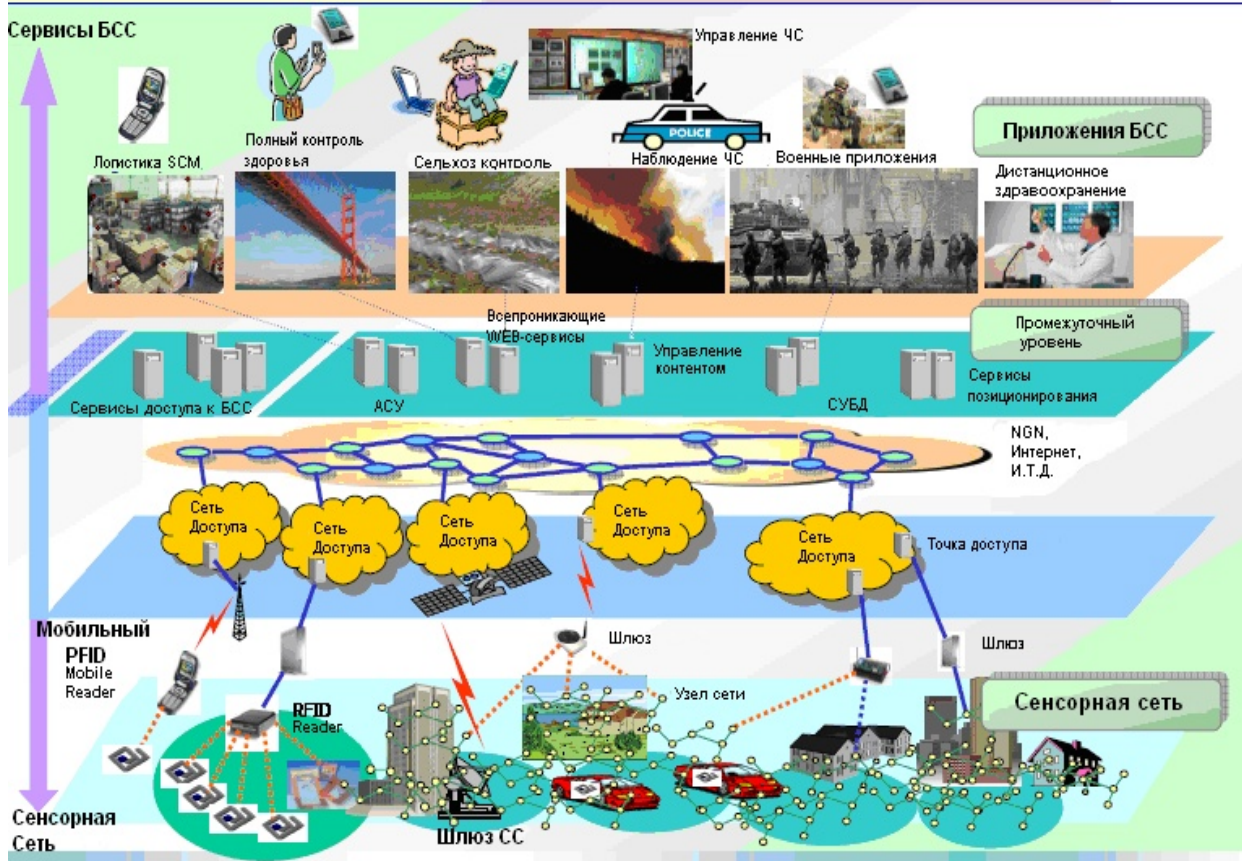
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: сымсыз сенсорлы желі, телекоммуникация.

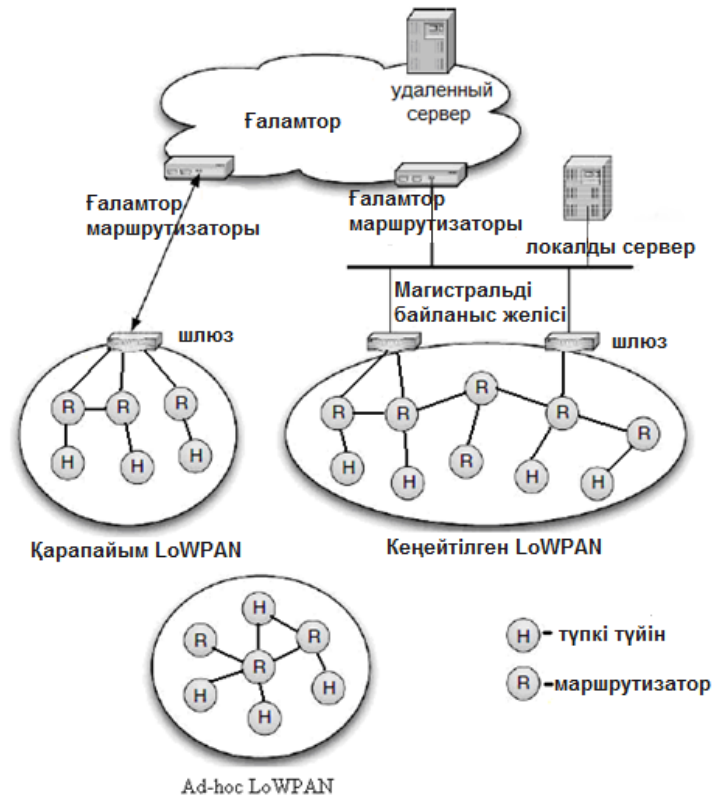
Аннотация. Сымсыз сенсорлы желілер – қазіргі заманғы телекоммуникациялық технологияларды дамыту неғұрлым тиімді бағыттардың бірі болып табылады. Кабельді инфраструктураның радиоэфирге ауысуына байланысты және жаңа функционалдық мүмкіншіліктеріне байланысты қолдану перспективті.

Кең жолақты тұжырымдамасына сәйкес конвергенттік желі BCN (Broadband конвергенция Network), ақпараттық және коммуникациялық қызмет көрсету саласында келесі қадам сымсыз сенсорлық желілерді енгізу бастамасы болады, ғаламдық телекоммуникация желісіне пайдаланушы кез келген жерде елдің әртүрлі объектілер мен қоршаған орта туралы телеметриялық ақпаратты алуға мүмкіндік беретін және географиялық бөлінген нысандардың командаларды жіберу. Осы жағдайда, сенсорлық желілер трафигі (1-сурет) қоғамдық байланыс желісі арқылы берілуі мүмкін. Ubiquitous (таратылатын) желісі, сенсорлық желілерді негізінде жасалған технология, олардың U-қоғам негізінде құру, ақпараттық коммуникация дамыту үшін жаңа перспективалар ашады.

Қазіргі кезде сымсыз сенсорлы желінің қоғамдық байланыс желілерімен өзара жұмыс істеу үшін IETF ұсынған 6LoWPAN протоколы қолданылады, ол қолданыстағы желілерге сенсорлық желілерді интеграциялауға мүмкіндік береді. Бұл протокол, IEEE 802.15.4 стандартында IP-пакеттер беруге мүмкіндік береді, ашық стандарттар (IPv6 протоколы) қанағаттандыру үшін. Бұл басқа IP-арналармен және құрылғылармен өзара қарым-қатынасын қамтамасыз етеді. 6LoWPAN протоколы аз қуатты сымсыз дербес желілеріне (LoWPANs) арналған және құжаттарда сипатталған [RFC4919] және [RFC4944]. 6LoWPAN желісінің (2-сурет) архитектурасы логикалық құрылғылардың үш түрін (түпкі түйіні, маршрутизатор және шлюз) анықтайды және желінің үш түрін: «Қарапайым LoWPAN», «Кеңейтілген LoWPAN» және «арнайы LoWPAN». Суретке қарасақ, «Арнайы LoWPAN» ҚБЖ қосылған жоқ, «Қарапайым LoWPAN» бір шлюз арқылы ҚБЖ қосылған, ал «Кеңейтілген LoWPAN» бірнеше шлюздерді қамтиды, ҚБЖ арқылы және бір-бірімен магистральді байланыс жолымен.

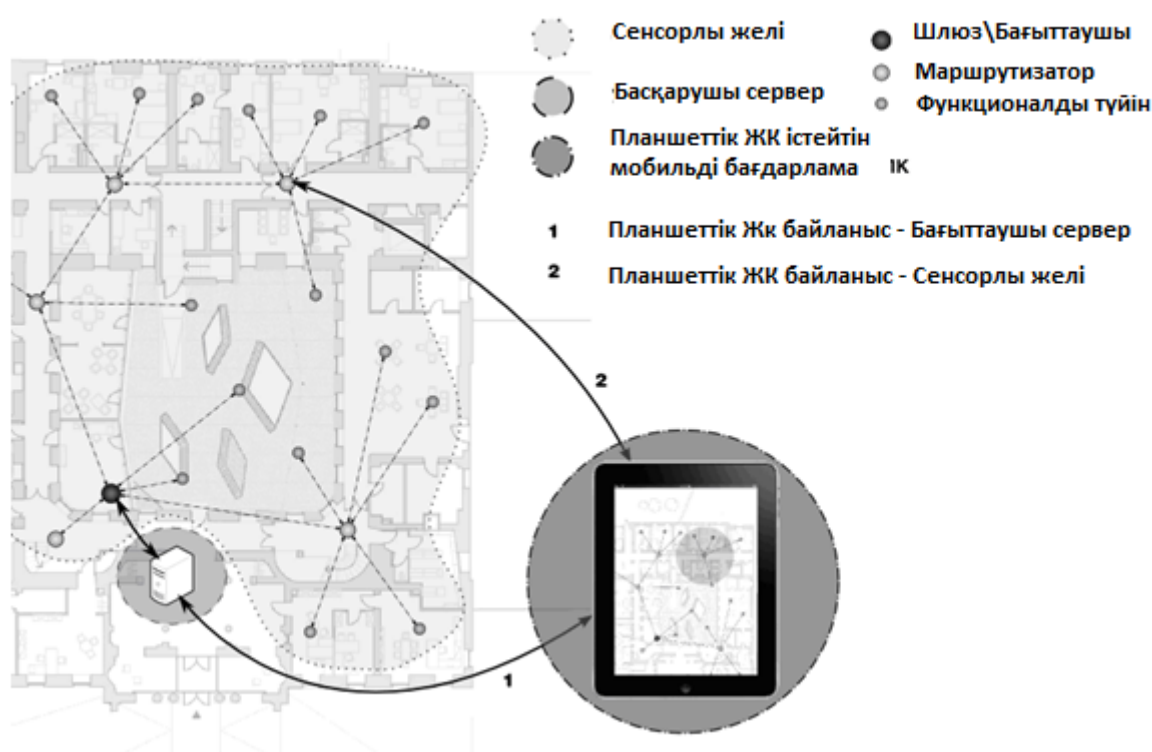


1-сурет – Таратылатын сенсорлық желі функционалдык деңгейі



2-сурет – 6LoWPAN желісінің архитектурасы.

- Сенсорлық желілердің келесі мүмкіндіктерді бөлектеу керек:
- өзін-өзі қалпына келтіріп және ұйымдастыру қабілеттілігі;
 - төмен электр таратқыштардан ұзақ қашықтыққа ақпаратты беруге қабілеті (ретрансляция);
 - құны төмен компоненттері және олардың шағын мөлшері;
 - аз энергия тұтыну және тәуелсіз (автономды) көздерінен қуат мүмкіндігі;
 - орнатылуы қарапайым, кабельдерді төсеуге қажеттілігі жоқ;
 - толықтай сымсыз технология арқасында және қуатты батареялардан алатыны;
 - мұндай желілерді қолданыстағы және жұмыс істеп тұрған нысандарға қосымша жұмыстарсыз орнатуға болады;
 - планшеттік компьютерді пайдаланып инфрақұрылымды басқара білу (3-сурет);
 - төменгі техникалық қызмет көрсету шығындары.

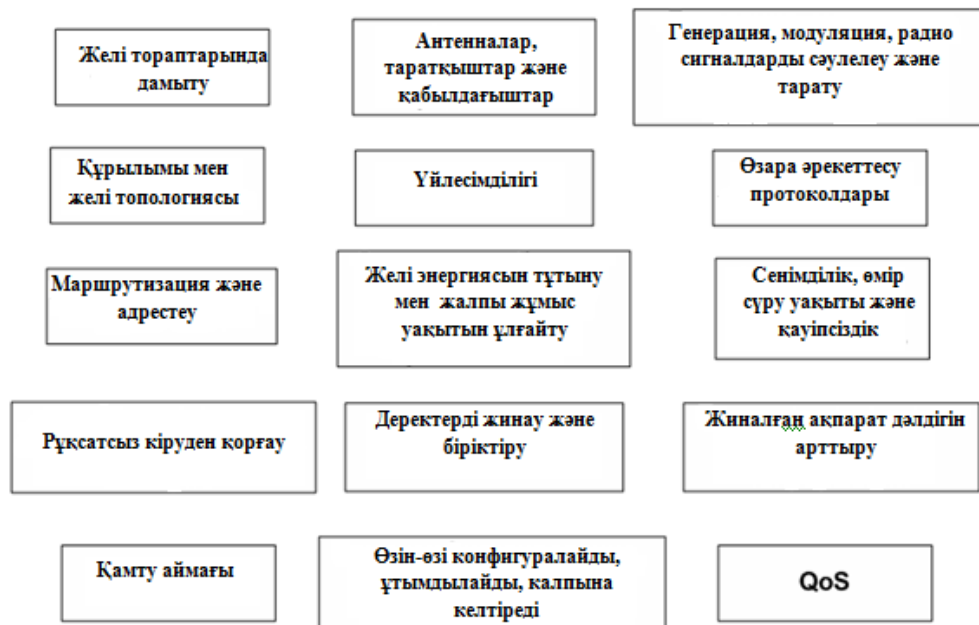


3-сурет – Планшеттік ДК арқылы ССЖ басқару

Жалпы, сенсорлық желілерін жобалау және құрылыс, ақпараттық және коммуникациялық технологияларды әртүрлі салаларына қатысты ғылыми және ғылыми-техникалық мәселелерді шешуге және байланыстың көптеген аспектілерін қарастыру керек (4-сурет).

Сымсыз түйіннің аппараттық қамтамасыз етуін және желі протоколдарының түйіндермен өзара әрекеттесуі үшін тәуелсіз электрмен жабдықтау жүйесімен ұзақ өмір қамтамасыз ету үшін оңтайландырылған. Түйіннің жұмыс істеу режиміне байланысты бірнеше жыл жұмыс істеу мүмкін.

Сымсыз сенсорлық желі – бұл тармақталған желі қызмет көрсетілмейтін ықшам электрондық құрылымдардан тармақталған желі, осы сымсыз байланыстың көмегімен түйіннен түйінге ретрансляция арқылы негізгі станцияға сыртқы орта параметрлерін және ақпараттың жіберілуін жүзеге асырады. Осындай сенсор түйіндерін тұрақты бекітуге болады, сонымен қатар, мобильді болуы мүмкін, яғни кеңістікте бір-бірінен еркін қозғала алады, желінің логикалық байланысын бұзбайды. Сенсорлық желінің тұрақты топологиясы болмайды және оның құрылымы уақыт ағымымен динамикалық түрде өзгереді. Желі түйіні, сенсор деп аталатын, сыртқы ортадан ақпарат қабылдайтын датчигібар, микроконтроллер, жады, радиохабарлағыш, автономды қорек көзі және кейде атқарушы механизм болып саналады. Сонымен бірге, сыртқы ортаға желіден түйіндерден әсерлердің бағдарлаушысылардың берілуі ықтимал.



4-сурет – ССЖ ашық ғылыми-зерттеу мәселелері

ӘДЕБИЕТ

- [1] Nitaigour, P.M. (Editor) Sensor networks and configuration fundamentals, standards, platforms, and applications / P.M. Nitaigour // Springer. – 2007. – 510 p.
- [2] Кучерявый, Е.А. Принципы построения сенсоров и сенсорных сетей / Е.А. Кучерявый, С.А. Молчан, В.В. Кондратьев // Электросвязь, 2006. – №6 – С.10-15.
- [3] Молчанов Д.А. Приложения беспроводных сенсорных сетей / Д.А. Молчанов, Е.А. Кучерявый // Электросвязь, 2006. – №6 – С.20-23.
- [4] Майская В. Беспроводные сенсорные сети, малые системы – большие баксы / В. Майская // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2005. – №10. – С. 18-22.
- [5] Беспроводные технологии и их применение в промышленности. Передача речевой информации через WPAN. URL:<http://www.russianelectronics.ru/leader-r/review/2187/doc/54063/>.
- [6] Панфилов Д., Соколов М. Введение в беспроводную технологию ZigBee стандарта 802.15.4. URL:<http://www.freescale.com/files/abstract/global/s50210.pdf>.

REFERENCES

- [1] Nitaigour, P.M. (Editor) Sensor networks and configuration fundamentals, standards, platforms, and applications / P.M. Nitaigour // Springer. – 2007. – 510 p.
- [2] Kucheryavii, E. A. The principles of structure sensor and sensor networks / E.A.Kucheryavii, S. A. Molchan, V.V Kondtaiev // Electrical connection, 2006. - №6 – p.10-15. (in Russ.).
- [3] Molchanov, D.A. Application of wireless sensor networks / D.A. Molchanov, E.A. Kucheryavii // Electrical connection, 2006. -№6 – p.20-23. (in Russ.).
- [4] Mayskaya, V. The wireless sensor networks, little systems – the big price/ V. Mayskaya // Electronica: The Science, Technology, Business. – 2005. - №10. – p. 18-22. (in Russ.).
- [5] The wireless technologies and its using in industry. Transmission of voice information through WPAN. URL:<http://www.russianelectronics.ru/leader-r/review/2187/doc/54063/> (in Russ.).
- [6] Panphilov, D., Sokolov, M. Introduction to wireless technology of ZigBee standart 802.15.4. URL:<http://www.freescale.com/files/abstract/global/s50210.pdf>.(inRuss.).

ПЕРСПЕКТИВЫ БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ

К. Т. Бажиков, А. О. Касимов, С. А. Усембаева, М. Калиев

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: беспроводные сенсорные сети, телекоммуникация.**Аннотация.** Беспроводные сенсорные сети (БСС) являются одним из самых перспективных направлений развития современных телекоммуникационных технологий.

Беспроводная сенсорная сеть – это распределенная сеть необслуживаемых миниатюрных электронных устройств (узлов сети), которые осуществляют сбор данных о параметрах внешней среды и передачу их на базовую станцию посредством ретрансляции от узла к узлу с помощью беспроводной связи.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 18 – 23

SINGLE PHASE STAND-ALONE INVERTER

S. A. Orynbayev, S. S. Moldakhmetov, A. B. Bekbayev

Kazakh National Technical University named after K. Satpayev, Almaty, Kazakhstan. E-mail: seitzhan_74@mail.ru

Key words: H-bridge inverter, multiple winding transformer, THD.

Abstract. This paper proposes a constructing single phase stand-alone inverter topology that allows to obtain single-phase sinusoidal alternating current with power frequency at the output, increasing the power and reducing its cost through the use of transistors in standard case. This result is achieved by dividing the current in the primary windings of the multi-winding power-up transformer. Bipolar voltages of the H- bridge inverters with a phase shift are supplied to the primary winding. By using partial duty cycle of the inverted voltage and different switching times in the windings on the secondary winding a sinusoidal voltage is formed. The article presents the simulation results in Simulink. In comparison with analogues the presented topology allows to get a smaller value of THD. The total harmonic distortion of the inverter output voltage is 2,43%.

УДК 621.314.5

ОДНОФАЗНЫЙ АВТОНОМНЫЙ ИНВЕРТОР

С. А. Орынбаев, С. С. Молдахметов, А. Б. Бекбаев

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: мостовой инвертор, многообмоточный трансформатор, коэффициент нелинейных искажений.

Аннотация. В статье предложена топология однофазного автономного инвертора, который позволяет получить однофазный переменный ток промышленной частоты с улучшенной формой синусоиды на выходе, увеличить мощность инвертора, а также снизить его себестоимость за счет использования транзисторов в стандартном корпусе. Данный результат достигается за счет деления токов в первичных обмотках многообмоточного силового повышающего трансформатора. К каждой из первичных обмоток подается двуполярное напряжение с мостовых инверторов со сдвигом по фазе. При использовании неполного коэффициента заполнения инвертированного напряжения и различного времени коммутации в обмотках на выходе вторичной обмотки формируется напряжение близкое к синусоидальному. В статье приведены результаты моделирования предлагаемого инвертора в среде Simulink. Коэффициент нелинейных искажений выходного напряжения представленного инвертора составил 2,43 %.

Введение. На сегодняшний день все большую популярность приобретает использование энергии ветра и Солнца для электроснабжения частного потребителя. У таких систем имеется множество плюсов, а самым главным недостатком является высокая цена. При этом большую долю в ценообразовании энергетической установки занимают аккумуляторные батареи и инвертор [1].

Существует множество способов реализации однофазных инверторов [2]. Следует понимать, что инвертор зачастую просто преобразует постоянное напряжение источника питания в двуполярное напряжение промышленной частоты. Поэтому большинство схем основано на применении повышающего трансформатора, поскольку без него потребуется от 18 аккумуляторных батарей напряжением 12 В для достижения необходимого напряжения в 220 В на выходе. Но и с

применением трансформаторов существует ряд неудобств. Так как выпрямленное напряжение на выходе ветрогенераторов зачастую не превышает 30 В, для построения инвертора мощностью более 1 кВт необходимо использование схем с двойным преобразованием [1], а для коммутации токов превышающих 50 А – дорогостоящих сильноточных транзисторных модулей. Помимо этого, большинство инверторов не имеет синусоидальную форму выходного напряжения, что снижает качество электроэнергии, поступающего к потребителю.

В статье предложена совершенно новая конструкция однофазного инвертора мощностью до 3 кВт с синусоидальной формой выходного напряжения промышленной частоты, имеющего улучшенные выходные характеристики и низкую стоимость.

Предлагаемая топология. Предлагаемый инвертор для повышения напряжения также использует трансформатор, первичная обмотка которого выполнена многообмоточной [3]. Это позволяет при неизменном входящем напряжении разделить большой входной ток по обмоткам на несколько токов, тем самым увеличить пропускную способность инвертора, также использовать на входе источник питания, постоянное напряжение которого составляет незначительную величину. Схема предлагаемого однофазного автономного инвертора показана на рисунке 1.

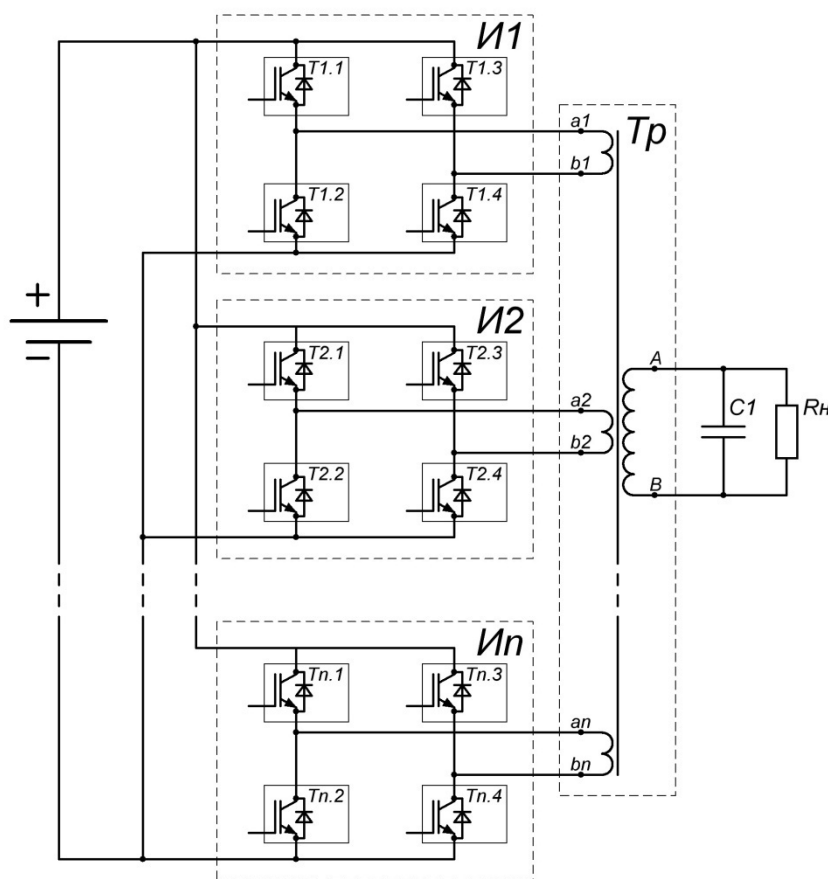


Рисунок 1 – Схема однофазного инвертора

Как видно из рисунка 1, к источнику постоянного тока параллельно подключены мостовые инверторы $I1, I2, \dots, In$. Каждая секция мостового инвертора состоит из четырех ключей $Tx.1, Tx.2, Tx.3, Tx.4$, представляющих собой IGBT транзисторы с обратным диодом. Выводы переменного тока каждой секции инвертора подключены к соответствующим первичным обмоткам $a1-b1, a2-b2, \dots, an-bn$ многообмоточного трансформатора Tr . Вторичная обмотка трансформатора через параллельно включенный конденсатор подключена к нагрузке. На практике для реализации инверторных мостов нет необходимости выбирать дорогостоящие сильноточные транзисторные модули, достаточно использование приборов в корпусах TO-220 и TO-247 [4].

Очередность включения ключей Тх.1, Тх.2, Тх.3, Тх.4 осуществляют системой управления, на затвор транзисторов поступает управляющий сигнал с микроконтроллерной системы управления.

Алгоритм управления транзисторными ключами. Следует заметить, что инверторные мосты имеют необычную последовательность инвертирования. В каждой секции блока мостовых инверторов две пары диагональных транзисторов управляются двумя одинаковыми последовательностями импульсов, но сдвинутыми друг относительно друга на 180° . Период следования и скважность импульсов управления для всех инверторов блока остается неизменным. При этом сдвиг импульсов по фазе относительно одного инвертора к другому будет зависеть от числа первичных обмоток трансформатора. Данный сдвиг по фазе φ обратно пропорционален числу обмоток и рассчитывается по формуле 1.

$$\varphi = \frac{\pi(Q - 2)}{Qn}, \quad (1)$$

где Q – скважность управляющих импульсов, n – количество мостовых инверторов.

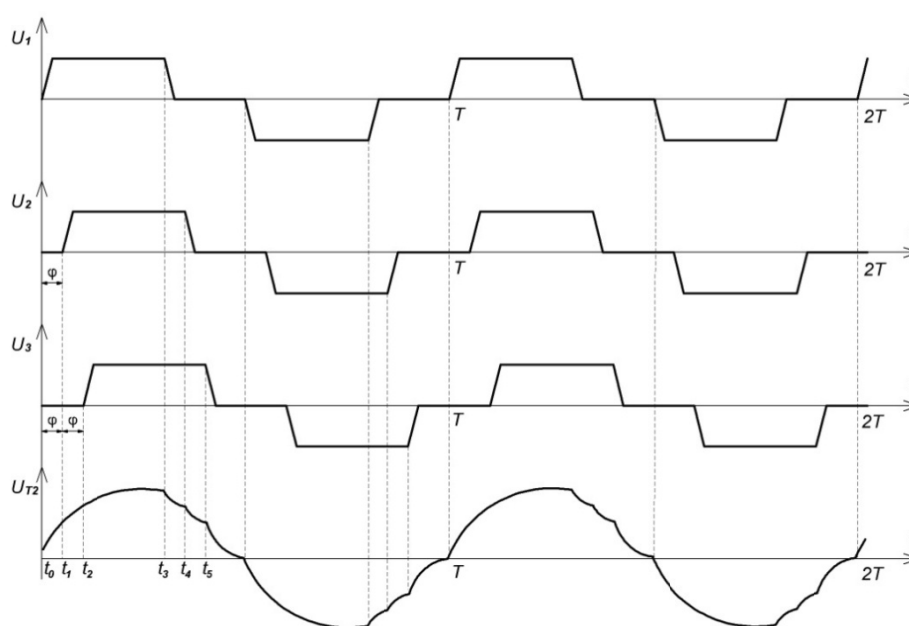


Рисунок 2 – Временная диаграмма формирования выходного напряжения

Принцип формирования выходного напряжения поясняет рисунок 2, на котором показаны двуполярные напряжения U_1 , U_2 , U_3 , формируемые инверторами в первичных обмотках трансформатора, сдвинутые относительно друг друга на угол φ . Данный сдвиг по фазе необходим, во-первых, для формирования на выходе трансформатора напряжения близкого к синусоидальному, а во-вторых, это позволяет достигать скважности управляющих импульсов равной 3. Последнее необходимо для смягчения режима работы биполярных транзисторов с изолированным затвором. Так как данные транзисторы коммутируют большие токи, наблюдается высокое тепловыделение, которое пагубно влияет на характеристики транзисторов. Работа данных транзисторов в импульсном режиме с большой скважностью позволит снизить тепловыделение и вероятность выхода из строя [5]. Помимо этого, такая скважность позволяет разнести моменты коммутации силовых ключей для формирования достаточного по длительности мертвого времени и для протекания переходных процессов [6]. Это необходимо для предотвращения сквозных токов источника питания, которые способны моментально вывести из строя оба транзистора. Также следует учитывать, что ввиду больших индуктивностей возрастает время переходных процессов при коммутации, которые могут привести к большим перенапряжениям, поскольку ток в цепи не может мгновенно изменить направление. Для предупреждения перенапряжения используются транзисторы с обратными диодами. После размыкания ключей ток в первичной обмотке спадает через обратные диоды транзисторов под действием обратного напряжения.

Для каждого мостового инвертора система управления формирует два противофазных сигнала управления со скважностью близкой 3, которые подают на затвор двух диагонально включенных ключей Тх.1, Тх.4 и Тх.2, Тх.3. Причем на первую секцию блока мостовых инверторов подаются управляющие сигналы без сдвига по фазе, на вторую со сдвигом по фазе φ , и так далее для каждой секции мостового инвертора сдвиг по фазе управляющих импульсов будет увеличиваться на φ относительно предыдущего.

Таким образом, в магнитопроводе трансформатора Тр возникает магнитное поле возрастающее и спадающее в течение одного полупериода, индукция которого в свою очередь создает переменное напряжение на выводах вторичной обмотки А-В.

Моделирование и результаты. В среде визуального моделирования Simulink MATLAB была реализована модель устройства (рисунок 3). Модель состоит из трех инверторов тока, подключенных к первичной обмотке трансформатора. Основой для создания модели послужил пакет SimPowerSystems. Данный пакет специализируется на элементах силовой электроники, позволяющих реализовывать адекватные модели.

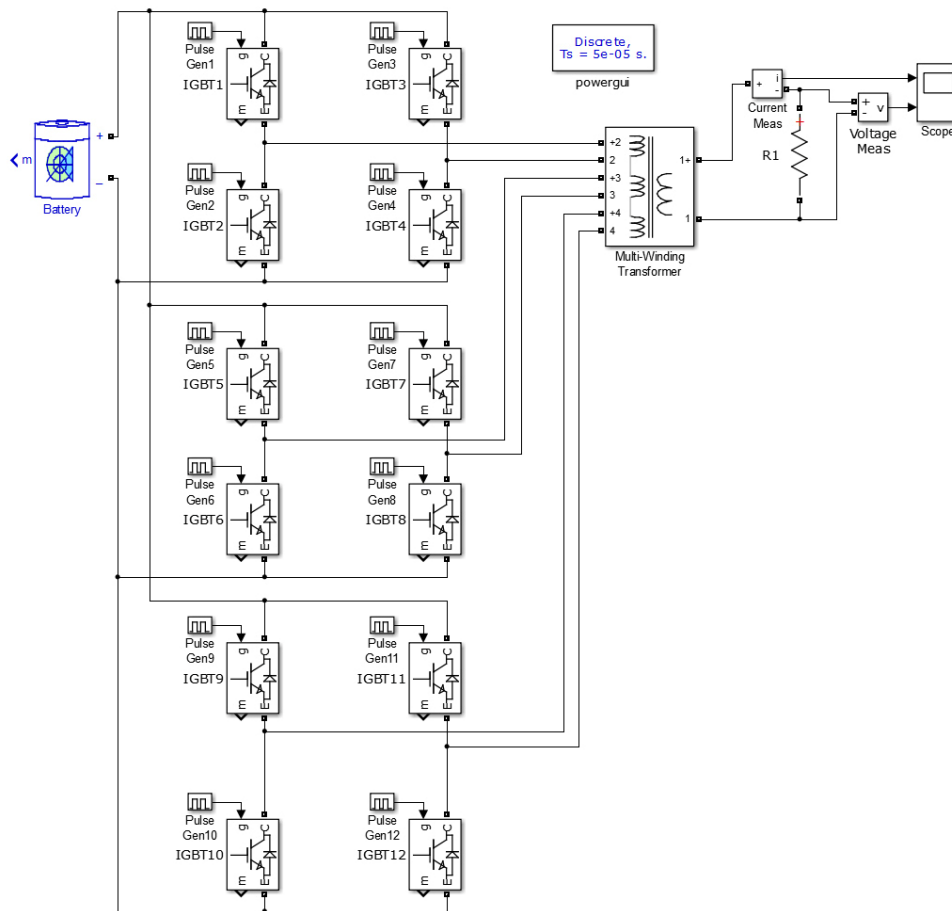


Рисунок 3 – Модель инвертора в среде Simulink

В качестве источника питания была выбрана свинцово-кислотная аккумуляторная батарея с номинальным напряжением 24 В и ёмкостью 200 А·ч. Многообмоточный трансформатор представлен блоком Multi-Winding Transformer. Параметры трансформатора заданы так, что все первичные обмотки равны между собой. Вторичная обмотка трансформатора подключена к резистору сопротивлением 25 Ом. Роль силовых ключей инверторных мостов выполняют блоки IGBT/Diode, управляемые импульсными генераторами PulseGen.

Скважность импульсной последовательности была выбрана равной 3. Таким образом, длительность открытого состояния любого из транзисторов составляет 3,33 мкс. Расчеты сдвигов по фазе производились согласно формуле (1).

Помимо получения временных диаграмм выходного напряжения и тока Simulink, позволяет выполнять гармонический анализ при помощи блока powergui. На рисунке 4 представлена временная диаграмма и спектральная характеристика напряжения на выходе предлагаемого инвертора. Амплитуда напряжения равна 310 В, частота 50 Гц. Форма кривой напряжения заметно отличается от синусоидальной, при этом, согласно FFT анализа, коэффициент нелинейных искажений равен 8,78 %.

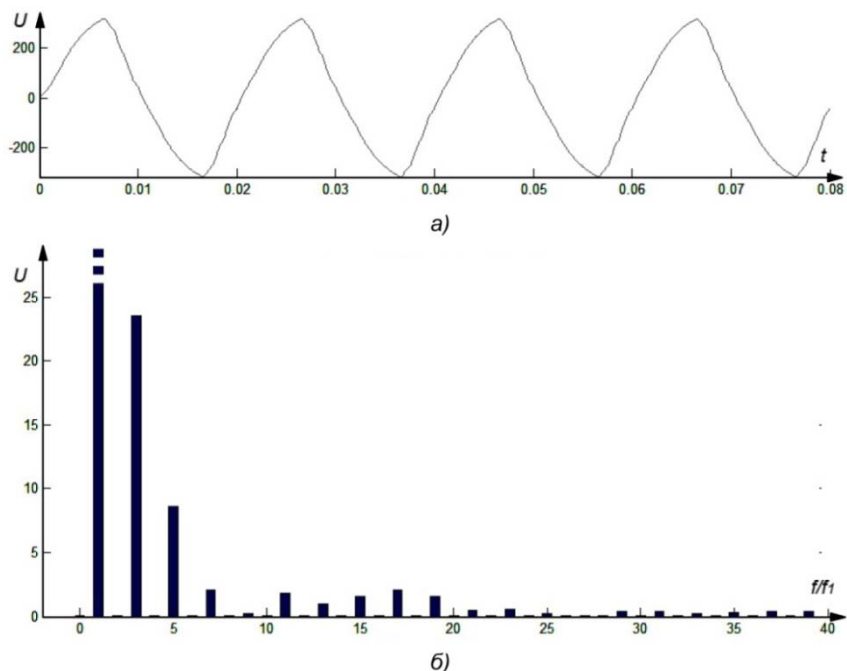


Рисунок 4 – Временная (а) и спектральная (б) диаграммы напряжения на выходе инвертора без конденсатора

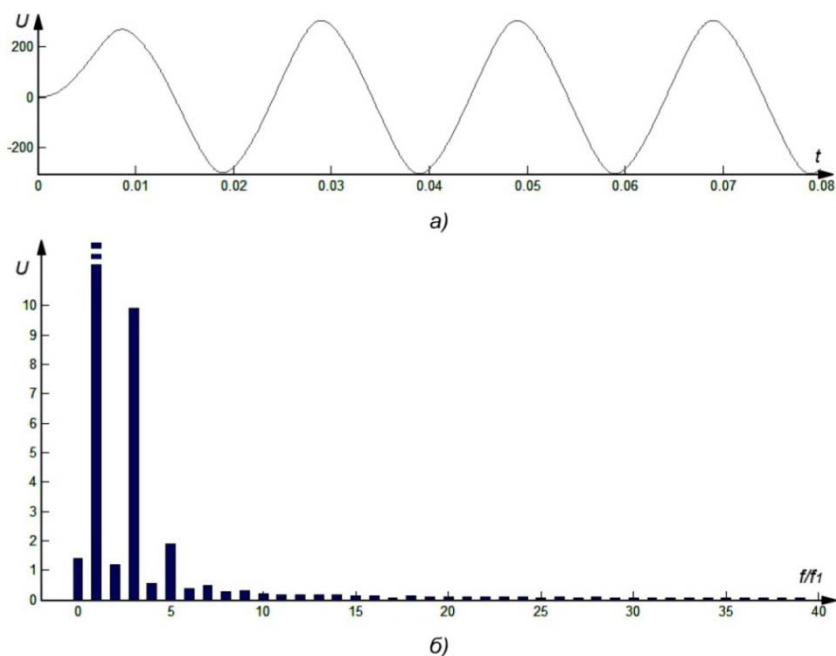


Рисунок 5 – Временная (а) и спектральная (б) диаграммы напряжения на выходе инвертора с конденсатором

Для подавления гармонических составляющих достаточно установить параллельно нагрузке конденсатор емкостью 200 мкФ. Временная и спектральная диаграммы для случая показаны на рисунке 5. Коэффициент нелинейных искажений равен 2,43 %, что значительно меньше, чем у аналогов [7, 8].

Выводы. Предложенная в статье топология однофазного автономного инвертора позволяет получить однофазный переменный ток промышленной частоты с улучшенной формой синусоиды на выходе, увеличить мощность инвертора, а также снизить его себестоимость за счет использования транзисторов в стандартном корпусе. Данный результат достигается за счет внедрения в схему автономного инвертора силового сглаживающего трансформатора, первичная обмотка которого является многообмоточной и к каждой из первичных обмоток подается двуполярное напряжение с мостовых инверторов со сдвигом по фазе. По результатам моделирования среде Simulink коэффициент нелинейных искажений выходного напряжения представленного инвертора составил 2,43 %. По результатам исследований оформлена заявка на получение инновационного патента РК.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mukund R. Patel. Wind and solar power systems: Design, analysis and operation. CRC Press. – 2006. – С. 221 – 233.
- [2] Моин В.С. Стабилизированные транзисторные преобразователи. М.: Энергоатомиздат. – 1986. – С. 81 – 112.
- [3] Брускин Д.Э. и др. Электрические машины: часть первая. М.: Высшая школа – 1987. – С. 81 – 112.
- [4] Peter Wood, Donald A. Dapkus II. Thermal and Mechanical Considerations for FullPak Applications. – International Rectifier. Application Note 972A.
- [5] Грошев В.Я. Способы уменьшения тепловыделения в одноктных трансформаторных конвертерах // РадиоЛоцман. – 2012. - №8. С. 64 – 70.
- [6] Selva Kumar R., Karthick V., Arun D. A Review on Dead-Time Effects in PWM Inverters and Various Elimination Techniques // International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering. – 2014. - №1 (4). С. 385 – 387.
- [7] Espinosa E.E., Espinoza J.R., Melin P.E., Ramirez R.O., Felipe Villarroel, Munoz J.A., Luis Moran. A New Modulation Method for a 13-Level Asymmetric Inverter Toward Minimum THD // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2014. - №3. С. 1924-1933.
- [8] Debnath S., Narayan R. THD Optimization in 13 level photovoltaic inverter using Genetic Algorithm // International Journal of Engineering Research and Applications. – 2012. - №3. С. 385-389.

REFERENCES

- [1] Mukund R. Patel. Wind and solar power systems: Design, analysis and operation. CRC Press, **2006**, pp. 221-233.
- [2] Moin V.S. Stabilized transistor converters. M.: Energoatomizdat, **1986**, pp. 81-112 (in Russ.).
- [3] Bruskin D.Je. i dr. Electric cars: Part One. M.: Vyssh. shk. **1987**, pp. 81 – 112 (in Russ.).
- [4] Peter Wood, Donald A. Dapkus II. Thermal and Mechanical Considerations for FullPak Applications. International Rectifier. Application Note 972A.
- [5] Groshev V.Ya. Ways to reduce heat generation in single-ended transformer converters. RadioLocman. **2012**, №8, pp. 64 – 70 (in Russ.).
- [6] Selva Kumar R., Karthick V., Arun D. A Review on Dead-Time Effects in PWM Inverters and Various Elimination Techniques. International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering. **2014**, №1 (4), pp. 385 – 387.
- [7] Espinosa E.E., Espinoza J.R., Melin P.E., Ramirez R.O., Felipe Villarroel, Munoz J.A., Luis Moran, A New Modulation Method for a 13-Level Asymmetric Inverter Toward Minimum THD, IEEE Transactions on Industry Applications, **2014**, Vol.50, No.3, pp.1924-1933.
- [8] Debnath S., Narayan R., THD Optimization in 13 level photovoltaic inverter using Genetic Algorithm. International Journal of Engineering Research and Applications. Vol. 2, Issue 3, May-Jun. **2012**, pp. 385-389.

БІРФАЗАЛЫ АВТОНОМДЫ ИНВЕРТОР

С. А. Орынбаев, А. Б. Бекбаев, Б. К. Байбутанов

К. И. Сәтбаев атыдағы Қазақ ұлттық техникалық университет, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: көпірлік инветор, көп орамалы трансформатор, сызықты емес бұрмалау коэффициенті.

Аннотация. Мақалада бірфазалы автономды инвертордың топологиясы қарастырылған, ол шығысында синусоидасының пішіні жақсартылған өндірістік жиіліктегі бірфазалы айнымалы тоқты алуға, инвертордың қуатын ұлғайтуға және стандартты қанқадағы транзисторларды қолдану есебінен өзіндік бағасын төмендетуге мүмкіндік береді. Осы нәтиже күштік жоғарлатушы трансформатордың біріншілік орамаларында тоқтың бөлінуіне байланысты. Біріншілік орамаларға көпірлік инверторлардан фаза бойынша ығысқан екі-полярлық кернеу беріледі. Инвертордан өткен кернеудің толық емес толтыру коэффициентін және орамалардағы коммутацияның әр уақытта болуын қолдану кезінде екіншілік орамалардың шығысында синусоидаға жақын кернеу пайда болады. Мақалада Simulink ортасында көрсетілген инверторды модельдеу нәтижелері келтірілген. Инвертордағы шығыс кернеудің бұрмалау коэффициенті 2,43% құрады.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 24 – 28

CONSTRUCTING A BASIS FROM SYSTEMS OF EIGENFUNCTIONS OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM

G. Dildabek^{1,2}, A. Tengayeva^{1,3}

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: dildabek.g@gmail.com,

³Kazakh National Agrarian University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: aijan0973@mail.ru

Key words: nonlocal boundary conditions; regular but not strengthened regular conditions; basis; eigenfunctions; biorthogonal system.

Abstract. In the present work we investigate a nonlocal boundary spectral problem for an ordinary differential equation in an interval. This problem arises while solving a nonlocal boundary value problem for the Laplace equation by the method of separation of variables. The difference of this problem is the impossibility of direct applying of the Fourier method (separation of variables). Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis. The boundary conditions of this problem are regular but not strengthened regular. The completeness and minimality of the system follow from the regularity of boundary conditions of the spectral problem. The limitation of norms is easily checked by direct calculation. However the properties of the completeness and minimality are not enough for the basis property. The system of eigenfunctions are forming a basis. Based on these eigenfunctions there is constructed a special system of functions that already forms the basis.

УДК 517.984.52

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ИЗ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Г. Дилдабек^{1,2}, А. А. Тенгаева^{1,3}

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

³Казахский национальный аграрный университет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: нелокальные краевые условия; регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия; базис; собственные функции; биортогональная система.

Аннотация: В настоящей работе мы исследуем нелокальную граничную спектральную задачу для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка на отрезке. Эта проблема возникает при решении нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа методом разделения переменных. Принципиальным отличием этой задачи является невозможность прямого применения метода Фурье (разделения переменных). Потому что соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет систему собственных функций, не образующих базис. Граничные условия этой задачи регулярные, но не усиленно регулярные. Полнота и минимальность системы следуют из регулярности граничных условий спектральной задачи. Почти-нормированность легко проверяется непосредственным вычислением. Однако только свойств полноты и минимальности недостаточно для базисности системы. Система собственных функций рассматриваемой задачи не образует базиса. Основываясь на этих собственных функциях построена специальная система функций, которая уже образует базис.

Введение. Исследования по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов берут свое начало с классических работ J. Liouville и Sh. Sturm. Фундаментальные основы в спектральной теории дифференциальных операторов были заложены в работах Birkhoff 1908 года, где он впервые выделил регулярные граничные условия для общего обыкновенного дифференциального оператора. Теория регулярных задач была существенно развита в работах Тамаркина и Stone. Эти работы привели к бурному развитию нового широкого научного направления, имеющего к настоящему моменту огромную библиографию. Мы отсылаем читателя к [1, 2] для обширными списками литературы и обзорами полученных результатов.

Несмотря на кажущуюся простоту, спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов далека от завершения. Это относится даже к случаю оператора второго порядка

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x),$$

заданного на конечном отрезке $x \in (a, b)$, который называется оператором Штурма-Лиувилля. Краткий обзор результатов по спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля приводится в недавней работе А.С. Макина [3].

Хорошо известно, что граничные условия для обыкновенного дифференциального оператора могут быть разделены на три класса [4]:

- усиленно регулярные краевые условия;
- регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия;
- нерегулярные условия.

Если граничные условия усиленно регулярные, то система корневых функций задачи образует базис Рисса в $L_2(a, b)$. Это утверждение было доказано в [5, 6] и [7, Глава XIX]. В других случаях базисность систем корневых функций не является гарантированной.

Окончательное определение классов граничных условий для оператора дифференцирования второго порядка $-D^2$, когда система собственных и присоединенных функций образует базис, было дано в 1998 году в работе P. Lang и J. Locker [8].

В настоящей работе мы рассмотрим одну модельную спектральную задачу для оператора кратного дифференцирования. Краевые условия задачи регулярны, но не усиленно регулярны. Система собственных функций задачи полна, минимальна, почти нормирована, но не образует базис в L_2 . На основе этих собственных функций строится специальная система, обладающая свойством базиса в L_2 .

1 Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < \pi; \quad (1)$$

$$u(0) = 0; \quad (2)$$

$$u'(0) + u'(\pi) + \alpha u(\pi) = 0, \quad (3)$$

где $\alpha > 0$ – фиксированный параметр.

Эта задача возникает при решении методом разделения переменных одной нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа с противоположными потоками на части границы.

Пусть $D = \{(r, \theta): 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$ – полукруг. Целью задачи является нахождение функции $u(r, \theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющей в D уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (4)$$

и граничным условиям

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad (5)$$

$$u(r, 0) = 0, r \in [0, 1], \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) + \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi) + \alpha u(r, \pi) = 0, \quad r \in (0, 1). \quad (7)$$

Особенностью этой краевой задачи является невозможность прямого применения метода Фурье (метода разделение переменных). Потому что при $\alpha \neq 0$ соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения (возникающая при методе разделения переменных) имеет систему собственных функций, не образующих базис. Для $\alpha = 0$ задача (4)-(7) рассматривалась в [9-10]. В этом ($\alpha = 0$) случае все собственные значения спектральной

задачи являются кратными, а соответствующие собственные подпространства состоят из одной собственной и одной присоединенной функции.

Один из способов построения базиса, на основе системы собственных функций задачи

$$\begin{aligned} -\vartheta''(x) &= \lambda\vartheta(x), & 0 < x < \pi; \\ \vartheta(0) &= 0; \quad \vartheta'(0) - \vartheta'(\pi) + \alpha\vartheta(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

был предложен в [11]. Граничные условия этой задачи регулярные, но не усиленно регулярные. И система её собственных функций полна, минимальна, но не образует базиса. Однако, специальная система функций, построенная с помощью этих собственных функций, уже образует базис. И этот факт применяется для решения нелокальной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Целью настоящей работы является построение базиса из системы собственных функций задачи (1) – (3).

2 Собственные значения и собственные функции задачи. В целом, построение собственных значений и собственных функций задачи (1) – (3) является достаточно простой задачей. Поэтому мы опускаем некоторые подробности вычислений и представляем основные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Мы ищем собственные значения задачи. Отметим, что значение $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи, поскольку для этого значения задача имеет только тривиальное решение.

Пусть $\lambda \neq 0$. В силу (2) собственные функции имеют вид $u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Из нелокального условия (3) получаем два уравнения

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = 0, \quad \cot\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Решения первого уравнения дают первую серию собственных значений и собственных функций задачи (1) – (3) вида

$$\lambda_{k1} = (2k + 1)^2, \quad u_{k1}(x) = \sin((2k + 1)x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Второе уравнение может быть представлено в виде

$$\cot(\beta\pi) = -\frac{\alpha}{2\beta}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Через β_k обозначим корни этого уравнения. Несложно убедиться в том, что они удовлетворяют неравенствам $2k + 1 < 2\beta_k < 2k + 2, k = 0, 1, 2, \dots$, и для разности $\delta_k = \beta_k - k$ при достаточно больших k выполняются двусторонние оценки

$$\frac{\alpha}{2k + 1} \left(1 - \frac{1}{2k + 1}\right) < \delta_k < \frac{\alpha}{2k + 1}. \quad (8)$$

Следовательно, существует вторая серия собственных значений и собственных функций вида

$$\lambda_{k2} = (2\beta_k)^2, \quad u_{k2}(x) = \sin(2\beta_k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Лемма 1. Система собственных функций $\{u_{k1}(x), u_{k2}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1) – (3) является полной, минимальной, почти нормированной системой, но не образует базиса Рисса в $L_2(0, \pi)$.

Доказательство. Полнота и минимальности системы следуют из регулярности граничных условий спектральной задачи (1) – (3). Почти-нормированность, то есть нижние и верхние оценки норм собственных функций, легко проверяется непосредственным вычислением. Однако только свойства полноты и минимальности являются не достаточными для базисности.

Действительно, рассмотрим скалярное произведение в $L_2(0, \pi)$ собственных функций (u_{k1}, u_{k2}) . Непосредственным вычислением не сложно получить, что

$$(u_{k1}, u_{k2}) = \int_0^{\pi} \sin((2k + 1)x) \sin(2\beta_k x) dx = \frac{\pi \sin(2\delta_k \pi)}{2 \cdot 2\delta_k \pi} \frac{2k + 1}{2k + 1 + 2\delta_k}.$$

Учитывая, что $\|u_{k1}\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k2}\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, отсюда, принимая во внимание асимптотику (8), получаем, что угол между нормированными собственными функциями стремится к нулю:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{k1}}{\|u_{k1}\|}, \frac{u_{k2}}{\|u_{k2}\|} \right)_{L_2(0, \pi)} = 1.$$

Такие системы не могут образовывать базиса. Лемма доказана.

Отметим, что отсутствие базисности системы собственных функций задачи (1) – (3) также может быть получено из более общих фактов работы [8].

3 Построение базиса из системы собственных функций задачи. Покажем, что внутри собственных подпространств, соответствующих попарно близким собственным значениям можно произвести такие преобразования, что полученная новая система будет обладать свойством базисности.

Положим

$$\varphi_{2k}(x) = u_{k1}(x), \quad \varphi_{2k+1}(x) = (u_{k2}(x) - u_{k1}(x))(2\delta_k)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Лемма 2. Система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ задачи образует базис Рисса в $L_2(0, \pi)$.

Доказательство. Так как система получена преобразованиями внутри собственного подпространства, отвечающего попарно близким собственным значениям, то полнота и минимальности системы не изменились. Для того, чтобы показать базисность системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, покажем ее квадратичную близость другому базису Рисса.

В качестве известного базиса Рисса возьмем систему собственных и присоединенных функций задачи Самарского-Ионкина

$$-w''(x) = \lambda w(x), \quad 0 < x < \pi; \quad w(0) = 0; \quad w'(0) + w'(\pi) = 0.$$

Граничные условия этой задачи являются регулярными, но не усиленно регулярными. Все собственные значения этой задачи, за исключением нулевого, двукратны: $\lambda_{k1} = \lambda_{k2} = (2k+1)^2, k = 0, 1, 2, \dots$. Собственные w_{2k} и присоединенные w_{2k+1} функции задачи образуют базис Рисса в $L_2(0, \pi)$ и имеют вид:

$$w_{2k}(x) = \sin((2k+1)x), \quad w_{2k+1}(x) = x \cos((2k+1)x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Мы должны показать сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - w_k\|^2 < \infty.$$

Очевидно, что $\varphi_{2k} - w_{2k} = 0$. Для нечетных номеров имеем:

$$\varphi_{2k+1}(x) = \frac{\sin(\delta_k x)}{\delta_k x} x \cos((2k+1 + \delta_k)x).$$

Поэтому не сложно показать, что $|\varphi_{2k-1}(x) - w_{2k+1}(x)| \leq C\delta_k$. Отсюда и из асимптотики (8) получаем неравенство $|\varphi_{2k-1}(x) - w_{2k+1}(x)| \leq \frac{C_1}{k}$, где C_1 – не зависит от k . Полученное неравенство обеспечивает квадратичную близость системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и базиса Рисса $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Лемма доказана.

Построенная новая система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ может быть использована для решения задачи (4) – (7) методом разделения переменных. Для этого не сложно убедиться в том, что элементы системы удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} -\varphi''_{2k}(x) &= \lambda_{k1} \varphi_{2k}(x), \\ -\varphi''_{2k+1}(x) &= \lambda_{k2} \varphi_{2k+1}(x) + \frac{\lambda_{k2} - \lambda_{k1}}{2\delta_k} \varphi_{2k}(x). \end{aligned}$$

Поэтому с системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ можно работать также, как и с системой собственных и присоединенных функций.

Авторы выражают благодарность М.А. Садыбекову за постановку задачи и ценные советы во время работы. Эта работа была поддержана грантом 0824 / ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 96, ВИНТИ, М., – 2006. – С. 5–105.
- [2] Locker J. Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators. V. 192 of Mathematical Surveys and Monographs. Amsterdam: North-Holland, 2003.
- [3] Makin A.S. On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 843562. – P. 1-13. – doi:10.1155/2012/843562.

- [4] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
- [5] Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, № 5. – С. 981-984.
- [6] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Математика. – 1964. – № 2. – С. 82-93.
- [7] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part III. New York: John Wiley & Sons, 1971.
- [8] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . II. Analysis of case // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1990. – Vol.146. – No. 1. – P. 148-191.
- [9] Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Е. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 718 – 725.
- [10] Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Е. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 892 – 895.
- [11] Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 123-137.

REFERENCES

- [1] Il'in V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators. *Journal of Mathematical Sciences*. – 2003, 116, 5, 3489-3550. (in Russ.).
- [2] Locker J. Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators. V.192 of Mathematical Surveys and Monographs. Amsterdam: North-Holland, 2003.
- [3] Makin A.S. On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012, 2012, Article ID 843562, 1-13, doi:10.1155/2012/843562.
- [4] Naimark M.A. Linear Differential Operators. New York: Ungar, 1967. (in Russ.).
- [5] Mihailov V.P. On Riesz bases in $L_2(0,1)$. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1962, 144, 5, 981-984. (in Russ.)
- [6] Kesel'man G.M. On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators. *Izv. Vuzov. Mat.*, 1964, 2, 39, 82-93. (in Russ.).
- [7] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part III. New York: John Wiley & Sons, 1971.
- [8] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . II. Analysis of case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1990, 146, 1, 148-191.
- [9] Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem. *Differential Equations*, 2010, 46, 5, 718-725.
- [10] Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem. *Differential Equations*, 2010, 46, 6, 892-895.
- [11] Mokin A.Yu. On a family of initial-boundary value problems for the heat equation. *Differential Equations*, 2009, 45, 1, 126-141.

БІР ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯЛАР ЖҮЙЕСІНЕН БАЗИС ҚҰРУ

Г. Ділдәбек^{1,2}, А. А. Тенгаева^{1,3}

¹Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,

³Қазақ ұлттық аграрлық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: бейлокал шеттік шарттар; регуляр, бірақ қатаң емес регуляр шеттік шарт; базис; меншікті функциялар; биортогонал жүйе.

Аннотация. Жұмыста кесіндідегі екінші ретті жәй дифференциалдық оператор үшін бейлокал шекаралық спектралды есебі зерттелінеді. Бұл мәселе Лаплас теңдеуі үшін бейлокал шеттік есепті айнымалыны ажырату әдісімен шешу кезінде пайда болады. Бұл есептің айрықша ерекшелігі Фурье әдісін (айнымалыны ажырату) тікелей қолданудың мүмкін еместігінде болып табылады. Себебі жәй дифференциалдық теңдеу үшін сәйкес спектралды есептің меншікті функциялары базис құрамайды. Бұл есептің шекаралық шарты регуляр, бірақ қатаң емес регуляр болып табылады. Жүйенің толықтығы мен минималдылығы спектралды есептің шекаралық шартынан шығады. Нормаланғандылығы қарапайым есептеулерден келіп шығады. Бірақ тек қана толықтығы мен минималдылық қасиеттері жүйенің базистігі үшін жеткіліксіз. Қарастырылған есептің меншікті функциялары базис құрамайды. Осы меншікті функцияларды негізге ала отырып базис құрайтын арнайы функциялар жүйесі құрылған.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 29 – 35

INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

T. Sh. Kalmenov, D. Suragan

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan, e-mail: suragan@list.ru

Keywords: boundary integral condition, elliptic equation, boundary value problem, fundamental solution.**Abstract.** In this note we construct integral boundary conditions of second order elliptic differential equations with variable coefficients generalizing results in [2]. We also obtain similar results for polyharmonic operators, that is, integral boundary conditions of iterated Laplacian are constructed.

УДК 517.956

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: граничное интегральное условие, эллиптическое уравнение, краевая задача, фундаментальное решение.**Аннотация.** Построены интегральные граничные условия для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, которые обобщают результаты в [2]. Мы также получили аналогичные результаты для полигармонических операторов.**1. Введение.** Пусть $\Omega \subset R^d$ открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$D(u) = -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Функций a_{ij}, b_j и c вещественные функций, которые для удобства предполагаются C^∞ -функциями.**Определение 1.** Вещественный скалярный линейный дифференциальный оператор второго порядка D называется строго эллиптическим в Ω , если существует гладкая функция $\gamma(x) > 0$ такой, что

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \gamma(x) |\xi|^2 \quad (2)$$

для всех $\xi \in R^d$. Если $\gamma > 0$ константа независимая от x и условие (2) выполняется для всех $x \in \Omega$, то D называется равномерно строго эллиптическим.**Определение 2.** Пусть $x \in R^d$ любая фиксированная точка. Тогда распределение $E(x, y)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора D (в R^d), если она удовлетворяет уравнение

$$D_y(E(x, y)) = \delta(x - y) \quad (3)$$

где δ является распределением Дирака (в обобщенном смысле). Как обычно в уравнении (3) обозначение D_y означает дифференцирование по y .

Для строго эллиптических операторов D_y может быть показано, по формуле Грин, что из уравнении (3) следует

$$D_x(E(x, y)) = \delta(x - y) \quad (4)$$

для любого фиксированного $y \in R^d$.

Для общего дифференциального оператора, существование фундаментального решения является не тривиальным.

Имеет место

Лемма (Хермандер). [1] Пусть D равномерный строго эллиптический оператор четного порядка с вещественными коэффициентами $a_{ij} \in C^\infty$. Тогда для каждой компактной области $\bar{\Omega} \subset R^d$ с $\partial\Omega \in C^\infty$ существует локальное фундаментальное решение $E(x, y)$, которое C^∞ функция для всех переменных $x \neq y$ и $x, y \in \bar{\Omega}$.

В разделе 2 этой работы, используя свойства фундаментальных решений, и мы построили корректную краевую задачу для дифференциального уравнения (1). В разделе 3 мы обобщили этот результат для полигармонических уравнений. На протяжении всей работы мы используем обозначения из [4]-[6].

2. Эллиптические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Пусть $\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_n \subset R^d$ открытые ограниченные области с границами $\partial\Omega_i \in C^\infty$, $i = 1, \dots, n$, соответственно. По лемме Хермандера существует локальное фундаментальное решение $E_i(x, y)$ оператора D для каждого Ω_i . Рассмотрим следующую функцию

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y)dy \quad (5)$$

в $\Omega \subset \Omega_1$, где

$$G(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i(x, y) \quad x, y \in \Omega. \quad (6)$$

Тривиальное наблюдение показывает, что $u(x)$ является решением (1) в Ω . Цель этого раздела это – найти граничное условие такое, что с этим граничным условием уравнение (1) имело единственное решение в $H^2(\Omega)$, которое являлось $u(x)$.

Теорема 1. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ (5) является единственным решением уравнения (1) в $H^2(\Omega)$ с граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y)\{\partial_{vy}u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j u\}dy = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (7)$$

где $\partial_{vy} = \sum_{k,j=1}^d n_j a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ является конормальной производной и n_1, n_2, \dots, n_d -компоненты вектора нормали на границе.

Доказательства теоремы 1. Из (6) легко видеть, что G фундаментальное решение оператора D в Ω . Поэтому

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y)dy$$

решение уравнения (1) и принадлежит к $H^2(\Omega)$ для любого $f \in L_2(\Omega)$. Кроме того, следующее представление формулы может быть получено из обобщенной второй формулы Грина в пространстве Соболева [4]

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y)\{\partial_{vy}u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j u\}dy \quad (8)$$

для каждого $x \in \Omega$. Из (5) и (8) означает, что

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y)\left\{\partial_{vy}u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j u\right\}dy = 0$$

для каждого $x \in \Omega$.

Используя свойств двойного и простого слоя потенциалов [4] при $x \rightarrow \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y) u(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y) \{ \partial_{vy} u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j u \} dy = 0 \quad x \in \partial\Omega.$$

Мы показали, что (5) является решением краевой задачи (1) с граничным условием (7) в $H^2(\Omega)$. Теперь докажем ее единственность. Если краевая задача имеет два решения, то функция $\vartheta = u - u_1 \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет однородное уравнение

$$D(\vartheta) = -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + c(x)\vartheta = 0, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

и граничное условие (7), т.е.

$$-\frac{\vartheta(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y) \vartheta(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y) \{ \partial_{vy} \vartheta(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j \vartheta \} dy = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Так как в этом случае $f \equiv 0$, вместо (8) имеем следующую формулу представления

$$\vartheta(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y) \vartheta(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y) \{ \partial_{vy} \vartheta(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j \vartheta \} dy \tag{11}$$

для каждого $x \in \Omega$. Как и выше, с помощью свойства двойного и простого слоя потенциалов при $x \rightarrow \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{\vartheta(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x, y) \vartheta(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x, y) \{ \partial_{vy} \vartheta(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j \vartheta \} dy = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Сравнивая это с (10), приходим к

$$\vartheta(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

Однородное строгое эллиптическое уравнение второго порядка (9) с граничным условием Дирихле (13) имеет только одно тривиальное решение $\vartheta \equiv 0$. Это показывает, что граничная задача (1) с граничным условием (7) имеет единственное решение в $H^2(\Omega)$.

Теорема 1 доказана.

Пример. [2] Пусть D оператор Δ –Лапласа, $n = 1$ и $\Omega_1 = R^d$, $d \geq 2$ тогда

$$\varepsilon(x - y) := E_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(d-2)s_d} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, & d \geq 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \log|x-y|, & d = 2 \end{cases}$$

является фундаментальным решением оператора Лапласа в Ω_1 , $s_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ является площадью поверхности единичной сферы в R^d и $|x - y|$ стандартным евклидовым расстоянием между x и y . Поэтому вместо (5) имеем

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon_d(x - y) f(y) dy, \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

который является единственным решением

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{15}$$

с граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{16}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ обозначает внешнюю нормальную производную в точке y на $\partial\Omega$.

3. Полигармонические уравнения. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \dots \subset \Omega_n \subset R^d$ открытые ограниченные области с границами $\partial\Omega_i \in C^\infty$, $i = 1, \dots, n$, соответственно. По лемме Хермандера существует локальное фундаментальное решение $E_i(x, y)$ полигармонического уравнения

$$(-\Delta_x)^m u(x) = f(x) \quad m = 1, 2, \dots \tag{17}$$

для каждого Ω_i .

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \tag{18}$$

в $\Omega \subset \Omega_1$, где

$$G(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i(x, y), \quad x, y \in \Omega. \tag{19}$$

Тривиальное наблюдение показывает, что и (18) является решением (17) в Ω . Цель этого раздела это – найти граничное условие такое, что с этим граничным условием уравнение (1) имело единственное решение в $H^{2m}(\Omega)$, которое совпадает с (18).

Теорема 2. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ (18) является единственным решением уравнения (17) в $H^{2m}(\Omega)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(-\Delta_x)^i u(x) + \\ & \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y - \\ & \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y = 0, i = \overline{0, m-1}, x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + n_n \frac{\partial}{\partial y_n}$ -нормальная производная на границе и n_1, n_2, \dots, n_d -компоненты единичной нормали.

Доказательства Теоремы 2. Применяя формулу Грина (для каждого $x \in \Omega$) получаем

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^m u(y) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y) G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{m-1} u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1} u(y) dS_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial (-\Delta_y)^{m-1} u(y)}{\partial n_y} dS_y \\ &= \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^2 G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{m-2} u(y) dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (-\Delta) G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-2} u(y) dS_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (-\Delta) G_{m,d}(x,y) \frac{\partial (-\Delta_y)^{m-2} u(y)}{\partial n_y} dS_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1} u(y) dS_y - \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial (-\Delta_y)^{m-1} u(y)}{\partial n_y} dS_y = \dots = \\ &\quad u(x) + \\ &\quad \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^j u(y) dS_y - \\ &\quad \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j u(y) dS_y, x \in \Omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + n_n \frac{\partial}{\partial y_n}$ -нормальная производная на границе и n_1, n_2, \dots, n_d -компоненты единичной нормали. Это означает, тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^j u(y) dS_y - \\ & \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j u(y) dS_y = 0, x \in \Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Когда $x \rightarrow \partial\Omega$, используя свойства двойного и простого слоя потенциалов, из (22) получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}u(x) + \\ & \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^j u(y) dS_y - \\ & \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j u(y) dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, это соотношение является одним из граничных условий (18). Выведем остальные граничные условия. Для этого мы устанавливаем

$$(-\Delta_x)^{m-i} (-\Delta_x)^i u(x) = f(x) \quad i = \overline{0, m-1}, m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

и проводим подобные вычисления, как и выше,

$$\begin{aligned}
(-\Delta_x)^i u(x) &= \int_{\Omega} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{m-i} (-\Delta_y)^i u(y) dy = \\
&\int_{\Omega} (-\Delta_y) (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{m-i-1} (-\Delta_y)^i u(y) dy + \\
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{m-i-1} (-\Delta_y)^i u(y) dS_y - \\
&\int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-i-1} (-\Delta_y)^i u(y) dS_y = \\
&\int_{\Omega} (-\Delta_y)^2 (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{m-i-2} (-\Delta_y)^i u(y) dy + \\
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y) (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{m-i-2} (-\Delta_y)^i u(y) dS_y - \\
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y) (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-i-2} (-\Delta_y)^i u(y) dS_y + \\
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{m-i-1} (-\Delta_y)^i u(y) dS_y - \\
&\int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-i-1} (-\Delta_y)^i u(y) dS_y = \dots = \\
&\int_{\Omega} (-\Delta_y)^{m-i} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^i u(y) dy + \\
&\sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-i-1-j} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^j (-\Delta_y)^i u(y) dS_y - \\
&\sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-i-1-j} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j (-\Delta_y)^i u(y) dS_y = \\
&(-\Delta_x)^i u(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{\partial}{\partial n_y} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-i-1-j} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^j (-\Delta_y)^i u(y) dS_y - \\
&\sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-i-1-j} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j (-\Delta_y)^i u(y) dS_y, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

где $(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y)$ являются фундаментальными решениями полигармонического уравнения (24); т.е.

$$(-\Delta_x)^{m-i} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x, y) = \delta(x - y) \quad i = \overline{0, m-1}.$$

От предыдущих соотношений мы получим тождества

$$\begin{aligned}
I_i u(x) &:= \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x, y) (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y - \\
&\sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y = 0
\end{aligned}$$

$x \in \partial\Omega$, $i = \overline{0, m-1}$. Используя свойства двойного и простого слоя потенциалов как $x \rightarrow \partial\Omega$, мы находим

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} (-\Delta_x)^j u(x) + \\
 & \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y - \\
 & \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (25)
 \end{aligned}$$

И все являются граничными условиями (18). От этого классического подхода (переходя к пределу) можно легко показать, что формулы (25) останутся в силе для всех $u \in H^{2m}(\Omega)$ [4]. И наоборот, покажем, что если функция $\omega \in H^{2m}(\Omega)$ удовлетворяет уравнение $(-\Delta)^m \omega = f$ и граничные условия (20), то оно совпадает с решением (18). В самом деле, в противном случае функция

$$\vartheta = u - \omega \in H^{2m}(\Omega)$$

где u является (18), удовлетворяет однородное уравнение

$$(-\Delta)^m \vartheta = 0 \quad (26)$$

и граничные условия (20), т.е.

$$\begin{aligned}
 I_i \vartheta(x) & := -\frac{1}{2} (-\Delta_x)^j \vartheta(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{j+i} \vartheta(y) dS_y - \\
 & \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{j+i} \vartheta(y) dS_y = 0 \quad (27) \\
 & x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{0, m-1}.
 \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина к функции $\vartheta \in H^{2m}(\Omega)$ и следуя линии вышеуказанных рассуждений, мы получим

$$\begin{aligned}
 0 & = \int_{\Omega} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{m-i} (-\Delta_y)^i \vartheta(y) dy = \\
 & \int_{\Omega} (-\Delta_y) (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{m-1} \vartheta(y) dy + \\
 & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{m-1} (-\Delta_y)^i \vartheta(y) dS_y - \\
 & \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1} \vartheta(y) dS_y = \dots = \\
 & (-\Delta_x)^i \vartheta(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) (-\Delta_y)^{j+i} \vartheta(y) dS_y - \\
 & \sum_{j=0}^{m-j-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{j+i} \vartheta(y) dS_y \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{0, m-1}.
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow \partial\Omega$, следовательно, мы получим соотношения

$$(-\Delta_x)^i \vartheta(x)|_{x \in \partial\Omega} = I_i \vartheta(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad i = \overline{0, m-1} \quad (28)$$

Единственность решения краевой задачи

$$(-\Delta)^m \vartheta = 0$$

$$(-\Delta)^i \vartheta|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}$$

следует, что $\vartheta = u - \omega \equiv 0$, $\forall x \in \Omega$, т.е. ω совпадает с (18). Таким образом (18) является единственным решением краевой задачи (17), (20) в Ω .

Теорема 2 доказано.

Замечание. Это следует из теоремы 2, что ядро (19), которая является одним из фундаментальных решений полигармонического уравнения (17), является функцией Грина краевой задачи (17), (20) в Ω .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hörmander L., The analysis of linear partial differential operators, I-IV, – 1985. – Springer-Verlag Berlin.

- [2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // *Doklady Mathematics*, – 2009. – No 80, – P. 646-649.
- [3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // *Differential Equations*, – 2012. – No 48, – P. 604-608.
- [4] Hsiao G.C., Wendland W.L. *Boundary Integral Equations*. – 2008. – Heidelberg.
- [5] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, – 2000. Cambridge Univ. Press, Cambridge UK.

REFERENCES

- [1] Hormander L., *The analysis of linear partial differential operators, I-IV*, Springer-Verlag Berlin, 1985.
- [2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, *Doklady Mathematics*, 2009. No 80, 646-649.
- [3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation*, *Differential Equations*, 2012. No 48, 604-608.
- [4] Hsiao G.C., Wendland W.L. *Boundary Integral Equations*. Heidelberg, 2008. .
- [5] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2000.

АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕГАРАЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТТАР

Т. Ш. Кәлменов, Д. Сұраған

Тірек сөздер: шекаралық интегралдық шарт, эллиптикалық теңдеу, шектік есеп.

Аннотация. Жұмыста екінші ретті айнымалы коэффициентті эллиптикалық дифференциалдық теңдеулер үшін [2]-ші жұмыстағы нәтижелерді жалпылайтын шекаралық интегралдық шарттар ұсынылады. Және де полигармоникалық операторлар үшін де ұқсас нәтижелер алынған.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 36 – 40

COMPUTER MODELLING OF FORMATION OF DEEP SALT DIAPIRISM

A. A. Baymukhvetov, N. I. Martynov, A. G. Tanirbergenov

Institute of mechanics and engineering science of U. A. Dzholdasbekov of MON RK, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: dgpimmash@mail.ru

Key words: salt diapir, crust, sedimentary cover, effective viscosity.

Abstract. On the basis of model of Reley-Taylorovsky instability in approach of Bussinesk with exponential dependence of viscosity on temperature the numerical model of process of formation of salt diapirs at big depths of bowels of the earth is developed and proved. The carried-out then numerical modeling allowed to estimating key parameters, regularities and features of a nonlinear stage of process of formation of a deep salt diapirism. The technique of an assessment of zones of possible oil and gas traps is offered. It is shown that hydro carbonic tanks are attached to zones from the raised temperature gradients.

УДК 551.24

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ГЛУБИННОГО СОЛЯНОГО ДИАПИРИЗМА

А. А. Баймухаметов, Н. И. Мартынов, А. Г. Танирбергенев

Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: соляной диапир, земная кора, осадочный чехол, эффективная вязкость.

Аннотация. На основе модели Релей-Тейлоровской неустойчивости в приближении Буссинеска с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры разработана и обоснована численная модель процесса формирования соляных диапиров на больших глубинах земных недр. Проведенное затем численное моделирование позволило оценить основные параметры, закономерности и особенности нелинейной стадии процесса формирования глубинного соляного диапиризма. Предложена методика оценки зон возможных нефтегазовых ловушек. Показано, что углеводородные резервуары привязаны к зонам с повышенных температурных градиентов.

Введение. Изучение формирования соляно-купольных структур имеет большое научное и практическое значение, поскольку с ними связано распределение месторождений нефти и газа в земной коре. Соляные структуры также используются в качестве подземных хранилищ углеводородов и «хранилищ-консервантов» термоядерных отходов [1].

Многие мировые месторождения нефти и газа располагаются в областях соляно-купольной тектоники. Классическим примером является Прикаспийская впадина, две трети которой расположены на территории Казахстана, где находятся порядка 1300 соляных куполов (диапиров), из которых более 1000 не разведаны [2, 3].

Нелинейная стадия формирования соляного диапиризма мало изучена. Основные результаты, получены в основном лабораторным моделированием, а также численными методами. Следует отметить, что лабораторное моделирование не обеспечивает достаточное подобие реальных тектонических процессов. Численные же исследования в этой области не многочисленны,

особенно трехмерных процессов, и существуют определенные трудности в описании границ раздела слоев [4-8].

В Казахстане многие задачи солянокупольной тектоники были поставлены академиком Ж. С. Ержановым и решены его учениками. Разработаны и обоснованы несколько численных методов, позволяющих корректно проследить эволюцию поверхности раздела слоев вплоть до образования соляных линз. Численное моделирование позволило провести детальный анализ механизма формирования и развития солянокупольных структур, выявить закономерности и особенности их формирования [9-11].

В последнее время учеными СО РАН получены принципиально новые данные о возможности образования тяжелых углеводородов на больших глубинах, что подтверждает гипотезу Д. И. Менделеева о неорганическом происхождении нефти и указывает на перспективу ее поиска и добычи на больших глубинах. Для этого необходима информация о формировании соляных диапиров на больших глубинах, что связано с учетом тепловых эффектов, усложнением реологии. Исследования этого направления практически отсутствуют в открытой мировой печати. Поэтому цель данного исследования - отчасти восполнить этот пробел.

Математическая модель. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ (ось Ox_3 направлена вертикально вверх) процесс формирования глубинного соляного диапиризма (без учета радиогенных источников тепла) описывается следующей системой гидродинамических уравнений:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho g \delta_{3i}, (i = 1, 2, 3); \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), (i, j = 1, 2, 3); \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\beta} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho_* V_\beta) = 0; \quad \frac{\partial \mu_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\mu_* V_\beta) = 0; \quad (2)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_\beta \frac{\partial T}{\partial x_\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_\beta} \right) + \sigma_{\gamma\beta} \dot{\epsilon}_{\gamma\beta}; \quad (\gamma, \beta = 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$\rho = \rho^* (1 - \alpha(T - T_*)); \quad \mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp \left\{ \frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right\}; \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (4)$$

Здесь p - давление, V_1, V_2, V_3 - компоненты скорости, σ_{ij} - тензор вязких напряжений, g - ускорение силы тяжести, ρ - плотность, μ - динамическая вязкость, C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении, k - коэффициент теплопроводности, T - абсолютная температура, α - коэффициент теплового объемного расширения, R - универсальная газовая постоянная, E - энергия активации. ρ_*, μ_* - невозмущенная плотность и невозмущенная динамическая вязкость, зависящие от химического состава материала (или плотность и динамическая вязкость при абсолютной температуре T_*). Индексом «0» обозначены характерные значения параметров процесса, δ_{3i} - тензор Кронекера. По повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование.

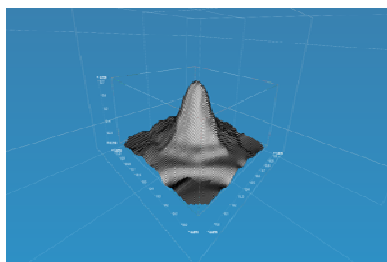
К системе уравнений (1) - (4), которые выполняются в области Ω , добавляются начальные граничные условия. В начальный момент времени задано распределение невозмущенной плотности, невозмущенной динамической вязкости и температуры. Граничные условия могут быть разнообразными. В данной работе область Ω была выбрана в форме прямоугольного параллелепипеда, на верхней и нижней стенках которого задавались условия прилипания, а на боковых стенках - условия симметрии. Температура на верхней стенке полагалась $0^\circ C$, а на нижней задавалась как функция (x_1, x_2) .

Численный метод. Для расчета астеносферного диапиризма с фазовыми переходами и экспоненциальной зависимостью динамической вязкости от температуры и давления авторами был разработан и обоснован численный метод [12], упрощенный вариант которого применялся для расчета глубинного соляного диапиризма. При $t = 0$ из начальных условий известны ρ_*, μ_*, T .

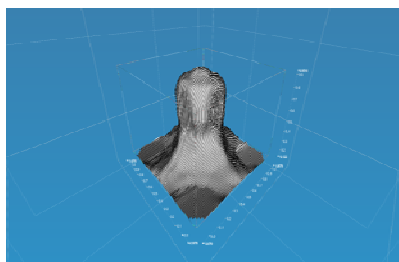
Из разностного аналога (4) определяются ρ, μ при $t = 0$. Из разностных аналогов уравнений импульса и уравнения не сжимаемости (1) итерационным методом расщепления по физическим процессам [10, 12], определяются ρ, \vec{V} на нулевом слое по времени. Затем из разностных аналогов уравнений переноса (2), которые аппроксимированы схемой донорной ячейки против потока определяются ρ_*, μ_* на первом слое по времени. Из разностного аналога уравнения энергии (3) определяем T на первом временном слое. Уравнение (3) аппроксимировано неявной абсолютно устойчивой схемой переменных направлений, которая реализуется продольно-поперечной немонотонной прогонкой. При этом конвективные члены в левой части уравнения (3) аппроксимировались схемой против потока, гарантирующей ее монотонность [12]. Таким образом, определены все величины на первом временном слое. Затем процесс повторяется, и вычисления проводятся до необходимого временного слоя.

Выделение наиболее вероятных зон нефтегазовых ловушек осуществлялось следующим образом. В каждый фиксированный момент времени при известных полях давления и скоростей, численным дифференцированием строились поля напряжений и выделялись по критерию прочности зоны повышенных концентраций девиатора касательных напряжений [11].

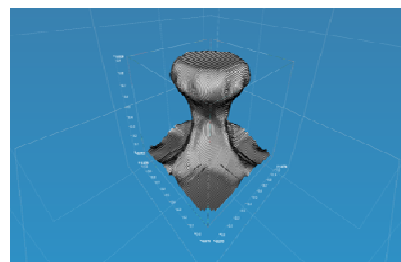
На рисунках а) - в) показано формирование соляного диапира в глубоко залегающих осадочных комплексах в различные моменты безразмерного времени. В начальный момент времени слои были горизонтальными. Мощность осадочного комплекса (чехла) h_1 и мощность каменной соли (галита) h_2 были выбраны по 7,5 км. Плотности полагались равными $\rho_1^* = 2600 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2^* = 2200 \text{ кг/м}^3$, а динамические вязкости $\mu_1^* = 5 \cdot 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\mu_2^* = 5 \cdot 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Величины k, C_p, α, E были выбраны постоянными во всей области и равными их средним значениям $k = 4 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}^0$, $C_p = 1,2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}^0$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} / \text{К}^0$, $E = 20 \text{ кДж/моль}$ [12]. На нижней границе температура задавалась равной 250 C^0 , а в центральной квадратной части нижней границы области температура задавалась на 50 C^0 была выше (моделирует неоднородность теплового потока с нижних слоев Земли). В начальный момент времени распределение температуры внутри области была определена с помощью линейной интерполяции.



а) $t = 0,30$



б) $t = 0,65$



в) $t = 1,10$

Пространственные профили глубинного соляного диапиризма в различные моменты безразмерного времени

Результаты численного моделирования. Расчеты показали, что термические градиенты существенно влияют как на объемные профили, так и на скорость формирования соляных диапиров глубоко залегания. Процесс гравитационной неустойчивости преобладает над тепловыми эффектами [11]. Основные закономерности и особенности процесса такие же, как и в случае постоянных кинематических вязкостей слоев [11], но немного отличаются в количественном отношении. Кроме того, повышенные термоградиенты приурочены к областям, наиболее вероятных коллекторов нефти и газа (нефтегазовых ловушек).

Осадочный чехол и подсолевое ложе на небольших отрезках времени являются хрупкими горными породами, механизмом разрушения которых являются хрупкое растрескивание (разру-

шение), сопровождающееся дилатансией. Именно благодаря тому, что горные породы обладают хрупким разрушением, в зонах повышенных концентраций напряжений происходит разрушение с образованием порового пространства, снимаются избыточные напряжения. В результате образуются локальные зоны пониженных напряжений (нефтегазовые ловушки), куда и мигрируют находящиеся в пластах горных пород углеводороды. Для соляных куполов нефтегазовые ловушки формируются в областях их крыльев (надкрылового и подкрылового пространства), а также в области подкупольного пространства подсолевого ложа, что было обнаружено глубинным бурением соляных диапиров и показала серия проведенных расчетов.

Расчеты показали, что формирование и развитие купола сопровождается возникновением и увеличением объема нефтегазовых ловушек в прикупольных областях. В подсолевом ложе наблюдаются обширные области, в которых повышены и достаточно большие по абсолютной величине девиаторы касательных напряжений. В нижней центральной части купола за счет динамического давления и повышенной температуры осуществляется значительный подсос подсолевого ложа. Поэтому, если в подсолевом ложе присутствуют большие запасы углеводородов, то они будут вследствие дилатансии мигрировать в центральную часть подкупольного пространства. Количественная оценка этих объемов позволяет определить вероятные запасы углеводородов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Беленицкая Г.А. Тектонические аспекты пространственного и временного распределения соляных бассейнов мира // Электронное научное издание Альманах Пространство и Время.-2013.-Т.4.-Вып.1: Система планета Земля: 2227-9490 e-aprovgt_e-ast 4-1.2013.22.
- [2] Гулиев И.С., Левин Л.Э., Федоров Д.Л. Углеводородный потенциал Каспийского региона.- Баку, Nafta-Press, 2003, 127 с.
- [3] Матусевич А.В. Гравиразведка Прикаспийской впадины.- Ливны: Издатель Мухаметов Г., 2013.- 176 с.
- [4] Woid W.D. Finite element calculations applied to salt-dome analysis // Tectonophysics, 1978., Vol. 50., № 2., P. 369-386.
- [5] Dandre B. Cloetingh S. Numerical modeling of salt diapirism: Influence of the tectonic regime // Tectonophysics, 1994, Vol. 240, № 1-4, P. 59-79.
- [6] Исмаил-заде А.Т., Цецелев И.А., Тялбот К. и др. Трехмерное моделирование соляного диапиризма: Численный поход и алгоритм параллельных вычислений // Вычислительная сейсмология. - 2000. - Вып. 31. - С. 62-76.
- [7] Ismail-Zadeh A.T., Tsepelev I.A., Talbot C.J., Korotkii A.I. Tree-dimensional forward and backward modeling of diapirism: Numerical approach and applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics, 2004, Vol. 387, №1-4, P. 81-103.
- [8] Лунев Б.В., Абрамов Т.В. Моделирование диапиризма расчетом 3D ползущих течений с использованием технологии параллельных вычислений CUDA на GPU // CUDA-Альманах-Ноябрь, 2014, с. 10.
- [9] Ержанов Ж.С., Мартынов Н.И. Тейлоровская неустойчивость двумерного ползущего движения границы раздела вязких несжимаемых жидкостей. // Изв. АН Каз.ССР, сер. физ.-мат., 1985, № 5, с. 79-84.
- [10] Мартынов Н.И., Танирбергенев А.Г. Численное моделирование условий формирования солянокупольных структур в земной коре // Математический журнал, 2006, т.6, №1 (191), с.67-73.
- [11] Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Thomogradient model of formation of oil and gas traps at salt diapirism // Proceeding of the 23d ICTAM, 2012, Beijing, China, 2p., sm06-013.
- [12] Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Numeral design of asthenospheric diapirism with phase transiions // Science and World, 2014, № 9 (13), p.15-22.

REFERENCES

- [1] Belenickaja G.A. Tektonicheskie aspekty prostranstvennogo i vremennogo raspredelenija soljanosnyh bassejnov mira. Jelektronnoe nauchnoe izdanie Al'manah Prostranstvo i Vremja.-2013.-Т.4.-Vyp.1: Sistema planeta Zemlja: 2227-9490 e-aprovre-ast 4-1, 2013, 22 (in Russ).
- [2] Guliev I.S., Levin L.Je., Fedorov D.L. Uglevodorodnyj potencial Kaspijskogo regiona.- Baku, Nafta-Press, 2003, 127 s (in Russ).
- [3] Matusевич A.V. Gravirazvedka Prikaspijskoj vpadiny.- Livny: Izdatel' Muhametov G., 2013, 176 s (in Russ).
- [4] Woid W.D. Finite element calculations applied to salt-dome analysis. Tectonophysics, 1978., Vol. 50., № 2., P. 369-386.
- [5] Dandre B. Cloetingh S. Numerical modeling of salt diapirism: Influence of the tectonic regime. Tectonophysics, 1994, Vol. 240, № 1-4, P. 59-79.
- [6] Ismail-zade A.T., Cepelev I.A., Tjalbot K. i dr. Trehmernoe modelirovanie soljanogo diapirizma: Chislennyj pohod i algoritm paralel'nyh vychislenij. Vychislitel'naja sejsmologija, 2000, Vyp. 31, S. 62-76 (in Russ).
- [7] Ismail-Zadeh A.T., Tsepelev I.A., Talbot C.J., Korotkii A.I. Tree-dimensional forward and backward modeling of diapirism: Numerical approach and applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin. Tectonophysics, 2004, Vol. 387, №1-4, P. 81-103.

- [8] Lunev B.V., Abramov T.V. Modelirovanie diapirizma raschetom 3D polzushhih techenij s ispol'zovaniem tehnologii parallel'nyh vychislenij CUDA na GPU// CUDA-AI'manah-Nojabr', 2014, s. 10 (in Russ).
- [9] Erzhanov Zh.S., Martynov N.I. Tejlorovskaja neustojchivost' dvumernogo polzushhego dvizhenija granicy razdela vjazkih neszhimaemyh zhidkostej. Izv. AN Kaz.SSR, ser.fiz.-mat., 1985, № 5, S. 79-84 (in Russ).
- [10] Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Chislennoe modelirovanie uslovij formirovanija soljanokupol'nyh struktur v zemnoj kore. Matematicheskij zhurnal , 2006, t.6, №1 (191), s.67-73 (in Russ).
- [11] Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Thomogradient model of formation of oil and gas traps at salt diapirism .Proceeding of the 23d ICTAM, 2012, Beijng, China, 2p, sm06-013.
- [12] Baimukhametov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G. Numeral design of asthenospheric diapirism with phase transitions. Science and World, 2014, № 9 (13), P.15-22.

ҚҰРАЛЫМНЫҢ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬ ДЕУІ ТЕРЕҢДІКТІҢ СОЛЯНОГО ДИАПИРИЗМА

А. А. Баймухаметов, Н. И. Мартынов, А. Г. Танирбергенев

Механиканың және машинатанулар им. У. А. Джолдасбекова МОН РК институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: соляной диапир, жер қыртысым, шөгінді қап, тиімді тұтқырлық.

Аннотация. Бас негіз аумалылықтың Релей-Тейлоровской калыбының ара жанасушылықта Буссинеска мен тұтқырлықтың экспоненталық тәуелділігімен от қызудан сояных диапиров құралымының үдеріс сандық калып бас жерлік жер қойнауы кесек-кесек тереңдік әзірле- және тиянақты. Өткіздір-өткізу кейін сандық модельдеу негізгі параметрді, заңдылықтарды және құралымның үдерісінің нелинейной кезеңінің өзгешеліктерін тереңдіктің сояного диапиризма бағалау қойды. Ұсын- Ықтимал мұнайлы-газды айла-тұзақтың зонасының сарапшылығының әдістемесі ұсын-. Көрсетілген, не көмірсутектің резервуарлары көтеріңкі температуралық градиенттерден зоналарға деген тізгіндеулі.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 41 – 43

BOUNDARY CONDITIONS OF THE ONE VOLUME POTENTIAL IN MULTIDIMENSIONAL BALL

B. T. Torebek^{1,2}¹Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan,²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan. E-mail: turebekb85@mail.ru**Key words:** green's function, Poisson equation, fundamental solution, boundary conditions.**Abstract.** In this paper in the multi-dimensional unit ball is considered one volume potential. Found the boundary conditions studied of volume potential. It is proved that the considered volume potential is a solution of a special Robin problem for the Poisson equation.

УДК 517.956.225

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОГО ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

Б. Т. Торекбек^{1,2}¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,²КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан**Ключевые слова:** функция Грина, уравнение Пуассона, фундаментальное решение, граничные условия.**Аннотация.** В настоящей работе в многомерном единичном шаре рассматривается один объемный потенциал. Ядро данного потенциала является некоторая функция Грина. Найдены граничные условия исследуемого потенциала. Доказано, что рассматриваемый объемный потенциал является решением специальной задачи Робена для уравнения Пуассона.**1. Введение.** Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ - единичная сфера и $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ - площадь $\partial\Omega$ в R^n . Пусть f - достаточно гладкая функция в Ω . В области Ω рассмотрим функцию

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy, \quad (1)$$

где $G(x, y)$ имеет вид

$$G(x, y) = \varepsilon_n(x - y) + \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right), \quad (2)$$

здесь $\varepsilon_n(x - y)$ - фундаментальное решение оператора Лапласа (см. [1]):

$$\varepsilon_n(x - y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, & n = 2; \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} |x - y|^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (3)$$

Так как функция $\varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right)$ - гармоническая в Ω , то функция (2) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta G(x, y) = \delta(x - y), (x, y) \in \Omega,$$

где $\delta(x - y)$ - дельта-функция Дирака. Тогда функция (1) будет решением уравнения

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega. \quad (4)$$

Известно, что в двумерном круге функция (2) совпадает с функцией Грина задачи Неймана для уравнения (4). Для случая $n \geq 3$ неизвестно, какими свойствами обладает функция (2). Даже при $n = 3$ функция (2) не удовлетворяет условию Неймана.

Цель настоящей работы - найти граничные условия, которым удовлетворяет функция (1) при $n \geq 3$.

Отметим, что в работах [2, 3] были найдены граничные условия объемного потенциала для эллиптических уравнений. При этом в качестве ядра объемного потенциала выбиралось гласное фундаментальное решение (3).

Основным результатом нашей работы является

Теорема. Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ и $u(x) \in W_2^2(\Omega)$. Тогда функция (1) является решением уравнения (4) и на $\partial\Omega$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) + \frac{n-2}{2}u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \quad (7)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_x}$ - производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$ по x . Верно и обратное утверждение:

задача для уравнения (4) с краевым условием (7) имеет единственное решение и это решение дается объемным потенциалом (1).

Доказательство. Рассмотрим функцию (1). Подставляя (4) в (1) и применяя вторую формулу Грина

$$\int_{\Omega} (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v) dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} u - u \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} v \right) dS_y$$

получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega} \Delta G(x, y) u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y = \\ &+ u(x) + \int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y = 0.$$

Отсюда в силу (2) имеем

$$\int_{\partial\Omega} \left(2\varepsilon_n(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y = 0. \quad (8)$$

Теперь вычислим нормальную производную функции (2) по y . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n(x-y) + \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right) = \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\left(|x|^2 - 2(x, y) + |y|^2 \right)^{\frac{2-n}{2}} + \left(|x|^2 |y|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{\frac{2-n}{2}} \right] = \\ &= \frac{2-n}{2} \left[\left(2|y| - 2(x, y) \right) \left(|x|^2 - 2(x, y) + |y|^2 \right)^{\frac{n}{2}} + \left(2|x|^2 |y| - 2(x, y) \right) \left(|x|^2 |y|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{\frac{n}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда переходя к пределу при $y \rightarrow \partial\Omega$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n(x-y) + \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right) = \\ &= (2-n) \left(1 - 2(x, y) + |x|^2 \right) \left(|x|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{-\frac{n}{2}} = (2-n) \left(|x|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{\frac{2-n}{2}} = (2-n) \varepsilon_n(x-y). \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в (8), имеем

$$\int_{\partial\Omega} \left(2\varepsilon_n(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - (2-n)u(y)\varepsilon_n(x-y) \right) dS_y = 2 \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} u(y) + \frac{n-2}{2}u(y) \right) dS_y = 0.$$

Отсюда получим граничное условие (7).

Доказательство обратного результата следует из единственности решения задачи Робена (7). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК по проекту № 0570/ГФЗ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. American Math. Society, V.19, 1998. 668p.
 [2] Кальменов Т. Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады РАН. 2009. Т. 428. №1. С.16-19.
 [3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials // Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P.187-210.
 [4] Кальменов Т. Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т.48. №4. С.595-599.

REFERENCES

- [1] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. American Math. Society, V.19, 1998. 668p. (in Eng.).
 [2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential. Doklady Mathematics. 2009. V. 80. № 2. P.646-649. (in Eng.).
 [3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials. Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P.187-210. (in Eng.).
 [4] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation. Differential Equations. 2012. V. 48. № 4. P. 604-608. (in Eng.).

КӨПӨЛШЕМДІ ШАРДАҒЫ БІР КӨЛЕМДІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫ

Төрбек Б. Т.

Тірек сөздер: Грин функциясы, Пуассон тендеуі, фундаментал шешім, шекаралық шарт.

Аннотация. Жұмыста көпөлшемді бірлік шарда бір көлемдік потенциал қарастырылады. Берілген потенциалдың ядросы қандайда бір Грин функциясы болып табылады. Зерттелінетін потенциалдың шекаралық шарттары анықталады. Қарастырылып отырған көлемдік потенциал Пуассон тендеуі үшін Робен арнайы есебінің шешімі болатындығы дәлелденеді.

Поступила 11.03.2015г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 44 – 49

STUDY OF THE INFLUENCE OF TOOL JOINTS ON FORCED OSCILLATORY PROCESS OF THE DRILL STRING

A. Baraev¹, M. Zh. Zhumabayev¹, N. M. Akhmetov², A. S. Tulip³, M. Bariev⁴

¹South-Kazakh State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan,

²Atyrau Institute of Oil and Gas, Atyrau, Kazakhstan,

³International Kazakh-Turkish University named after A. Yasavi, Turkestan, Kazakhstan,

⁴Tashkent State Technical University named after A. Beruni, Uzbekistan

Keyword: construction, tool joints, friction, drill string.

Abstract. Taking into account the type of construction and type of used material of tool joints the problem is to be solved with the use of a comprehensive theory of the surface (contact) friction vibrations of the drill string, taking into account the characteristics of their interlocks. There are graphs of the amplitude of the oscillations of the upper section of the first column section to lock the frequency of the steel and titanium.

УДК 622.248

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАМКОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ВЫНУЖДЕННЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС БУРОВОЙ КОЛОННЫ

А. Бараев¹, М.Ж Жумабаев¹, Н.М Ахметов², А.С Тулип³, М. Бариев⁴

¹Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,

²Атырауский институт нефти и газа, Атырау, Казахстан,

³Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясави. Туркестан, Казахстан,

⁴Ташкентский государственный технический университет им. А. Беруни, Узбекистан

Ключевые слова: конструкция, замковые соединения, трение, бурильные колонны.

Аннотация. С учетом типа конструкции и вида используемого материала замковых соединений решается задача с применением комплексной теории поверхностного (контактного) трения для колебаний колонн бурильных труб, учитывающих характерные особенности их замковых соединений. Построены графики зависимости амплитуды колебания верхнего сечения первой секции колонны от частоты для замка из стали и титана.

Внутреннего трения материала трубы и вида используемого материала замковых соединений существенно влияет на рассеяния энергии колебаний. Поэтому исследование степень влияние используемого материала замковых соединений необходимо в процессе спускоподъемной операции бурильной колонны

Пусть вынужденные колебания бурильной колонны с замковыми соединениями вызвано гармоническим возмущением подвески колонны при выполнении спускоподъемной операции. Считаем, что материал эквивалентного стержня, имитирующего колонну, идеально упругим и однородным. Потери на трение отсутствуют. Массы замковых соединений по отношению к массам отдельных секций малы, и ими пренебрегаем. Низ бурильной колоны УБТ с массой m_0 , жестко

сопряжен с концом последней секции колонны. Кроме того считаем, что коэффициенты жесткости соединения в местах сопряжения труб одинаковые.

При таком постановлении задача о вынужденной колебания бурильных колонн, с учетом типа конструкции и вида используемого материала замковых соединений решается с применением комплексной теории поверхностного (контактного) трения, основанного на использовании импедансного способа задания граничных условий и условий сопряжений отдельных секции, учитывающих характерные особенности замковых соединений труб [1, 2].

Для описания колебательного процесса колонны используем систему динамических уравнений, которая при отсутствии сосредоточенных масс и наличия массы УБТ, записывается в виде [3]

$$\begin{aligned}
 S\rho \frac{\partial^2 u_{g,1}}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u_{g,1}}{\partial x^2} + c_0 u_{1,0} \delta(x) + c_1 (u_{1,1} - u_{2,0}) \delta(l-x) + F(t, x, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial t}) &= -S\rho \ddot{u}_0, \\
 S\rho \frac{\partial^2 u_{g,j+1}}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u_{g,j+1}}{\partial x^2} + c_j (u_{j+1,0} - u_{j-1,1}) \delta(x-jl) + \\
 + c_{j+1} (u_{j+1,1} - u_{j+2,0}) \delta[(j+1)l-x] + F(t, x, u_j, \frac{\partial u_j}{\partial t}) &= -S\rho \ddot{u}_0, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad jl < x < (n-1)l; \quad (1) \\
 S\rho \frac{\partial^2 u_{g,n}}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u_{g,n}}{\partial x^2} + c_n (u_{n,0} - u_{n-1,1}) \delta[x-(n-1)l] + m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta(nl-x) + F(t, x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t}) &= \\
 &= -S\rho \ddot{u}_0, \quad (n-1)l < x < nl.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем полагаем $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = k_1 + ik_2$ ($i = \sqrt{-1}$).

Вводим местные координаты и рассмотрим процесс спуска ($F = 0$), сопровождаемого установившимися гармоническими колебаниями с частотой ω , подвески $u_0 = U_0 e^{i\omega t}$ и перемещение в произвольном сечении секций колонны в комплексной форм:

$$u_{gj} = U_j(x) e^{i\omega t},$$

где $U_j(x)$ - комплексные амплитуды, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}
 ESU_1'' + S\rho\omega^2 U_1 - c_0(U_{1,0} - U_0)\delta(x) + (k_1 + ik_2)(U_{1,1} - U_{2,0})\delta(l-x) &= 0, \\
 ESU_j'' + S\rho\omega^2 U_j - (k_1 + ik_2)[(U_{j,0} - U_{j-1,1})\delta(x) + (U_{j,1} - U_{j+1,0})\delta(l-x)] &= 0 \quad j = 2, \dots, n-1, \quad (2) \\
 ESU_n'' + S\rho\omega^2 U_n - (k_1 + ik_2)(U_{n,0} - U_{n-1,1})\delta(x) + m_0\omega^2(U_{n,1} - U_0)\delta(l-x) &= 0, \quad 0 < x < l
 \end{aligned}$$

и условиям разрыва производных в сечениях $x=0$ первой секции и $x=l$ последней секции колонны

$$ESU_1'(x) = c_0[U_1(x) - U_0] \text{ при } x=0,$$

$$ESU_n'(x) = m_0\omega^2[U_n(x) - U_0] \text{ при } x=l-0,$$

$$\text{где } U_{j,0} = U_j(0), \quad U_{j,1} = U_j(l).$$

Решение системы уравнений получим путем введения разрывов производных первого порядка в местах сопряжения труб, тогда:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{\beta_0(U_{1,0} - U_0)}{\lambda \sin \lambda} [\cos \lambda \cos \lambda \xi + \sin \lambda \sin \lambda \xi H(\xi)] + \frac{\beta(U_{1,1} - U_{2,0})}{\lambda \sin \lambda} [\cos \lambda \cos \lambda(1-\xi) + \\
 &\quad + \sin \lambda \sin \lambda(1-\xi)H(1-\xi)], \\
 U_j &= \frac{\beta(U_{j,0} - U_{j-1,1})}{\lambda \sin \lambda} [\cos \lambda \cos \lambda \xi + \sin \lambda \sin \lambda \xi H(\xi)] + \frac{\beta(U_{j,1} - U_{j+1,0})}{\lambda \sin \lambda} [\cos \lambda \cos \lambda(1-\xi) + \\
 &\quad + \sin \lambda \sin \lambda(1-\xi)H(1-\xi)],
 \end{aligned}$$

$$U_n = \frac{\beta(U_{n,0} - U_{n-1,1})}{\lambda \sin \lambda} [\cos \lambda \cos \lambda \xi + \sin \lambda \sin \lambda \xi H(\xi)] + \frac{\alpha \lambda (U_{n,1} - U_0)}{\sin \lambda} [\cos \lambda \cos \lambda (1 - \xi) + \sin \lambda \sin \lambda (1 - \xi) H(1 - \xi)], \quad (3)$$

где $\xi = \frac{x}{l}$, $\lambda = \frac{\omega l}{a_*}$, $\beta_0 = \frac{c_0 l}{ES}$, $a_* = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\beta_j = \frac{k_j l}{ES}$, $\alpha = \frac{m_0}{S\rho l}$, $H(z)$ - единичная функция Хевисайда

Полагая теперь $U_{j,0} = U_j(0)$, $U_{j,1} = U_j(1)$, получаем систему уравнений для определения комплексных величин $U_{j,0}$ и $U_{j,1}$

$$\begin{aligned} U_{1,0} &= \frac{\beta_0(U_{1,0} - U_0)}{\lambda \sin \lambda} \cos \lambda + \frac{\beta(U_{1,1} - U_{2,0})}{\lambda \sin \lambda}, \\ U_{1,1} &= \frac{\beta_0(U_{1,0} - U_0)}{\lambda \sin \lambda} + \frac{\beta(U_{1,1} - U_{2,0})}{\lambda \sin \lambda} \cos \lambda, \\ U_{j,0} &= \frac{\beta(U_{j,0} - U_{j-1})}{\lambda \sin \lambda} \cos \lambda + \frac{\beta(U_{j,1} - U_{j+1,0})}{\lambda \sin \lambda}, \\ U_{j,1} &= \frac{\beta(U_{j,0} - U_{j-1})}{\lambda \sin \lambda} + \frac{\beta(U_{j,1} - U_{j+1,0})}{\lambda \sin \lambda} \cos \lambda, \quad j = 2 \dots n-1, \\ U_{n,0} &= \frac{\beta(U_{n,0} - U_{n-1,1})}{\lambda \sin \lambda} \cos \lambda + \frac{\alpha \lambda (U_{n,1} - U_0)}{\lambda \sin \lambda}, \\ U_{n,1} &= \frac{\beta(U_{n,0} - U_{n-1,1})}{\lambda \sin \lambda} + \frac{\alpha \lambda (U_{n,1} - U_0)}{\lambda \sin \lambda} \cos \lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этой системы получаем выражения комплексных величин $U_{j,0}$ и $U_{j,1}$ с рекуррентными коэффициентами:

$$\begin{aligned} U_{j,1} &= a_j U_{1,0} + b_j U_0, \quad U_{j+1,0} = c_j U_{1,0} + d_j U_0, \quad j = 2 \dots n-1, \\ a_j &= ac_{j-1} + ba_{j-1}, \quad b_j = bb_{j-1} + ad_{j-1}, \quad c_j = cc_{j-1} - aa_{j-1}, \quad d_j = cd_{j-1} - ab_{j-1} \\ \text{где } a &= (\lambda \cos \lambda + \beta \sin \lambda) / \lambda, \quad b = -\beta \sin \lambda / \lambda, \quad c = (\lambda^2 + \beta^2) \sin \lambda / \lambda \beta, \\ a_1 &= (\lambda \cos \lambda + \beta_0 \sin \lambda) / \lambda, \quad b_1 = -\beta_0 \sin \lambda / \lambda, \\ c_1 &= [\lambda(\beta - \beta_0) \cos \lambda + (\lambda^2 + \beta\beta_0) \sin \lambda] / \lambda \beta, \\ d_1 &= -\beta_0(\beta \sin \lambda + \lambda \cos \lambda) / \lambda \beta. \end{aligned}$$

Последние две равенства (4) после исключения $U_{n,1}$ приводим к виду:

$$(\beta a_0 + b_0) U_{n,0} - \beta a_0 U_{n-1,1} = \alpha \lambda^2 U_0,$$

где $a_0 = \alpha \lambda \sin \lambda - \cos \lambda$, $b_0 = \lambda(\alpha \lambda \cos \lambda + \sin \lambda)$.

Подставляя выражения для $U_{n,0}$ и $U_{n-1,1}$ через $U_{1,0}$ и U_0 , находим

$$U_{1,0} = U_0 \frac{\alpha \lambda^2 + \beta a_0 b_{n-1} - d_{n-1}(\beta a_0 + b_0)}{c_{n-1}(\beta a_0 + b_0) - \beta a_0 a_{n-1}}. \quad (5)$$

Формула (5) устанавливает связь между амплитудами колебаний подвески колонны и перемещения верхнего сечения первой секции колонны через комплексные параметры a_j , b_j , c_j и d_j .

Для определения коэффициента жесткости соединения использована формула $c = E_0 S / l_0$ (E_0 - модуль упругости материала замка, l_0 - его длина). В расчетах принято: $n = 4$, $l = 12 \text{ м}$, $l_0 = 0.4 \text{ м}$, $a_* = 5000 \text{ м/с}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $D = 0.147 \text{ м}$, $\nu = 0.127$ м (D , d - внешний и

внутренний диаметры трубы), Расчеты производились для двух видов материала замка: для стали с $E_0 = E = 200000 \text{ МПа}$ и титана с $E_0 = E_T = 100000 \text{ МПа}$.

На рисунки 1 и 2 представлены кривые зависимости амплитуды перемещения $U_{1,0}$ (отнесенной к величине U_0) в зависимости от частоты ω (кГц) для материала замка стали (а) и титана (б) различных значений параметров β_0 , β_2 и α .

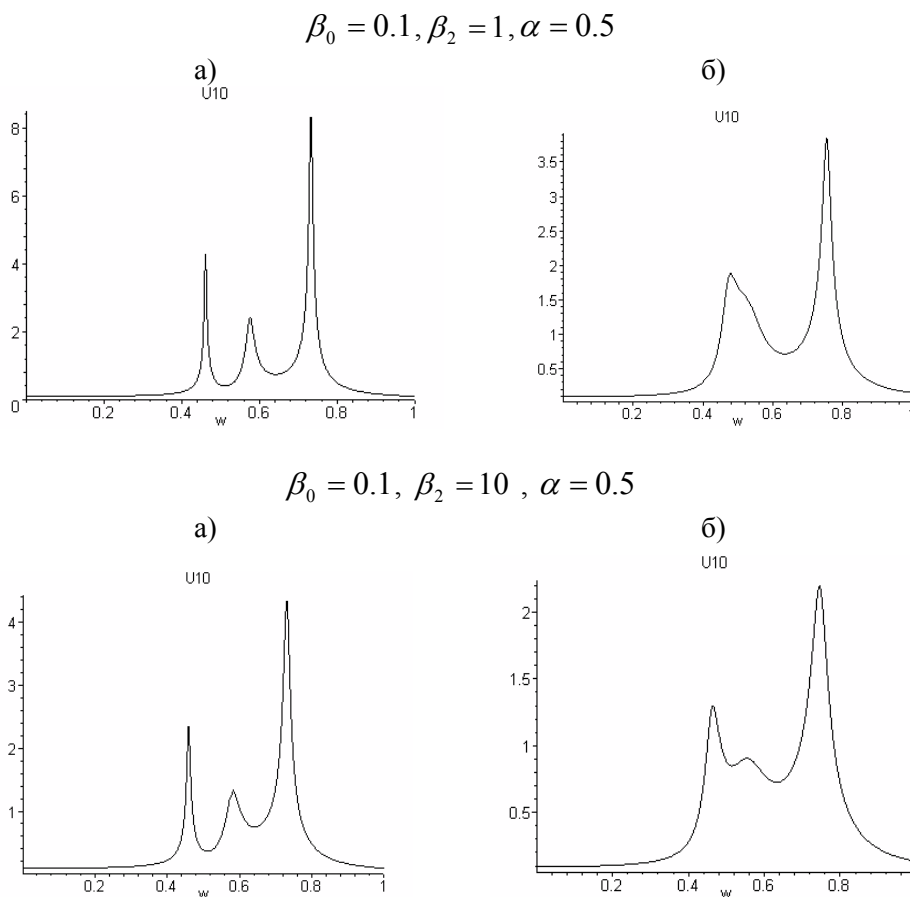


Рисунок 1 – Зависимости амплитуды колебания $U_{10} = U_{1,0} / U_0$ верхнего сечения первой секции колонны от частоты ω (кГц) для замка из стали (а) и титана (б) при $\alpha = 0.5$ и двух значений параметров β_0, β_2

Из анализа полученных кривых следует, что зависимость $U_{1,0} = f(\omega)$ имеет резонансный характер, при этом с ростом параметра $\beta_0 = c_0 l / ES$ (что означает рост коэффициента жесткости соединения колонны к подвеске) эффект резонанса усиливается. ост параметра $\beta_2 = k_2 l / ES$, характеризующего внутреннее трение в материале замка, может существенно снизить максимальные значения амплитуды колебаний сечения колонны. Этот эффект в значительной степени проявляется при больших значениях параметра β_0 . Так например, при $\beta_0 = 0.1$ максимальные значения амплитуд колебания сечения при $\beta_2 = 1$ и $\beta_2 = 10$ уменьшаются примерно 2 раза, если принять $\beta_0 = 0.5$, при этом значения амплитуд уменьшатся для стального замка в 10 раз, а для материала из титана – в 7 раз. Это означает, что с увеличением жесткости соединения колонны к подвеске при выполнении операции спуска могут иметь место резонансные режимы колебаний с большими амплитудами.

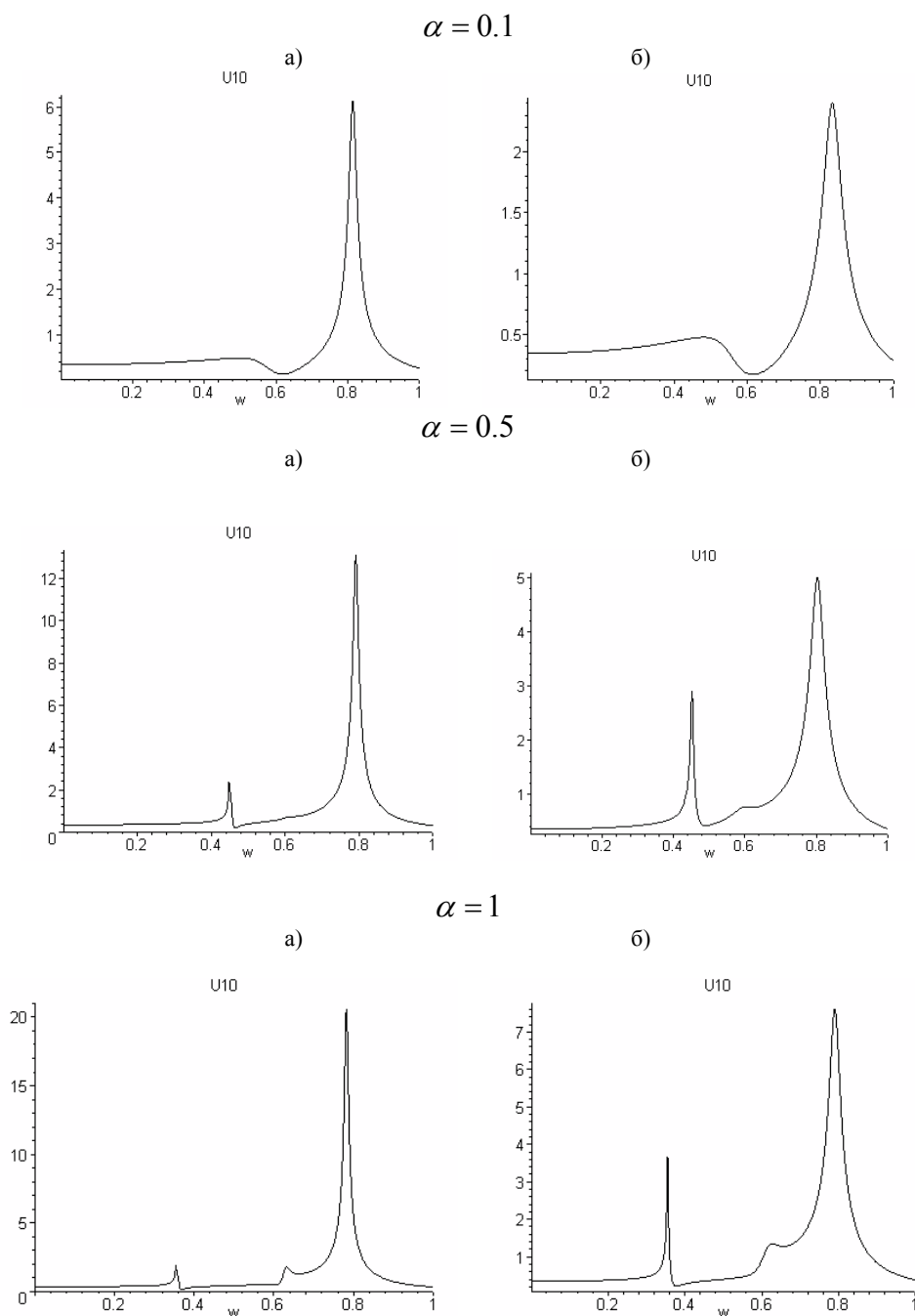


Рисунок 2 – Зависимости амплитуды колебания $U_{10} = U_{1.0} / U_0$ верхнего сечения первой секции колонны от частоты ω (кГц) для замка из материалов стали (а) и титана (б) при $\beta_0 = 10$, $\beta_2 = 0.5$ и трех значений параметра α

Наличие присоединенной массы (масса УБТ) (рисунок 2) приводит к изменению частотного состава резонансной кривой, при этом наблюдается перемещение резонансной частоты в области низких частот.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Голубев Г.Р., Новиков Л.А. Трение, износ и защита бурильных колонн в глубоких скважинах. -М.: «Недра», 1981.- 158 с.
 [2] Симонов В.В., Юнин Е.К. Влияние колебательных процессов на работу бурильного инструмента. -М.: «Недра», 1977.

[3] Мардонов Б.М., Марданова Л.О. О вынужденных колебаниях звеньев буровой динамической системы. // Поиск-Изденіс. Серия естественно-технических наук .Алматы, 2001, №1, С. 217-220.

REFERENCES

[1] Golubev G.R., Novikov L.A. Friction and wear protection drill strings in deep wells. -М .: "Nedra", 1981.- 158 p. (in Russ.).

[2] Simonov V.V., Yunin E.K. Influence of oscillatory processes at work drilling tool. -М .: "Nedra", 1977. (in Russ.).

[3] Mardonov B.M., Mardanova L.O. Forced vibrations of drill units of the dynamic system. // Search-Izdenis. A series of natural and technical sciences .Almaty 2001, №1, pp 217-220. (in Russ.).

ҚОРҒАНДЫҚ БАЙЛАНЫСТАРДЫҢ БҰРҒЫ БАҒАНЫНЫҢ МӘЖБҰРЛІ ТЕРБЕЛІС ҮРДІСІНЕ ӘСЕР ЕТУІН ЗЕРТТЕУ

А. Бараев¹, М. Ж. Жұмабаев¹, Н. М. Ахметов², А. С. Тулип³, М. Бариев⁴

¹Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан,

²Атырау мұнай және газ институты, Атырау, Қазақстан,

³Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан,

⁴Ө. Беруни атындағы Ташкент мемлекеттік техникалық университеті, Өзбекстан

Тірек сөздер: конструкция, қорғандық байланыстар, үйкеліс, бұрғы тірегі.

Аннотация. Қорғандық байланыстарға қолданатын материалдың түріне және құрылымына қарай бұрғы құбыры бағанының тербелісіне, қорғандық байланыстар ерекшелігін ескеретін комплексті үстірт теориясын (контакттілі) қолдану мәселесі шешіледі. Болат пен титаннан жасалған құлыптың жиілігіне байланысты бағанның бірінші жоғарғы секциясының тербеліс амплитудасының графигі жасалды.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 50 – 55

ON THE SOLVABILITY OF A THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

A. T. Asanova, A. E. Imanchiev

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan,

Aktobe Regional State University after K. Zhubanov MES RK, Aktobe, Kazakhstan.

E-mail: anarasanova@list.ru, imanchiev_ae@mail.ru

Key words: differential equation, three-point boundary condition, solvability, parameterization method, algorithm.

Abstract. A three-point boundary value problem for a differential equation of second order is considered. The questions of the existence unique solution of the considering problem are researched and the approaches of it construction are studied. The conditions of the unique solvability of the three-point boundary value problem for the differential equation of second order are established and the algorithms for finding their solutions are proposed.

УДК 517.927

О РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

A. T. Асанова, А. Е. Иманчиев

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова МОН РК, Актюбе, Казахстан

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, трехточечное краевое условие, разрешимость, метод параметризации, алгоритм.

Аннотация. Рассматривается трехточечная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Исследуются вопросы существования единственного решения рассматриваемой задачи и способы его построения. Установлены условия однозначной разрешимости и предложены алгоритмы нахождения решения трехточечной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Рассматривается трехточечная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x + f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

с условиями следующего вида

$$\alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x'(0) + \delta_{11}x(\eta) + \delta_{12}x'(\eta) + \beta_{11}x(1) + \beta_{12}x'(1) = b_1, \quad (2)$$

$$\alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x'(0) + \delta_{21}x(\eta) + \delta_{22}x'(\eta) + \beta_{21}x(1) + \beta_{22}x'(1) = b_2, \quad (3)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ - непрерывные на $[0,1]$ функции, $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, α_{ij} , δ_{ij} , β_{ij} , b_k - постоянные, $i, j, k = 1, 2$, $0 < \eta < 1$.

Многоточечные краевые задачи для дифференциальных уравнений высоких порядков с переменными коэффициентами возникают при математическом моделировании различных процессов физики, химии, биологии, техники, экологии, экономики и др. В связи с многочисленными приложениями, например, в теории изгибов балок, в транспортировке грузов, наибольший интерес представляют трехточечные краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Частные случаи задачи (1)-(3) рассматривались в работах многих авторов. Для нахождения условий существования решения трехточечных краевых задач типа (1)-(3) использовались метод неподвижных точек, метод верхних и нижних решений, монотонный итерационный метод и др. [1. 2].

Несмотря на большое количество работ, посвященных трехточечным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений высоких порядков с переменными коэффициентами, остается много вопросов. Это, в первую очередь, вопросы нахождения эффективных признаков разрешимости исследуемой задачи, изучение качественных свойств решений, способов построения решений и др. Решение указанных вопросов можно достичь развивая конструктивные методы исследования трехточечных краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высоких порядков, а также построением алгоритмов нахождения их решений.

В предлагаемой работе исследуются вопросы существования решения трехточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (1)-(3) и способы нахождения ее решений. Для этой цели используется метод параметризации [3]. Ранее в работах [4, 5] указанный метод был применен к многоточечным краевым задачам для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи, существования изолированного решения многоточечной краевой задачи для нелинейного уравнения. Результаты данной работы демонстрируют эффективную применимость метода параметризации к исследуемой трехточечной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и дополняют результаты работ [4, 5]. Получены достаточные условия разрешимости в терминах коэффициентов дифференциального уравнения и данных граничных условий и построены алгоритмы нахождения решений. Результаты по исследованию частных случаев трехточечных условий (2), (3) для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка анонсированы в [6-8].

Приведем схему метода параметризации. Пусть $x(0) = \lambda$, $x'(0) = \mu$. В задаче (1)-(3) произведем замену: $u(t) = x(t) - \lambda - \mu t$, $u'(t) = x'(t) - \mu$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a(t) \frac{du}{dt} + b(t)u + a(t)\mu + b(t)\lambda + b(t)t\mu + f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (4)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (5)$$

$$[\alpha_{11} + \delta_{11} + \beta_{11}]\lambda + [\alpha_{12} + \delta_{11}\eta + \delta_{12} + \beta_{11} + \beta_{12}]\mu + \delta_{11}u(\eta) + \delta_{12}u'(\eta) + \beta_{11}u(1) + \beta_{12}u'(1) = b_1, \quad (6)$$

$$[\alpha_{21} + \delta_{21} + \beta_{21}]\lambda + [\alpha_{22} + \delta_{21}\eta + \delta_{22} + \beta_{21} + \beta_{22}]\mu + \delta_{21}u(\eta) + \delta_{22}u'(\eta) + \beta_{21}u(1) + \beta_{22}u'(1) = b_2. \quad (7)$$

Задачи (1)-(3) и (4)-(7) эквивалентны. Если функция $x(t)$ - решение задачи (1)-(3), то тройка $(\lambda, \mu, u(t))$, где $\lambda = x(0)$, $\mu = x'(0)$, $u(t) = x(t) - x(0) - x'(0)t$, будет решением задачи (4)-(7). И наоборот, если тройка $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{u}(t))$ - решение задачи (4)-(7), то функция $\tilde{x}(t) = \tilde{u}(t) + \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}t$ будет решением исходной задачи (1)-(3).

Задача (4), (5) при фиксированных значениях параметров λ , μ является задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка, а соотношения (6), (7) связывают значения функции $u(t)$ с неизвестными параметрами λ , μ .

Представим функцию $u'(t)$ как решение задачи Коши

$$u'(t) = e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(\tau)} [b(\tau)u(\tau) + (a(\tau) + b(\tau)\tau)\mu + b(\tau)\lambda + f(\tau)] d\tau, \quad (8)$$

где $A(t) = \int_0^t a(s) ds$.

Тогда функция $u(t)$ как решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка, содержащего параметры λ , μ , эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра

$$u(t) = \int_0^t \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} \cdot [b(\tau_1)u(\tau_1) + [a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1]\mu + b(\tau_1)\lambda + f(\tau_1)] d\tau_1 d\tau. \quad (9)$$

Определим значения функций $u'(t)$, $u(t)$ при $t = \eta$, $t = 1$ из выражений (8), (9), соответственно. Подставим найденные выражения в соотношения (6), (7) и получим

$$A_1\lambda + B_1\mu = b_1 - G_1(u) - F_1, \quad (10)$$

$$A_2\lambda + B_2\mu = b_2 - G_2(u) - F_2, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_{11} + \delta_{11} + \beta_{11} + \delta_{11} \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \delta_{12} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau + \\ &\quad + \beta_{11} \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \beta_{12} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau, \\ B_1 &= \alpha_{12} + \delta_{11} \left\{ \eta + \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} [a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1] d\tau_1 d\tau \right\} + \delta_{12} \left\{ 1 + e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} [a(\tau) + b(\tau)\tau] d\tau \right\} + \\ &\quad + \beta_{11} \left\{ 1 + \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} [a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1] d\tau_1 d\tau \right\} + \beta_{12} \left\{ 1 + e^{A(1)} \int_0^1 e^{-A(\tau)} [a(\tau) + b(\tau)\tau] d\tau \right\}, \\ A_2 &= \alpha_{21} + \delta_{21} + \beta_{21} + \delta_{21} \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \delta_{22} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau + \\ &\quad + \beta_{21} \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \beta_{22} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau, \\ B_2 &= \alpha_{22} + \delta_{21} \left\{ \eta + \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} [a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1] d\tau_1 d\tau \right\} + \delta_{22} \left\{ 1 + e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} [a(\tau) + b(\tau)\tau] d\tau \right\} + \\ &\quad + \beta_{21} \left\{ 1 + \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} [a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1] d\tau_1 d\tau \right\} + \beta_{22} \left\{ 1 + e^{A(1)} \int_0^1 e^{-A(\tau)} [a(\tau) + b(\tau)\tau] d\tau \right\}, \\ G_1(u) &= \delta_{11} \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \delta_{12} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} b(\tau) u(\tau) d\tau + \\ &\quad + \beta_{11} \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \beta_{12} e^{A(1)} \int_0^1 e^{-A(\tau_1)} b(\tau) u(\tau) d\tau, \\ G_2(u) &= \delta_{21} \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \delta_{22} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} b(\tau) u(\tau) d\tau + \\ &\quad + \beta_{21} \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} b(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \beta_{22} e^{A(1)} \int_0^1 e^{-A(\tau_1)} b(\tau) u(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \delta_{11} \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \\
&+ \delta_{12} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} f(\tau) d\tau + \beta_{11} \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \beta_{12} e^{A(1)} \int_0^1 e^{-A(\tau_1)} f(\tau) d\tau, \\
F_2 &= \delta_{21} \int_0^\eta \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \\
&+ \delta_{22} e^{A(\eta)} \int_0^\eta e^{-A(\tau)} f(\tau) d\tau + \beta_{21} \int_0^1 \int_0^\tau e^{A(\tau)-A(\tau_1)} f(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \beta_{22} e^{A(1)} \int_0^1 e^{-A(\tau_1)} f(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Соотношения (10), (11) являются линейной системой алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров λ , μ .

Если известна функция $u(t)$, то из соотношений (10), (11) можно определить параметры λ и μ . Если известны параметры λ , μ , то из задачи Коши для дифференциального уравнения (4), (5) можно найти функцию $u(t)$. В данном случае неизвестными являются и функция $u(t)$, и параметры λ , μ . Поэтому применяется итерационный метод и решение краевой задачи с параметрами (4)-(7) найдем по следующему алгоритму:

1-шаг. Предположим, что выражение $A_1 B_2 - B_1 A_2$ отлично от нуля. Используем начальные условия (5): полагая в правых частях уравнений (10), (11) $u = 0$ определим параметры $\lambda^{(0)}$, $\mu^{(0)}$. Из задачи Коши (4), (5) при $\lambda = \lambda^{(0)}$, $\mu = \mu^{(0)}$ находим функцию $u^{(0)}(t)$, $t \in [0,1]$.

2-шаг. Пусть выполняется условие: $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$. Предполагая в правых частях уравнений (10), (11) $u(t) = u^{(0)}(t)$ для всех $t \in [0,1]$, определим параметры $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$. Из задачи Коши (4), (5) при $\lambda = \lambda^{(1)}$, $\mu = \mu^{(1)}$ находим функцию $u^{(1)}(t)$, $t \in [0,1]$.

И т.д.

m -шаг. Пусть справедливо условие: $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$. Полагая в правых частях уравнений (10), (11) $u(t) = u^{(m-1)}(t)$ для всех $t \in [0,1]$, определим параметры $\lambda^{(m-1)}$, $\mu^{(m-1)}$. Из задачи Коши (4), (5) при $\lambda = \lambda^{(m-1)}$, $\mu = \mu^{(m-1)}$ находим функцию $u^{(m-1)}(t)$, $t \in [0,1]$.

$(m+1)$ -шаг. Пусть выполнено неравенство $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$. Предполагая в правых частях уравнений (10), (11) $u(t) = u^{(m-1)}(t)$ для всех $t \in [0,1]$, определим параметры $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$. Из задачи Коши (4), (5) при $\lambda = \lambda^{(m)}$, $\mu = \mu^{(m)}$ находим функцию $u^{(m)}(t)$, $t \in [0,1]$, $m = 1, 2, \dots$

Введем обозначения: $d = |A_1 B_2 - A_2 B_1|$, $a_0 = \max_{t \in [0,1]} |a(\tau)|$, $b_0 = \max_{t \in [0,1]} |b(\tau)|$, $\theta = e^{a_0} b_0$,

$$a_1 = \max_{t \in [0,1]} \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1| d\tau_1 d\tau, \quad a_2 = \max_{t \in [0,1]} \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |b(\tau_1)| d\tau_1 d\tau.$$

Условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма, а также существования единственного решения задачи (1)-(3) приведены в следующем утверждении.

Теорема. Пусть $a(t)$, $b(t)$ - непрерывные на $[0,1]$ функции и выполняются неравенства:

а) $A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0$;

б) $q = \frac{1}{d} \max(|A_1| + |A_2|, |B_1| + |B_2|) \cdot \{a_1 + a_2\} \times$

$$\times \left\{ \max(|\delta_{11}| \cdot \eta + |\delta_{12}|, |\delta_{21}| \cdot \eta + |\delta_{22}|) [e^{\theta \eta} - 1] + \max(|\beta_{11}| + |\beta_{12}|, |\beta_{21}| + |\beta_{22}|) [e^\theta - 1] \right\} < 1.$$

Тогда трехточечная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка (1)-(3) имеет единственное решение.

Доказательство. Из интегрального уравнения (9) при фиксированных λ, μ получим

$$|u(t)| \leq \int_0^t \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |b(\tau_1)| \cdot |u(\tau_1)| d\tau_1 d\tau + \int_0^t \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |a(\tau_1) + b(\tau_1)\tau_1| d\tau_1 d\tau |\mu| + \\ + \int_0^t \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |b(\tau_1)| d\tau_1 d\tau \cdot |\lambda| + \int_0^t \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |f(\tau_1)| d\tau_1 d\tau.$$

Используя обобщенное неравенство Гронуола-Беллмана отсюда находим

$$|u(t)| \leq \{a_1 |\mu| + a_2 |\lambda| + f_0\} \exp \left\{ \int_0^t \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |b(\tau_1)| d\tau_1 d\tau \right\},$$

где $f_0 = \max_{t \in [0,1]} \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |f(\tau_1)| d\tau_1 d\tau.$

Из системы алгебраических уравнений (10), (11) получим

$$\max(|\lambda|, |\mu|) \leq \\ \leq \frac{1}{d} \max(|A_1| + |A_2|, |B_1| + |B_2|) \max(|b_1| + |G_1(u)| + |F_1|, |b_2| + |G_2(u)| + |F_2|).$$

Тогда для разностей последовательных приближений аналогично находим

$$|u^{(m)}(t) - u^{(m-1)}(t)| \leq \\ \leq (a_1 + a_2) \exp \left\{ \int_0^t \int_0^\tau e^{a_0(\tau-\tau_1)} |b(\tau_1)| d\tau_1 d\tau \right\} \max \{ |\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}|, |\mu^{(m)} - \mu^{(m-1)}| \}, \quad (11) \\ \max \{ |\lambda^{(m+1)} - \lambda^{(m)}|, |\mu^{(m+1)} - \mu^{(m)}| \} \leq q \cdot \max \{ |\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}|, |\mu^{(m)} - \mu^{(m-1)}| \}.$$

Условие б) теоремы обеспечивает сходимость последовательностей $\{\lambda^{(m)}\}, \{\mu^{(m)}\}$ при $m \rightarrow \infty$ к λ^*, μ^* , соответственно. Из неравенства (11) вытекает равномерная сходимость последовательности $\{u^{(m)}(t)\}$ при $m \rightarrow \infty$ к функции $u^o(t)$ для всех $t \in [0,1]$. Единственность решения доказывается методом от противного. Теорема доказана.

Таким образом, теорема дает достаточные условия существования единственного решения трехточечной краевой задачи (1)-(3) в терминах данных задачи: коэффициентов $a(t), b(t)$ дифференциального уравнения (1) и коэффициентов граничных условий (2), (3).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kwong M.K., Wong J.S.W. Solvability of second-order nonlinear three-point boundary value problems // *Nonlinear Analysis*. 2010. Vol. 73. P. 2343-2352.
- [2] Li F., Sun J., Jia M. Monotone iterative method for the second-order three-point boundary value problem with upper and lower solutions in the reversed order // *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 217. P.4840-4847.
- [3] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // *USSR Computational mathematics and mathematical Physics*. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.
- [4] Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // *Матем. журнал*. 2005. Т. 5. No 1(15).
- [5] С. 30-38.
- [6] Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Критерий существования изолированного решения многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // *Известия НАН РК. Серия физ.-матем.* 2010. No 3. С.117-121.
- [7] Imanchiev A. Parameterization method for the second-order nonlinear three-point boundary value problem // *Second International Conference on Analysis and Applied mathematics*. Abstract book. September 11-13, 2014, Shymkent, Kazakhstan, P. 70.
- [8] Imanchiev A. E. Method of parameterization for solve a three-point boundary value problem for a second-order nonlinear differential equation // *Materials of the International scientific conference "Function theory, functional analysis and their applications" devoted to the 80-year anniversary of professor K.Zh. Naurzybaev*, Desember 9-10, 2014, Almaty, Kazakhstan, P. 96-97.

REFERENCES

- [1] Kwong M.K., Wong J.S.W. Solvability of second-order nonlinear three-point boundary value problems // *Nonlinear Analysis*. 2010. Vol. 73. P. 2343-2352.
- [2] Li F., Sun J., Jia M. Monotone iterative method for the second-order three-point boundary value problem with upper and lower solutions in the reversed order // *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 217. P.4840-4847.
- [3] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // *USSR Computational mathematics and mathematical Physics*. 1989. Vol. 29. No 1. P.34-46.
- [4] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Korrektnaya razreshimost' lineinoi mnogotochechnoi kraevoi zadachi // *Matem. journal*. 2005. T. 5. No 1(15). S. 30-38.
- [5] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Kriterii sushestvovaniya izolirovannogo resheniya mnogotochechnoi kraevoi zadachi dlia sistemy obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii // *Izvestia NAN RK. Seria fiz.-matem*. 2010. No 3. S.117-121.
- [6] Imanchiev A. Parameterization method for the second-order nonlinear three-point boundary value problem // *Second International Conference on Analysis and Applied mathematics*. Abstract book. September 11-13, 2014, Shymkent, Kazakhstan, P. 70.
- [7] Imanchiev A. E. Method of parameterization for solve a three-point boundary value problem for a second-order nonlinear differential equation // *Materials of the International scientific conference "Function theory, functional analysis and their applications" devoted to the 80-year anniversary of professor K.Zh. Nauryzbaev, Desember 9-10, 2014, Almaty, Kazakhstan*, P. 96-97.

**ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН
ҮШНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ****А. Т. Асанова, А. Е. Иманчиев**

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
ҚР БҒМ Қ.Жұбанов ат. Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, үшнүктелі шеттік шарт, шешілімділік, параметрлеу әдісі, алгоритм.

Аннотация. Екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін үшнүктелі шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуы мәселелері мен оны тұрғызу тәсілдері зерттеледі. Екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін үшнүктелі шеттік есептің бірімәнді шешілімділігі шарттары тағайындалған және шешімін табу алгоритмдері ұсынылған.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 56 – 60

**INFLUENCE OF LASER TREATMENT
ON THE PROPERTIES OF POLYCRYSTALLINE SILICON**

T. Kosherov, A. Serik, A. Seitov

Kazakh National Technical University named after K. Satpayev, Almaty, Kazakhstan, e-mail: tkosherov@mail.ru

Keywords: laser treatment, recrystallization, oxidation of silicon.

Abstract. In this work an influence of laser treatment on the structural and morphological properties of (c) Si silicon, which was pre-thermally processed at $T = 800^{\circ}\text{C}$ and different warm-up time, was investigated. It has been shown that laser treatment changes the topology of surface, performs recrystallization of layer surface and do not cause oxidation of interstitial atoms on silicon.

УДК 621.373:537.312

**ВЛИЯНИЕ ЛАЗЕРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
НА СВОЙСТВА ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ**

Т. С. Кошеров, А. С. Серик, А. Сеитов

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: лазерное воздействие, рекристаллизация, окисление кремния.

Аннотация. В данной работе исследовано влияние лазерного воздействия на структурно-морфологические свойства (с) Si кремния предварительно термически обработанного при $T = 800^{\circ}\text{C}$ и в различном времени прогрева. Показано, что лазерное воздействие изменяет топологию поверхности, осуществляет рекристаллизацию поверхностного слоя и не вызывает окисления межузельных атомов кремния.

Воздействие достаточно мощного лазерного излучения широко используется в современных технологических процессах обработки полупроводниковых материалов. Известно, что при воздействии лазерных лучей на поверхность кристаллических твердых тел возможна генерация в поверхностном слое структурных дефектов: вакансий и междоузлий (1), концентрация которых в течение лазерного воздействия может меняться по сравнению с исходной на несколько порядков. Наличие значительной концентрации дефектов может существенно и неконтролируемо изменять процессы лазерной обработки, что затрудняет получение материалов с заданными свойствами. Необходимо поэтому определение условий и механизма образования дефектов при лазерном воздействии.

Воздействие лазерного излучения приводит к возбуждению электронной подсистемы и образованию в приповерхностном слое полупроводника повышенной концентрации свободных носителей. Переход электронов в возбужденное состояние уменьшает энергию возбуждения дефекта и, в конечном счете, приводит к нагреву решетки.

Неоднородное распределение возбужденных электронов и нагрев решетки приводит к сильной деформации приповерхностного слоя материала. В определенных режимах на поверхности образуются либо периодические структуры дефектов, либо начинается пороговое образование протяженных дефектов (пор или дислокационных петель) (2), а их объединение может

инициировать начало образование микротрещин и разрушение поверхности еще до начала плавления.

Действие лазерного излучения, как правило, приводит к разогреву поверхностного слоя. Одновременно активируются диффузия газов в поверхностный слой и интенсивная генерация структурных дефектов: вакансий, междоузлий, а также начинается зарождение и рост дислокаций и диффузия газов вдоль дислокационной трубки вглубь кристалла.

Нагрев и высокая концентрация точечных дефектов приводит к деформации (к выпучиванию) поверхности. Следовательно, одной из причин решения зондирующего излучения может быть как выпучивания и рост игольчатых и конусообразных образований на поверхности за счет совместного действия нагрева лазерным лучом и накопления точечных дефектов, так и рост в поверхностном слое локальных неоднородностей (макродефектов).

Воздействие лазерного излучения на поверхность полупроводника может привести и к изменению ее структурно-морфологических и электрофизических свойств. Эти изменения зависят от характера лазерного излучения, а именно от длины волны излучения, длительности и энергии лазерного воздействия (3). При этом измененные структурно-морфологические и электрофизические свойства, при использовании лазерного излучения, наблюдались не только при энергиях сравнимых или больше энергии плавления поверхности кремния (4), но и при значительно меньшей энергии плавления поверхности кремния (5).

В данной работе исследовано влияние непрерывного лазерного излучения на структурно-морфологические изменения (с) Si кремния после предварительного термического отжига образца при 800°C и при различном времени прогрева ($t = 10, 30, 60, 120, 240$ и 360 минут).

Методы и материалы. В качестве исследуемого материала использовали полупроводниковый кремний (с) Si с удельным сопротивлением 10 Ом см в виде пластин размером 1 см^2 . Температурная обработка кремневых пластин проводилась на воздухе при температуре 800°C в течение $10, 30, 60, 120, 240$ и 360 минут. После термообработки образцы подвергались лазерному облучению в течение $t = 60$ минут и исследовались на рентгеновском дифрактометре X'PertPRO фирмы Phillips. Спектрограммы образцов кремния, предварительно термообработанного при различном времени прогрева, а затем подвергнутого лазерному воздействию получены на растровом электронном микроскопе. Анализ топографии поверхности предварительно термоотожженного и подвергнутого действию лазерного луча осуществлялась на воздухе с помощью атомно-силового микроскопа (АСМ) производства компании NANOEDUCATOR и INTEGRA PRIMA. Источником излучения явился лазер типа LCS-DTL-317-50, мощность которого составила 50 мВт , работающий в непрерывном режиме. Эффективный диаметр сфокусированного лазерного пятна составил $1,3 \text{ мм}$.

Результаты и их обсуждение. На рисунке 1 приведены АСМ и 3Д-АСМ-изображения поверхности (с) Si полученные после лазерного воздействия на образцы кремния предварительно отожженных на воздухе при 800°C и различном времени прогрева. На АСМ-изображениях, где проявляется наличие межзеренных границ и нанорельефа, хорошо видно чередование темных и светлых выступов, конусов, пор наноразмерных областей, что свидетельствует об изменении высоты поверхностного рельефа. В процессе увеличения времени предварительного прогрева образца (от 10 до 360 минут) и последующего действия лазерного излучения рельеф поверхности заметно изменяется (рисунок 1). Действие лазерного излучения инициирует формирование поверхностных напряжений, активацию диффузии, изменение дислокационной структуры и фазового состояния. Результатом взаимодействия лазерного излучения с поверхностного (с) Si, формирующего разнообразный рельеф, является постепенное сплавление, сначала локально, а затем всей поверхности образца (рисунок 1, б).

Анализ 3Д-АСМ-изображений, как результат указанных выше процессов, показывает, что в нашем случае влияние лазерного воздействия на образцы (с) Si предварительно термоотожженных на воздухе, при различном времени прогрева, тесным образом влияли на эволюцию формирования рельефа поверхности и характеризуются процессами изменения фазового состава при поверхностных слоях, рекристаллизации, появлением участков с пониженным уровнем напряжения, что приводит к модификации рельефа в виде системы наноструктурированных выступов (рисунок 1).

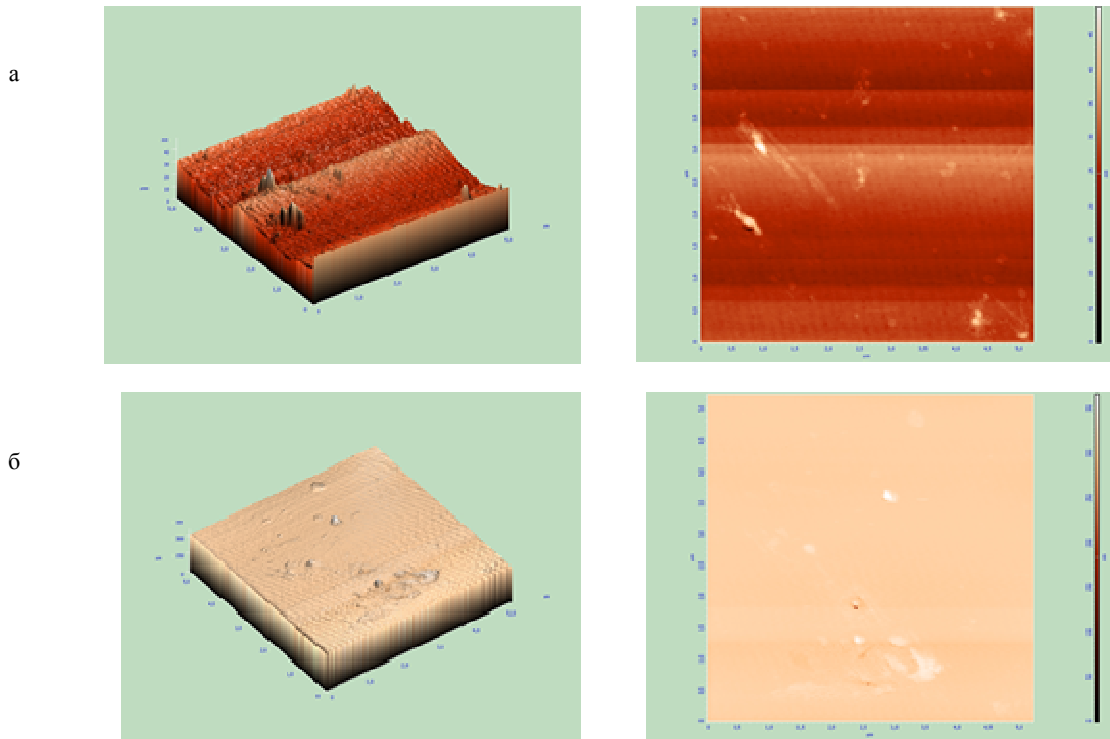


Рисунок 1 – АСМ-изображения поверхности кремния после лазерного воздействия ($t = 60$ мин). Температура предварительного отжига 800°C и время прогрева: а) $t = 120$ мин, б) $t = 360$ мин.

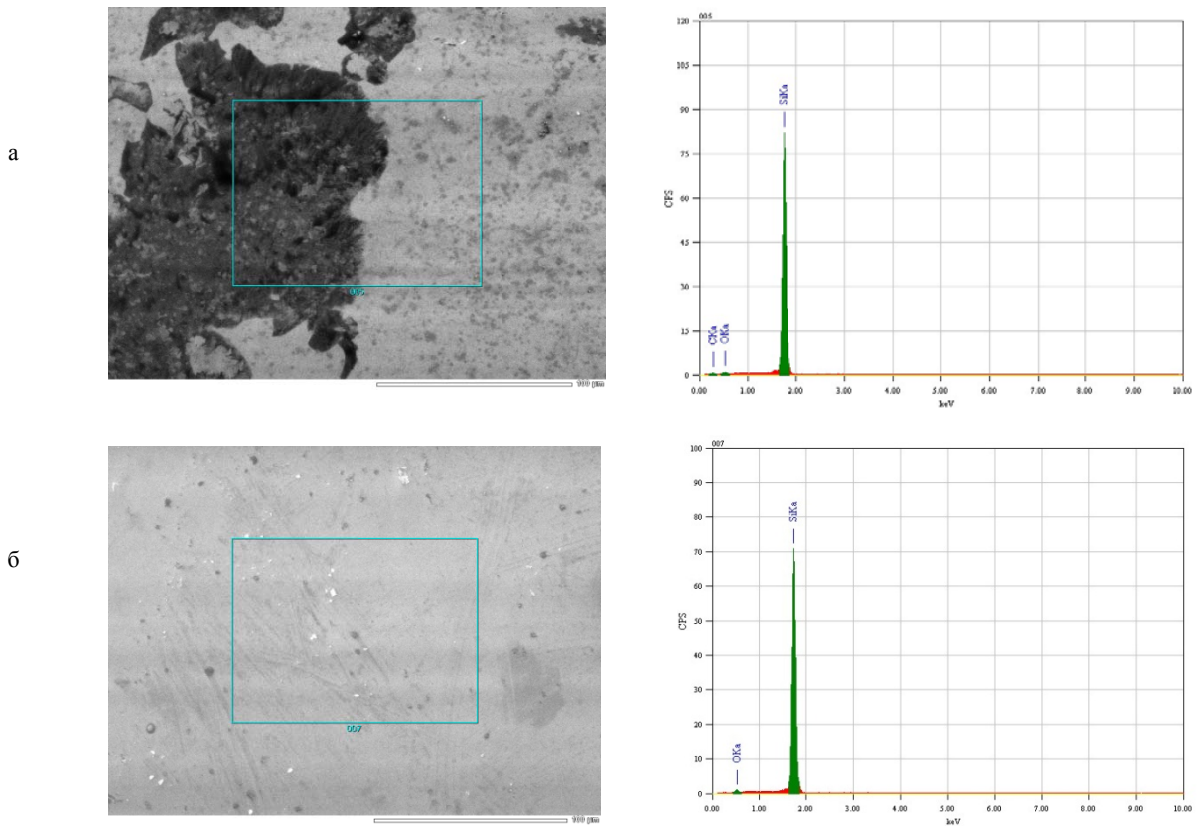


Рисунок 2 – Спектрограмма образцов (с) Si после лазерного воздействия ($t = 60$ мин). Температура предварительного отжига 800°C и время прогрева: а) $t = 120$ мин, б) $t = 360$ мин.

Анализ спектров (с) Si, предварительно термоотожженных при 800°C , при различном времени отжига и подвергшихся действию лазерного излучения показали, что происходит изменение линий интенсивности кремния в зависимости от времени предварительной термообработки образца (рисунок 2). Соответствующие изменения наблюдаем со скопившимися массами кислорода, причем максимальное содержание масс кремния соответствует минимальным массам кислорода (рисунок 3). Начиная с 120-минутного предварительного термоотжига, лазерное воздействие на кремний несколько «сглаживает» наблюдавшиеся изменения в их содержании. Надо отметить, что появление кислорода не вызывает высокотемпературное окисление поверхности кремния и образование оксидных пленок на поверхности образца. А появившиеся атомы углерода в достаточном количестве на образце, предварительно прогретых при 600°C в течении 120 минут и последующем лазерном воздействии, не вызвали появления на поверхности карбида кремния (SiC) (рисунок 3, точка С). Как видно, из рисунка 1 действия лазерного излучения приводят к процессам частичного и полного плавления поверхности, к образованию повышенной концентрации дефектов и соответствующих градиентов температуры на поверхности, концентрации точечных дефектов.

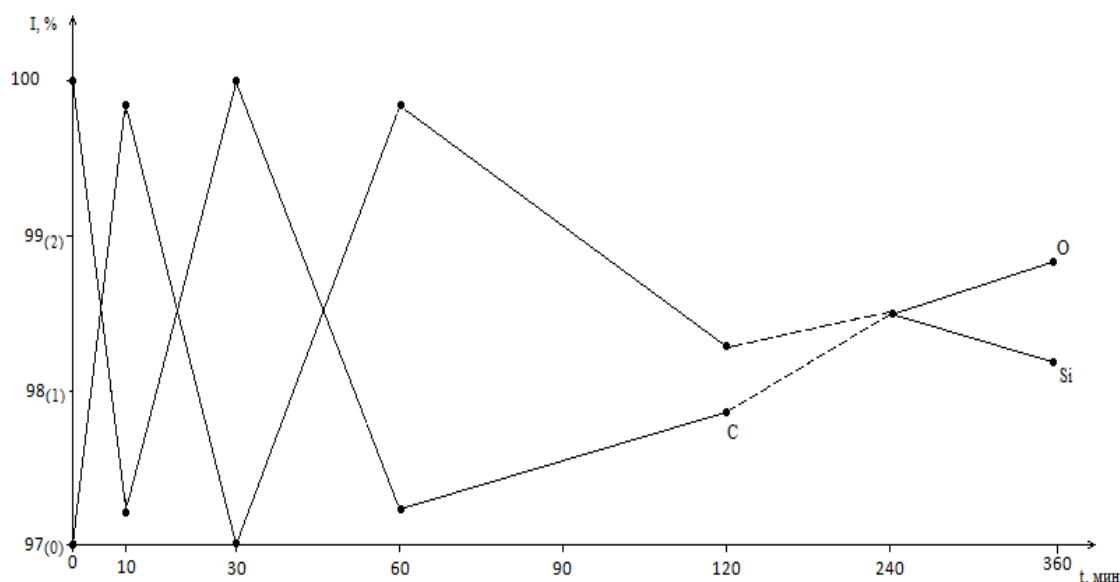


Рисунок 3 – Результаты полуколичественного анализа содержащих кремния (Si), кислорода (O₂) и углерода (C) при непрерывном действии лазера (t = 60 мин); образцы предварительно прогретые при T = 600°C и времени (t = 10, 30, 60, 120, 240 и 360 минут)

В частности, нагрев и высокая концентрация точечных дефектов, а также дислокаций приводят к образованию систем наноструктурированных выступов, пор, наноразмерных областей (рисунок 1). Не исключено, что причиной образования дефектов при лазерном облучении, на образцы предварительно термоотожженных при различном времени отжига, может быть одновременное действие трех факторов: возбуждение электроно-дырочных пар в приповерхностной области полупроводника, нагрев этой области за счет электрон-фононного взаимодействия, а также возникновение термоупругих напряжений на приповерхностном слое. При лазерном воздействии неоднородность характера процессов плавления и остывания кремния приводит к образованию дефектов, и она существенна (6).

Возможно также, что действие лазерного излучения на образцы предварительно отожженного при 800°C приводит к рекристаллизации поверхностного слоя кремния, а полное его плавление соответствует понижению температуры внутри слоя, что в свою очередь, вызывает снижение скорости рекристаллизации (7).

Заключение. Установлено, что действие лазерного излучения на образцы предварительно отожженного при различном времени ее прогрева приводит к изменению структурно-морфоло-

гического рельефа поверхности кремния, постепенному плавлению поверхности, что сопутствует в последующем к рекристаллизации ее поверхностного слоя. Выяснено также, что действие лазерного излучения не способствует появлению термического диоксида кремния, хотя появление структурного кислорода тесным образом связано с генерацией межузельных атомов кремния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Байко В.Н., Лукьянчук Б.С., Казев Е.Р. // Труды ИОФАН, 1991. Т.30. С.6.
- [2] Banishev A.A., Emelyanov V.I., Novikov M.M. // *Lasar Physics*, 1992. Vol.2. №2. P.178.
- [3] Готра З.Ю., Осередько С.А. // *Зарубежная электронная техника*. 1985. №12. С. 3-52.
- [4] Hlavka I., Jelenková H., Namal K., Prochocký V. / Pulsed laser induced recombination centers in silicon // *Journal Applied Physics*, 1984. V. 56. №4. P. 1245-1246.
- [5] Кашкаров П.К., Киселев В.Ф. Нетермические процессы в полупроводниках при лазерном облучении. // *Изв. АН СССР. Сер.Физическая*, 1986. Т.50.№3. С. 435-439.
- [6] Малевич В.Я., Ивлев Г.Д. // *Поверхность*. 1990. №5. С. 157-158.
- [7] Arguirov T., Mchedlidze T., Akhmetov V.D. // *Applied Surface Science*. 2007. V.254v P. 1083-1086.

REFERENCES

- [1] Bajko V.N., Luk'janchuk B.S., Kazev E.R. // *Trudy IOFAN*, 1991. V.30. p.6. (in Russ.).
- [2] Banishev A.A., Emelyanov V.I., Novikov M.M. // *Lasar Physics*. 1992. Vol.2. №2. P.178.
- [3] Gotra Z.Ju., Osered'ko S.A. // *Foreign electronic appliances*. 1985. №12. p. 3-52. (in Russ.).
- [4] Hlavka I., Jelenková H., Namal K., Prochocký V. / Pulsed laser induced recombination centers in silicon // *Journal Applied Physics*. 1984. V. 56. №4. P. 1245-1246.
- [5] Kashkarov P.K., Kiselev V.F. Non-thermal processes in semiconductors by laser irradiation // *News of AS USSR. Ser. Physics*. 1986. V.50. №3. p. 435-439. (in Russ.).
- [6] Malevich V.ya., Ivlev G.D. // *Surface*. 1990. №5. p. 157-158. (in Russ.).
- [7] Arguirov T., Mchedlidze T., Akhmetov V.D. // *Applied Surface Science*. 2007. V.254, P. 1083-1086.

ЛАЗЕРЛІК ЫҚПАЛДЫҢ ПОЛИКРИСТАЛДЫ КРЕМНИЙ ҚҰРЫЛЫМЫНА ӘСЕРІ

Т. С. Көшеров, А. С. Серік, А. Сеитов

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: лазерлік ықпал, рекристаллизация, кремнийдің тотығуы.

Аннотация. Берілген жұмыста тұрақталған $T = 800^{\circ}\text{C}$ температуралық өндеудің ықпалынан және ауыспалы қыздыру уақытындағы (с) Si кремнийдің лазерлік әсерінің құрылымдық-морфологиялық ерекшеліктері зерттелді. Лазерлік ықпал беттің топологиясын өзгертіп, жоғарғы қабаттың рекристаллизациясын жүзеге асырылды және кремний атомдарының түйінаралық тотығуына әкелмейтіні көрсетілді.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 61 – 65

WIRELESS SENSOR NETWORKS**K. T. Bazhikov, A. O. Kassimov, S. A. Usembayeva, G. Tolepbergenova**

KazNU named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan, e-mail: bajyk@mail.ru

Keywords: wireless sensor networks, telecommunication.**Abstract.** Wireless sensor networks are one of the most promising directions of development of modern telecommunications technologies and materials, transmitting them to the base station via node, via the wireless communication.

Wireless sensor network is a distributed network of unmanned miniature electronic devices that collect data on the characteristics of the environment.

УДК 621.395.4:004.438

СЫМСЫЗ СЕНСОРЛЫ ЖЕЛІЛЕР**К. Т. Бажиков, А. О. Касимов, С. А. Усембаева, Г. Топлебергенова**

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: сымсыз сенсорлы желі, телекоммуникация.**Аннотация.** Сымсыз сенсорлы желілер - қазіргі заманғы телекоммуникациялық технологияларды дамыту неғұрлым перспективалы бағыттардың бірі болып табылады. Кабельді инфраструктураның радиоэфирге ауысуына байланысты және жаңа функционалдық мүмкіншіліктеріне байланысты қолдану перспективті.

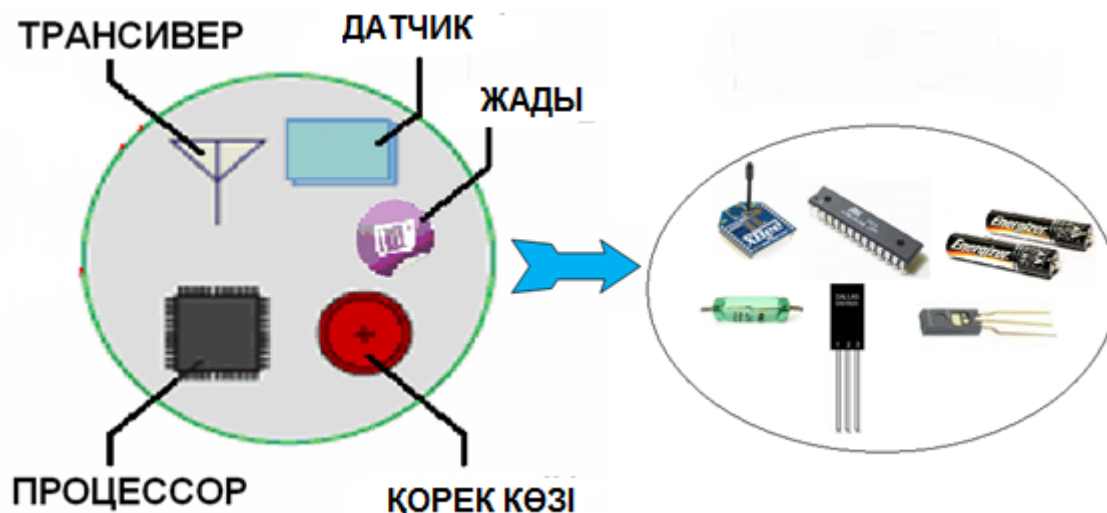
Сымсыз сенсорлы желілердің мынадай сипаттамалары арқылы, түйіндерінің кішігірімділігі, тұтыну қуаты төмен, радиоинтерфейсі, жеткілікті есептеу қуаты, салыстырмалы төмен құны ретінде, ол техникалық және табиғи объектілердің әртүрлі ақпарат, мониторинг және бақылау сипаттамаларын жинау процестерін автоматтандыру мақсатында адам қызметінің көптеген салаларында, олардың кеңінен қолдану арқасында мүмкін болды.

Сымсыз сенсорлы желілер жоғарыда аталған ерекшеліктері мынадай бағыттар бойынша кешенді проблемаларды шешуге арналады:

- жұмыстың мониторингі;
- автожолдар магистралінің мониторингі (темір жол, метрополитен және т.б.), мұнай және газ құбырлары;
- көлік жүк тасымалының мониторингі және талдау;
- экологиялық, биологиялық және медициналық бақылау;
- автоматтандыру жүйесін және өмір қолдау жүйелері «Ақылды үй»;
- төтенше жағдайлардың алдын алу және анықтау (сейсмикалық және жанартау қызметінің мониторингі, табиғи апаттар туындаудың уақытылы ескерту үшін атмосфера мен ауа райы болжамын талдау).

Сымсыз сенсорлы желі – бұл тармақталған желі қызмет көрсетілмейтін ықшам электрондық құрылымдардан тармақталған желі, осы сымсыз байланыстың көмегімен түйіннен-түйінге ретрансляция арқылы негізгі станцияға сыртқы орта параметрлерін және ақпараттың жіберілуін

жүзеге асырады. Осындай сенсор түйіндерін тұрақты бекітуге болады, сонымен қатар, мобилді болуы мүмкін, яғни кеңістікте бір-бірінен еркін қозғала алады, желінің логикалық байланысын бұзбайды. Сенсорлы желінің тұрақты топологиясы болмайды және оның құрылымы уақыт ағымымен динамикалық түрде өзгереді. Желі түйіні, сенсор деп аталатын, сыртқы ортадан ақпарат қабылдайтын датчигі бар, микроконтроллер, жады, радиохабарлағыш, автономды қорек көзі және кейде атқарушы механизм болып саналады. Сонымен бірге сыртқы ортаға желіден, түйіндерден әсерлердің бағдарлаушысылардың берілуі ықтимал.



1-сурет – Сенсор желілер түйінінің үлгісі және оның аппаратты құрайтыны

Сымсыз сенсорлы желілердің аймақ мөлшері бойынша орналастыруы олардың сымсыз дербес есептеуіш желілер кластарына жатқызуға болады (WPAN). WPAN желілерінің басты айырмашылығы – оның қорек көзін аз мөлшерінде жұмыс істеу. Қазіргі кезде WPAN желілерінің екі класы бар: әсер ету радиусы кішірейтілген (10м дейін) және кеңейтілген әсер ету радиусымен (100-ге дейін), осы функционалдық мүмкіншілік арқасында оның WLAN мен бірге жұмыс атқара алады. Дербес желілер әртүрлі стандартқа негізделіп құрылуы мүмкін, протоколдар және технологияларымен, мысалға: IEEE 802.15.1 стандартты Bluetooth; ZigBee, 6loWPAN, DigiMesh стандарты IEEE 802.15.4, WiMedia/MBOA UWB (Ultra Wideband) стандарты ECMA368 (IEEE 802.15.3a стандарт базасында) немесе DS-UWB Forum стандарты IEEE.15.4a

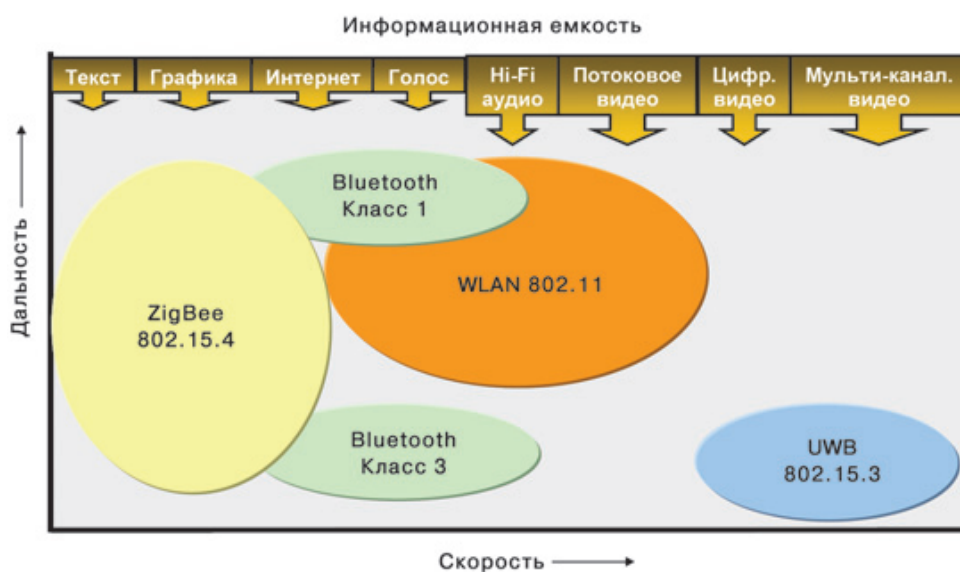
WPAN желілерінің алғашқы стандарты IEEE 802.15.1. стандарт Bluetooth v1.x спецификациясына негізделген және оның физикалық деңгейін анықтайды (*PHY layer*) және ортаға рұқсат деңгейін (*MAC layer*). IEEE 802.15 стандартын кеңейтуде келесі қадам жаңа стандарт жасау болды, бұл стандарт құрылғылардың IEEE 802.11 стандарттары мен IEEE 802,15 функционалдық үйлесімділігін қамтамасыз ету. Көп ұзамай физикалық WPAN желісінде жұмыс істейтін құрылғыларда, Bluetooth қамтамасыз ететін жылдамдық жеткілікті болған жоқ. Осыған орай жаңа стандарт жасауға қажеттілік туды, стандарт сымсыз арна құруға және осы арнамен ондаған, жүздеген Мбит/с ақпарат өткізуге қабілетті болу керек еді (IEEE 802.15.3).

Жоғарыда аталған стандарттар деректерді үлкен көлемде жіберу үшін өте қолайлы (дауыс, деректер, бейне) үлкен жылдамдықпен (1-ден 200-ге дейін Мбит/с). Құрылымдар автономды тәртіппен жұмыс істеуге қабілетті (батареядан және аккумулятордан) 10-нан 100 м дейін қашықтыққа ақпарат тарата алады. Бұл стандарттар құрылғыларда сымды байланысты ауыстыруға мүмкіндік береді, күнделікті колданатын компьютерлер, компьютерлік желілер. Алайда, соншалықты көп болып көрінетін белгісіз жүйелер бар (датчиктер, ақпарат жинау жүйелері және т.б), кейбір бағдарламаларды, тиімді технологияларды пайдалану мүмкін емес. Осы тапсырмаларды жүзеге асыру мақсатында IEEE 802.15.4 стандартты жылдамдығы төмен WPAN-желілер үшін әзірленді.

802.15 және 802.11 стандарттарын салыстыру

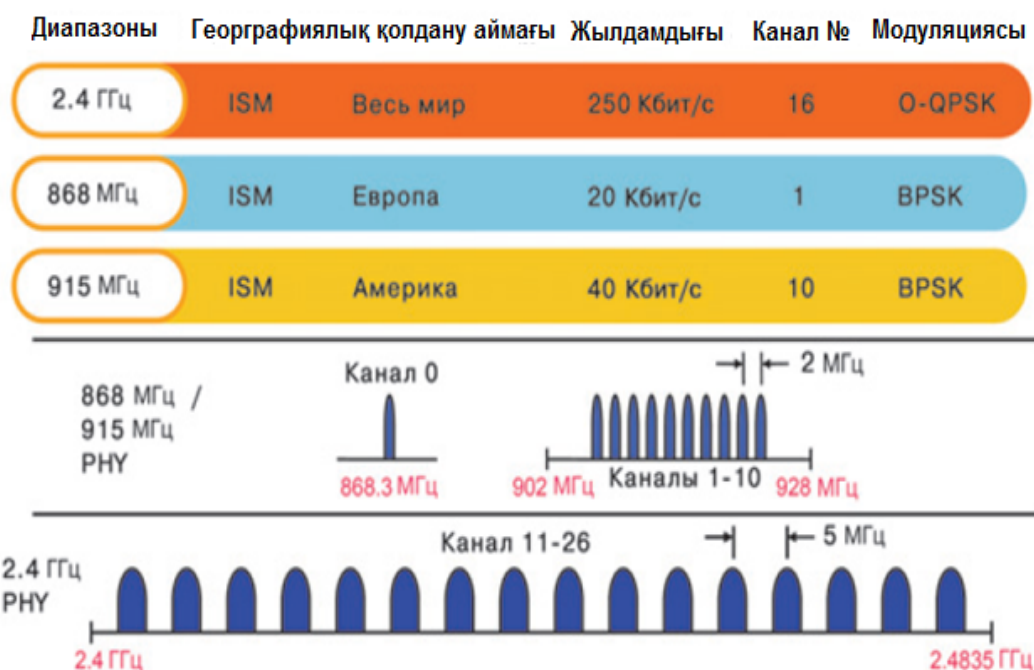
Стандарт	802.15.4 ZigBee™		802.15.1 Bluetooth	802.15.3 High Rate WPAN, WiMedia	802.15.3a* UWB	802.11b Wi-Fi	
Приложения	Мониторинг, управление, сети датчиков, домашняя/промышленная автоматика		Голос, данные, замена кабелей	Потоковое мультимедиа, замена кабелей аудио/видеосистем	Данные, видео, ЛВС		
Преимущества	Цена, энергосбережение, размеры сети, менее загруженные диапазоны	Цена, энергосбережение, размеры сети, глобальный диапазон	Цена, энергосбережение, передача голоса, перескоки частоты	Высокая скорость, энергосбережение		Скорость, гибкость	
Частота, ГГц	0,868	0,915	2,4		3,1 – 10,6	2,4	
Макс. скорость	20 Кбит/с	40 Кбит/с	250 Кбит/с	1 Мбит/с	22 Мбит/с (доп. 11, 33, 44, 55 Мбит/с)	110 Мбит/с (10 м), 200 Мбит/с (4 м) (доп. 480 Мбит/с)	11 Мбит/с
Выходная мощность (ном.), дБм	0		0 (класс 3) 4 (класс 2) 20 (класс 1)	0	< 20 (110 Мбит/с) < 24 (200 Мбит/с)	20	
Дальность, м	10 – 100		10 (класс 3) 100 (класс 1)	5 – 50	10 (110 Мбит/с) 4 (200 Мбит/с)	100	
Чувствительность (спецификация, дБм)	-92	-85	-70	-75	-	-76	
Размер стека, Кбайт	4 – 32		> 250	-		> 1000	
Срок службы батареи, дней	100 – 1000+		1 – 7	теоретически более 1000		0,5 – 5	
Размер сети	65536 (16-битные адреса), 2 ⁶⁴ (64-битные адреса)		мастер +7	до 127 на хост		32	

IEEE 802.15.4 стандартты бұрын бос радио интерфейстерді алды, жоғары өнімділігі бар құрылғы мен технологиясымен алмастырылды және тиісінше неғұрлым қымбат, қатаң стандартталған базасының сәйкесі жоқ, электрондық компоненттері түрлі өндірушілердің жеке радио трансивер фишкалар негізінде кез-келген шешім.



2-сурет – Қарастырылып отырған радиоинтерфейстердің ішінде 802.15.4 стандартының орны

Сымсыз сенсорлы желі түсінігі және бірінші прототипі Америка Құрама Штаттарында пайда болды. Сенсорлы желінің ғылыми-зерттелуі және дамуы Америка Құрама Штаттарында бірнеше жоғарғы оқу орындарында өткізілді. Барынша табысты Калифорния штатының Беркли университетінің профессоры Кристофер Пистердің ғылыми-зерттеулері болды. Кристофер Пистердің ғылыми-зерттеулері және Берклиде құрастырылған үлгісі smart dust, ол сирек кездесетін функционалдық мүмкіндіктерге ие болды, компаниялардың қызығушылығын тудырды, ZigBee альянсының мүшелерімен құрылған компаниялар Ember, Freescale Semiconductor, Honeywell, Invensys, Mitsubishi Electric, Motorola, Philips Electronics және Samsung энергияны аз тұтынатын ашық стандартты сымсыз желі мониторингі және басқаруды жүзеге асыру мақсатында. ZigBee протоколдарының жиынтығы жеті деңгейлі ашық жүйелердің өзара әрекеттесуін іске асырады. Екі төменгі деңгейі (физикалық және радио арна деңгейі) төменгі жылдамдықты IEEE 802.15.4-2003 дербес радио желілердің стандарты болып табылады.



3-сурет – 802.15.4 стандартының қысқаша мінездемесі

IEEE 802.15.4 стандартында сымсыз сенсорлы желінің екі түйні бар: RFD (reduced-function device) функциялары шектеулі құрылғылар, оның орналастыру орны туралы ақпаратты жинайды; толық жабдықталған FFD (full-function device) құрылғылары, ол пакеттерді ретрансляциялайды және ақпарат жинайды. IEEE 802.15.4 стандартты сенсорлы желілер 2^{64} желілік құрылғыларды қамтуы мүмкін.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Nitaigour P.M. (Editor) Sensor networks and configuration fundamentals, standards, platforms, and applications // Springer. – 2007. – 510 p.
- [2] Кучерявый, Е.А. Принципы построения сенсоров и сенсорных сетей / Е.А. Кучерявый, С.А. Молчан, В.В. Кондратьев // Электросвязь, 2006. – №6 – С.10-15.
- [3] Молчанов Д.А. Приложения беспроводных сенсорных сетей / Д.А. Молчанов, Е.А. Кучерявый // Электросвязь, 2006. – №6 – С.20-23.
- [4] Майская В. Беспроводные сенсорные сети, малые системы – большие баксы // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2005. – №10. – С. 18-22.
- [5] Беспроводные технологии и их применение в промышленности. Передача речевой информации через WPAN. URL:<http://www.russianelectronics.ru/leader-r/review/2187/doc/54063/> .
- [6] Панфилов Д., Соколов М. Введение в беспроводную технологию ZigBee стандарта 802.15.4. URL:<http://www.freescale.com/files/abstract/global/s50210.pdf> .

REFERENCES

- [1] Nitaigour P.M. (Editor) Sensor networks and configuration fundamentals, standards, platforms, and applications // Springer. — 2007. — 510 p.
- [2] Kucheryavii E.A. The principles of structure sensor and sensor networks / E.A. Kucheryavii, S.A. Molchan, V.V. Kondtaiev // Electrical connection, 2006. - №6 – p.10-15. (in Russ.).
- [3] Molchanov D.A. Application of wireless sensor networks / D.A. Molchanov, E.A. Kucheryavii // Electrical connection, 2006. -№6 – p.20-23.(in Russ.).
- [4] Mayskaya, V. The wireless sensor networks, little systems – the big price // Electronica: The Science, Technology, Business. – 2005. - №10. – p. 18-22. (in Russ.).
- [5] The wireless technologies and its using in industry. Transmission of voice information through WPAN. URL:<http://www.russianelectronics.ru/leader-r/review/2187/doc/54063/> (in Russ.).
- [6] Panphilov, D., Sokolov, M. Introduction to wireless technology of ZigBee standart 802.15.4. URL:<http://www.freescale.com/files/abstract/global/s50210.pdf>. (inRuss.).

БЕСПРОВОДНЫЕ СЕНСОРНЫЕ СЕТИ

К. Т. Бажиков, А. О. Касимов, С. А. Усембаева, Г. Толепбергенова

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: беспроводные сенсорные сети, телекоммуникация.

Аннотация. Беспроводные сенсорные сети (БСС) являются одним из самых перспективных направлений развития современных телекоммуникационных технологий.

Беспроводная сенсорная сеть (БСС) – это распределенная сеть необслуживаемых миниатюрных электронных устройств (узлов сети), которые осуществляют сбор данных о параметрах внешней среды и передачу их на базовую станцию посредством ретрансляции от узла к узлу с помощью беспроводной связи.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 66 – 72

METHOD STRONGLY CONNECTED CHANNELS AND INELASTIC SCATTERING OF ALPHA PARTICLES AT EVEN ISOTOPES OF Ne, Mg

K. Baktybaev, A. Dalelkhankyzy, M.K. Baktybaev¹

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
Institute of nuclear physics NNC RK, Almaty, Kazakhstan¹. E-mail: dal_anar@mail.ru

Keywords: nucleus, nuclear states, nuclear reactions, the Hamiltonian.

Abstract. The processes of interaction of alpha particles with collective states of nucleus of Ne, Mg by strongly-connected channels of nuclear reactions are studied. As the collective Hamiltonian states the SU (5) symmetry models of interacting bosons are taken. Theoretically found angular distributions of cross sections are compared with their experimental values.

УДК 530.142

МЕТОД СИЛЬНО-СВЯЗНЫХ КАНАЛОВ И НЕУПРУГИЕ РАССЕЙЯНИЯ АЛЬФА-ЧАСТИЦ НА ЧЕТНЫХ ИЗОТОПАХ Ne, Mg

К. Бактыбаев, А. Далелханкызы, Н.О. Койлык, М.К. Бактыбаев¹

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
Институт ядерной физики НЯЦ РК¹, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: ядро, ядерные состояния, ядерные реакции, гамильтониан.

Аннотация. Изучены процессы взаимодействия альфа-частиц с коллективными состояниями ядер неон, магний Ne, Mg методом сильно-связных каналов ядерных реакций. В качестве гамильтониана коллективных состояний взяты SU(5) симметрия модели взаимодействующих бозонов. Теоретически найденные угловые распределения сечений процессов сравнены с их экспериментальными величинами.

I. Введение. В теории ядерных реакций имеются более реалистические подходы, такие как метод сильной связи каналов (МССК). В качестве гамильтониана коллективных состояний ядер-мишеней, в этом методе, ранее использовался гамильтониан Бора-Маттельсона [1, 2].

В данной работе содержание этой теории МССК мы несколько видоизменили, приняв для описания коллективных состояний ядер-мишеней модель взаимодействующих бозонов (МВБ). Поскольку в работе изучается рассеяние ядерных частиц на сферических ядрах, то в гамильтониане МВБ оставляются члены, описывающие вибрационные состояния с SU(5)-симметрией. Для расчета используется также программа ECIS 88 [3] несколько видоизмененная с заменой потенциала связывания каналов реакции оператором взаимодействия частиц с бозонными коллективными возбуждениями ядер-мишеней.

В первой части работы излагается общая теория рассеяния частиц на коллективных состояниях ядер методом МССК с использованием МВБ, описывающей коллективные возбуждения как состояния взаимодействующих бозонов.

Теория прилагается к исследованию рассеяния ${}^4\text{He}$ на основных состояниях легких ядер ${}^{20}\text{Ne}$, при энергии налетающей частицы $E = 48,8$ МэВ и ${}^{24}\text{Mg}$, при энергии α -частиц

$E = 50,5$ МэВ. В этом случае точно учитывается влияние первых возбужденных состояний 2_1^+ ядер на процессы рассеяния основным уровнем 0_1^+ . Параметры оптического потенциала взяты из систематики С.М.Перей [4] и Института Ядерной физики [5]. Слабые изменения параметров не превышали квадратичных ошибок указанных систематик.

II. Уравнения ядерных реакций связанных каналов. Предположим, что имеются возбужденные N_s состояний ядра-мишени, которые сильно связаны между собой с основным его состоянием посредством потенциалов связи между каналами реакций $V_{св}$. Обозначим спин, четность и энергию n -состояния I_n, π_n и ω_n , соответственно. Если энергия падающей частицы (в системе центра масс) равна E_1 , тогда энергия частицы, покидающей мишень из n -состояния равна $E_n = E_1 - \omega_n$.

Гамильтониан всей системы:

$$H = T + H_i + V(r, \theta, \varphi) = T + H_i + V_{\text{диаг}} + V_{\text{св}}, \quad (1)$$

где T - кинетическая энергия налетающей частицы и H_i - Гамильтониан движения внутренних нуклонов ядра-мишени.

Потенциал взаимодействия налетающей частицы с мишенью разделим на диагональную часть и часть связывания каналов рассеяния частицы.

$$V(r, \theta, \varphi) = V_{\text{диаг}} + V_{\text{св}} \quad (2)$$

волновая функция Ψ можно записать равенством:

$$\Psi = r^{-1} \sum_{J_n \ln j_n} R_{J_n \ln j_n}(r) \sum_{m_j M_n} (j_n I_n m_j M_n | JM) Y_{\ln j_n} \Phi_{I_n M_n}, \quad (3)$$

где $\Phi_{I_n M_n}$ - волновая функция ядра-мишени в n -состоянии, которая определяется из решения уравнения:

$$H_i \Phi_{I_n M_n} = \omega_n \Phi_{I_n M_n} \quad (4)$$

Теперь, подставляя (2) и (3) в уравнение Шредингера и умножая (4) на $(Y_{\ln j_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM}^*$ с левой стороны и интегрируя по всем координатам, за исключением радиальной переменной r и, деля уравнение на E_n , получаем уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho_n^2} - \frac{\ln(\ln+1)}{\rho_n^2} - \frac{1}{E_n \omega_{\text{диаг}}} + 1 \right) R_{J_n \ln j_n} = E_n^{-1} \sum_{n' \ln' j_n'} \langle (Y_{\ln j_n} \otimes \Phi_{I_n})_{JM} | V_{\text{св}} | (Y_{\ln' j_n'} \otimes \Phi_{I_n'})_{JM} \rangle R_{J_n' \ln' j_n'}(r) \quad (5)$$

где $\rho_n = k_n r$; k_n - волновое число.

Это уравнение представляет набор n связанных между собой уравнений. Эта система (5) носит название системы уравнений метода сильной связи каналов, а величины на правой стороне называются матричными элементами связи каналов.

Если в системе (5) учитываются V_{12} и V_{21} недиагональные матричные элементы. Тогда получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{d\rho_1^2} - \frac{l_1(l_1+1)}{\rho_1^2} + \frac{1}{E_1} V_{11} - 1 \right] R_1(\vec{r}) = -\frac{1}{E_1} V_{12} R_2(\vec{r}), \\ \left[\frac{d^2}{d\rho_2^2} - \frac{l_2(l_2+1)}{\rho_2^2} + \frac{1}{E_2} V_{22} - 1 \right] R_2(\vec{r}) = -\frac{1}{E_2} V_{21} R_1(\vec{r}). \end{cases} \quad (6)$$

Эта система соответствует задаче об описании упругого и неупругого рассеяния, в которых участвуют кроме основного состояния еще одно возбужденное состояние ядра 2^+ .

В данной работе в качестве гамильтониана коллективных возбуждений используем гамильтониан модели взаимодействующих бозонов (МВБ) $SU(3)$ симметрии и применим теорию к рассеянию частиц на вибрационных состояниях сферических ядер.

$$H_i = H_0 + \varepsilon(d^+ d) + \sum_{L=0,2,\eta} \frac{1}{2} (2L+1) c_L [d^+ \cdot d^+]^L [d \cdot d]^{L(0)}. \quad (7)$$

Явление взаимодействия налетающей частицы с ядром будем рассматривать феноменологически посредством оптического потенциала, радиальная зависимость которого предполагается, имеет вид Вудс-Саксоновской функции:

$$V_{\text{опт}} = (-V + iW)(1 + e)^{-1} - 4iW_D e'(1 + e')^{-2} - V_{SO} \left(\frac{\lambda^2}{ar} \right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{l}) e(1 + e)^{-2} + \frac{ZZ'e^2}{2R_e} \left(3 - \frac{r^2}{R_e^2} \right) \theta(R_e - r) - \frac{ZZ'e^2}{r} \theta(r - R_e) \quad (8)$$

В этом равенстве введено обозначение:

$$e = \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right); \quad e' = \exp\left(\frac{r - R'_0}{a'}\right)$$

где R_0, R'_0 - средние радиусы оптического потенциала $R_0 = r_0 A^{1/3}, R'_0 = r'_0 A'^{1/3}; V, W, W_D, V_{SO}$ - параметры оптического и спин-орбитального потенциалов взаимодействия.

Потенциал связи каналов можно в общей форме записать в виде:

$$V_{cs} = \sum_{i,\lambda} v_\lambda^{(i)}(r) (Q_\lambda^{(i)} \cdot Y_\lambda) \quad (9)$$

Q_λ - оператор, действующий только на координаты ядра-мишени. Вычисление матричных элементов этого оператора дает:

$$\langle (Y_{lj} \otimes \Phi_l) JM | V_{cs} | (Y_{l'j'} \otimes \Phi_{l'}) JM \rangle = \sum_{i,\lambda} v_\lambda^{(i)}(r) \langle I || Q^{(i)} || I' \rangle A(l_j I, l'_j I', \lambda J), \quad (10)$$

$$A(l_j I, l'_j I', \lambda J) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-)^{j'-I'+l+l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)(2j+1)(2j'+1)} (ll'00 \lambda 0 W(jl_j I'; J \lambda)).$$

Приведем явное выражение операторов: $Q_{\lambda\mu}^{(1)} = d^+ d$,

$$Q_{\lambda\mu}^{(2)} = \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)} (\lambda_1 \lambda_2 00 | \lambda 0) C_L(2L+1) (d^+ d^+)^L (dd)^L \quad (11)$$

Волновые функции различных вибрационных состояний со спином IM и с одним и двумя бозоннами:

$$|1; IM \rangle = d_{IM}^+ |0 \rangle, \quad |2; IM \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{\lambda_1 \lambda_2}}} (d_{\lambda_1}^+ d_{\lambda_2}^+)_{JM} |0 \rangle$$

Для сферических ядер $v^{(\lambda)}(r)$ имеет вид.

$$v^{(\lambda)}(r) = 4\pi \int_0^1 \frac{-(v + iw)}{1 + \exp\left[\frac{r - R_0}{a} \left(1 + \sum \beta_\lambda \varphi_{\lambda\mu}(\theta)\right)\right]} + \frac{-4iW_D \exp\left[\frac{r - R_0}{a} \left(1 + \sum \beta_\lambda \varphi_{\lambda\mu}(\theta)\right)\right]}{\left[1 + \exp\left[\frac{r - R_0}{a} \left(1 + \sum \beta_\lambda \varphi_{\lambda\mu}(\theta)\right)\right]\right]} \times Y_{\lambda\mu}(\theta) d \cos(\theta) \quad (12)$$

Решение системы зацепляющихся дифференциальных уравнений для радиальных функции $R_{l_j j' j'}(\vec{r})$ с определенными граничными условиями дает возможность найти элементы S - матрицы и построить сечения упругого и неупругого рассеяния.

Которые выражаются в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2}{\hbar^4} \mu^2 \frac{k'}{k} \frac{1}{2S+1} \sum_L B_L P_L(\cos \theta) \quad (13)$$

$$B_L = \sum_{l'l'j_1j_1'l_1l_1'} (-)^{l'-l} (2J+1)(2J_1+1) Z \left(l'l_1j_1 | \frac{1}{2}L \right) Z \left(l'j_1j_1'l_1' | \frac{1}{2}L \right) W(jJ_1J_1 | IL) W(j'J_1'J_1' | I'L) \cdot \\ \cdot \left| \langle JM l'j'I'T | J_1M_1l_1'j_1'I_1' \rangle \langle J_1M_1l_1'j_1'I_1' | T | JM l j I \rangle \right|^2$$

Здесь Z – коэффициенты Благга-Виденхарна, W – коэффициенты Рака, и

$$\langle \bar{K} S \mu'_S I' M'_A | T | \bar{K} S \mu_S I M_A \rangle = i^{l'-l} Y_{l'm-m'-\mu'_s}(\bar{K}) Y_{l'm-m'-\mu'_s}(\bar{K}') (IM - M_A - \mu_S S \mu_S | jM - M_A) \cdot \\ \cdot (IM_A jM - M_A | JM) (l'M - M'_A - \mu'_S S \mu'_S | j'M - M'_A) (I'M'_A j'M - M'_A | JM) \cdot \\ \cdot \langle l'j'I'JM | T | l j I JM \rangle \quad (14)$$

Отметим, что дифференциальное сечение (13) является общим и не зависит от того, в какой модели вычисляются элементы T - или S -матрицы.

III. Приложения теории к рассеянию α -частиц на легких вибрационных ядрах и сравнение их с экспериментальными данными. Теория рассеяния α -частиц, с учетом связывания каналов рассеяния, приложена к процессам происходящим на самых нижних состояниях сферических легких ядер ^{20}Ne и ^{24}Mg . Мы рассмотрели рассеяния α -частиц с энергиями близкими к 50 МэВ на основных состояниях указанных ядер. Для облегчения компьютерного счета и с целью анализа возможности теории учитывались влияние только первых возбужденных состояний с $J = 2^+$ на основное состояние ядер. Такое рассмотрение связи каналов в этих ядрах можно считать приемлемым, поскольку, остальные возбужденные состояния находятся довольно высоко, примерно на 3 МэВ выше первого возбужденного состояния. Поэтому рассмотрим решения двух связанных между собой уравнений (6). Известно, что рассеяние α - частиц на основных состояниях ядер описывается, в общем оптической моделью, с использованием комплексного Вудс-Саксоновского потенциала. Обычно получают в этом случае разумное соответствия вычисленных сечений с экспериментальными данными[5].

Для того чтобы анализировать упругое рассеяние α - частиц на большие углы в некоторых работах [6,7] приходилось обобщить Вудс-Саксоновский потенциал с добавлением к нему еще член содержащий высокого порядка.

Недавно Мичел с сотрудниками [6] провели систематические оптико-модельные анализы рассеяния α -частиц на сферических ядрах. Они дали новую параметризацию для действительной части потенциала.

В работе [8] было проведено экспериментальное исследование упругого α - рассеяния на некоторых легких ядрах с $A=11-24$ при энергиях α - частиц $E=48,7$ и $54,1$ Мэв. Данные были анализированы различными типами оптического потенциала и в том числе Мичелского типа. Особое внимание было обращено на концепцию потенциала двойного-фолдинга.

По описываемому нами методу сильной связи каналов мы провели теоретические вычисления дифференциальных сечений процессов рассеяния α -частиц на ядрах ^{20}Ne и ^{24}Mg на всем угловом диапазоне от 12° до 172° . При определении теоретических значений $d\sigma/d\theta$ из общего оптического потенциала исключена часть, отвечающая спин-орбитальному взаимодействию V_{sl} .

На рисунках 1 и 2 представлены угловое распределение дифференциальных сечений по углам рассеяния. На них сплошными линиями изображены экспериментальная картина рассеяния ^4He частиц на ядре ^{20}Ne $E=48,8 \pm 0,6$ Мэв и на ядре ^{24}Mg $E=50.5 \pm 0.5$ МэВ. Пунктирным - расчетные значения.

Экспериментальные данные по сечениям процессов взяты из массива экспериментальных данных Института Ядерной физики Республики Казахстан [3, 5, 9], выполненных на изохронном циклотроне Института. В качестве параметров потенциалов взяты компиляции феноменологических оптико-модельных параметров, выполненных группой Перей [4], и из данных ИЯФ РК [5, 9]. В таблице 1 даны оптимальные параметры процессов взаимодействия при соответствующих энергиях налетающей частицы.

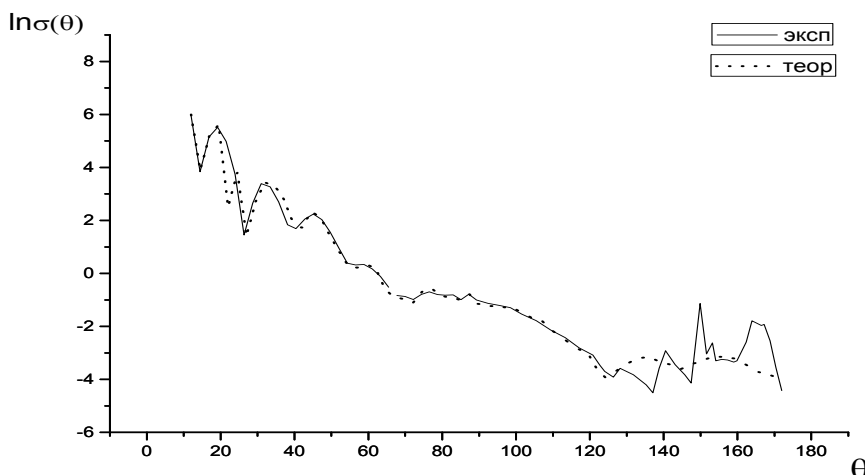


Рисунок 1 – Рассеяния ${}^4\text{He}$ на основном состоянии ${}^{20}\text{Ne}$

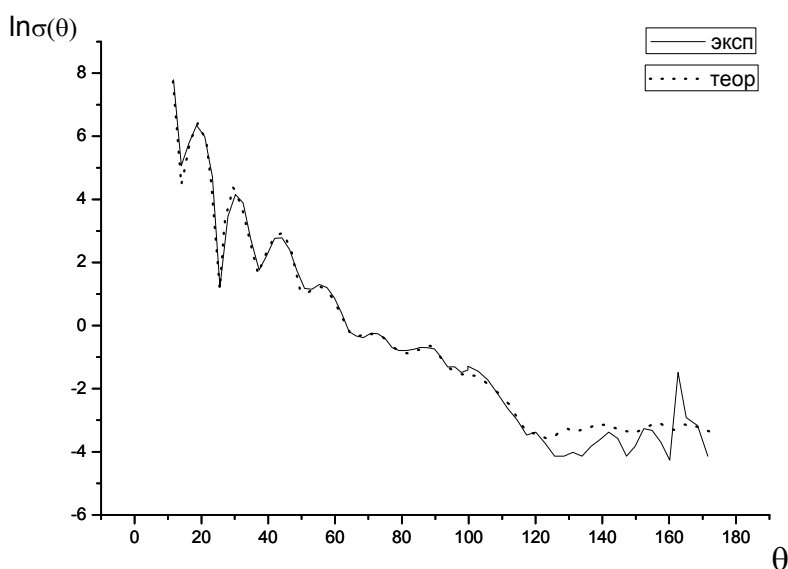


Рисунок 2 – Рассеяния ${}^4\text{He}$ на основном состоянии ${}^{24}\text{Mg}$

Таблица 1 – Оптимальные параметры взаимодействия α -частиц с ядрами

Ядро	E (МэВ)	V_0 (МэВ)	r_0 (Фм)	a_0 (Фм)	Wr (МэВ)	r_v (Фм)	a_v (Фм)
${}^{20}\text{Ne}$	48,8	115,0	1,25	0,8	30,0	1,45	0,85
${}^{24}\text{Mg}$	50,5	100,0	1,30	0,75	35,0	1,40	0,75

Как видно из рисунков 1 и 2, при сравнении вычисленных сечений рассеяния с их экспериментальными значениями получим вполне согласованную картину. Особенно хорошее согласие имеется, в пределах среднеквадратичных ошибок экспериментального измерения $\sigma(\theta)$, в диапазоне углов от начало координат до углов 125° – 130° . Однако теоретические величины сечения значительно отличаются от их экспериментальных значений на задних углах рассеяния в диапазоне больших углов от 125° до 175° . С самого начала можно было бы считать, что общее согласие по всему диапазону углов получим, если несколько изменим параметры оптических потенциалов. Однако, как показано в аналогичных исследованиях, получив удобное согласие на

задних углах рассеяния, в передних углах картина несколько изменится. В некоторых исследованиях для получения общей согласованной картины рекомендуется добавить дополнительный член в выражении оптического потенциала. В таком случае растет число подгоночных параметров. Подчеркнем, что теоретические угловые распределения сечений рассеяния получены нами при тех же значениях параметров, которые использовались в других анализах процессов по другим подходам, особенно, по оптической модели.

В то же время следует помнить, что в процессах рассеяния на задних углах лежит известная физическая причина, связанная с поглощением α -частиц. Но это явление, по-видимому, лежит вне возможности теории сильно-связанных каналов.

IV. Заключение. Таким образом, вычислены матричные элементы операторов $V_{св}$ связи различных каналов рассеяния налетающих частиц с коллективными состояниями ядер-мишеней и найдены решения системы уравнений Шредингера с учетом матричных элементов оператора связи каналов.

Найдены дифференциальные и интегральные сечения взаимодействия налетающих ядерных частиц с коллективными состояниями ядер. Развиваемая теория рассеяния сильно-связанных каналов их приложена к исследованию взаимодействия ${}^4\text{He}$ частиц с основными состояниями легких ядер ${}^{20}\text{Ne}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^{20}\text{Ne}$ при энергии налетающей частицы $E = 48,8$ МэВ и ${}^{24}\text{Mg}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^{24}\text{Mg}$ при энергии налетающей α -частиц $E = 50,5$ МэВ. При этом решались система неоднородных уравнений, связывающая первое возбужденное состояние 2_1^+ ядер с основными уровнями 0_1^+ . Слабое влияние других возбужденных уровней, находящихся на большой высоте порядка 3 МэВ учитывались эффективно корреляцией параметров оптического ядерного потенциала. В то же время эти параметры взяты из систематики С.М. Перей и Института Ядерной физики РК. Теоретически найденные угловые распределения сечений процессов в пределах углов от 10^0 по 175^0 сравнены с их экспериментальными величинами.

Предлагаемый вариант теории МССК, в целом удовлетворительно объясняет свойства процессов рассеяния ядерных частиц на коллективных бозонных состояниях сферических ядер.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бор. О., Маттельсон Б. Структура атомных ядер. – М., 1972.
- [2] Tamura T. Analyses of the Scattering of Nuclear Particles by Collective Nuclei in Terms of the Coupled-Channel Calculation // Rev. Mod. Phys. -1965, -Vol. 37.-P. 679-708.
- [3] Reynal J. Coupled Channel Calculations and Computer Code ECIS-88. NEA Data Bank. CE-Saclay. F-91190.
- [4] Perey C. M., Perey F. G. Compilation of Phenomenological optical-model parameters // Atomic Data and Nucl. Data Tables, -1976, 17, -P. 3-7, 20-43.
- [5] Буртебаев Н.Т., Дуйсебаев А.Д., Иванов Г.Н. Упругое рассеяние 50 МэВ α -частиц на ядрах ${}^{14}\text{N}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{24}\text{Mg}$ и ${}^{28}\text{Si}$ // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. – №6. – С.49-53.
- [6] Michel F., Vander poorten R. Differential cross sections for the α - ${}^{16}\text{O}$ scattering over a wide energy range // Phys. Rev. - 1977. С. 16. -P.142.
- [7] Michel F. et. al. magic closed shell nucleus ${}^{16}\text{O}$ has an α - ${}^{16}\text{O}$ cluster structure // Phys. Rev. -1983. С.28. -P.1904.
- [8] Abele H., Hauser H.J. et. al. Measurement and Folding-Potential Analysis of the Elastic α -scattering on Light Nuclei // Z. Phys. A. Atomic Nuclei.-1987. -Vol. 326 -P. 373-381.
- [9] McNeilly G.S., Thompson W.J., Van Rij W.I., Heydenburg N.P. Reaction mechanism studies in ${}^{24}\text{Mg}(\alpha, \alpha'\gamma){}^{24}\text{Mg}$ // Nucl. Phys. – 1973. – Vol.A204. – P.321-336.

REFERENCES

- [1] Bor O., Mattelson B. Structure of atomic nucleus. - M., 1972. (in Russ.).
- [2] Tamura T. Analyses of the Scattering of Nuclear Particles by Collective Nuclei in Terms of the Coupled-Channel Calculation // Rev. Mod. Phys. -1965, -Vol. 37.-P. 679-708.
- [3] Reynal J. Coupled Channel Calculations and Computer Code ECIS-88. NEA Data Bank. CE-Saclay. F-91190.
- [4] Perey C. M., Perey F. G. Compilation of Phenomenological optical-model parameters // Atomic Data and Nucl. Data Tables, -1976, 17, -P. 3-7, 20-43.
- [5] Burtebaev N.T., Duisebayev A.D., Ivanov G.N. Elastic scattering of 50 MeV α particles on nuclei ${}^{14}\text{N}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{24}\text{Mg}$ and ${}^{28}\text{Si}$. News of AS KazSSR. Ser. phys.-math. - 1984. - №6. - p.49-53. (in Russ.).

- [6] Michel F., Vander poorten R. Differential cross sections for the α - ^{16}O scattering over a wide energy range // Phys. Rev. - 1977. С. 16. -P.142.
- [7] Michel F. et. al. magic closed shell nucleus ^{16}O has an α - ^{16}O cluster structure // Phys. Rev. -1983. С.28. -P.1904.
- [8] Abele H., Hauser H.J. et. al. Measurement and Folding-Potential Analysis of the Elastic α -scattering on Light Nuclei // Z. Phys. A. Atomic Nuclei.-1987. -Vol. 326 -P. 373-381.
- [9] McNeilly G.S., Thompson W.J., Van Rij W.I., Heydenburg N.P. Reaction mechanism studies in $^{24}\text{Mg}(\alpha, \alpha'\gamma)^{24}\text{Mg}$ // Nucl. Phys. – 1973. – Vol.A204. – P.321-336.

КҮШТІ БАЙЛАНСҚАН КАНАЛДАР ӘДІСІ ЖӘНЕ АЛЬФА БӨЛШЕКТЕРДІҢ Ne, Mg ЯДРОЛАРЫНЫҢ ЖҰП ИЗОТОПТАРЫНДА ШАШЫРАУЫ

Қ. Бақтыбаев, А. Дәлелханқызы, М.Қ. Бақтыбаев¹

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
ҚР ядролық физика институты, Алматы, Қазақстан¹

Тірек сөздер: ядро, ядерные состояния, ядерный реакции, гамильтониан.

Аннотация. Неон, магний Ne, Mg ядроларының коллективтік күйлерімен альфа бөлшектердің әсерлесу процесі күшті байланысқан ядролық каналдар теориясы бойынша зерттелді. Коллективтік күйлер гамильтонианы ретінде әсерлесуші бозондар моделінің SU(5) симметриясы алынды. Процестердің бұрыштық үйлесу қыймаларының табылған теориялық мәндері олардың эксперименттегі шамаларымен салыстырылды.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 73 – 77

**ABOUT THE EIGEN VALUE PROBLEM
OF CAUCHY-RIEMANN OPERATOR WITH HOMOGENEOUS
BOUNDARY CONDITIONS OF DIRICHLET TASK TYPE****N. S. Imanbayev**A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan,
Institute of Mathematics and Mathematical Modelling MES RK, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Keywords: Cauchy-Riemann operator, space of continuous functions, Fredholm property, resolvent set, Dirichlet problem type, kernel, Fredholm determinant.**Abstract.** In this paper we consider the problem on the Eigen values of the Cauchy-Riemann equations with homogeneous boundary conditions of the Dirichlet problem, where the quasi-singular integral equation is reduced, and the index is computed and neter set conditions.

УДК 517.945

**О ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ОПЕРАТОРА КОШИ-РИМАНА С ОДНОРОДНЫМИ
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ****Н. С. Иманбаев**Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясауи, Туркестан, Казахстан,
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан**Ключевые слова:** оператор Коши-Римана, пространство непрерывных функций, фредгольмовость, резольвентное множество, задача типа Дирихле, ядро, детерминант Фредгольма.**Аннотация.** В настоящей статье рассмотрена задача на собственные значения оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле, где редуцирована квазисингулярному интегральному уравнению, и вычислен индекс, а также установлена условие нетеровости.

Краевые условия, представляющие собой соотношения между значениями искомых функций, вычисленными в различных (переменных) точках, лежащих на границе, или внутри рассматриваемой области, возникающие в теплопроводности, были сформулированы В.А.Стекловым [1], а в газовой динамике – Ф.И. Франклем [2]. А.М. Нахушевым [3, 5] были поставлены и изучены сразу несколько задач данного типа, а для их названия предложен термин «со смещением». В статье А.В.Бицадзе и А.А.Самарского [4] впервые исследована задача «со смещением внутрь области». Содержание последних публикаций привело к осознанию качественной новизны краевых задач со смещениями для теории дифференциальных уравнений в частных производных. В последних публикациях [6] для уравнений Бицадзе-Лыкова поставлена задача со смещением с операторами Кобера-Эрдейи и М. Сайго в краевом условии, а также исследованы вопросы единственности и не единственности решения задачи при различных функциях и значениях констант, входящих в краевые условия. В работах [5] исследованосостояние краевых задач со смещением для основных

типов уравнений в частных производных. Краевая задача со смещением для уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой изучалась в работах [7]. Обилие публикаций, где изучаются все более общие ситуации, производит иногда впечатление, что теория краевых задач «со смещением» уже завершена. Здесь, однако, имеется ряд менее изученных, но важных вопросов, в частности, задача о собственных значениях или об их аналитическом описании с помощью, например, асимптотических разложений. Применяемые сейчас методы функционального анализа и метод сведения к модельным уравнениям путем интегральных преобразований недостаточны для того, чтобы получить такую детальную информацию. С другой стороны, вряд ли можно надеяться получить, например, решение задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными в столь же явном виде, как это было сделано в аналогичной ситуации для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общность перечисленных выше вопросов для уравнений с частными производными вынуждает в дальнейшем наложить на изучаемые операторы ряд весьма жестких ограничений. Выяснение правильных постановок задач и исследование специфических свойств решений для «неклассических» уравнений удобно начинать с рассмотрения идеализированных моделей, например, с рассмотрения уравнений с постоянными коэффициентами.

В связи с вышеизложенным, целью настоящей работы является:

- Исследование задачи на собственные значения для оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial \bar{z}} = \lambda \omega(z) + f(z), \quad |z| < 1, \quad (1)$$

$$\operatorname{Re} \omega(z) = 0, \quad |z| = 1, \quad (2)$$

$$\operatorname{Im} \omega(0) = 0, \quad z = 0, \quad (3)$$

где λ - спектральный параметр.

Описание общих регулярных краевых задач для дифференциального выражения Коши-Римана, разработаны Дж.Ф. Нейманом, М.И. Вишиком, А.А. Дезиным и в 1982 году М. Отелбаевым, А.Н. Шыныбековым [8].

С другой точки зрения вопросы разрешимости и поведения решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши-Римана глубоко изучались в работах [9-11]. Краевые задачи для обобщенной системы Коши-Римана с негладкими коэффициентами исследовались в работах [12].

В функциональном пространстве $C(|z| \leq 1)$ рассмотрим операторы K , порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z) = \frac{\partial \omega(z)}{\partial \bar{z}} \quad (4)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ на множестве

$$D(K) \subset \left\{ \omega(z) \in C(|z| \leq 1), \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \in C(|z| < 1) \right\}.$$

Считаем, что оператор K имеет непустое резольвентное множество $\rho(K)$. Не умоляя общности, предполагаем, что

$$0 \in \rho(K) \quad (5)$$

т.е. существует ограниченный оператор K^{-1} . В работе [8] описано множество операторов $\{K\}$ со свойством (5).

Наиболее глубокие результаты при исследовании спектра эллиптических операторов имеются в работах [13]. В общем случае спектр эллиптического оператора существенно определяется спектральными свойствами граничного оператора. Однако выяснение зависимости спектра оператора Коши-Римана в исходных терминах граничных условий представляет актуальную (нерешенную) проблему. В работах [14, 15] исследована задача на собственные значения для оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями, в [16] с краевыми условиями типа

Бицадзе-Самарского, где спектральная задача редуцирована к квазисингулярному интегральному уравнению с непрерывным ядром. Основным результатом работы являются следующие

Теорема 1. Решение спектральной задачи (1)-(3) определяется по формуле

$$\omega(z) = \frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{\xi+z}{\xi-z} \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iCe^{\lambda\bar{z}} + u(z)e^{\lambda\bar{z}}, \quad (6)$$

причем для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее квазисингулярное интегральное уравнение

$$a(z)u(z) + \frac{b(z)}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} \frac{u(\xi)}{\xi-z} d\xi + \oint_{|\xi|=1} H(z, \xi, \lambda)u(\xi)d\xi = 0, \quad |z|=1, \quad (7)$$

где $a(z) = e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z}$, $b(z) = e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}$, $H(z, \xi, \lambda) = \frac{e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i} \cdot \frac{z}{\xi} \cdot \frac{1}{\xi-z}$ – непрерывное ядро.

Константа C из общего решения (6) представима в виде

$$\operatorname{Im} \omega(0) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iC + u(0) \right),$$

$$\operatorname{Im} \omega(0) = C = 0.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы общее решение уравнения (1), т.е. (6) подставляем в граничное условие (2). Тогда

$$\operatorname{Re}(\omega(z)) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{\xi+z}{\xi-z} \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iCe^{\lambda\bar{z}} + u(z)e^{\lambda\bar{z}} \right) = 0, \quad |z|=1.$$

Распишем вещественную часть комплексного числа в виде полусуммы комплексного числа и сопряженного, тогда приходим к соотношению при $|z|=1$

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{\xi+z}{\xi-z} \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iCe^{\lambda\bar{z}} + u(z)e^{\lambda\bar{z}} + \left(\frac{-e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} \overline{u(\xi)} \frac{\xi+z}{z-\xi} \cdot \frac{d\xi}{\xi} - iCe^{\bar{\lambda}z} + \overline{u(z)}e^{\bar{\lambda}z} \right) =$$

$$= \left(e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z} \right) u(z) + \frac{e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{\xi+z}{\xi-z} \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iC \left(e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z} \right) = 0 \quad (8)$$

Используя условие (3), исключим вещественную константу C из последнего равенства. Так как $\frac{d\xi}{\xi}$ чисто мнимое число, учитывая, что $u(\xi)$ – вещественная функция, получим

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} u(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\xi} + iC + u(0) \right) = 0,$$

при $z=0$. Отсюда имеем $C=0$. Обозначая через $a(z) = e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z}$, $b(z) = e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}$,

$H(z, \xi, \lambda) = \frac{e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i} \cdot \frac{z}{\xi} \cdot \frac{1}{\xi-z}$ в равенстве (8), приходим к (7).

Итак, спектральная задача (1) – (3) редуцирована квазисингулярному интегральному уравнению (7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Квазисингулярное интегральное уравнение (7) для $u(\xi)$ нётерово при условии, когда $e^{\bar{\lambda}z} \neq 0$. Больше того, индекс нётера $\aleph = \frac{1}{\pi i} \left[\ln(a(z) + b(z)) \right] \Big|_{|z|=1}$ равен нулю при $e^{\bar{\lambda}z} \neq 0$,

где $\left[\bullet \right]_{|z|=1}$ - означает приращение функции, заключенной в квадратные скобки, при обходе $|z|=1$ в положительном направлении [17].

Доказательство. Поскольку выражения $a(z) + b(z)$ и $a(z) - b(z)$ комплексно сопряжены, следовательно, индекс \aleph выражается формулой $\aleph = \frac{1}{\pi i} \Delta_{|z|=1} \arg(a(z) + b(z))$, здесь $\Delta_{|z|=1}$, $\arg(a(z) + b(z))$ - приращение $\arg(a(z) + b(z))$ вдоль $|z|=1$, пробегаемом в положительном направлении.

Нётеровость уравнения (7) определяется неравенствами $a(z) \neq 0$ или $b(z) \neq 0$ при всех $|z|=1$. Следовательно, нётеровость нарушается при выполнении

$$\begin{cases} e^{\lambda \bar{z}} + e^{\bar{\lambda} z} = 0 \\ e^{\lambda \bar{z}} - e^{\bar{\lambda} z} = 0 \end{cases} \Rightarrow e^{\lambda \bar{z}} = e^{\bar{\lambda} z}.$$

Таким образом, нётеровость гарантируется при $2e^{\bar{\lambda} z} \neq 0$.

Известно ([17], стр. 126), что $\arg(a(z) + b(z)) = \text{Arg}(2e^{\bar{\lambda} z}) = \text{Im}(\bar{\lambda} z)$. Здесь учтено, что $b(z)$ - чисто мнимая, $a(z)$ - вещественная функция. Пусть окружность $|z|=1$ обходится против часовой стрелки. Найдем индекс $\aleph = \frac{1}{\pi} \Delta_{|z|=1} \text{Im}(\bar{\lambda} z)$. Для вычисления приращения мнимой части $\bar{\lambda} z$ заметим, что когда z делает один оборот против часовой стрелки вдоль единичной окружности, величина $\bar{\lambda} z$ совершает такой же оборот вдоль окружности радиуса $|\lambda|$. При этом мнимая часть $\bar{\lambda} z$ изменяется на вертикальном отрезке от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ дважды: один раз проходит от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ вверх, а затем совершает тот же путь в обратном направлении. Итак, приращение мнимой части величины $\bar{\lambda} z$ равно нулю, когда z делает один оборот вдоль единичной окружности. Следовательно, индекс \aleph квазисингулярного интегрального уравнения (7) равен нулю. Теорема 2 доказана.

В заключении автор выражает благодарность академику НАН РК М. Отелбаеву и д.ф.-м.н., профессору Б.Е. Кангужину за плодотворное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. Т. I, II, Петроград: Петроградский университет, 1922.
- [2] Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения// Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, №2. С.196-202.
- [3] Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения// Доклады АН СССР, 1969. Т.187, №4. С. 736-739.
- [4] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Доклады АН СССР, 1969. Т.185, №4. С. 739-740.
- [5] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: «Наука», 2006. 287 с.
- [6] Арланова Е.Ю. Задача со смещением для уравнения Бицадзе-Лькова// Вестник Самарского Гос. техн. университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2012.- выпуск 4(29).- С. 26-36.
- [7] Касимова Д.Е., Тунгатаров А.Б. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой// Межвузовский сборник научных трудов: «Обобщенные аналитические функции и их приложения».- Караганда: КарГУ, 1997.-С. 48-53.
- [8] Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР.-1982.- Т.265, №4.-С.815-819.
- [9] Ying Wang, Yufeng Wang Two Boundary-Value Problems for the Cauchy-Riemann Equation in a Sector// Complex Analysis and Operator Theory. 2012, Volume 6, issue 6, pp 1121-1138.
- [10] Тимофеев А.Ю. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши-Римана в пространствах, описываемых модулем непрерывности// Уфимский матем. журнал. Том 4, №1 (2012). – С. 146-152.
- [11] Ильчуков А.С. О поведении решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши-Римана// Вестник Удмуртского университета. Сер. Матем. Мех. Компьютерные науки. 2013. Вып. 2.

- [12] Оспанов К.Н., Отелбаев М. Краевые задачи для обобщенной системы Коши-Римана с негладкими коэффициентами // Доклады АН СССР.-1985.-Т.283.-№1. С.46-49.
- [13] Михайлец В.А. Спектральные задачи с общими краевыми условиями: Автореф. дис... д.ф.-м.н.-Киев, 1989.-29 с.
- [14] Иманбаев Н.С. О приближенном решении уравнений Коши-Римана и об определении их собственных значений. Автореф. дисс...к.ф.-м.н. –Алматы, КазНУ им. аль-Фараби. 1997. 21 с.
- [15] Иманбаев Н.С. Задача о собственных значениях дифференциального оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «физико-математические науки», №1(34)-2014.- С.25-36.
- [16] Amanzholova A.B., Imanbaev N.S., Niyazymbetov A.D. On an inhomogeneous boundary value problem with shift into the region for the Cauchy-Riemann equations with spectral parameter // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – V. 93, - №3, - 2014, P. 449-461.
- [17] Титчмарш Е. Теория функций. – М.:Наука, 1980. – 463 с.

REFERENCES

- [1] Steklov V.A. The main problems of mathematical physics. V.I, II, Petrograd: Petrograd University, 1922. (in Russ.).
- [2] Frankl F.I. Airfoil gas with local supersonic zone, ending the direct shock wave. Applied Mathematics and Mechanics. 1956. V. 20, №2. p.196-202. (in Russ.).
- [3] Nakhushev A.M. The new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 1969. V.187, №4. p. 736-739. (in Russ.).
- [4] Bitsadze A.V., Samarsky A.A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems. Reports of the USSR Academy of Sciences, 1969 V.185, №4. p. 739-740. (in Russ.).
- [5] Nakhushev A.M. Problem with shift for partial differential equations. М.: "Наука", 2006. 287 p. (in Russ.).
- [6] Arlanova E.Yu. Problem with shift for Bitsadze-Lykov equation. Bulletin of the Samara State. tehn. University. Ser. phys.-math. 2012.- Issue 4 (29).- p. 26-36. (in Russ.).
- [7] Kasymova D.E., Tungatarov A.B. A boundary value problem with shift for the Carleman-Vekua equation with a singular point. Interuniversity collection of scientific papers: "Generalized analytic functions and their applications" .- Karaganda: KarSU, 1997-p 48-53. (in Russ.).
- [8] Otelbaev M., Shynybekov A.N. Well-posedness of Bitsadze-Samarsky. Reports of Akad 1982-V.265, №4.-p.815-819. (in Russ.).
- [9] Ying Wang, Yufeng Wang Two Boundary-Value Problems for the Cauchy-Riemann Equation in a Sector. Complex Analysis and Operator Theory. 2012, Volume 6, issue 6, pp 1121-1138.
- [10] Timofeev A.Yu. Boundary value problem for the generalized Cauchy-Riemann equations in spaces described by modulus of continuity // Ufa Mat. magazine. Volume 4, №1 (2012). - p. 146-152. (in Russ.).
- [11] Il'chuk A.S. On the behavior of solutions of boundary value problems for the generalized Cauchy-Riemann equations. Bulletin of Udmurt University. Ser. Mat. mech. Computer Science. 2013. Issue 2. (in Russ.).
- [12] Ospanov K.N., Otelbaev M. Boundary problem for generalized Cauchy-Riemann system with nonsmooth coefficients. Reports of Akad, 1985. V.283.-№1. p.46-49. (in Russ.).
- [13] Mikhailets V.A. Spectral problems with general boundary conditions: Author. dis ... D.Sc., Kiev, 1989.-29. (in Russ.).
- [14] Imanbaev N.S. The approximate solution of Cauchy-Riemann equations and determination of their own values. Abstract. Diss ... Cand. Mathematical Sciences. Almaty, KazNU named after Al-Farabi. 1997. 21 pp. (in Russ.).
- [15] Imanbaev N.S. The problem of the eigenvalues of differential Cauchy-Riemann operator with nonlocal boundary conditions. Bulletin of the Samara State Technical University. A series of "physical and mathematical sciences», №1 (34) -2014.- p.25-36. (in Russ.).
- [16] Amanzholova A.B., Imanbaev N.S., Niyazymbetov A.D. On an inhomogeneous boundary value problem with shift into the region for the Cauchy-Riemann equations with spectral parameter. International Journal of Pure and Applied Mathematics. - V. 93, - №3, - 2014, P. 449-461. (in Russ.).
- [17] Titchmarsh E. Theory of functions. - Moscow: Nauka, 1980. - 463 p. (in Russ.).

ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ ТЕКТЕС БІРТЕКТІ ШЕТТІК ШАРТТАРМЕН БЕРІЛГЕН КОШИ-РИМАН ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІН ЗЕРТТЕУГЕ БЕРІЛГЕН ЕСЕП ТУРАЛЫ

Н. С. Иманбаев

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан,
ҚР БжҒМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: Коши-Риманоператоры, үзіліссіз функциялардың кеністігі, фредгольмдік, резольвенттік жиын, Дирихле тектес есебі, ядро, Фредгольманықтаушы.

Аннотация. Дирихле тектес есебі түріндегі біртекті шекаралық шарттармен берілген, Коши-Риман дифференциалдық амалынан туындайтын оператордың меншікті мәндерін зерттеуге арналған есептің үзіліссіз ядролы квазисингулярлық интегралдық теңдеумен эквиваленттілігі дәлелденген, нетерлік шарты айқындалып, индексінің нөлге тең екендігі көрсетілген.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 78 – 82

**IMPROVEMENT OF TRAINING TEACHERS
IN THE ACTIVE DEVELOPMENT
OF INFORMATION TECHNOLOGY**

Zh. Zh. Kozhamkulova¹, T. K. Koishieva², A. N. Nusipbekova¹, A. Ibadullaeva²

¹Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan,

²Ahmet Yassawi IKTU, Turkestan, Kazakhstan.

E-mail: ekojaz@mail.ru

Key words: information technology, teaching methods, future teacher.

Abstract. This article deals with the description of perfection bases of vocational training of the future teachers in the conditions of information technology active development. Bases of the content and form of teaching, teaching aids and methods for sorting of didactic professional credit and excellence in the training of the future teachers are regarded.

ӘОК 622.011.4+622.023

**АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫҢ ҚАРҚЫНДЫ ДАМУЫ
ЖАҒДАЙЫНДА БОЛАШАҚ МҰҒАЛІМДЕРДІ
КӘСІБИ ДАЙЫНДАУДЫ ЖЕТІЛДІРУ**

Ж. Ж. Қожамқұлова¹, Т. Қ. Қойшиева², А. Н. Нүсіпбекова¹, А. Ибадуллаева²

¹Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан,

²Қ. А. Ясауи атындағы ХҚТУ, Түркістан, Қазақстан,

Тірек сөздер: ақпараттық технология, оқыту әдісі, болашақ мұғалім.

Аннотация. Мақалада ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы жағдайында болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауды жетілдіру негізі қарастырылған. Болашақ мұғалімді даярлауда оқыту мазмұны мен формаларын, оқу құралдары мен әдістерін іріктеуде дидактикалық кәсіби ұстаным негізге алынған.

Қазақстан Республикасының білім беру саясатының бағдарлы қағидаларын қалыптастырудың басымды бағыттары ретінде көптеген мәселелерді атқару көзделген. Ол, ең алдымен үздіксіз білім беру жүйесінің барлық салаларында білім беру стандарттарын жасау және іске қосу, білім беру мекемелерінің қаржылық механизмдерін құру, білім берудің жергіліктілік, аймақтық және республикалық ерекшеліктерін ескеру, білім берудің барлық үдерістерін ізгілендіру, ақпараттық технология құралдарын енгізу, білім берудің мемлекеттік емес секторларын, әсіресе, жалпы орта және арнаулы орта білім беру салаларының деңгейін көтеру, білім беру мекемелеріндегі жауапкершілікті арттыру, дүниежүзілік кеңістікке енуді қамтамасыз ету, ұлттық білім беру деңгейін халықаралық стандартқа сәйкестендіру, республикадағы білім берудің тиімді құқықтық базасын құрумен байланысты.

Болашақ мұғалімді даярлауда оқыту мазмұны мен формаларын, оқу құралдары мен әдістерін іріктеуде дидактикада кейінгі кезде айтылып жүрген кәсіби мақсатты көздеу ұстанымын негізге алудың маңызы зор.

Оқу үдерісінде болашақ мұғалімнің теориялық даярлығын жетілдіруде кәсіби мақсатты көздеу ұстанымын ескерудің өзіндік ерекшеліктері бар. Білім мазмұнын анықтауда, объектілі-бағдарлы жобалауға оқыту туралы ғылыми курстарды меңгертуде оқу материалдарын студенттің әдіс-темелік-кәсіби шеберлігін жетілдіруге бағытталып құралған жөн. Осы тұрғыда пәнаралық байланысты жүзеге асырып отырудың рөлі ерекше [1].

Сонымен, бұрыннан қалыптасқан дәстүрлі сабақ беру әдісіне компьютердің, ақпараттық технологиялардың жаңаша өзгеріс пен жаңа идеялар қосқаны баршаға мәлім. Ал бүгінде жиі қолданылатын ақпараттық технологиялардың түсініктерінің мағынасы төмендегідей [2]:

- оқыту технологиялары;
- оқытудың заманауи ақпараттық технологиялары;
- оқытудың интерактивті режимі;
- оқытудың компьютерлік технологиялары;
- мультимедиялық технологиялар;
- ақпараттық, білім ортасына байланысты түсініктердің алуан түрлері.

Қоғамымызда демократиялық түрде болып жатқан өзгерістер еліміздегі үздіксіз білім беру саласының барлық құрылымын, оның ішінде жоғары мектепті де соған лайық жетілдіруді талап етеді. Жоғары білім беру жүйесінің құрылымы бірдеңгейлі, сатылы емес көпдеңгейлі жүйе болып отыр. Бұл ретте үздіксіз білім беру жүйесінің қызмет етуі жағдайында қоғамның тікелей әлеуметтік сұранысынан шығатын арнайы кәсіби пәндерді және ғылыми-техникалық үдерістің талабынан туындайтын ақпараттық-компьютерлік технологияларды меңгеру болып табылатынын атап көрсеткен жөн. Бұл екеуі де ЖОО түлектерінің ақпараттық мәдениетін арттырудың аса маңызды құралы болып табылады. Бұларды білмесе, олар қазақстандық қоғам жағдайында функционалдық сауатсыз маман болып қала береді.

Қазіргі ақпараттық технологиялардың қарқынды даму кезеңін революциялық немесе эволюциялық тұрғыда бағалауда бағдарламалық қамтамасыздандыруды жобалау және жасау саласынан мамандардың пікірлерінің [3-5] бір-біріне сәйкес еместігі байқалады. Дегенмен олардың барлығы да, соңғы онжылдықта бағдарламалық жобалау әдіснамасының, жобалауды аутоматтандыру құралдарының, стандарттарды жасауда, ақпараттық технологияларды қолдану аймағының ауқымды түрде кеңеюінің дами түсуіндегі үлкен серпілісті мойындайды. Сонымен қатар, қоғамды ақпараттандыру жағдайында ерекше көкейкесті болып табылатын сапалы бағдарламалық қамсыздандыруды жасау және оны бағалау технологияларына байланысты мәселелер ашық түрде қалып отыр. Мына [6, 7] еңбекте қарастырылған, техникалық құралдардың дамуындағы төңкеріс кезеңі, бір жағынан маңызды кейбір мәселелерді шешуге ықпал жасайды, ал екінші бір жағынан жобалаумен байланысты ақпараттық технологиялардың дамуына бағдарламалық қамсыздандыруды жасау мен қолдануға түрткі болып табылады.

Осы айтылғандар болашақ мұғалімдерді ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы жағдайында, оның құралдарына, оқытуды жетілдіруді назарға ала отырып зерттеудің көкейкестілігін айқындайды.

Осыған байланысты біздің көзқарасымыз бойынша болашақ мұғалімдерді дайындауда оқытылатын информатика мен ақпараттық технологиялардың фундаментальды ұғымдары осылайша білім берудің құраушылары бола отырып, оны қалыптастыруға ықпал ететін құралдардың бірі болып табылады. Білімгерлердің тұлғалық ерекшеліктері мен кәсіби қызығушылықтарын және «әлеуметтік» тапсырысты ескере отырып, оқыту мақсаттарына жетуді оңтайлы түрде іске асыруды қамтамасыз ететін инновациялық педагогикалық технологияларды жасау өзекті бір мәселе болып табылады. Қазір мектептерде, колледждерде, ЖОО-да және кәсіпке оқыту орталықтарында кәсіпке баулу бағытында информатика мен ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектіге-бағытталған жобалау негізінде жаппай оқыту арқылы болашақ мамандардың білімдері мен іскерліктерін жетілдіруге көп көңіл бөлу қажет.

Бұл жағдайда (социум) әлеуметтік орта жеке тұлғаға жоғары талаптар ұсынады, яғни қазіргі өзгермелі жағдайларға бейімделу, икемділік, өзін-өзі жетілдіру, жеке тұлғаның қоғамның даму мақсаттарын сезінуі, қоғам дамуының мақсаттарын өзінің жеке мақсаттарымен сәйкестендіру.

Сонымен қатар, әлеуметтік орта өз тарапынан қоғамның қазіргі жағдайына «бейімделуі» қажет. Мысалы, жаңа америкалық басқару философиясы [8], іскерлік ұйымдастыру – ашық жүйе

деп назарға алатын жүйелілік және жағдайлық ыңғайға негізделген. Фирма жетістігі, оның сыртқы қоршаған экономикалық, ғылыми-техникалық, саяси-әлеуметтік ортасына қаншалықты нәтижелі түрде бейімделуіне байланысты болады. Фирма ең алдымен өзінің ішкі құрылымдарының иілгіш-икемділігі мен бейімделгіштігіне, адами потенциалдың өспелі рөлін ескеруге қамқорлық жасауы тиіс.

Сонымен біздіңше, қоғам дамуының қазіргі кезеңін сипаттайтын фундаменталды ұғымдар: ақпарат, басқару, өзін-өзі ұйымдастыру болып табылады, уақыт факторын ескеру білімді жинақтау мен синтездеу қажеттігіне, адамзат қоғамының жемісті дамуы үшін оларды жылдам және рационалды қолдану жолдарын жасауға алып келеді.

Осындай жағдайда, білім беру жүйесі мен оның құраушылары (ЖОО құрылымы мен қызметін, оқу жоспарларын, бағдарламаларын, жекелеген пәндердің мазмұнын) мына бағыттарда жетілдіру қажет:

- басқаруды даярлаудың тиімділігін көтеру, даярлаула ақпараттық жүйелерді қолдану;
- сыртқы әсерлерге (ғылыми болжауды ескеру, екпінді кезеңнің, практиканың талаптарынан тәуелді түрде оқыту мақсаттары мен мазмұнын жедел түзету) бейімдеу, неғұрлым икемді болу;
- болашақ мұғалімдерге (өзін-өзі оқыту) өздігінен білім алу біліктері мен дағдыларын қалыптастыру, бұл тұлғаның қазіргі тұрақты түрдегі өзгермелі жағдайларға бейімделуіне қажетті жағдай және жеке тұлғаны өздігінен жетілдіру үшін алғышарт болып табылады;
- білімгерлер үшін оқулық, ғылыми сипаттағы ақпараттарға еркін енуді қамтамасыз ету;
- білім беру жүйесінің әртүрлі құрылымдарында, әртүрлі кезеңдерінде ақпараттық технология құралдарын кеңінен қолдану;
- ақпаратты іздеу, оған ену мүмкіндігі, ақпарат алмасу үшін коммуникацияның замани құралдарын қолданудың қажетті іскерліктері мен дағдыларын қалыптастыру;

Ақпараттық технологиялардың дамуы білім беру жүйесі мен оның құраушыларын жетілдіру қажеттігін алдын-ала анықтай отырып, осы жүйені жетілдіру жолдарын оқып-үйрену мен анықтау үшін практикалық тұрғыда оларды тиімді қолдану мүмкіндігін береді.

Сондықтан, оқу үдерісіне жаңа бағыт беріп, оның даму жолдарын ХХІ ғасырдың талабына сәйкес айқындау үшін білімнің әртүрлі салаларына білім және ғылым, білім және адам құқығы, білімнің қоғам дамуындағы әсері, білім беру барысындағы жаңа технологияларға, т.б. талдау жасалып қорытындылану қажет.

Қоғамды, білім беруді ақпараттандыру жағдайында бүгінгі күнде ақпараттық-компьютерлік технологияларды тиімді де нәтижелі пайдалану үшін біріншіден, жалпы білімділік және кәсіби сауаттылық қажет. Олай дейтініміз, ЭЕМ-мен жұмыс жасағанда, қандай да болсын (табиғи тіл қатынасында да) сөйлем қателіктерін түсінбейтінін ескеру керек. Ол тек өзіне арналған арнайы бағдарламалау тілдерінің алфавитінде жазылған алгоритм-бағдарламаны ғана орындайды. Сонымен бірге қолданушы бағдарламалардың көмегімен шектеулі амалдарды атқару мүмкіндігіне ие.

Ал ақпараттық-компьютерлік технологиялар көмегімен бұл міндеттерді дұрыс шешу үшін объектінің, құбылыстың моделін дұрыс құра білу керек. Бұл кезде біздіңше мәселенің ақпараттық, математикалық компьютерлік модельдерін құру мақсатқа сай келеді. Сондықтан болашақ мұғалімдерге объектілі-бағдарлы жобалау негізінде білім бере отырып дайындау бүгінгі күн сұранысынан туындап отырғандығын айғақтайды.

Білім беру үдерісінде компьютерлердің, ақпараттық технологиялардың кеңінен қолданылуы интерактивті жүйе құруға алып келді. Интерактивті жүйе жеке компьютерді пайдалану, сондай-ақ бейне дискілі құрал және теледидар кешендері негізінде құрылады. Мұндай қазіргі заманғы кешендер интерактивті оқытуда аса қымбат тұрғанымен, көрнекілік пен кері байланысты қамтамасыз етеді.

Компьютерлік оқыту интерактивті электронды оқытудың бір бөлігі болып табылады және ол техникалық құралдардың бірі ретінде есептегіш машинаны пайдалануды қамтиды. Демек, оқытудың мұндай жүйесінің құралы – компьютер болып саналады.

Компьютерлік оқытудың әдіснамасын, ұстанымдарын, әдістемесін игеру мұғалімнің мамандығына қарамастан профессиограмма мен инвариантты біліктілігі талаптарына сай болуы тиіс.

Сабақ барысында және тыс жұмыстарда ақпараттық-компьютерлік технологияларды пайдалану студенттерді оқыту, тәрбиелеу және дамыту міндеттеріне сай, сондай-ақ сабақтың мақсаты

мен мазмұнына және оның кезеңдеріне сәйкес әртүрлі есептегіш машиналары құралдарының дифференциясы біркелкі жағдайда кешенді болмақ.

Ақпараттық технологиялар оқытудың барлық техникалық құралдары кешенінің бөлігі болып табылады (компьютерлік оқыту анықтамасына сәйкес). Оған жоғары оқу орындарындағы оқыту мен тәрбиелеудің қазіргі заманғы құралдарын кешенді пайдаланудың негізгі дидактикалық талаптарын қолдануға әбден болады.

Ақпараттық-компьютерлік оқыту бағдарламалары оқу үдерісін талдау мүмкіндігін кеңейтеді, яғни ол теориялық негіздерін құрайтын бағдарланған оқытудың мынадай жалпы ұстанымдарын қолдануға ыңғайлы:

- өзара тығыз байланысты материалдарды үзінді-блоктарға бөлу (қадамдарға). Бағдарламаны автордан оқу материалын тиянақты талдауды, мәтін бөліктері арасындағы байланыстың тығыз қисыны мен мазмұнын анықтауды талап етеді.

- алгоритмдерді (бағдарланған мәтіндерді) оқып үйренуге білімгерлер белсенділігін арттыру, яғни жеке қадамдар мазмұны үйренушіде терең талдаулар дағдысын қалыптастыруға бағытталады.

- оқушының әрбір жауабына артынша баға беру, яғни студенттің жауабына бағасын тез арада хабарлап, дұрыс жауап берген болса келесі қадамға өтуіне рұқсат береді.

- оқудың қарқыны мен мазмұнын дараландыру, яғни ұтымды оқу қарқынын дараландыруды қамтамасыз етеді.

- бағдарланған мәтіндердің эмпирикалық сенімділігін тексеру, бағдарламашы авторға әрбір студенттің мүмкіндігіне орай қиындық дәрежесін реттеуді міндеттейді.

Оқытушы студенттердің компьютерлік сауаттылығына сүйене отырып оқытудың әдіс-тәсілдерін қолданады. Бұл үшін жекелеген пәндерді оқытудың сапасын көтеруге, екіншіден, компьютерлік сауаттылықты дамытуға, студенттердің компьютерлік мәдениетін қалыптастыруға ұмтылады.

Талдау жұмыстары көрсетіп отырғандай, арнайы кәсіби пәндерді оқыту кезінде ақпараттық технологияларды пайдаланудың жеке ұстанымдарын анықтауға мүмкіндік туып отыр. Демек, студенттің білік пен дағдысы үшін қажет жағдайға ғана ақпараттық технологияларды пайдаланған орынды. Өйткені, дисплеймен үнемі жұмыс жасап, экранға үңіле беру көзге салмақ түсіреді, адамның жүйке жүйесін қажытады. Сондықтан, студенттердің ақпараттық технологияларда жұмыс істеуін оқытушы жетекшілігімен ғана жүзеге асыру керек.

ЖОО-да ақпараттық технологияларды оқу үрдісіне енгізуде студенттердің психологиялық-педагогикалық мүмкіндіктері міндетті түрде ескеруі тиіс. Бұл ұстанымдар студентті кәсіби біліммен байытуға, жалпы білімдік міндеттер мен пән туралы білім идеяларын жүзеге асыруға, оқыту мен тәрбиелеудің кешенді мәселелерін есепке ала отырып, сабақты жүргізудің вариативті әдістерін қолдануға жол ашады.

Зерттеу барысында байқалғаны – оқыту үдерісінде арнайы элективті пәндерді оқытуда ақпараттық технологиялар құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау негізінде білім беру электронды оқулықтар, мультимедиялы және ақпараттық-компьютерлік құралдарды да өздері жасау керектігін білдірді.

Электрондық оқулықтар компьютерлік оқу әдістемелік құралдарды өз дәрежесінде қолдануды үйренген студенттер зерттеуге құштар, дүниені аз уақытта танып білетін, байланыс туралы жеткілікті меңгерген технология саласының білгірі болады. Сондықтан оқу сапасына жағымды әсер ететін ақпараттық-компьютерлік оқыту жүйесін кәсіби оқыту сабақтарында пайдалану студенттердің пәнге деген қызығушылығын арттырады және сабақтың қарқынын күшейтетін мықты құрал болып табылады.

Жалпы білім беретін орта мектеп мұғалімдері ішінде информатика пәні мұғалімінің алатын орны ерекше. Мектеп информатика курсы оқушының ойлау қабілеті мен жалпы білім дәрежесін дамытуда және тәрбиелеуде әрі жетекші, әрі жауапты орын алады. Информатиканы мектепте оқыту оқушыларға қоршаған ортаны танып білуді үйретеді, логикалық ойлауы мен танымдық қызметтерін, шығармашылық, қабілеттерін, қалыптастыруға ұйытқы болады, оқушының зейіні мен байқағыштығын, ұқыптылық пен дәйектілік, дербестік пен жоспарлылық сияқты еңбек мәдениетін дамытуға ықпал етеді, дүниге ғылыми көзқарасын қалыптастыруға жағдай туғызады.

Ал бүгінгі қоғамға өз бетінше дербес, сыни тұрғыда ойлайтын, туындаған проблемаларды көре білетін және шығармашылықпен шеше білетін адам қажет. Қазіргі қоғам – ақпараттық

технологиялар қоғамы. Ал оның азаматтары өз бетінше белсенді қимылдауға, шешім қабылдауға, өмірдің өзгермелі жағдайларына икемділікпен бейімделуге қабілетті болуына мүдделі. Сондықтан қазіргі қоғамдағы білім берудің мақсаты – адамның интеллектуалдық және адамгершілік тұрғыда дамуы. Осы мақсатты жүзеге асыру үшін болашақ мұғалім бойына мектепте қызмет ететін маман ретінде оларға білім беру жүйесінің стратегиялық бағыты айқын көрсетілуі тиіс. Оған оқу процесінің тиімділігі, сабақтардың жүйелілігі мен сапасы, бағдарламаның орындалу барысы, білімнің тереңдігі, бүкіл оқу тәрбие жұмысын дұрыс жоспарлауға игі ықпал етеді.

Көп жылдан бері қалыптасқан дәстүрлі сабақ беру әдісіне компьютердің жаңаша өзгеріс пен жаңа идеялар қосқаны баршаға мәлім.

Білім беруді ақпараттандыру үдерісі, компьютерді оқу үдерісінде пайдалануы – халыққа білім беру жүйесі реформасының негізгі буынының бірі. Қазіргі қоғамның қажеттілігіне сай оқытудың әдісі мен формасын, білім берудің мазмұнын түбірімен өзгертуді компьютердің мүмкіндігін ескермей жүзеге асыру мүмкін емес деп есептейміз.

Жалпы ғылыми-техникалық прогрестің жетістіктерін, атап айтқанда, ғылымның материяға, микродүниеге, материяның элементарлық және өлі табиғатты зерттеуде, молекулалық, субмолекулалық, атомдық дәрежеге көшуі, ғылымның ең жоғарғы нәтижесінде табиғаттың ғылыми көрінісі айтарлықтай өзгерді.

Жоғары оқу орындарында ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы жағдайында болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауды жетілдіру оқыту үдерісінде заманауи ақпараттық технологиялардың құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау негізінде ұйымдастыруға және осыған байланысты оқытудың жаңа формалары мен тәсілдерін қарастыруға алып келеді.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Педагогика профессионального образования. Под редакцией В.А.Сластенина. М.: АCADEMA, 2004. – 368 с.
- [2] Е.В.Михеева. Информационные технологий в профессиональной деятельности. – М.: Академия, 2006. – 384 с.
- [3] В.А.Попков, А.В.Коржуев. Теория и практика высшего профессионального образования. – М.: Академический проект, 2004. – 428 с.
- [4] М.Т.Громкова. Психология и педагогика профессиональной деятельности: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 415 с.
- [5] М.В. Буланова-Топоркова. Педагогика и психология высшей школы: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2002. – 544с.
- [6] Скаткин М.Н. Совершенствование процесса обучения. – М., 1971.
- [7] Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. Учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. пед. кадров. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 272 б.
- [8] Абдеев Р.Ф. Философия информационной цивилизации. – М., 1994. – 336 с.

REFERENCES

- [1] Pedagogy of vocational education. Edited V.A.Slastenina. MM : ACADEMA, 2004, 368 p.
- [2] E.V. Miheeva . Information technologies in professional work . Moscow: Academy , 2006. 384 p.
- [3] V.A. Popkov , A.V. Korzhuev. Theory and practice of higher education . M .: Academic Project, 2004.428 p.
- [4] M.T. Gromkova . Psychology and Pedagogy of professional activity : Textbook for universities. M .: UNITY -DANA, 2003. 415 p.
- [5] M. Bulanava - Toporkova. Pedagogy and psychology of higher education : Textbook . Rostov n / d : Phoenix, 2002. 544 p.
- [6] Skatkin M.N. Improving the learning process. M ., 1971.
- [7] Polat E.S. New pedagogical and information technologies in the education system. Textbooks for stud. ped. instit. and systems increased. ped. kadrov. M .: publishing center "Academy" , 2001.,272 p.
- [8] Abdeev R.F. Philosophy of information civilization. M . , 1994. 336 p.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ АКТИВНОГО РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ж. Ж. Кожамкулова¹, Т. Қ. Койшиева², А. Н. Нусипбекова¹, А. Ибадуллаева²

¹Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан,

²МКТУ им. Х. А. Ясави, Туркестан, Республика Казахстан.

Ключевые слова: информационные технологии, методы обучения, будущий учитель.

Аннотация. В работе описаны основы совершенствования профессиональной подготовки будущих учителей в условиях активного развития информационных технологий, а также основы содержания и формы обучения, учебные пособия и методы по совершенствованию подготовки будущих преподавателей.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 83 – 88

SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION SECOND ORDER

E. A. Bakirova, N. B. Iskakova, T. Armya

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan,
Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan,
Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: bakirova1974@mail.ru, narkesh@mail.ru, turar@mail.ru

Keywords: differential equations, boundary value problem, solvability.

Abstract. Criterion of solvability of linear boundary value problem for ordinary differential equation is received by parametrization method. An algorithm for finding solution of considering problem is offered.

УДК 517.927

ЕКІНШІ РЕТТІ ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Э. А. Бакирова, Н. Б. Искакова, Т. Армия

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан,
Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, шешімділік.

Аннотация. Параметрлеу әдісі негізінде екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің бірмәнді шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Қарастырылып отырған есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылған.

$[0, T]$ кесіндісінде екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = q_1(t) \frac{dz}{dt} + q_2(t)z + f(t), \quad t \in (0, T), \quad x \in R, \quad (1)$$

$$z(0) = z_0, \quad z(T) = z_1, \quad (2)$$

мұндағы $q_1(t)$, $q_2(t)$, $f(t)$ функциялары $[0, T]$ кесіндісінде үзіліссіз, z_0, z_1 - берілген сандар, $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$, $\|q_1(t)\| \leq \delta_1$, $\|q_2(t)\| \leq \delta_2$, $\delta_1, \delta_2 - const$.

Нормасы $\|z\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|z(t)\|$ болатын үзіліссіз функциялар $z : [0, T] \rightarrow R$ кеңістігін

$C([0, T], R)$ деп белгілейміз.

(1), (2) есебінің шешімі деп (1) екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын және $t = 0$, $t = T$ нүктелеріндегі мәндері үшін (2) теңдіктері орындалатын $[0, T]$ кесіндісінде екі рет дифференциалданатын үзіліссіз $z(t)$ функциясын айтамыз.

Шеттік есептер теориясы дифференциалдық теңдеулердің көкейкесті және белсенді дамып келе жатқан бөлімдердің бірі болып табылады, себебі шеттік есептер тербелістер теориясында, математикалық физикада, вариациялық есептеулерде, тиімді басқаруда және басқа қолданбалы есептерде мейлінше көп түрде қолданысы бар [1-3]. Ол екінші ретті теңдеулер үшін жан-жақты дамытылған және Штурмның осцилляциялық теориясынан кері есептердің заманауи теориясына дейінгі нәтижелерді қамтиды.

Екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептер әртүрлі әдістермен көптеген авторлардың жұмыстарында қарастырылған [4-10].

[11] жұмысында жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есепті зерттеуге және шешуге арналған параметрлеу әдісі ұсынылған болатын.

Ұсынылып отырған мақаланың мақсаты - параметрлеу әдісі негізінде (1), (2) есебінің бірімәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттарын тағайындау және шешімін табудың алгоритмдерін құру болып табылады.

Параметрлеу әдісінің схемасын пайдаланып, $[0, T]$ кесіндісін келесі бөліктерге бөлейік:

$[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$. Изделінді функцияның бөлінген аралықтарға сығылуын $z_r(t)$ деп белгілейік.

$\lambda_r = z_r((r-1)h)$, $\mu_r = \dot{z}_r((r-1)h)$ қосымша параметрлерін енгізіп және де әрбір $[(r-1)h, rh)$ аралықтарында $y_r(t) = z_r(t) - \lambda_r - \mu_r(t - (r-1)h)$, $r = \overline{1, N}$ алмастыруларын жасасак, онда (1), (2) есебі келесі параметрі бар шеттік есебіне келтіріледі

$$\frac{d^2 y_r}{dt^2} = q_1(t) \frac{dy_r}{dt} + q_2(t) y_r + q_1(t) \mu_r + q_2(t) \lambda_r + q_2(t) \mu_r \cdot (t - (r-1)h) + f(t),$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$y_r((r-1)h) = 0, \quad \dot{y}_r((r-1)h) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_1 = z_0, \quad \lambda_N + \mu_N h + \lim_{t \rightarrow T-0} y_N(t) = z_T, \quad (5)$$

$$\lambda_s + \mu_s h + \lim_{t \rightarrow sh-0} y_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (6)$$

$$\mu_s + \lim_{t \rightarrow sh-0} \dot{y}_s(t) - \mu_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (7)$$

(1), (2) және (3)–(7) есептері пара-пар болады. Егер $z(t)$ функциясы (1), (2) есебінің шешімі болса, онда келесі $(\lambda, \mu, y[t])$ үштігі, мұндағы

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad \lambda_r = z[(r-1)h], \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_N), \quad \mu_r = \dot{z}[(r-1)h],$$

$$y[t] = (y_1(t), \dots, y_N(t)), \quad y_r(t) = z(t) - z((r-1)h) - \mu(t - (r-1)h), \quad r = \overline{1, N},$$

(3)–(7) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{y}[t])$ үштігі, мұндағы $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N)$, $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_N)$, $\tilde{y}[t] = (\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_N(t))$, (3)–(7) есебінің шешімі болса,

онда $\tilde{z}(t) = \tilde{y}_r(t) + \tilde{\lambda}_r + \tilde{\mu}_r(t - (r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$,

$\tilde{z}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{y}_N(t) + \tilde{\lambda}_N + \tilde{\mu}_N h$, теңдіктерімен анықталатын $\tilde{z}(t)$ функциясы (1),(2) есебінің шешімі болады.

(3), (4) Коши есептері келесі екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне пара пар болады

$$\begin{aligned} \dot{y}_r(t) = & \int_{(r-1)h}^t q_1(\tau) \dot{y}_r(\tau) d\tau + \int_{(r-1)h}^t q_1(\tau) y_r(\tau) d\tau + \int_{(r-1)h}^t q_1(\tau) d\tau \cdot \mu_r + \int_{(r-1)h}^t q_2(\tau) d\tau \cdot \lambda_r + \\ & + \int_{(r-1)h}^t q_2(\tau) (\tau - (r-1)h) d\tau \cdot \mu_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau) d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$y_r(t) = \int_{(r-1)h}^t \dot{y}_r(\tau) d\tau, \quad r = \overline{1, N}. \quad (9)$$

$p(t)$ функциясы $[(r-1)h, rh)$ аралықтарында үзіліссіз және солжақты ақырлы $\lim_{t \rightarrow rh-0} p(t)$, $r = \overline{1, N}$ шегі бар делік. ν натурал санын алып $E_{\nu r}(q(\cdot), p(\cdot), t)$ деп келесі қосындыны белгілейміз

$$\int_{(r-1)h}^t p(\tau_1) d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^t q(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} p(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^t q(\tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} q(\tau_{\nu-1}) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} p(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1.$$

Енді (8) интегралдық теңдеуінің оң жағындағы бірінші қосылғышта интегралдың астындағы $\dot{y}_r(\tau)$ функциясының орнына сәйкесінше оң жақтарын қойып, бұл үдерісті ν ($\nu = 1, 2, \dots$) рет қайталасақ, онда $\dot{y}(t)$ және $y(t)$ функцияларының кейіптемелерін аламыз

$$\begin{aligned} \dot{y}_r(t) = & G_{\nu r}(\dot{y}_r(\cdot), t) + E_{\nu r}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_r(\cdot), t) + E_{\nu r}(q_1(\cdot), q_1(\cdot), t) \mu_r + \\ & + E_{\nu r}(q_1(\cdot), q_2(\cdot), t) \lambda_r + E_{\nu r}(q_1(\cdot), \tilde{q}_2(\cdot), t) \mu_r + E_{\nu r}(q_1(\cdot), f(\cdot), t), \quad r = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y_r(t) = & \int_{(r-1)h}^t G_{\nu r}(\dot{y}_r(\cdot), \tau) d\tau + \int_{(r-1)h}^t E_{\nu r}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_r(\cdot), \tau) d\tau + \\ & + \int_{(r-1)h}^t E_{\nu r}(q_1(\cdot), q_1(\cdot), \tau) d\tau \cdot \mu_r + \int_{(r-1)h}^t E_{\nu r}(q_1(\cdot), q_2(\cdot), \tau) d\tau \cdot \lambda_r + \\ & + \int_{(r-1)h}^t E_{\nu r}(q_1(\cdot), \tilde{q}_2(\cdot), \tau) d\tau \cdot \mu_r + \int_{(r-1)h}^t E_{\nu r}(q_1(\cdot), f(\cdot), \tau) d\tau, \quad r = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (11)$$

мұндағы

$$\tilde{q}_2(t) = q_2(t) \cdot (t - (r-1)h),$$

$$G_{\nu r}(\dot{y}_r(\cdot), t) = \int_{(r-1)h}^t q_1(\tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} q_1(\tau_{\nu-1}) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} \dot{y}_r(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, N}.$$

(10), (11) теңдеулерінен $\lim_{t \rightarrow rh-0} \dot{y}_r(t)$, $\lim_{t \rightarrow rh-0} y_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ мәндерін тауып, оларды (5), (6),

(7) шарттарына қойсақ, λ_r , μ_r , $r = \overline{1, N}$ параметрлері үшін келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\lambda_1 = z_0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda_N + \mu_N h + & \int_{(N-1)h}^T E_{\nu N}(q_1(\cdot), q_2(\cdot), \tau) d\tau \cdot \lambda_N + \int_{(N-1)h}^T E_{\nu N}(q_1(\cdot), q_1(\cdot), \tau) d\tau \cdot \mu_N + \\ & + \int_{(N-1)h}^T E_{\nu N}(q_1(\cdot), \tilde{q}_2(\cdot), \tau) d\tau \cdot \mu_N = z_T - \int_{(N-1)h}^T E_{\nu N}(q_1(\cdot), f(\cdot), \tau) d\tau - \\ & - \int_{(N-1)h}^T G_{\nu N}(\dot{y}_N(\cdot), \tau) d\tau - \int_{(N-1)h}^T E_{\nu N}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_N(\cdot), \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_s + \mu_s h + \int_{(s-1)h}^{sh} E_{v,s}(q_1(\cdot), q_2(\cdot), \tau) d\tau \cdot \lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} E_{v,s}(q_1(\cdot), q_1(\cdot), \tau) d\tau \cdot \mu_s + \\ & + \int_{(s-1)h}^{sh} E_{v,s}(q_1(\cdot), \tilde{q}_2(\cdot), \tau) d\tau \cdot \mu_s - \lambda_{s+1} = - \int_{(s-1)h}^{sh} E_{v,s}(q_1(\cdot), f(\cdot), \tau) d\tau - \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{(s-1)h}^{sh} E_{v,s}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_s(\cdot), \tau) d\tau - \int_{(s-1)h}^{sh} G_{v,s}(\dot{y}_s(\cdot), \tau) d\tau, \quad s = \overline{1, N-1}, \\ & \mu_s + E_{v,s}(q_1(\cdot), q_2(\cdot), sh) \lambda_s + E_{v,s}(q_1(\cdot), q_1(\cdot), sh) \mu_s + E_{v,s}(q_1(\cdot), \tilde{q}_2(\cdot), sh) \mu_s - \mu_{s+1} = \\ & = -E_{v,s}(q_1(\cdot) f(\cdot), sh) - E_{v,s}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_s(\cdot), sh) - G_{v,s}(\dot{y}_r(\cdot), sh), \quad s = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Сызықты теңдеулер жүйесінің сол жағына сәйкес келетін $(2N \times 2N)$ - өлшемді матрицаны $Q_v(h)$ деп белгілейміз. Онда (12)-(15) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін векторлық түрде жазуға болады

$$Q_v(h)\Lambda = -F_v(h) - G_v(y, \dot{y}, h), \quad \Lambda \in R^{2N} \quad (16)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} & \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N), \\ & F_v(h) = \left(\begin{array}{c} -h^2 z_0, h^2(-z_T + \int_{(N-1)h}^T E_{v,N}(q_1(\cdot), f(\cdot), t) dt), \\ \int_0^h E_{v,1}(q_1(\cdot), f(\cdot), t) dt, \int_h^{2h} E_{v,2}(q_1(\cdot), f(\cdot), t) dt, \dots, \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} E_{v,N-1}(q_1(\cdot), f(\cdot), t) dt, \\ E_{v,1}(q_1(\cdot), f(\cdot), h), E_{v,2}(q_1(\cdot), f(\cdot), 2h), \dots, E_{v,N-1}(q_1(\cdot), f(\cdot), (N-1)h) \end{array} \right), \\ & G_v(y, \dot{y}, h) = \left(\begin{array}{c} 0, h^2 \cdot \int_{(N-1)h}^T (G_{v,N}(\dot{y}_N(\cdot), t) + E_{v,N}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_N(\cdot), t)) dt, \\ \int_0^h (G_{v,1}(\dot{y}_1(\cdot), t) + E_{v,1}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_1(\cdot), t)) dt, \dots \\ \dots, \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} (G_{v,N-1}(\dot{y}_{N-1}(\cdot), t) + E_{v,N-1}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_{N-1}(\cdot), t)) dt, \\ G_{v,1}(\dot{y}_1(\cdot), h) + E_{v,1}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_1(\cdot), h), \dots \\ \dots, G_{v,N-1}(\dot{y}_{N-1}(\cdot), (N-1)h) + E_{v,N-1}(q_1(\cdot), q_2(\cdot) y_{N-1}(\cdot), (N-1)h) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Сонымен, белгісіз $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ параметрлерін табу үшін (16) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін алдық, ал белгісіз $\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_N(t))$ функциясын (3), (4) Коши есебінен табамыз. Енді (3)-(7) есебінің шешімі төмендегі алгоритм арқылы анықталатын $(\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, y^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \dots$, үштік тізбегінің шегі ретінде ізделінеді.

0-ші қадам: а) $Q_v(h)$ матрицасының кері матрицасы бар деп жорамалдап, Λ параметрінің $\Lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_N^{(0)})$ бастапқы жуықтауын $Q_v(h)\Lambda = -F_v(h)$ теңдеуінен табамыз;

б) $\Lambda^{(0)} \in R$ векторының компоненттерін қолданып және $[(r-1)h, rh)$ аралықтарында $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $\mu_r = \mu_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N}$ болғанда (3), (4) Коши есебін шешіп, $\dot{y}_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, функциясын тауып, оны (9) теңдеуінің оң жағына қойып $y_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, функциясың табамыз.

1-ші қадам: а) Табылған $\dot{y}^{(0)}[t] = (\dot{y}_1^{(0)}(t), \dot{y}_2^{(0)}(t), \dots, \dot{y}_N^{(0)}(t))$, $y^{(0)}[t] = (y_1^{(0)}(t), y_2^{(0)}(t), \dots, y_N^{(0)}(t))$ функцияларын (11) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің оң жағына қойып,

$$Q_\nu(h)\Lambda = -F_\nu(h) - G_\nu(y^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, h)$$

теңдеуінен $\Lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}, \mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \dots, \mu_N^{(1)})$ параметрін табамыз.

б) $[(r-1)h, rh)$ аралықтарында $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $\mu_r = \mu_r^{(1)}$, $r = \overline{1, N}$ болғанда (3), (4) Коши есебін шешіп, $\dot{y}_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, функциясын тауып, оны (9) теңдеуінің оң жағына қойып $y_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, N}$ функциясың табамыз. Т.с.с.

Осы үдерісті қайталап, алгоритмнің k – шы қадамында ($k = 0, 1, 2, \dots$) $(\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, y^{(k)}[t])$ үштік тізбегін аламыз.

Ұсынылып отырған алгоритмнің жүзеге асуы мен жалғыз шешімге жинақталуының жеткілікті шарттары және (1), (2) шеттік есебінің жалғыз шешімі болатыны келесі теоремада келтірілген

Теорема 1. Егер $h > 0: Nh = T$, $\nu \in \mathbb{N}$ үшін $Q_\nu(h): R^{2N} \rightarrow R^{2N}$ матрицасының кері матрицасы бар болса және

$$а) \left\| [Q_\nu(h)]^{-1} \right\| \leq \gamma_\nu(h),$$

$$б) \xi_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \max(1, h^3) \left(\frac{(\delta_1 h)^\nu}{\nu!} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\delta_1 h)^j}{j!} \delta_2 h^2 \right) \times \\ \times \left(\delta_1 h + \delta_2 h + \delta_2 \frac{h^2}{2!} \right) \exp \left(\delta_1 h + \frac{\delta_2 h^2}{2!} \right) < 1$$

теңсіздіктері орындалса, онда (1),(2) есебі бірімәнді шешілімді болады.

Теорема 2. (1),(2) есебі бірімәнді шешілімді сонда тек қана сонда, егер кезкелген $h > 0: Nh = T$ үшін $\nu \in \mathbb{N}$ саны табылып, $Q_\nu(h): R^{2N} \rightarrow R^{2N}$ матрицасының кері матрицасы бар болса және а), б) теңсіздіктері орындалса.

Келтірілген тұжырымдардың дәлелдеуі [11] жұмыстағы сәйкес тұжырымдардың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука. 1981. - 918 с.
- [2] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969. -528 с.
- [3] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач. Киев: Наук. думка. 1985. - 224 с.
- [4] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. // Дифференц. уравнения. 1966. 2(3), С. 382 - 390.
- [5] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Корректность граничных задач для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. // Дифференц. уравнения. 1966. 2(7), С. 910- 926.
- [6] Ермаков В.А. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. Киев // Университетские известия. 1980. С.1-25.
- [7] Ельшин М.И. Качественные проблемы линейного дифференциального уравнения второго порядка. // ДАН СССР. 1948. Т.68 (2). С.221-224.

- [8] Neuman F. Linear differential equations of the second order and their applications. //Rend, di Mat. 1971. V .1,3, 4. – P. 559-617.
- [9] Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. - 2002. - Т. 38, № 8. - С. 1140-1141.
- [10] Roberts S.M. Boundary conditions of the second-order differential equations and the Riccati equations // Optimiz. Theory and Appl. 1983. Vol. 40. №3. P. 397-403.
- [11] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary- value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P. 34-46.
- [12] Треногин В.А. Функциональный анализ. –М.: Наука, 1980. -496 с.

REFERENCES

- [1] Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Teoriya kolebaniy. -M.: Nauka. 1981. - 918 p.
- [2] Naimark M.A. Lineinyye differentsialnyye operatory. M.: Nauka. 1969. -528 p.
- [3] Samoilenko A.M., Ronto N.I. Chislennyye metody issledovaniya resheniya kraevikh zadach. Kiev: Nauk. dumka. 1985. - 224 p.
- [4] Krein S.G., Laptev G.I. Granichnyye zadachi dlya differentsialnykh uravneniy vtorogo poriyadka v banachovom prostranstve. // Differentsialnyye uravneniya. 1966. 2(3), P. 382 - 390.
- [5] Krein S.G., Laptev G.I. Korrektnost granichnykh zadach dlya differentsialnogo uravneniya v banachovom prostranstve. // Differentsialnyye uravneniya. 1966. 2(7), P. 910- 926.
- [6] Ermakov V.A. Differentsialnyye uravneniya vtorogo poriyadka. Usloviya integriruemosti v konechnom vide. Kiev. // Universitetskiye izvestiya. 1980. P.1-25.
- [7] Elyin M.I. Kachestvennyye problemy lineinogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poriyadka. //DAN SSSR. 1948. T.68 (2). P.221-224.
- [8] Neuman F. Linear differential equations of the second order and their applications. //Rend, di Mat. 1971. V .1,3, 4. – P. 559-617.
- [9] Fomin V.I. O reshenii zadachi Koshi dlya lineinogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poriyadka v banachovom prostranstve //Differentsialnyye uravneniya. - 2002. - Т. 38, № 8. - P. 1140-1141.
- [10] Roberts S.M. Boundary conditions of the second-order differential equations and the Riccati equations // Optimiz. Theory and Appl. 1983. Vol. 40. №3. P. 397-403.
- [11] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary- value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. P. 34-46.
- [12] Trenogin V.A. Funktsionalnyi analiz. – М.: Nauka, 1980. -496 s.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Э. А. Бакирова, Н. Б. Исакова, Т. Армия

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан,
Казахский национальный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, краевая задача, разрешимость.

Аннотация. На основе метода параметризации получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Построены алгоритмы нахождения решения рассматриваемой задачи.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 89 – 93

UDC 517.956.224, 517.956.225, 517.956.227

ON THE SECOND CHARACTERISTIC NUMBER OF THE NEWTON POTENTIAL

D. Suragan

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan, e-mail: suragan@list.ru

Keywords: characteristic number, Newton potential, minimizer domain.

Abstract. In this note we prove that the minimum of the second characteristic number of the Newton potential among bounded open sets of \mathbb{R}^d with given volume is achieved by the union of two identical balls. The Newton potential can be related to a nonlocal boundary value problem for the Laplacian, so we obtain results on the second eigenvalue of the nonlocal Laplacian as well.

1 Introduction. Let Ω be a bounded open domain in \mathbb{R}^d , $d \geq 3$. Consider the Newton potential operator $N: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$

$$Nf := \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)f(y)dy \quad (1)$$

where

$$\varepsilon_d(x-y) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d|x-y|^{d-2}}, \quad d \geq 3, \quad (2)$$

and $\sigma_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ is the surface area of the unit sphere in \mathbb{R}^d .

Since ε_d is real and symmetric function N is self-adjoint operator. Therefore, all characteristic numbers are real. In addition, it is easy to check that the operator N is positive. This means all its eigenvalues are positive. The characteristic numbers N of may be enumerated in ascending order,

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$$

where μ_i is repeated in this series according to its multiplicity. We denote the corresponding eigenfunctions by u_i, u_i, \dots , so that for each characteristic number μ_i there is one and only one, corresponding eigenfunction u_i ,

$$u_i = \mu_i N u_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

In a bounded domain Ω of the Euclidean space \mathbb{R}^d , it is very well known that the solution to the Laplacian equation

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

is given by the Newton potential formula

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)f(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

for suitable functions f supported in Ω . An interesting question having several important applications is what boundary conditions can be put on u on the (smooth) boundary $\partial\Omega$ so that equation (3) complemented by this boundary condition would have the solution in still given by the same formula (4), with the same kernel ε_d given by (2). It turns out that the answer to this question is the integral boundary condition [4]

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy = 0, x \in \partial\Omega, \tag{5}$$

where $\frac{\partial}{\partial n_y}$ denotes the outer normal derivative at a point y on $\partial\Omega$. A converse question to the one above would be to determine the trace of the Newton potential (4) on the boundary surface $\partial\Omega$, and one can use the potential theory to show that it has to be given by (5).

In [4] by using the boundary condition (5) the eigenvalues and eigenfunctions of the Newton potential were explicitly calculated in the 2-disk and in the 3-ball. In general, the boundary value problem (3)-(5) has various interesting properties and applications (see, for example, Kac [2, 3] and Saito [8]). The boundary value problem (3)-(5) can also be generalized for higher degrees of the Laplacian, see [5]. In this paper we are interested in some spectral geometry questions of N .

Historically, for the first time in the scientific literature, in Rayleigh’s famous book “Theory of Sound” (first published in 1877), by using some explicit computation and physical interpretations, he stated that a circle minimizes (among all domains of the same area) the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian. The musical interpretation of this result could be: among all drums of given area, the circular drum is the one which produces the deepest bass note. The proof of this conjecture was obtained after some decades later, simultaneously (and independently) by G.Faber and E.Krahn. Nowadays, the Rayleigh-Faber-Krahn inequality has been expanded many other operators; see [6] for further references.

In Section 2 we prove the following Rayleigh-Faber-Krahn theorem for the Newton potential N , i.e. it is proved that a ball is minimizer of the first characteristic number of the Newton potential N among all domains of given volume in R^d .

In Section 3 we are interested in minimizing the second characteristic number of N among open sets of given volume. We show that the minimizer is no longer one ball, but two! The similar result for the Dirichlet Laplacian called Krahn-Szego theorem, that is, the minimum of the second eigenvalue of the Dirichlet Laplacian among bounded open sets of R^d with given volume is achieved by the union of two identical balls. See, for example, [1] for further references.

2 Rayleigh-Faber-Krahn theorem. In this section we prove the following analogy of the Rayleigh-Faber-Krahn theorem for the Newton potential N .

Theorem 1. *A ball Ω^* is minimizer of the first characteristic number of the Newton potential N among all domains of given volume, i.e.*

$$\mu_1(\Omega^*) \leq \mu_1(\Omega) \tag{6}$$

for an arbitrary bounded open domain $\Omega \subset R^d$ with $|\Omega| = |\Omega^*|$.

We will use this result later in the proof of Theorem 2.

Proof of Theorem 1. Slightly different statement of Lemma 1 is called Jentsch’s theorem in [9]. However, for completeness of this note we restate and give its proof below.

Lemma 1. *The smallest characteristic number μ_1 of N is simple; the corresponding eigenfunction u_1 is positive and any other eigenfunction $u_i, i \neq 1$ is sign changing in Ω .*

Proof. The eigenfunctions of N may be chosen to be real as its kernel is real. First let us prove that u_1 cannot change sign in the domain Ω , that is,

$$u_1(x)u_1(y) = |u_1(x)u_1(y)|, \quad x, y \in \Omega.$$

In fact, in the opposite case, by virtue of the continuity of the function $u_1(x)$, there would be neighborhoods $U(x_0, r) \subset \Omega$ and $U(y_0, r) \subset \Omega$ such that

$$|u_1(x)u_1(y)| > u_1(x)u_1(y), x \in U(x_0, r) \subset \Omega, y \in U(y_0, r) \subset \Omega.$$

And so, by virtue of

$$\int_{\Omega} \varepsilon_d(x-\xi)\varepsilon_d(\xi-y)d\xi > 0. \tag{7}$$

We obtain

$$\begin{aligned} \frac{(N^2|u_1|, |u_1|)}{\| |u_1| \|^2} &= \frac{1}{\| |u_1| \|^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-\xi)\varepsilon_d(\xi-y) d\xi |u_1(x)||u_1(y)| dx dy \\ &> \frac{1}{\| |u_1| \|^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-\xi)\varepsilon_d(\xi-y) d\xi u_1(x)u_1(y) dx dy = \frac{1}{\mu_1^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

μ_1^2 is the smallest characteristic number of N^2 and u_1 is the eigenfunction corresponding to μ_1^2 , i.e.

$$u_1 = \mu_1^2 N^2 u_1.$$

Therefore, by the variational principle we have

$$\frac{1}{\mu_1^2} = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{(N^2 f, f)}{\|f\|^2}. \tag{9}$$

This means that the strong inequality (8) contradicts the variational principle (9).

Now we shall prove that the eigenfunction $u_1(x)$ cannot become zero in Ω and therefore can be chosen positive in Ω .

In fact, in the opposite case there will be a point $x_0 \in \Omega$ such that

$$u_1(x_0) = \mu_1^2 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon_d(x_0 - \xi) \varepsilon_d(\xi - y) d\xi u_1(y) dy = 0$$

from which, by virtue of the condition (7), the contradiction follows: $u_1(y) = 0, \forall y \in \Omega$.

Since u_1 is positive it follows that μ_1 is a simple. In fact, if there were an eigenfunction \tilde{u}_1 linearly independent of u_1 and corresponding to μ_1 , then for all real c linear combination $u_1 + c\tilde{u}_1$ also would be eigenfunction corresponding to μ_1 and therefore, by what has been proved, it could not become zero in Ω . As c is arbitrary, this is impossible.

Finally, we show that the other eigenfunction $u_i, i = 2, 3, \dots$, are sign changing in Ω . If $u_i \geq 0, i \neq 1$, or $u_i \leq 0, i \neq 1$ then

$$\int_{\Omega} u_1 u_i \neq 0$$

as $u_1(x) > 0$ in Ω . This contradicts the orthogonality of the eigenfunction family $\{u_i\}$ of N .

Lemma 1 is proved.

Let Ω be a bounded measurable set in R^d . Its symmetric rearrangement Ω^* is an open ball originated at 0 with a measure equal to the measure of Ω , i.e. $|\Omega^*| = |\Omega|$. Let u be a nonnegative measurable function in Ω , in the sense that all its positive level sets have finite measure,

$$Vol(\{x|u(x) > t\}) < \infty, (\forall t > 0).$$

In the definition of the symmetric-decreasing rearrangement of u can be used the layer-cake decomposition [7], which expresses a nonnegative function u in terms of its level sets as

$$u(x) = \int_0^{\infty} X\{u(x) > t\} dt$$

where X is the characteristic function of the corresponding domain.

Definition 1. [7] Let u be a nonnegative measurable function in Ω . A function

$$u^*(x) = \int_0^{\infty} X\{u(x) > t\}^* dt$$

is called a symmetric-decreasing rearrangement of a nonnegative measurable function u .

By Lemma 1 the first characteristic number μ_1 of the operator N is positive and simple; the corresponding eigenfunction u_1 can be chosen positive in Ω . Recalling Riesz' inequality [7] and the fact that $\varepsilon_d(x - y)$ is a symmetric-decreasing function, i.e. ε_d and ε_d^* have the same formula, we obtain

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} u_1(y) \varepsilon_d(x - y) u_1(x) dy dx \leq \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} u_1^*(y) \varepsilon_d(x - y) u_1^*(x) dy dx. \tag{10}$$

In addition, for each nonnegative function $u \in L^2(\Omega)$ we have

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u^*\|_{L^2(\Omega^*)}. \tag{11}$$

Therefore, from (10), (11) and the variational principle for $\mu_1(\Omega^*)$, we get

$$\begin{aligned} \mu_1(\Omega) &= \frac{\int_{\Omega} |u_1(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} \int_{\Omega} u_1(y) \vartheta(x-y) u_1(x) dy dx} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |u_1^*(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} u_1^*(y) \vartheta(x-y) u_1^*(x) dy dx} \geq \\ &= \frac{\int_{\Omega^*} |\vartheta(x)|^2 dx}{\inf_{\vartheta \in L^2(\Omega^*)} \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} \vartheta(y) \vartheta(x-y) \vartheta(x) dy dx} = \mu_1(\Omega^*). \end{aligned}$$

Theorem 1 is proved.

3Krahn-Szego theorem. In this section we are interested in minimizing the second characteristic number of the Newton potential N among open sets of given volume. As in case of the Dirichlet Laplacian, the minimizer is no longer one ball, but two!

Theorem 2. *The minimum of $\mu_2(\Omega)$ among bounded open sets of R^d with given volume is achieved by the union of two identical balls.*

Similar result for the Dirichlet Laplacian is called the Krahn-Szego theorem. See, for example, [1] for further references.

Proof of Theorem 2. Lemma 1 says that among eigenfunctions of N only the first eigenfunction is positive

$$u_1(x) > 0, \forall x \in \Omega.$$

Therefore,

$$u_2(x) > 0, \forall x \in \Omega^+ \subset \Omega, \Omega^+ \neq \{0\}.$$

$$u_2(x) < 0, \forall x \in \Omega^- \subset \Omega, \Omega^- \neq \{0\}.$$

We have

$$u_2(x) = \mu_2(\Omega) \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)u_2(y)dy, x \in \Omega.$$

Taking

$$u_2^+(x) = \begin{cases} u_2(x) & \text{in } \Omega^+, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (12)$$

and

$$u_2^-(x) = \begin{cases} u_2(x) & \text{in } \Omega^-, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

we obtain

$$u_2(x) = \mu_2(\Omega) \int_{\Omega^+} \varepsilon_d(x-y)u_2^+(y)dy + \mu_2(\Omega) \int_{\Omega^-} \varepsilon_d(x-y)u_2^-(y)dy, x \in \Omega.$$

Multiplying by $u_2^+(x)$ and integrating over Ω^+ we get

$$\int_{\Omega^+} |u_2^+(x)|^2 dx = \mu_2(\Omega) \int_{\Omega^+} u_2^+(x) \int_{\Omega^+} \varepsilon_d(x-y)u_2^+(y)dydx + \mu_2(\Omega) \int_{\Omega^+} u_2^+(x) \int_{\Omega^-} \varepsilon_d(x-y)u_2^-(y)dydx, \quad x \in \Omega.$$

The second term in the right hand side is negative as we know sign of all integrands. Therefore, one has

$$\int_{\Omega^+} |u_2^+(x)|^2 dx \leq \mu_2(\Omega) \int_{\Omega^+} u_2^+(x) \int_{\Omega^+} \varepsilon_d(x-y)u_2^+(y)dydx,$$

that is,

$$\frac{\int_{\Omega^+} |u_2^+(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^+} u_2^+(x) \int_{\Omega^+} \varepsilon_d(x-y)u_2^+(y)dydx} \leq \mu_2(\Omega)$$

From here by using the variational principle one obtains

$$\begin{aligned} \mu_2(\Omega^+) &= \inf_{\vartheta \in L^2(\Omega^+)} \frac{\int_{\Omega^+} |\vartheta(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^+} \vartheta(x) \int_{\Omega^+} \varepsilon_d(x-y)\vartheta(y)dydx} \\ &\leq \frac{\int_{\Omega^+} |u_2^+(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^+} u_2^+(x) \int_{\Omega^+} \varepsilon_d(x-y)u_2^+(y)dydx} \leq \mu_2(\Omega). \end{aligned}$$

Similarly, we get

$$\mu_1(\Omega^-) \leq \mu_2(\Omega).$$

So we have

$$\mu_1(\Omega^+) \leq \mu_2(\Omega), \mu_1(\Omega^-) \leq \mu_2(\Omega). \quad (13)$$

We now introduce B^+ and B^- , balls of the same volume as Ω^+ and Ω^- , correspondingly. According to Theorem 1, we have

$$\mu_1(B^+) \leq \mu_1(\Omega^+), \quad \mu_1(B^-) \leq \mu_1(\Omega^-). \quad (14)$$

Let us introduce a new open set $\tilde{\Omega}$ defined as $\tilde{\Omega} = B^+ \cup B^-$. Since $\tilde{\Omega}$ is disconnected, we obtain its eigenvalues by gathering and reordering the eigenvalues of B^+ and B^- . Therefore,

$$\mu_2(\tilde{\Omega}) \leq \max(\mu_1(B^+), \mu_1(B^-)).$$

According to (13) and (14) we have

$$\mu_2(\tilde{\Omega}) \leq \max(\mu_1(B^+), \mu_1(B^-)) \leq \max(\mu_1(\Omega^+), \mu_1(\Omega^-)) \leq \mu_2(\Omega).$$

This shows that, in any case, the minimum of μ_2 is to be sought among the union of balls. But, if the two balls would have different radii, we would decrease the second eigenvalue by shrinking the largest one and dilating the smaller one (without changing the total volume). Therefore, the minimum is achieved by the union of two identical balls.

Theorem 2 is proved.

REFERENCES

- [1] Benguria R.D., Linde H., Loewe B. *Isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Laplacian and the Schrodinger operator*, Bulletin of Mathematical Sciences, 2012, Vol. 2, Issue 1, 1-56.
- [2] Кас М. *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951, 189-215.
- [3] Кас М. *Integration in function spaces and some of its applications*, Lezioni Fermiane. Accademia Nazionale dei Lincei, Pisa, 1980. 82 P.
- [4] Kalmenov T.Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 2009, Vol. 80, 646-649.
- [5] Kalmenov T.Sh., Suragan D. *A boundary condition and spectral Problems for the Newton Potentials*, Operator Theory: Advances and Applications, 2011, Vol. 216, 187-210.
- [6] Henrot A. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Birkhauser, Basel, 2006.
- [7] Lieb E., Loss M. *Analysis*, 2nd ed., Amer. Math. Soc., 2001.
- [8] Saito N. *Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2008, Vol. 25, 68-97.
- [9] Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics*, 2nd ed., Mir Publishers, Moscow 1983.

НЬЮТОН ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ ЕКІНШІ СИПАТТЫҚ САНЫ ЖАЙНДА

Д. Сұраған

ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: Лаплас-Бельтрами операторы, өткізгіш шекара, қисынды шектік есеп.

Аннотация. Жұмыста Ньютон потенциалының екінші сипаттық саны берілген көлемді R^d -дегі шенелген ашық жиындар арасында өзінің ең аз шамасын бір-келкі екі шардың біргеінде қабылдайтынын дәлелдейміз. Ньютон потенциалы Лапласианның локальды емес шекаралық есебіне қатасты болып табылатындықтан алынатын нәтижелер Лапласианның локальды емес шекаралық есебіне екінші меншікті мәнінде тиісті.

НЬЮТОН ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ ЕКІНШІ СИПАТТЫҚ САНЫ ЖАЙНДА

Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Казахстан

Тірек сөздер: Лаплас-Бельтрами операторы, өткізгіш шекара, қисынды шектік есеп.

Аннотация. Жұмыста Ньютон потенциалының екінші сипаттық саны берілген көлемді R^d -дегі шенелген ашық жиындар арасында өзінің ең аз шамасын бір-келкі екі шардың біргеінде қабылдайтынын дәлелдейміз. Ньютон потенциалы Лапласианның локальды емес шекаралық есебіне қатасты болып табылатындықтан алынатын нәтижелер Лапласианның локальды емес шекаралық есебіне екінші меншікті мәнінде тиісті.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 94 – 97

PHOTOLUMINESCENCE PROPERTIES OF POROUS SILICON

K. T. Bazhikov, M. Kurmanseit, A. Abenova, A. Serik

KazNU named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan, e-mail: bajyk@mail.ru

Keywords: porous silicon, photo luminescence, nanocrystal.

Abstract. In this work we considered the features of photoluminescence properties of various structures based on porous silicon, their connection with phase composition of the samples and possible ways of their modify. It shows, that the position peak of PL changes in limits 1.85–2.2 eV in depending of excerpt surface time on atmosphere, of the original technology production and the method surface modification.

УДК 621.395.4:004.438

КЕУЕКТІ КРЕМНИЙДІҢ ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

К. Т. Бажиков, М. Құрмансейіт, А. Абенова, А. Серік

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: кеуекті кремний, фотолюминесценция, нанокристалл.

Аннотация. Бұл мақалада кеуекті кремний негізінде әртүрлі құрылымның фотолюминесцентті қасиеттерінің ерекшеліктері, олардың үлгінің фазалық құрамымен байланысты қарастырылған және оларды модификациялаудың мүмкін әдістері көрсетілген. ФЛ шыңы 1.85–2.2 эВ аралығында беткі қабатын атмосферада ұстау уақытына байланысты өзгеретіні, бастапқы өндіру технологиясы және беткі қабатты модификациялау әдістері көрсетілген.

Кеуекті кремний (ПК) бірегей физика-химиялық сипатты материал болып табылады. Ол көптеген кеуектерден тұрады және беткі қабаты жақсы дамыған. Салыстырмалы ауданы – 100 м²-ден 0,1 см³. Кеуектердің көлденең қимасының өлшемі бірнеше нанометрден бірнеше микрометрге дейін жетеді, ал кеуекті қабаттың қалыңдығы өңдеудің ұзақтығына қарай ондаған микрометрге дейін жетеді [1-4].

Кеуекті кремний (por-Si) құрылымы мен қасиеттері уақыт өтуіне қарай өзгеретін көп фазалы күрделі жүйе болып табылады. Қазіргі кезде заманауи материалтану саласындағы көптеген жұмыстар кеуекті кремнийге, оның сенсорлы, каталитикалық және фотолюминесценциялық қасиеттеріне бола арналған. Кеуекті кремнийдің осы аталған қасиеттерін тұрақтау және өзгерту, сонымен қатар кеуекті кремнийдің негізінде жаңа композитті материалдар құру жеке мәселе болып табылады.

Кремнийдің (Si) монокристалды пластинасының беткі қабатында қалыптасқан кеуекті қабат кремнийдің нанометрлі өлшемдегі кластерлері мен кванттық тізбектерінен тұрады. Олардың беткі қабатының кейбір бөліктері тотыққан, ал кейбір бөліктері сутегінің атомдарымен және гидроксильді топтармен қоршалған.

Қазіргі кезде кеуекті кремнийдің фотолюминесценциясының механизмдері мен үлгілері туралы бірнеше ортақ гипотезалар бар. Ертеден келе жатқан және кең қолданылатын үлгілердің бірі кванттық-өлшемді үлгі болып табылады. Люминесценция Si-H байланыстардың болуының

салдары деп қарастырылатын үлгі бар. Ол байланыстар кеуекті кремнийдің бағандарының сыртында (нано) аморфты қабаттың пайда болу үрдісінде және оның сутектену кезінде құрылады. Фотолюминесценцияның кеуекті кремнийдегі Si-SiO₂ шекараларының бар болуына байланысты тағы бір үлгісі белгілі. Ол үлгіде фотолюминесценцияның пайда болуына ақауларға толы Si-SiO_x шекарасы жауапты деп ұйғарылады. Кеуекті кремнийдің жоғары салыстырмалы беткі қабаты оның едәуір сорбциялық қабілетін қамтамасыз етеді. Ол кеуекті кремнийдің негізінде әртүрлі сенсорларды құру жағынан өте жағымды.

Монокристалды кремнийдегі кеуекті қабат гидрофлорлық қышқылдың негізіндегі спирттік ерітінділерде электрохимиялық өңдеу тәсілі арқылы салыстырмалы түрде оңай алынады. Бұл үрдісте кеуектердің, кеуекті қабаттың өлшемі мен тереңдігін қадағалауға болады (кеуектер алатын көлемнің, кеуекті қабаттың ортақ көлеміне қатынасы), ал электролиттің құрамын өзгерткенде кеуектердің сыртқы қабатының құрамын белгілі деңгейде басқаруға болады. Сонымен қатар, кеуектердің беткі қабатындағы әлсіз кремний-сутегі байланыстардың бар болуы кеуекті кремнийдің қасиеттерінің уақытқа байланысты тұрақсыздығын ескертеді. Кеуекті қабаттың біртіндеп тотығуы Si-H байланыстардың бұзылу есебінен және олардың кремний-оттегі байланыстарымен және гидроксильді топтармен алмастырылуы фотолюминесценцияның төмендеуіне алып келеді, материалдың сорбциялық сипаттамасын нашарлатады [2].

Осыған орай соңғы кездері кеуекті кремнийдің беткі қабатын пассивтеу әдістері қарқынды іздеу үстінде. Бұл кеуектердегі беткі қабаттардың құлдырауын басуға мүмкіндік береді. Алайда, кеуекті кремнийдің сыртқы қабатын өзгерту осы материалдың белгілі бір параметрлерін алуға мүмкіндік береді. Ол параметрлер сенсорлы құралдарды, сонымен қатар микронды және субмикронды өлшемдегі биологиялық объектілердің – бактерияларды, вирустарды, тіпті ДНҚ-ның фрагменттерін бекітуде қолданылатын астарларды құру кезінде маңызды. Кеуекті кремнийді ауада сақтау кезінде беткі қабатының құлдырауын болдырмау үшін беткі қабатты пассивтеудің әртүрлі нұсқалары ұсынылған. Ол нұсқалар оттегі ортасында үлгілердің тез тотығуынан, беткі қабатты жіңішке металлоксидті және полимерлі пленкамен жабудан тұрады.

Кеуекті кремнийдің беткі қабатын әртүрлі органикалық қосылыстарда өңдеу ұсынылған. Онда, авторлардың ойынша, тікелей кеуектердің сыртында, уақытқа қарай тұрақты және материалдың фотолюминесценциялық қасиеттерін нашарлатпайтын Si-C байланыстарға толы қабат пайда болады. Сонымен қатар, кеуекті кремнийдің акрилді қышқылда өңделген нанокристалдарында ұзақ уақыт ішінде тұрақты фотолюминесценция қасиеті сақталатыны көрсетілген [3].

Үлгілердің фазалық құрамы эталонды фазалар спектрлер көмегімен және Оже-спектракопияны қолдану арқылы экспериментті, ультражұмсақ, ренгенді, эмиссионды Si L_{2,3} спектрлерді моделдеу арқылы анықталады.

Кеуекті кремний үлгілері балқытылған қышқыл изотропил спирті және сутегі перекисін қолданып, n-типті кремний астарын электрохимиялық жолмен өңдеумен алынды. Кеуекті кремний үлгілері атмосферада 1,3,7,14 және 40 күн ұсталды. 1-ден 40-қа дейінгі күн аралығында атмосферада ұсталған үлгілердің табиғи қартаю кезінде ультражұмсақ, ренгенді, эмиссионды USXES (Ultra Soft X-ray Emission Spectroscopy) электроскопия және фотолюминесцентті қасиетті әдісі арқылы үлгілердің эталондық құрылымына зерттеулер жүргізілді. 3d-металды гальваникалық тұндыру [4] сипатталғандай қалыпты процедураға сәйкес бастапқы кеуекті кремний қабатына сәйкес Fe, Co, Ni тұздарының сульфатты сулы ерітінділерімен жүргізілді.

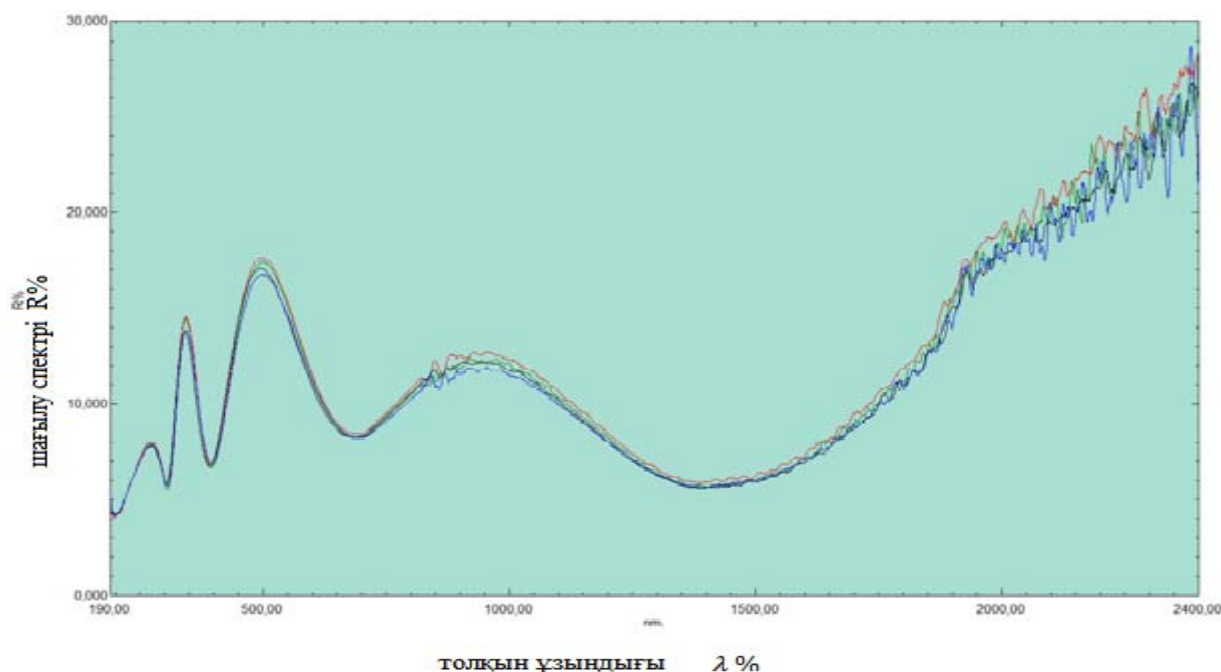
Автоматталған Shimadzu UV-3600 спектрофотометрінің ASR камерасында (сезімталды спектрлік диапазоны 185-3300 нм) 1мВт қуатпен ұзындығы 340 нм толқын шығаратын газды шаммен 3d-металл/por-Si-дің наноқұрылымдарының фотолюминесценциясы өлшенді. Өлшеу бөлме температурасында жүргізілді.

Кеуекті кремний құрамы мен қасиеті уақыт өте өзгертін, жеткілікті күрделі көпфазалы жүйе болып табылатыны белгілі. Кристалды кремний кеуекті қабаты (нано түрде) дефектілі SiO_x оксидін, SiO₂ кремниінің стехиометрикалық оксиді және де аморфты, реттелмеген кремнидің әртүрлі формаларынан тұрады. Үлгіні атмосферада ұстау уақытын ұлғайту соңғысының пайдасына кристалды фаза, аморфты кремний оксиді мен фазалардың коэффициентінің өзгеруіне әкелетін кеуекті қабаттың қышқылдануы бақыланады [5].

Жұмыста n типті кеуекті кремнийдің фотолюминесценциясы үлгісінің қарқындылығы және шыңы орналасуының, фазалық құрамына тәуелділігі көрсетілген. ФЛ шыңының орналасуы 1.85-2,2 эВ арасында, нанокристалдық немесе қандай да бір кремнийдің аморфтық фазасы басымдылығына байланысты өзгеретіні анықталды. Үлгілердегі дефектті оксидтер салыстырмалы құрамының өсуі ФЛ қарқындылығының әжептеуір төмендеуіне әкеп соғады. Көрсетілгендей, ферромагнетиктері бар кеуекті кремний негізіндегі нанокөмпазиттердің оптикалық қасиеттерін белгілі бір өтпелі метал немесе металдар қоспасын кеуекті кремний матрицасына енгізу жолы арқылы өзгертуге болады. Бұл ақпаратты және метаматериалдарды жазудың жаңа құралдарын құрудағы осы көзқарастың келешегі бар екеніне куәландырады.

Жұмыс барысында біз кеуекті кремнийдің электронды құрылымы мен морфологиясын зерттедік. Кеуекті кремний полиакрильді қышқылмен өңдеуге дейінгі және өңделгеннен кейінгі әртүрлі жағдайда электрохимиялық ою арқылы алынды.

Суретте n-типті кеуекті кремнийдің үлгілерінің 485нм толқын ұзындықтағы қоздыру көзі әсерімен полиакрильді қышқылмен өңдегенге дейінгі және өңделгеннен кейінгі фотолюминесценция (ФЛ) спектрлері көрсетілген. ФЛ спектрлері үлгіні алғаннан кейін 2 аптадан соң тіркелді.



n-типті кеуекті кремнийдің (төменгі) және полиакрильді қышқылда өңделгеннен кейінгі (жоғарғы) үлгілердің фотолюминесценция спектрі

n-типті кеуекті кремнийдің ФЛ үлгілерінің жолағы күрделі формалы болып келеді. Ол жерде бірқатар ерекшеліктер бар. Ол кеуекті қабаттағы әртүрлі өлшемдегі люминесценция нанокристалдарымен қатар, беткі қабаттағы сәулелік ФЛ үлгілердің полиакрильдік қышқылда өңделгеннен кейінгі қарқындылығының артуын, дефектті субоксидтің SiO_x -тің SiO_2 дейінгі тотығуы кезіндегі сәулесіз рекомбинация орталықтар санының кемуімен түсіндіруге болады[6].

ПАҚ-та өңделгенге дейінгі және өңделгеннен кейінгі бірдей өлшемдегі және формадағы жағдайындағы ФЛ жолақтары, ФЛ өңделген үлгілерінің максимум жағдайы өңделмеген үлгілерге қатысты ұзын толқындарға қарай ығысқан. Бұл дегеніміз, беткі қабатты өңдеудің жоғарғы қабаттағы люминесценция орталықтарына күрделі әсер ететінін көрсетеді.

Қорытынды. Полиакрильді қышқылды (ПАҚ) су ерітіндісінде кеуекті кремнийді өңдеу, оның фотолюминесцентті қасиеттерін жетілдіру мен өңдеудің өте қызықты әдісі болып табылатыны көрсетілген. Бұл жағдайда кеуекті кремний беткі қабаты полиакрильді қышқылдың өзара әрекеттесуінің екі параллельді механизмі бақыланады. Бұлар кремний оксидінің беткі қабатының тотығуы және беткі қабаттан оксидтің еруі мен алып тастауы. Соңғы нәтижеге әсер ету дәрежесі кеуекті

қабаттың морфологиясы мен бастапқы құрамына тәуелді. Изопропил спирті бар HF ерітіндідегі ерітіндімен өңдеу арқылы алынған кеуекті кремнийдің ФЛ интенсивтілігінің артуы нанокристалдар бетінде дефектілі оксид тотығуы кезінде безызлучательді рекомбинация центрінің санының азаюымен байланысты болуы мүмкін. Ал ФЛ-дің үлгілерде пайда болуы, ДМФА-дан алынған оксидті қабатын алып тастау мен нанокристалды кремнийдің беткі қабатта пайда болуы. Өңделген және өңделмеген үлгілердегі ФЛ интенсивтілігі арасындағы қарым-қатынас уақыт өтуіне байланысты сақталады. ПК үлгілері терісінің микрометрлік көлденең өлшемімен фотолюминесценцияны тек ПАК-та өңделгеннен кейін көрсетеді.

Бұл берілген функционалды наноматериалдардың қазіргі заманғы оптоэлектроникада перспективті қолдануын куәландырады.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Леньшин А.С., Кашкаров В.М., Голошапов Д.Л., Середин П.В., Полуместная К.А., Мараева Е.В., Солдатенко С.А., Юраков Ю.А., Домашевская Э.П. Состав и реакционная способность нанопорошков пористого кремния. Неорганические материалы, 2012. – Т. 48. – № 10. – С. 1-6.
- [2] Н.Е. и др. // Физика и техника полупроводников. Т. 44. – Вып. 1. – С. 82-86. (2010).
- [3] Леньшин А.С., Кашкаров В.М., Туришев С.Ю., Смирнов М.С., Домашевская Э.П. Влияние естественного старения на фотолюминесценцию пористого кремния // Журнал технической физики, 2012. –Т. 82. –Вып 2. –С. 150-152.
- [4] Кашкаров В.М., Леньшин А.С., Попов А.Е. и др. Состав и строение слоев нанопористого кремния с гальванически осажденным Fe и Co // Известия РАН. Серия физическая. – 2008. – Т.72. – №4. – С. 484-490.
- [5] Соцкая Н.В., Макаров С.В., Долгих О.В., Кашкаров В.М., Леньшин А.С., Котлярова Е.А. Модифицирование поверхностей композитов наночастицами металлов // Неорганические материалы, 2010. – Т. 46. – № 11. –С. 1316-1322.
- [6] Леньшин А.С., Кашкаров В.М., Туришев С.Ю., Смирнов М.С., Домашевская Э.П. Влияние естественного старения на фотолюминесценцию пористого кремния // Журнал технической физики, 2012. –Т. 82. –Вып 2. –С. 150-152.

REFERENCES

- [1] C. Lenshin, V.M. Kashkarov, D.L. Goloshapov, P.V. Seredin, K.A. Polumestnaya, E.V. Maraeva, S.A. Soldatenko, Y.A. Yurakov, E.P. Domashevskaya. The structure and reaction ability of nanopowders. Inorganic materials, 2012, tom 48, № 10, s. 1 – 6. (in Russ.).
- [2] N. E. et al// The physic and technique of semiconductors, t .44, (in Russ.).
- [3] Lenshin A.S., Kashkarov V.M., Turishev S.Y., Smirnov M. S., Domashevskaya E.P. The influence of natural aging on the photoluminescence of porous silicon. // The magazine of technique physic, 2012, vol. 82, ed 2, p. 150 – 152. (in Russ.).
- [4] V.M Kashkarov, A.S. Lenshin, A.E. Popov et al. The composition and structure of nanoporous silicon layers with galvanic deposition Fe and Co// RAN. The physical seria. – 2008 – vol.72, №4 – p. 484 – 490. (in Russ.).
- [5] N.V. Sotskaya, S.V. Makarov, O.V. Dolgikh, V.M. Kashkarov, A.S. Lenshin, E.A. Kotlyarova. The surface composite modifying with nanoparticles metals. // INORGANIC MATERIALS, 2010, vol.46, №11, p 1316 – 1322. (in Russ.).
- [6] Lenshin A.S., Kashkarov V.M., Turishev S.Y., Smirnov M.S., Domashevskaya E.P. The influence of natural aging to photoluminescence of porous silicon. // The magazine of technique physic, 2012, vol. 82, ed 2, p. 150 – 152. (in Russ.).

ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОГО КРЕМНИЯ

К. Т. Бажиков, М. Құрмансейіт, А. Абенова, А. Серік

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: пористый кремний, фотолюминесценция, нанокристалл.

Аннотация. В данной работе рассмотрены особенности фотолюминесцентных свойств различных структур на основе пористого кремния, их связь с фазовым составом образцов и предложены возможные способы их модификации. Показано, что положение пика ФЛ меняется в пределах 1.85–2,2 эВ в зависимости от времени выдержки поверхности на атмосфере, исходной технологии изготовления и способа модификации поверхности.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 98 – 103

UDC 536.46:532.517.4

COMPUTER SIMULATION OF LIQUID FUEL SPRAY AND COMBUSTION AT DIFFERENT INJECTION VELOCITIES

A. S. Askarova, S. A. Bolegenova, I. E. Berezovskaya, Zh. K. Shortanbayeva,
A. M. Maksutkhanova, Sh. S. Ospanova, G. K. Mukasheva, A. B. Yergalyeva

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

Keywords: liquid fuel, heptane, combustion, numerical modeling.

Abstract. The problems of combustion are widely studied now by the scientists of the world. Increasing level of ecological pollution of the environment, reserve depletion of hydrocarbon fuel and economic growth of many countries causing increase of demand for energy - all these factors gave rise to the problem of finding of more economic and ecological way of fuel combustion [1].

In order to solve this problem it is necessary to study thoroughly the combustion process itself and that is why the methods of numerical simulation are getting wide spread in the science. The turbulence plays great role in many devices using combustion process and its study is maybe one of the most complicated sections of hydrodynamics. It is also necessary to take into account additional factors such as various chemical reactions and radiation [2].

Thus, computer simulation becomes more and more important element of study of combustion process and of designing different installations burning liquid fuel. It can be forecasted that the role of the numerical experiment will increase in future. The purpose of this work is to study the influence of liquid fuel spray velocity on the fuel combustion by means of numerical simulation on the basis of the solution of differential equations of turbulent reacting flow.

One of the priority tendencies of the scientific and technological development of Kazakhstan is the research on simulation of formation of polluting clouds and their dispersion in the atmosphere. This problem has a great value because of the increasing concern for the ecological situation in Kazakhstan as the atmospheric air in the cities of Kazakhstan is daily polluted by different hazardous substances (NO₂, CO, CO₂, soot and so on). For the recent years the dispersion of the liquid sprays in the neutral atmospheric flows has been well studied by means of numerical, laboratory and natural researches. In these researches the main attention has been given to the dispersion of chemically reactive scalar admixture in the free convective flows.

The investigation of the formation of polluting clouds will allow to create the methods for the decrease of contain of hazardous substances in the atmosphere and for the prevention of formation of such clouds which contain hot liquid particles and these particles are the reasons of the formation of such polluting clouds. That kind of problems is one of the significant and insufficiently explored tasks for the present days. In this region of research the numerical experiments on the combustion of liquid fuel sprays in the burner chamber have been carried out. In this work it has been researched the dependence of maximal temperature of combustion of the liquid fuel from the velocity of the spray by means of the numerical modeling on the basis of the solution of differential two-dimensional equations of the turbulent reactive flows.

Main equations of mathematical model of dispersion and combustion of spray of liquid fuel are presented below [1-3]. Continuity equation for component m:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_m \vec{u}) = \vec{\nabla} \left[\rho D \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}_m^s \delta_{m1}. \quad (1)$$

Momentum equation:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}\vec{u}) = -\frac{1}{a^2}\vec{\nabla}p - A_0\vec{\nabla}\left(\frac{2}{3}\rho k\right) + \vec{\nabla}\vec{\sigma} + \vec{F}^s + \rho\vec{g}. \quad (2)$$

Energy equation:

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}I) = -p\vec{\nabla}\vec{u} + (1 - A_0)\sigma\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\nabla}\vec{J} + A_0\rho\varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}^s, \quad (3)$$

where

$$\vec{J} = -K\nabla T - \rho D \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right).$$

Equations of k-ε turbulence model:

$$\frac{\partial\rho k}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}k) = -\frac{2}{3}\rho k\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\left[\left(\frac{\mu}{Pr_k}\right)\vec{\nabla}k\right] - \rho\varepsilon + \dot{W}^s. \quad (4)$$

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}\varepsilon) = -\left(\frac{2}{3}c_{\varepsilon_1} - c_{\varepsilon_3}\right)\rho\varepsilon\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\left[\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon}\right)\vec{\nabla}\varepsilon\right] + \frac{\varepsilon}{k}\left[c_{\varepsilon_1}\vec{\sigma} : \vec{\nabla}\vec{u} - c_{\varepsilon_2}\rho\varepsilon + c_s\dot{W}^s\right]. \quad (5)$$

We have studied heptane combustion depending on the spray velocity. Heptane is the main component of diesel fuel. It's used in passenger, freight and private vehicles. Liquid fuel is injected into the combustion chamber through a circular nozzle, located in the center of the bottom of the chamber. The overview of the combustion chamber is presented in fig. 1.

The chamber is a cylinder with height equal to 15 cm and diameter is 4 cm. After the injection there is a rapid evaporation of fuel and the combustion is processing in the gas phase. The burning time of fuel is 4 ms. Time of injection of fuel droplets is 1.4 ms. The temperatures of the walls of the combustion chamber is 353 K. The initial temperature of gas in the chamber is 900 K. The temperature of the injected fuel is 300 K. The initial mean radius of injecting drops is 3 micrometers. The pressure in the combustion chamber is $4 \cdot 10^6$ Pa.

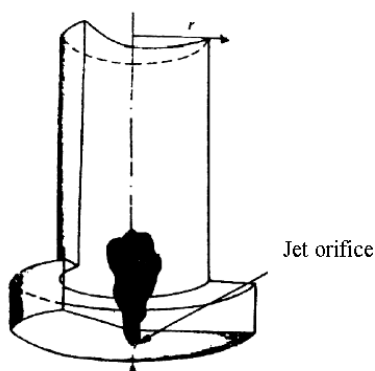
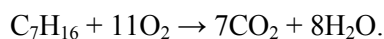


Figure 1 – Overview of the combustion chamber

In the work the dependence of maximum temperature of fuel combustion from spray velocity has been obtained. Liquid fuel spray velocity was ranging from 150 to 350 m/s. It has been found out that at low velocities of liquid fuel spray the process of combustion does not occur.

Heptane has been an object of research and its chemical formula has the following form as C_7H_{16} . For this type of fuel the global chemical reaction of combustion leading to the formation of carbon dioxide and water is written in the following way:



This reaction is exothermal, i.e. it proceeds with huge calorification. As the result of the conducted numerical experiments it has been determined that minimal velocity of liquid heptane's spray is equal to 200 m/s. This velocity is enough for the combustion to take place in the burner chamber. The most effective combustion proceeds at the velocity of the injected fuel varying from 260 to 320 m/s, under these conditions temperature reaches values from 2023 K to 2048 K (fig.2).

However figure 3 shows the dependence of the distribution of CO₂ concentration on the rate of injection of heptane where the highest concentration of CO₂ is equal from 0.115 to 0.117 g/m³ accounts for the velocity of the injected fuel varying from 270 to 320 m/s.

But the rate of injection heptane equal 260 m/s CO₂ concentration reaches the minimum value from the land 0,114 g/m³.

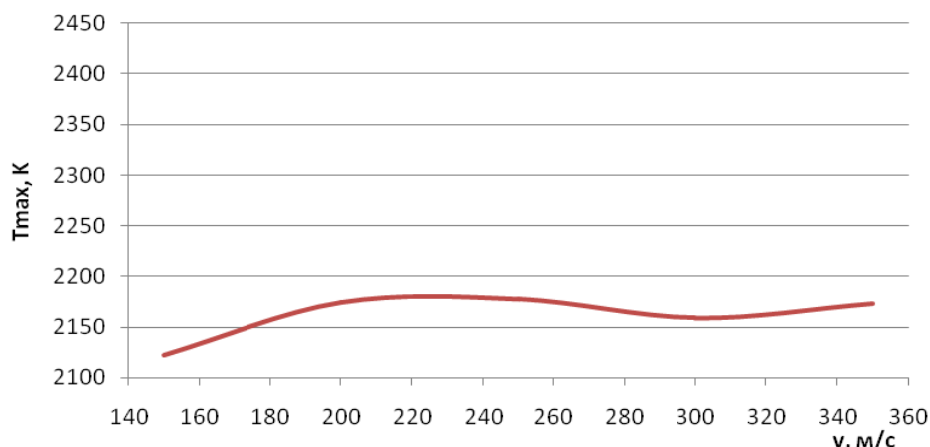


Figure 2 – Change of maximum temperature in the burner chamber depending on the velocity of the injected liquid fuel

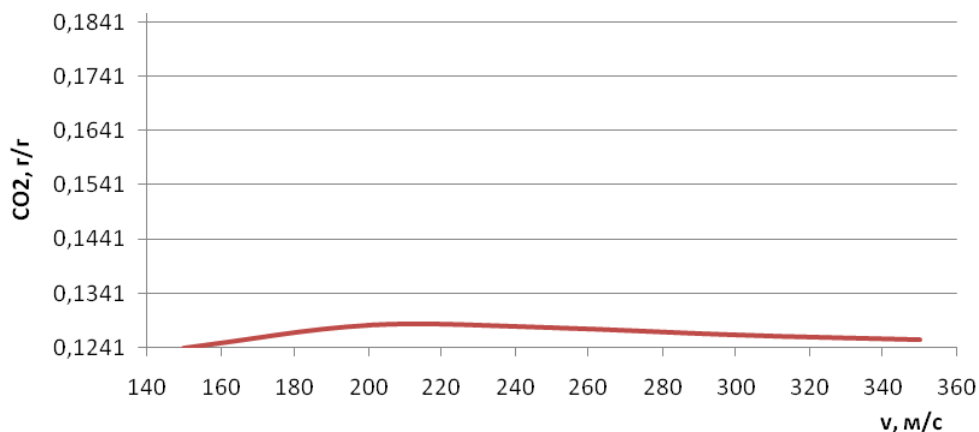


Figure 3 – The dependence of the distribution of CO₂ concentration on the rate of heptane injection

For the optimum velocity equal to 260 m/s, the plots of the temperature change in time and of the fuel concentration in the burner chamber have been obtained.

Figure 4 shows the distribution of the temperature in the space of the burner chamber for the velocity of spray equal to 260 m/s at different times: 1.1 ms, 1.8 ms, 3 ms, 4 ms correspondingly. At the final time moment the temperature reaches 2023 K and it can be seen that the temperature torch fills up almost all of the space of the chamber.

The distribution of the fuel concentration is presented in fig. 5 for the same time moments as for the temperature and for the spray velocity 260 m/s. At the initial moment the concentration of fuel has minimal value and then increases because of the fuel injection in the chamber. The fuel quickly vaporizes, the vapors are mixed with the oxidant and the mixture ignites and burns down for 4 ms. At the final moment the fuel concentration equals zero.

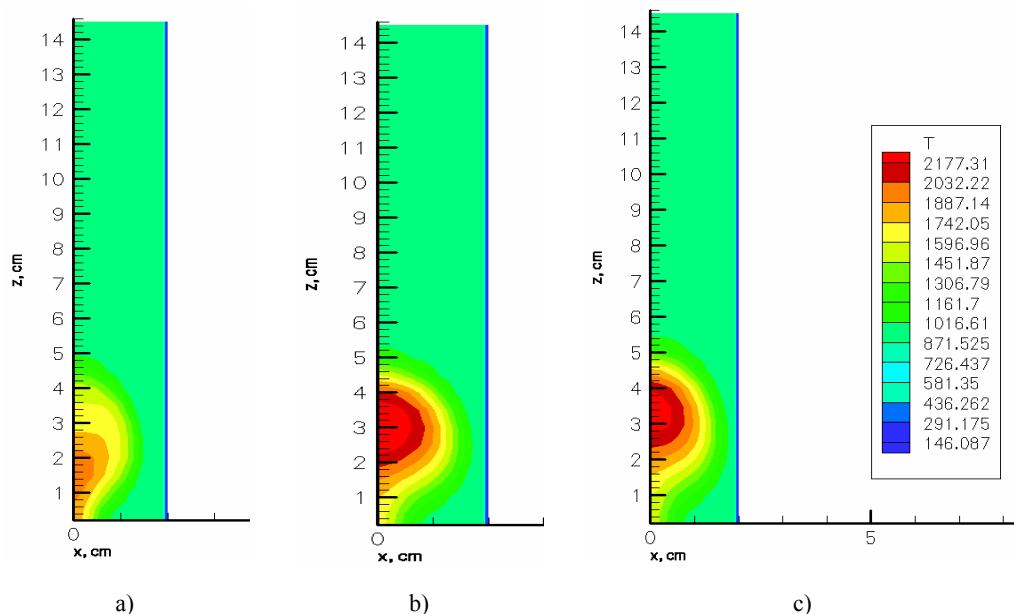


Figure 4 – The temperature distribution in the combustion chamber during combustion of heptane at various time moments: a) 1.1 ms, b) 1.8 ms; c) 3 ms for the velocity of the spray 260 m/s

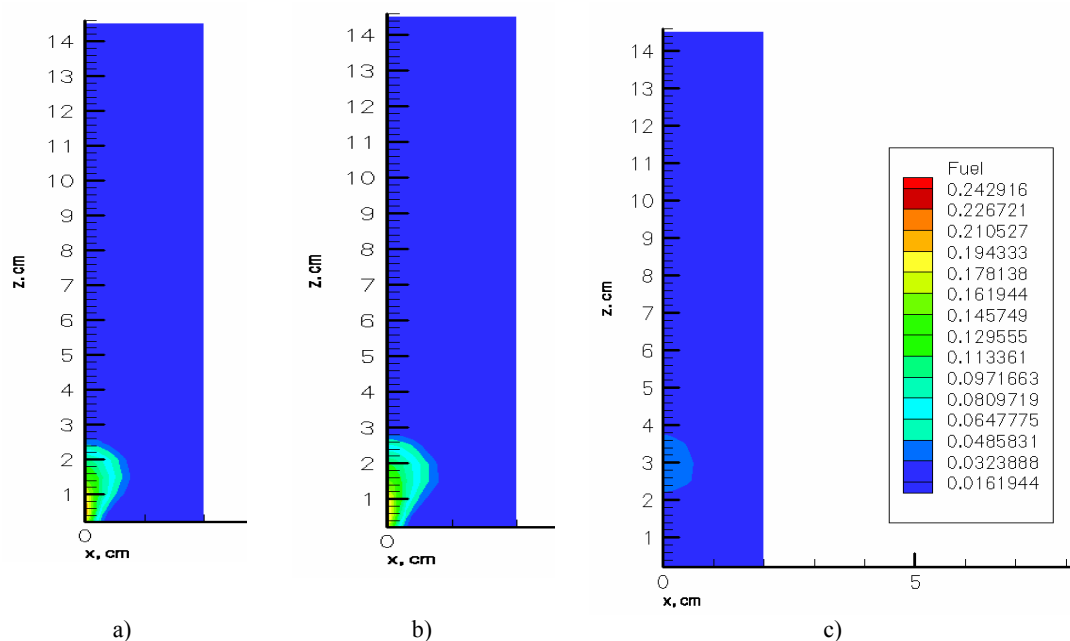


Figure 5 – The distribution of fuel vapor concentration in the burner chamber at different time moments: a) 1.1 ms, b) 1.8 ms; c) 3 ms for the velocity of the spray 260 m/s

Figures 6 show the dynamics of the distribution of reaction products concentration on time for the spray velocity 260 m/s.

In this work the influence of the spray velocity of liquid heptane on its combustion has been studied. The distributions of maximum temperature and of CO_2 concentration depending on the spray velocity, time distributions of the fuel, CO_2 , H_2O concentrations and temperature of the gas in the burner chamber for the effective velocity have been obtained. Also the change of maximum temperature in the burner chamber depending on the velocity of the injected liquid fuel has been obtained.

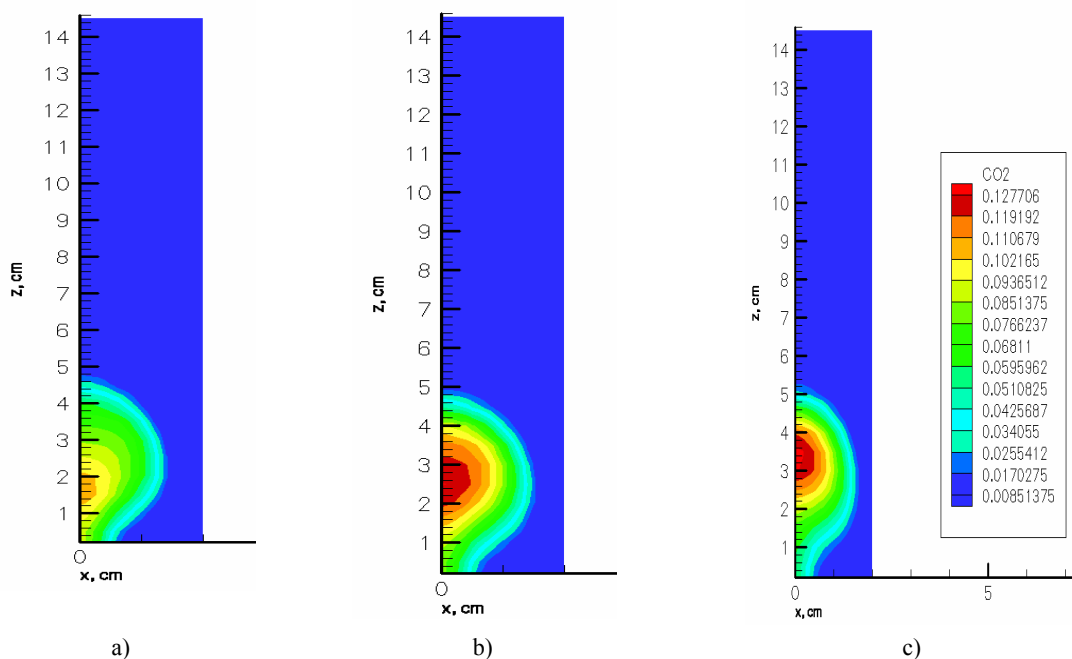


Figure 6 – The distribution of CO₂ in the combustion chamber during combustion of heptane at various time moments: a) 1.8 ms, b) 3 ms, c) 4 ms for the velocity of the spray 260 m/s

The further study of the combustion of liquid sprays will let not only to develop methods for the decrease the contain of harmful substances in the atmosphere and prevention of formation of polluting clouds, but also to improve the work of the engines of the internal combustion, of rockets, aviation engines and to make them more efficient and ecologically safer.

REFERENCES

- [1] Amsden, A.A., O'Rourke, P.J., Butler, T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays, Los Alamos. 1989, p. 160.
- [2] Askarova A.S., Ryspayeva M.Zh., Voloshina I.E. Effect of weight on the modeling of the combustion of liquid fuel injection. Bulletin of KazNU, series of physics, V1:5 (2007). (in Russ.).
- [3] Askarova A.S., Gorokhovskiy M.A., Loktionova I.V. Ryspayeva, M.Zh. Combustion of liquid fuels in the combustion chamber. News of NAS RK, V3:6 (2006). (in Russ.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Amsden, A.A., O'Rourke, P.J., Butler, T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays, Los Alamos. 1989, p. 160.
- [2] Асқарова А.С., Рыспаева М.Ж., Волошина И.Э. Влияние массы на моделирование процесса горения впрыска жидкого топлива // Вестник КазНУ, Серия физическая, №1:5 (2007).
- [3] Асқарова А.С., Гороховский М.А., Локтионова И.В., Рыспаева М.Ж. Горение жидких топлив в камере сгорания // Известия НАН РК, №3:6 (2006).

ӘРТҮРЛІ БҮРКУ ЖЫЛДАМДЫҚТАРЫНДАҒЫ СҮЙЫҚ ОТЫННЫҢ БҮРКУ ЖӘНЕ ЖАНУЫН КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ

А. С. Асқарова, С. А. Бөлегенова, И. Э. Березовская, Ж. К. Шортанбаева,
А. М. Максұтханова, Ш. С. Оспанова, Г. К. Мұқашева, А. Б. Ергалиева

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: сұйық отын, гептан, жану, сандық модельдеу.

Аннотация. Қоршаған ортаның экологиялық ластануы, көмірсутекті отын қорының азаюы және көптеген елдердің экономикалық өрлеуі энергия тұтынымына деген сұранысты арттыра түсті. Осы факторлардың барлығы отынды неғұрлым тиімді және экологиялық зиянсыз жағу тәсілдерін іздеуге түрткі

болды. Осы мәселені шешу үшін жану процесін мұқият зерттеу керек және осыған байланысты сандық модельдеу әдістері кеңінен қолданылып келеді. Осы жұмыстың мақсаты – сұйық отынды бұрқу жылдамдығының гептанның жану процесіне әсерін турбуленттік екіфазалы ағынның дифференциалдық тендеулерін шешу негізінде сандық модельдеуден тұрады.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПЫЛА И ГОРЕНИЯ ЖИДКОГО ТОПЛИВА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЯХ ВПРЫСКА

**А. С. Аскарова, С. А. Болегенова, И. Э. Березовская, Ж. К. Шортанбаева,
А. М. Максутханова, Ш. С. Оспанова, Г. К. Мукашева, А. Б. Ергалиева**

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: жидкое топливо, гептан, горение, численное моделирование.

Аннотация. Повышение уровня экологического загрязнения окружающей среды, истощение запасов углеводородного топлива и экономический рост многих стран, вызывающих увеличение спроса на энергию - все эти факторы привели к проблеме нахождения более экономического и экологического способов сжигания топлива. Для того чтобы решить эту проблему, необходимо тщательно изучить процесс горения и именно поэтому методы численного моделирования широко распространены в науке. Целью данной работы является изучение влияния скорости впрыска жидкого топлива на горение гептана с помощью численного моделирования на основе решения дифференциальных уравнений турбулентного реагирующего потока.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 104 – 109

HURST EXPONENT AND FRACTAL DIMENSION OF A TIME SERIES ESTIMATE IN A SINGLE PARALLEL ALGORITHM

A. S. Kussainov^{1,2}, S. G. Kussainov³, G. B. Turmaganbet¹, N. Samatkyzy¹

¹Physics and Technology Department, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

²"National Nanotechnology Laboratory Open Type", al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

³K. I. Satpayev Kazakh National Technical University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: arman.kussainov@gmail.com

Key words: Hurst exponent, fractal dimension, self-affinity, parallel, series, neutron.

Abstract. Using C++ programming language we implemented an algorithm for simultaneous parallel calculation of the Hurst exponent H and the fractal dimension D for the time series of interest. Parallel programming environment was provided by Open MPI package installed on three machines networked in the virtual cluster and operated by 64 bit *Debian Wheeze 7.4* operating system. We applied our program for a comparative analysis of week and a half long, one minute resolution, six channels data from neutron monitor. To ensure a faultless functioning of the written code we compared these results with the similar data analysis of the random Gaussian noise signal and time series with manually introduced self-affinity features. Both of them expected to have the well-known values of H and D . All results are in good correspondence to each other and supported by the modern theories on signal processing thus confirming the validity of the implemented algorithms. Our code could be used as a standalone tool for the different time series data analysis as well as for the further work on development and optimization of the parallel algorithms for the time series parameters calculations.

УДК 004.942

ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ЭКСПОНЕНТЫ ХЕРСТА И ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ВРЕМЕННОГО РЯДА В ОДНОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ

А. С. Кусаинов^{1,2}, С. Г. Кусаинов³, Г. Б. Тұрмағанбет¹, Н. Саматқызы¹

¹Физико-технический факультет, КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

²ДГП на ПХВ «Национальная Нанотехнологическая Лаборатория Открытого Типа», КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

³КазНТУ им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: экспонента Херста, фрактальная размерность, самоподобие, параллельные, ряд, нейтронный.

Аннотация. Нами был реализован, на языке программирования C++, алгоритм для одновременного параллельного вычисления значений экспоненты Херста H и фрактальной размерности D для анализируемого временного ряда. Среда параллельного программирования *Open MPI* была развернута на виртуальном кластере из трех *Linux* машин под управлением 64 разрядной операционной системы *Debian Wheeze 7.4*. Используя полученную программу, мы провели сравнительный анализ данных нейтронного монитора зарегистрированных за полторы недели по шести каналам с минутным разрешением. Для тестирования корректной работы алгоритма полученные результаты сравниваются с результатами обработки случайного сигнала, а также с временным рядом с искусственно внедрёнными элементами самоподобия. Оба обладают хорошо известными свойствами и заранее предсказуемыми результатами вычисления H и D . Полученные результаты хорошо согласуются друг с другом и общепринятыми теориями, подтверждая правильность реализованного алгоритма. Написанная программа может быть использована как конечный инструмент для анализа данных временных рядов различной природы, так и для дальнейшего развития и оптимизации параллельных алгоритмов вычисления характеристик временных рядов.

Introduction. The applications of the Hurst exponent H and fractal dimension D calculations are ranging from stock market analysis [1] to electron gas modeling [2] addressing data statistics and system's fractal properties [3]. Multiple studies have been done, including the studies of abundant data on cosmic rays variations. For example, Sankar et al [4] analyzed 36 years long data series on cosmic rays density covering almost three solar cycles and came to conclusion that "the present data is anti-persistent in behavior and the process is a short memory process" with the H value of 0.15. Flynn and Pereira, on the contrary, studied extra short, hundred points and less, data sequences [5] and extracted vital information from a data sample on population dynamics. Hurst exponent estimates are known to be strongly dependent on the length of data sample and the nature of data type taken into analysis.

A fractal dimension D is a quantity reflecting how frequently and to what extent the self-affine patterns appear with the change of scale in picture. For self-affine processes we expect the local properties to be observable at the level of the global ones leading, in limited number of cases, to the relationship $D+H=n+1$ between D and Hurst exponent H in n -dimensional space [6]. More often, in real experimental data, local and global behaviors are decoupled without any linear relation.

Our primary goal in this work is to offer effective parsing of original data text file, to identify similar steps in H and D calculations algorithms, and to provide reliability of results of the Hurst exponent H and fractal dimension D data calculations. We also demonstrate a quick self-affinity test for the data of interest using our program.

Methods. Conventional algorithm for the Hurst exponent calculation runs as follows:

Original time series of length N is divided into the sets of shorter partial series $\{X_i\}$ with length $n = N, N/2, N/4, \dots, 4, 3, \text{ and } 2$ points. The upper, $n=N$, and lower, $n=2$, cutoff limits differ from study to study and depend on data availability and studied phenomena.

For each set with particular n value, and for every partial series $\{X_i\}$ within this set we calculate the mean-adjusted series derived from $\{X_i\}$ using its mean value m

$$Y_t = X_t - m; \quad t = 1, 2, \dots, n; \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

We define the rescaled range $R(n)$ for a given subseries $\{X_i\}$ as follows

$$R(n) = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) - \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \quad (2)$$

where the cumulative deviate series Z_n are given by the following expression

$$Z_t = \sum_{i=1}^t Y_i; \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Now, we can build the tabulated power law function $E(n)$ for all possible values of n such as

$$E \left[\frac{R(n)}{S(n)} \right] = C n^H \quad (4)$$

where $S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}$ is a standard deviation. The value of H then could be estimated from the slope of the line $\log(E) = \log(C) + H \cdot \log(n)$ [7].

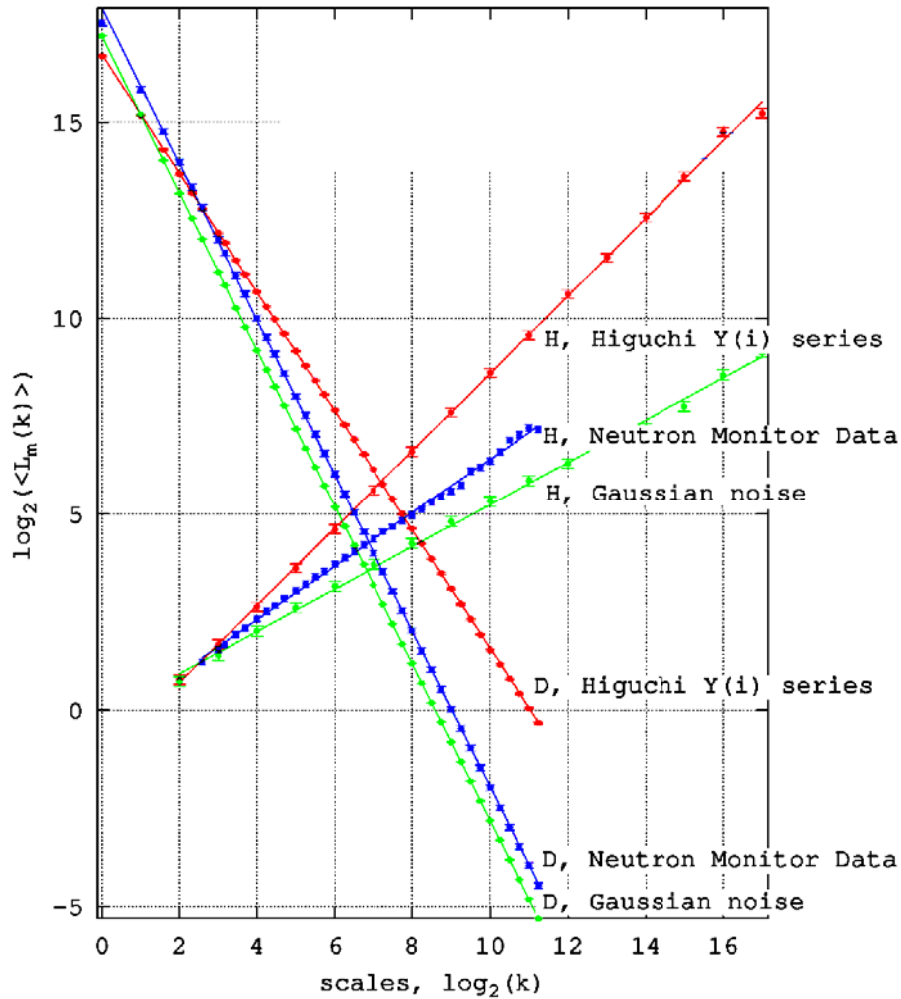
Figure shows our H estimate for the first out of six registration channels of the nuclear monitor, see the blue line with the negative slope. Each data time series contains 10 days long data, taken with one minute resolution. Operator makes the choice of registration channel within the program.

Fractal dimension D is closely related to the Hurst exponent and could be calculated, according to Higuchi cornerstone paper [3], by constructing the following sets of subseries X_k^m

$$X(m), X(m+k), X(m+2k), \dots, X\left(m + \left[\frac{N-m}{k}\right]k\right); \quad (5)$$

$$m = 1, 2, \dots, k; \quad k = 1, 2, \dots, \left[2^{(j-2)/4}\right]; \quad j = 11, 12, 13, \dots$$

where the square brackets are used to denote the closest integer after rounding the fraction to zero.



Higuchi time series (red lines), neutron monitor data (blue lines) and Gaussian noise (green lines) calculations of H and D values

Next, we calculate the normalized lengths $L_m(k)$ of the constructed subseries

$$L_m(k) = \left\{ \frac{N-1}{\left[\frac{N-m}{k}\right]k} \sum_{i=1}^{\left[\frac{N-m}{k}\right]} |X(m+ik) - X(m+(i-1)k)| \right\} k^{-1} \quad (6)$$

These are expected to follow the power law in the form of $\langle L_m(k) \rangle \propto k^{-D}$ after averaging within all sets of k values for different $m = 1, 2, \dots, k$.

To test the validity of the program we reproduced the exact same time series $Y(i)$ which were used by Higuchi in his derivations [3] and plotted the results on the same figure, see Figure 1 and the red line with the negative slope.

Here $Z(j) = \sum_{j=1}^{1000+i} Z(j)$, where $Z(j)$ is a Gaussian noise with mean zero and standard deviation equals

to 1. The set of $L_m(k)$ subseries is again expected to produce data following the power law $\langle L(k) \rangle \propto k^{-D}$ and the value of D could be extracted following the same procedure as described above for the Hurst exponent. The same code can be applied to this procedure. We get D value equals precisely -1.5341 for a Higuchi's time series, see Table 1. Separate test run of the code for the Gaussian time series $Z(j)$ produced another set of values H and D equal -1.9999 and 0.54000 correspondingly, as expected for the highly uncorrelated times series, see Table I. The $Y(j)$ data are plotted with the green color on Figure.

The n length of subseries, in case of the Hurst exponent calculations, and k value for the fractal dimension calculation have been treated equally in our code, that is as a single variable $k=n$ in one of the outer parent loops. Two separate arrays of size k were allocated for both types of calculations. In case of the Hurst exponent calculations the array's values have been filled sequentially by the data file readout. For fractal dimension calculations, each array's element contained the value $\langle L_m(k) \rangle$ assembled through the data readout according to the scheme described in Eq.6. The number of processes was equal to the number of virtual machines and kept equal to three.

The original neutron monitor data were retrieved from the Nikolay Pushkov's Institute of Earth Magnetism, Ionosphere and Radiowaves Propagation of the Russian Academy of Sciences (IZMIRAN) mobile 6NM64 super monitor database [8]. Neutron counts were acquired at one minute interval from June the 31st, 2014 till August the 8th, 2014 in the vicinity of Moscow city. Neutron monitor time series data additionally underwent simple exponential smoothing filtration procedure as described in [9].

To address a persistent need for the effective parallel algorithms in data processing we designed our piece of C/C++ code compatible with available on *Debian* distribution *Open Message Passing Interface* (Open MPI) parallel computations environment. We have configured our virtual cluster using the *Oracle VM Virtual Box*. The host is 64 bit *Windows 8.1* operating system running on *Intel Core i3-3220 CPU* with 4 Gb of *RAM*. The guest operating systems are the three *Linux* machines with 64 bit *Debian GNU/Linux 7.4 (Wheezy)* with 512 Mb of *RAM* per each server and two nodes.

Results. Calculated slopes for all three sets of data are given in the Table. These are the Higuchi time series, Gaussian noise and neutron monitor data H and D values.

Curve's slope estimates in D and H calculations

Time series name	Number of points in time series, N	Fractal dimension, D	Hurst exponent, H
Higuchi time series	2^{17}	-1.5143	0.98758
Gaussian noise	$1000+2^{17}$	-1.9999	0.54000
Neutron monitor data, 1st channel	14703	-1.9973	0.68353
2nd channel	14703	-1.9984	0.66275
3rd channel	14703	-1.9985	0.63786
4th channel	14703	-1.9982	0.67716
5th channel	14703	-1.9994	0.64220
6th channel	14703	-1.9973	0.65107

The $\pm \Delta y_i$ error bars were plotted on the figure around the experimental data points (x_i, y_i) using *polyfit*, *polyval* and *errobar* functions available in *Matlab/Octave* in such a way that then $y_i \pm \Delta y_i$ contains at least 50% of the predictions of future observations at x_i , see *Matalb/Octave* help notes on the selected functions.

In both H and D calculations, different scales evaluations were distributed between three processes. The number of processes in our case is equal to the number of machines used for calculations.

Discussion. H and D values for Higuchi time series in our calculations were found to be equal to the D and H values in [3], where H value close to 1 (see Table 1) indicates long term positive autocorrelation, as expected from the $Y(i)$ series. For the neutron monitor series, Hurst exponent estimates are matching the majority of the previously obtained results for geomagnetic indices [10] where H value is above 0.5. In our previous studies [11] of the same data with the same algorithm, the H value was slightly bigger than 0.6. The single reason for this change in the first decimal place is the change in the spectrum of k values used for our calculation. These slight changes easily rotate the curve in $\log(E)$ vs. $\log(k)$ plane. Nevertheless, all values stay well above 0.5. Between all six channels, the H values are in 0.64-0.68 range, suggesting that at the chosen series duration, our time series do have some scalable order. However, possibility of a long-term positive autocorrelation requires further studies.

The Gaussian noise data $Z(i)$ in its turn produces values of $D=-1.9999$ and $H=0.54000$ as expected from the highly uncorrelated data.

As we can see, for all sets of data the processes are not completely self-affine in the sense of $D+H=n+1$ relationship, and the dependence between D and H is not of linear nature.

It is also interesting to observe how the slope changed according to the changes in data structure. We can see this transition when we come from Higuchi time series down to the chaos in the Gaussian noise. Rotations happen to be around (2:0) point for the Hurst exponent and (2:14) points for Hurst exponent and fractal dimension data calculations. This may be due to the loss of differences between time series of different origin at the small scales.

Conclusion. Using C++ programming language we implemented an algorithm for the simultaneous parallel calculations of Hurst exponent H and fractal dimension D over specific time series. Parallel programming environment was provided by an *Open MPI* package installed on three machines networked in the virtual cluster and operated by a 64 bit *Debian Wheeze 7.4* operating systems. We used our program to perform a comparative analysis of the week and a half long, one minute resolution, six channels data file from neutron monitor. To verify the functionality of the written code, we compared these results with a similar data analysis of the random Gaussian noise signal and time series with manually introduced self-affinity features and known values of H and D . All results are in good correlation with each other and are supported by the modern theories on signal processing, thus confirming the validity of the implemented algorithms.

Besides the straightforward workload distribution between the parallel processes, performed by splitting the data on the channel or on the calculated scale basis, we also identified common features in the calculations of two variables of interest, and tracked them in a single common outer loop within a single thread, providing additional optimization for the code. Our data and algorithms have multiple applications such as quick data self-affinity [12] test and have great potentials for the future development. The code is compiled to run independently on different networked computers and could be used as a tool to study time series of different nature and origin. Timing and optimization in this study are the subjects of further studies.

Acknowledgements. *This research was supported by grant №2532/ГФ3 provided by the Science Committee at the Ministry of Science and Education of Republic of Kazakhstan to the principal investigator at the National Nanotechnology Open Laboratory.*

We also would like to thank Dr. Yelena White, from East Georgia State College, Swainsboro, GA, USA, for editing the manuscript.

REFERENCES

- [1] Zhou J., Gu G.-F., Jiang Z.-Q., et al. Microscopic determinants of the weak-form efficiency of an artificial order-driven stock market. arXiv:1404.1051, **2014**, P.1-11.
- [2] Hurst J., Morandi O., Manfredi G., Hervieux P.-A. Semiclassical Vlasov and fluid models for an electron gas with spin effects. The European Physical Journal D, **2014**, Vol.68, Issue 6, P. 176-179.
- [3] Higuchi T. 1988. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. Phys. D., **1988**, V.31(2), P.277-283.
- [4] Sankar N.P. et al. Scaling and Fractal Dimension Analysis of Daily Forbush Decrease Data, International Journal of Electronic Engineering Research, **2011**, V.3(2), P.237-246.
- [5] Flynn M, Pereira W. Ecological studies from biotic data by Hurst exponent and the R/S analysis adaptation to short time series. Biomatemática, **2013**, Vol.23, P.1-14.
- [6] Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J. Nature, **1984**, V.308, P.721-724.
- [7] Gorski A.Z. et al. Financial multifractality and its subtleties: an example of DAX, Physica, **2002**, V.316, P.496-510.
- [8] The Shepetov's database in IZMIRAN at <http://cr29.izmiran.ru/vardbaccess/frames-vari.html> accessed on August 10, 2014.
- [9] Brown R.G. Exponential smoothing for predicting demand. Cambridge, Massachusetts: Arthur D. Little Inc, **1956**, 15 p.
- [10] Pesnell W. D. Solar Cycle Predictions (Invited Review). Sol. Phys, **2012**, Vol.281, P.507-532.
- [11] Kussainov A.S., Kussainov S.G. Hurst exponent estimation, verification, portability and parallelization. Vestnik KazNU (Physics Edition), **2014**, 4(47), in press.
- [12] Tilmann Gneiting and Martin Schlather. Stochastic Models That Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect, SIAM Review, **2004**, 46(2), P.269-282.

БІР ПАРАЛЛЕЛЬ АЛГОРИТМДЕГІ УАҚЫТТЫҚ ҚАТАРДЫҢ ХЕРСТ ЭКСПОНЕНТАСЫНЫҢ ЖӘНЕ ФРАКТАЛДЫ ӨЛШЕМДІЛІГІНІҢ МӘНДЕРІН БАҒАЛАУ**А. С. Құсайынов^{1,2}, С. Г. Құсайынов³, Г. Б. Тұрмағанбет¹, Н. Саматқызы¹**¹Әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,²«Ашық түрдегі ұлттық нанотехнологиялық зертхана» шаруашылық жүргізу құқығындағы еншілес мемлекеттік кәсіпорыны, Алматы, Қазақстан,³Қ. И. Сатпаев ат. Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан**Тірек сөздер:** Херст экспонентасы, фракталды өлшемділік, өзіндік, параллельді, қатар, нейтрондық.

Аннотация. Біз талданатын уақыттық қатардың Херст экспонентасының H және оның фракталды өлшемділігінің D мәндерін $C++$ бағдарламасында біруақытта параллель есептеу үшін алгоритм жаздық. OpenMPI параллельді программалау ортасы үш *Linux* машинасынан тұратын виртуалді кластерде жүзеге асырылды. Бұл үш машина 64 разрядты операциялық жүйе *Debian Wheeze 7.4* арқылы басқарылды. Алынған программаны қолданып, алты канал бойынша және минуттық айырумен бір жарым аптада тіркелген нейтрондық монитордың деректеріне салыстырмалы талдау жүргізілді. Алгоритмнің дұрыс жұмыс істеуін түсіндіру үшін алынған нәтижелер кездейсоқ сигналды және бұрыннан белгілі қасиеттер мен H пен D -ны есептеудегі болжамды нәтижелерге ие, элементтері жасанды еңгізілген уақыттық қатарды өңдеудің нәтижелерімен салыстырылады. Алынған нәтижелер бір-бірімен және теориямен жақсы үйлеседі. Бұл алгоритмнің дұрыстығын растайды. Жазылған программаны табиғаты әр түрлі уақыттық қатарлардың деректерін талдаудағы және уақыттық қатарлардың сипаттамаларын есептеудің параллельді алгоритмдерін әрі қарай дамыту және оптимизациялаудағы негізгі құрал ретінде қолдануға болады.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 110 – 115

ELECTRONIC MODELS OF NEURAL NETWORK AT PROGRAMMABLE INTEGRATED CIRCUIT

Z. Zh. Zhanabaev, Ye. T. Kozhagulov, D. M. Zhexebay

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: dauren_92_05@mail.ru

Keywords: neural networks (NN), Field Programmable Gate Array (FPGA), digital scheme, scale invariance.

Abstract. The work is dedicated to the integrated circuit engineering implementation of neural network MODELS with scale-invariant properties. Feature of these models is the analysis of discrete mappings containing fractional powers. We suggest an algorithm for raising to power of a physical value by use of field-programmable gate array (FPGA). A comparison of FPGA implementations with the numerical results is presented.

УДК 004.896

ЭЛЕКТРОННАЯ МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ПРОГРАММИРУЕМОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СХЕМЕ

З. Ж. Жанабаев, Е. Т. Кожугулов, Д. М. Жексебай

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: нейронные сети, программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС), цифровые схемы, масштабная инвариантность.

Аннотация. Работа посвящена интегральной схемотехнической реализации новых моделей нейронных сетей с масштабно-инвариантными свойствами. Спецификой таких моделей является необходимость анализа дискретных отображений, содержащих дробные степени. Предложен алгоритм возведения в дробную степень физической величины в программируемой логической интегральной схеме (FPGA). Приведено сопоставление реализаций FPGA с численными результатами.

Введение. Нейронные сети являются наиболее общим видом реализации интеллектуальных систем. Актуальной задачей является исследование моделей нейронных сетей с помощью современных цифровых приборов - программируемых логических интегральных схем (FPGA), что облегчает структурную реализацию и повышает вычислительную эффективность. Работы [1-7] посвящены моделированию динамики нейронов на основе цифровой техники FPGA. В работах [1-4] приводятся качественные и количественные сравнения FPGA с альтернативными вариантами (к примеру, «xc5v1x330t» в сравнении с Core2/3GHz и GT200/1.2GHz). В случае сложных задач наблюдается явное превосходство по времени и производительности. Так, в работе [5] сделан вывод о том, что реализация на Xilinx Virtex-5 FPGA демонстрирует скорость вычислений в 24,3 раза выше, чем соответствующее программное обеспечение. Ряд новых свойств колебаний нейронов, включая наличие их иерархических уровней, установлено в работе [8]. Например, в отличие от уравнений, использованных в недавних работах [6, 7] динамическая система, предложенная в [8], содержит дробные степени переменных. Как нам известно, варианты FPGA не включают операцию возведения в произвольную дробную степень. Целью работы является поиск возможностей интегрально-схемотехнической реализации масштабно инвариантной модели нейронных сетей, в которой учитывается дробная степень.

Теоретические основы и методика исследований. В качестве тестовых объектов исследований мы выбрали известные модели нейронных сетей [6, 7] (ФитцХью-Нагумо, Хиндмарш-Роуз) и масштабно-инвариантную модель нейронных сетей [8]. Аппаратная часть реализована на основе отладочной платы ANVYLFPGA с интегральной схемой фирмы XILINX семейства Spartan 6. Цифровой сигнал на выходе FPGA получен в виде восьми битного кода данных. Для получения численных и графических данных использовался программный пакет MATLAB Simulink.

Уравнения колебаний нейронов по модели ФитцХью-Нагумо [6] записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v - v^3 / 3 - w + I_{ext} \\ \tau \cdot \dot{w} &= v + a - b \cdot w, \end{aligned} \tag{1}$$

где v – является мембранным потенциалом; w – переменная восстановления; I_{ext} – величина тока стимула; параметры $a, b, \tau > 0$.

Уравнения модели Хиндмарш-Роуз [7] имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - a \cdot x^2 + b \cdot x^2 - z + I \\ \dot{y} &= c - d \cdot x^2 - y \\ \dot{z} &= r \cdot [s \cdot (x - x_R) - z], \end{aligned} \tag{2}$$

где I имитирует входной мембранный ток для биологических нейронов; b позволяет переключаться между берстовыми и спайковыми поведениями и контролировать частоту спайков; r контролирует скорость изменения медленной переменной z (т.е., эффективность медленных каналов в обмене ионами); параметры a, b, c, d контролируют скорость изменения переменной x и y ; s регулирует адаптацию; x_R устанавливает потенциал покоя системы.

Вначале мы получили экспериментальные результаты на основе FPGA для системы уравнений (1), (2) и они были сопоставлены с численными реализациями этих динамических систем. Получено удовлетворительное совпадение.

Уравнения масштабной инвариантной модели нейронных сетей включают в себя основные свойства нейрона [8]. Мы рассмотрим только три варианта моделирования нейронных сетей. В первом варианте внешнее поле влияет на каждый исследуемый объект как модуляционно-периодический сигнал:

$$\ddot{V}_k = \text{EMBED Equation.3} \tag{3}$$

где V_k – потенциал действия нейронов, V_0 – пороговые потенциалы возбуждения, k – порядковый номер нейрона. Внешнее поле принято в виде модуляционно – периодического сигнала:

$$F(t) = A(1 + B \sin(\Omega t)), \tag{4}$$

где A, B, Ω - амплитуда, коэффициент (глубина), частота модуляции нейронных колебаний. Дробные числа $V_k = D_k - d_k$, где D_k, d_k - фрактальные и топологические размерности описания геометрии нейрона с номером k .

Во втором варианте потенциал действия нейрона зависит только от соседнего нейрона, а модуляционно-периодическое внешнее поле будет влиять лишь на первый нейрон ($V^{(1)} = F, k \geq 2$):

$$\ddot{V}_k = \text{EMBED Equation.3} \tag{5}$$

Третий вариант учитывает многослойность нейронных сетей в виде иерархической структуры порядка n :

$$V_n = f \left(\dots f \left(\frac{V_0}{n}, V_n \right) \dots \right), \quad f(V_0, V) = V_0 \left(\left| 1 - \frac{F(t)}{V} \right| \right)^{-\gamma}, n = 1, 2, \dots, \tag{6}$$

где число скобок равно n , $V_{n,i+1}$ находится по формуле (3).

Блок схема структурно-схемотехнической реализации уравнений (3) показана на рисунке (1). Модель состоит из трех взаимосвязанных нейронов (выделенных пунктиром), которым подается внешнее поле модуляционно–периодического характера.

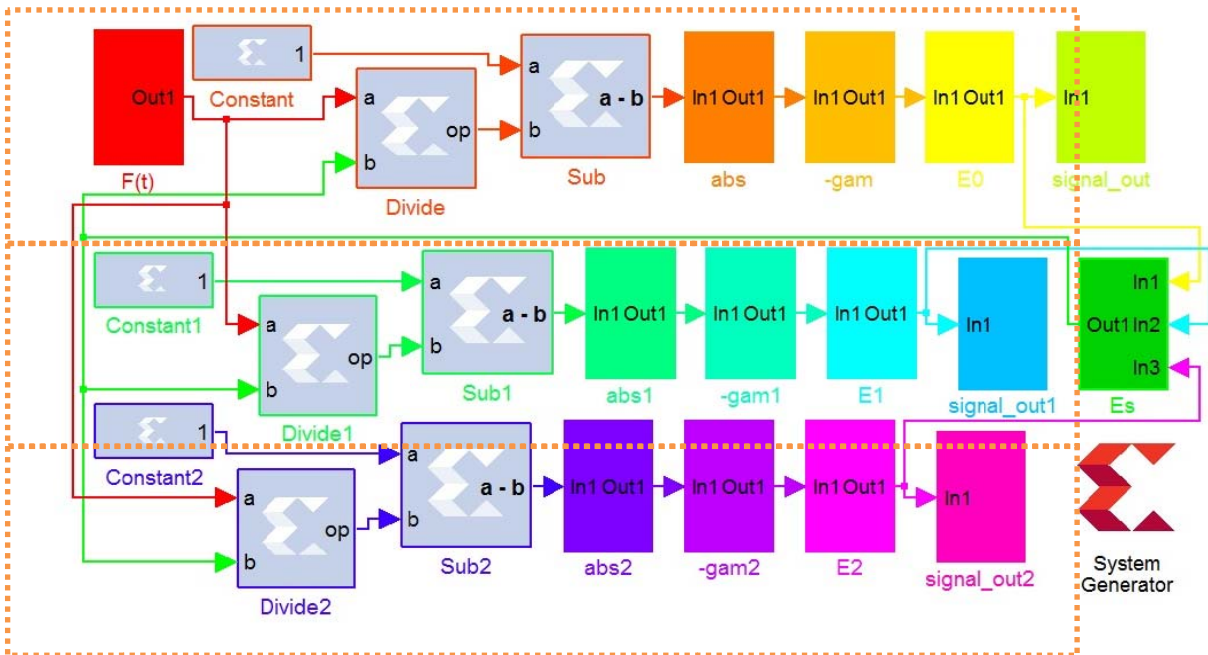


Рисунок 1 – Структурная схема реализации на FPGA масштабно-инвариантной модели нейронных сетей по системе уравнений (3)

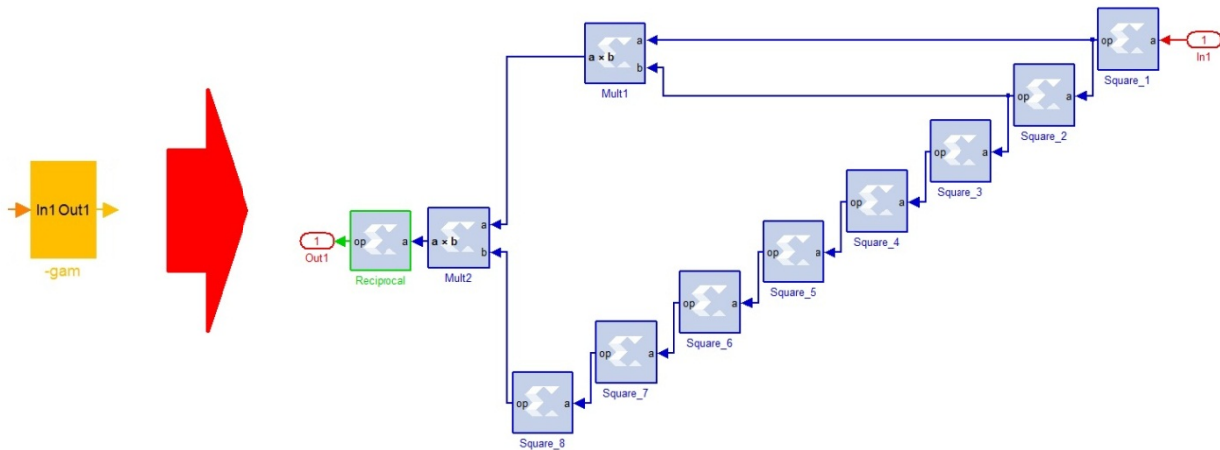


Рисунок 2 – Структурная схема блока вычисления произвольной дробной степени

На рисунке 2 показана структурная схема возведения сигнала в произвольную дробную степень на цифровых логических элементах. В устройствах FPGA нет готовых блоков возведения в произвольную дробную степень, предусмотрено только извлечение корня. Алгоритм вычисления на FPGA дробной степени γ запишем следующим образом:

$$\gamma = \sum_{k=1}^m a_k \cdot (2)^{-k} \tag{7}$$

где k – номер итерации, a_k – имеет значения $\{0,1\}$. Зная последовательность нужных нам элементов a_k , можно получить любые дробные степени сигнала x с желаемой точностью:

$$x^\gamma = \prod_k x^{\gamma_k} = \prod_{k=1}^m x^{a_k \cdot (2)^{-k}} \tag{8}$$

Для выявления типов физических явлений достаточно использовать значения γ с точностью до 1%. Так, в работе [9] показано, что хаотические процессы с скейлинговыми закономерностями, какими являются нейронные колебания в определенных интервалах параметров, классифицируются значениями $\gamma : \gamma_1 = 0.567, 1 - \gamma_1; \gamma_2 = 0.806, 1 - \gamma_2; \gamma_3 = 0.618, 1 - \gamma_3$.

Числа γ_1, γ_2 являются, соответственно, нормированными неподвижными значениями информации и энтропии – критериями самоорганизации. Известное число Фибоначчи (γ_3) является «золотым сечением» динамической меры, оно следует из теории для γ_1, γ_2 .

Из таблицы 1 видно, что для описания различных типов нейронных колебаний (сигналов нейронных сетей) достаточно использовать 9 итераций в формуле (8).

Таблица 1 – Значения γ согласно формуле (8) для $m = 9$

m	γ	γ_1	$1 - \gamma_1$	γ_2	$1 - \gamma_2$	γ_3	$1 - \gamma_3$
9		0,567±0.001	0.433±0.001	0.806±0.001	0.194±0.001	0.618±0.001	0.382±0.001

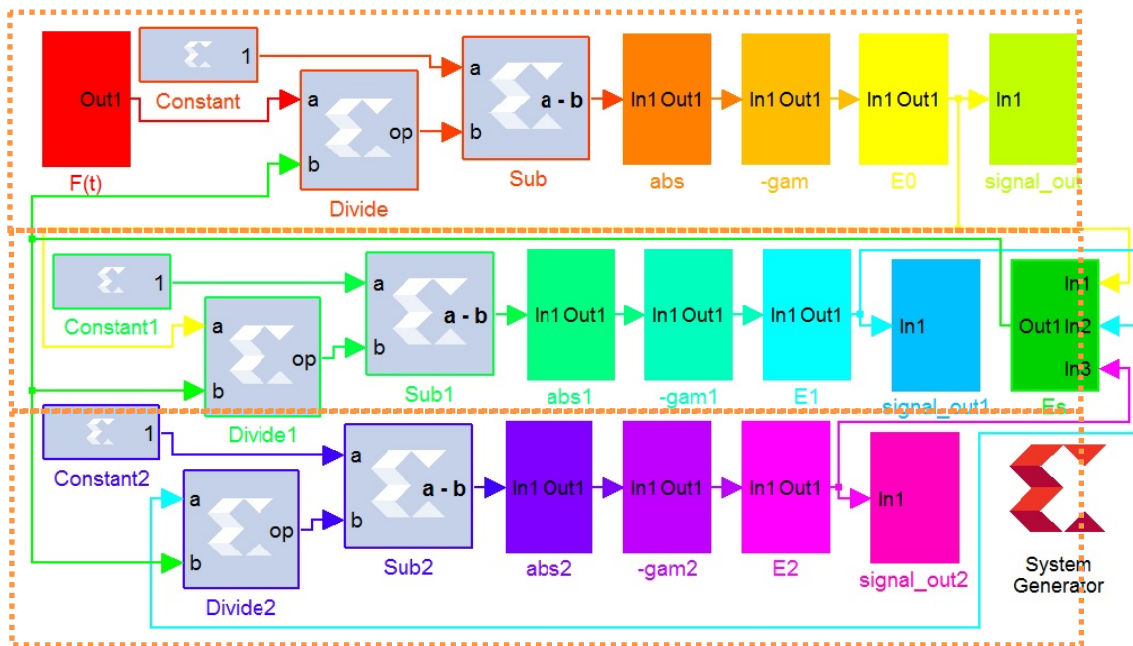
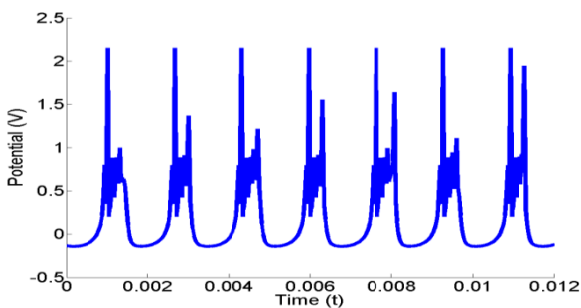
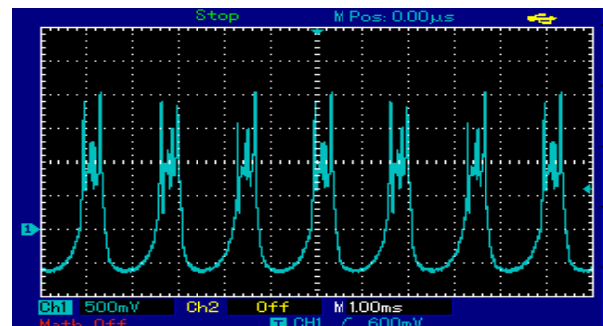


Рисунок 3 – Структурная схема цифровой реализации масштабно-инвариантной модели нейронных сетей согласно формуле (5)

Результаты численного и схмотехнического моделирования. Численные и схмотехнические реализации уравнений (4) приведены ниже.



(a)



(b)

Рисунок 4 – Численная реализация (a) и экспериментальный результат (b) для уравнений (3) при $A = 0.8, B = 0.4, \Omega = 800\pi, V_0 = 0.1, k = 3, \gamma = 0.567$

Рисунок 4 показывает возможность достаточно точной реализации цифровой техникой FPGA динамической системы (3). Количество осцилляций и амплитуда пиков совпадают в цифровой и схемотехнической реализациях. Здесь и далее приведены значения напряжения в милливольтгах, время – в миллисекундах.

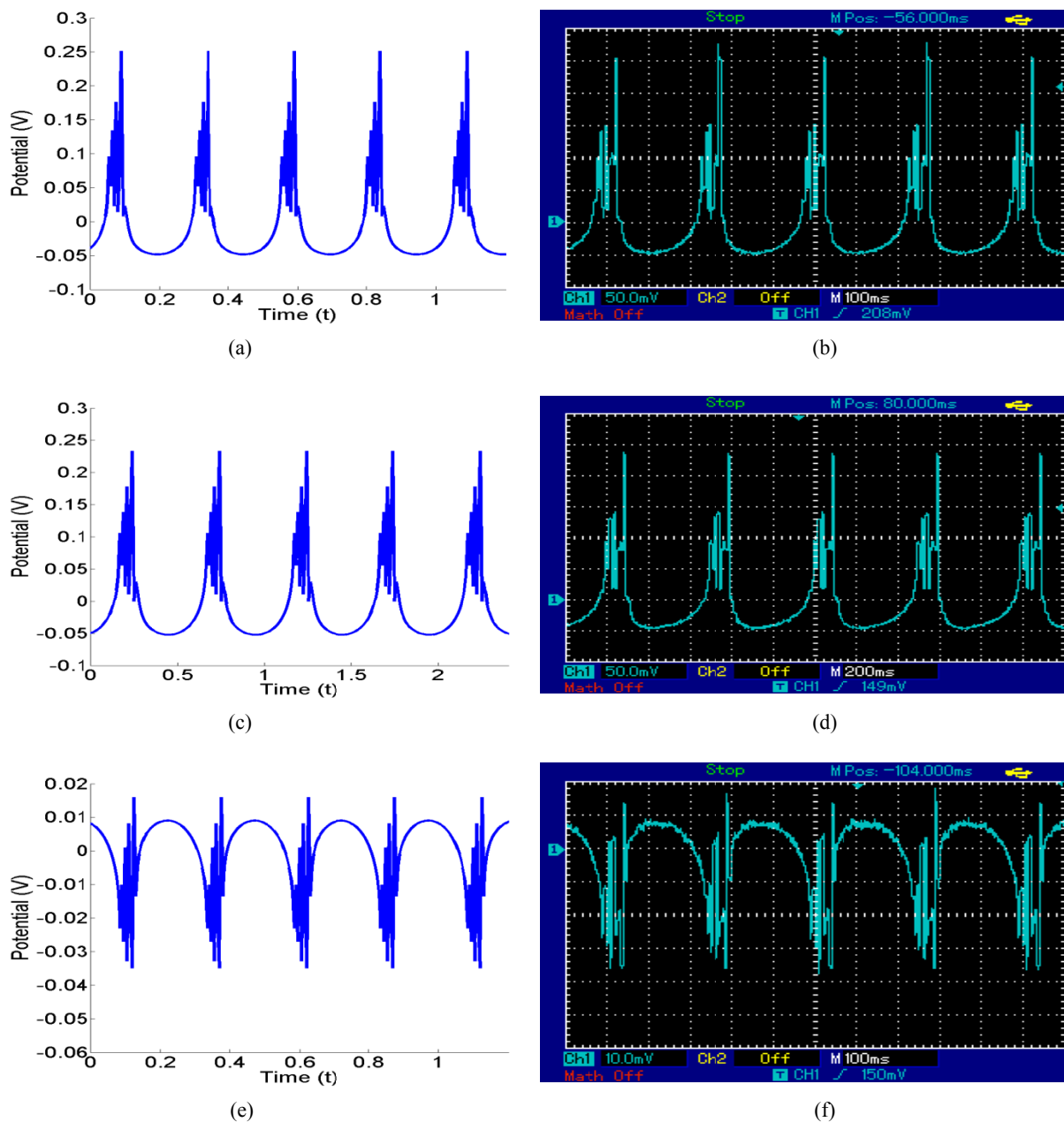


Рисунок 5 – Численные реализации (a,c,e) и экспериментальные результаты (b,d,f) масштабно-инвариантной модели нейронных сетей согласно уравнениям (5) $A = 0.8$, $B = 0.4$, $\Omega = 8\pi$; $\gamma = 0.5$, $V_0 = 0.1$, $k = 3$

Другой тип колебаний, описываемых уравнениями (5), также адекватно реализуется предлагаемой нами цифровой техникой (рисунок 5).

Реализация трехслойной нейронной сети, описываемой формулой (6), показано на рисунке 6. Сеть имеет три слоя по три нейрона на каждом слое. Такого рода задачи моделирования многослойных нейронных сетей требуют большой объем памяти FPGA. Так, использованная нами интегральная схема семейства Spartan 6 позволяет реализовать только иерархические уровни порядка $n=3$ и дробность степени в вариациях $m = 1,2$.

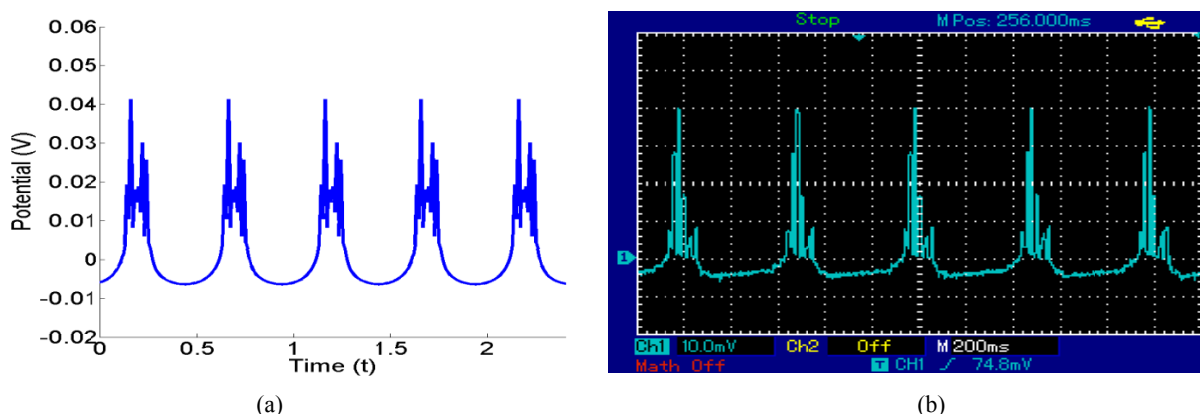


Рисунок 6. Численная реализация (a) и экспериментальный результат (b) по иерархической модели нейронных сетей (уравнения (6)) при $A = 0.45$, $B = 0.5$, $\Omega = 4\pi$, $\gamma = 0.5$, $V_0 = 0.1$, $k = 3$, $n = 3$

Заключение. В работе приведены результаты электронно-цифровой реализации разных моделей динамики нейронов. Предлагаемая цифровая техника может генерировать различные по структуре сигналы нейронной сети: спайки, пачечные всплески, берсты.

Более общие модели нейронных сетей рассмотрены использованием интегральной схемотехники FPGA в реальном времени. Нами показана возможность схемотехнического моделирования нейронных сетей, описываемых дробными степенями сигналов, разработана структурная схема блока вычисления дробной степени. Интегральная схемотехника является простым способом реализации сложных задач. При реализации нейродинамических моделей с помощью FPGA достигается эффективность по времени и простота, малогабаритность используемой техники. Такого рода реализации моделей нейронных сетей могут быть применены для создания искусственных нейронных сетей, отличающихся от существующих аналогов максимальной близостью к системе биологических нейронов, что является перспективной задачей в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

- [1] Soleimani H., Ahmadi A., Bavandpour M. Biologically inspired spiking neurons: Piecewise linear models and digital implementation. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, **2012**, 59, 2991-3004 (in Eng.).
- [2] Weinstein R. K., Lee R. H. Architectures for high-performance FPGA implementations of neural models. *Journal of Neural Engineering*, **2006**, 3, 21-34 (in Eng.).
- [3] Thomas D. B., Luk W. FPGA accelerated simulation of biologically plausible spiking neural networks. *Field Programmable Custom Computing Machines, FCCM'09. 17th IEEE Symposium on*, **2009**, 45-52 (in Eng.).
- [4] Cheung K., Schultz S. R., Luk W. A large-scale spiking neural network accelerator for FPGA systems. *Artificial Neural Networks and Machine Learning-ICANN 2012*, **2012**, 113-120 (in Eng.).
- [5] Wildie M. et al. Reconfigurable acceleration of neural models with gap junctions. *Field-Programmable Technology, 2009. FPT 2009. International Conference on*, **2009**, 439-442 (in Eng.).
- [6] Baladron J. et al. Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and Fitz Hugh-Nagumo neurons. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **2012**, 2, 10 (in Eng.).
- [7] Storace M., Lino D., de Lange E. The Hindmarsh-Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **2008**, 18, 033128 (in Eng.).
- [8] Zhanabaev Z. Zh., Kozhagulov Y. T. A Generic Model for Scale-Invariant Neural Networks. *Journal of Neuroscience and Neuroengineering*, **2013**, 2, 267-271 (in Eng.).
- [9] Zhanabaev Z. Zh., Grevtseva T. Yu. Fractal properties of nanostructured semiconductors. *Physica B: Condensed Matter*, **2007**, 391, 12-17 (in Eng.).

ПРОГРАММАНАТЫН ИНТЕГРАЛДЫ СХЕМАДА НЕЙРОНДЫҚ ТОРДЫҢ ЭЛЕКТРОНДЫ МОДЕЛІ

З. Ж. Жанабаев, Е. Т. Кожажулов, Д. М. Жексебай

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: нейрондық торлар, программаланатын логикалық интегралдық схемалар (ПЛИС), цифрлы схемалар, масштабты инварианттылық.

Аннотация. Жұмыс масштабты-инвариантты қасиеті бар жаңа нейрондық тор модельдерін интегралдық схемотехникалық түрде жүзеге асыруға арналған. Осындай модельдердің ерекшелігі бөлшек дәрежесі бар, дискретті бейнелеуді талдау үшін қажет. Программаланатын логикалық интегралдық схемада (FPGA) физикалық шаманы бөлшек дәрежеге алу алгоритмі ұсынылды. Сандық нәтижелермен FPGA құрылысындағы реализацияға салыстырулар жүргізілгені көрсетілген.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 116 – 123

**MODELING OF THE DYNAMIC CONDUCTIVITY
OF SUPERCONDUCTOR-BASED BALLISTIC CONTACT
WITH WEAK OSCILLATED ORDER PARAMETER
IN THE ENERGY RANGE 60-100 meV IN HIGH TRANSPARENCY MODE**

D. M. Sergeyev¹, S. A. Kuzmichev², Z. K. Aimaganbetova³, K. Sh. Shunkeyev⁴

¹Military Institute of Air Defence Forces, Aktobe, Kazakhstan,

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,

³Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

⁴Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan.

E-mail: serdau@rambler.ru

Key words: superconductivity, multiple Andreev reflection, dynamic conductivity, current-voltage characteristic, ballistic contact, transparency of the barrier.

Abstract. In the frame of the Averin-Bardas model current-voltage characteristics and the dynamic conductivities of the ballistic contacts superconductor - normal metal - superconductor (SNS) for the case of high transparency (0,9-0,98) are calculated, where the energy gap of superconducting materials, which are the components of the contact, has oscillation character in energy range 60-100 meV due to the strong electron-phonon interaction. The features of the Andreev spectra at voltages $V_4 = 2\Delta/4e$, $V_5 = 2\Delta/5e$ were determined as transforming to maxima minima at the increase in the transmission coefficient of the SNS-contact from 90% to 98% (or at the decrease in the barrier height from 0,33 to 0,144). The obtained results are correlated satisfactorily with the experimental data.

УДК 538.945; 621.315.55

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ
БАЛЛИСТИЧЕСКИХ КОНТАКТОВ НА ОСНОВЕ
СВЕРХПРОВОДНИКОВ СО СЛАБОУСЦИЛЛИРУЮЩИМ
ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА В ДИАПАЗОНЕ ЭНЕРГИИ 60-100 meV
В РЕЖИМЕ ВЫСОКОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ**

Д. М. Сергеев¹, С. А. Кузьмичев², З. К. Аймаганбетова³, К. Ш. Шункеев⁴

¹Военный институт Сил воздушной обороны, Актобе, Казахстан,

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия,

³Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

⁴Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Ключевые слова: сверхпроводимость, многократное андреевское отражение, динамическая проводимость, вольтамперная характеристика, баллистический контакт, прозрачность барьера.

Аннотация. В рамках модели Аверина-Бардаса рассчитаны вольтамперные характеристики и динамические проводимости баллистических контактов сверхпроводник - нормальный металл - сверхпроводник (SNS) для случая высокой прозрачности (0,9-0,98), где энергетическая щель сверхпроводящих материалов, составляющие контакт, носит осциллирующий характер в диапазоне энергии 60-100 meV из-за сильного

электрон-фононного взаимодействия. Выявлены особенности андреевских спектров при напряжениях $V_4 = 2\Delta/4e$, $V_5 = 2\Delta/5e$ в виде трансформирующихся минимумов в максимумы при увеличении коэффициента прозрачности от 90% до 98% (или уменьшении высоты барьера от 0,33 до 0,144) SNS-контакта. Полученные результаты удовлетворительно коррелируются с экспериментальными данными.

Известно, что купратные и железные высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) представляют собой квазидвумерные сильноанизотропные слоистые структуры, состоящие из стопок сверхпроводящих слоев оксида меди CuO [1-3] и арсенида железа FeAs [4-6], чередующихся в *c*-направлении со спейсерами (несверхпроводящие слои). В подобных слоистых ВТСП за счет образования джозефсоновской среды с участием сверхпроводящих и несверхпроводящих (диэлектрик, нормальный металл) блоков наблюдается так называемый внутренний эффект Джозефсона [7, 8]. Поэтому исследование характеристик джозефсоновских слабых связей ВТСП дает возможность определить некоторые энергетические параметры ВТСП, например, значение параметра порядка (энергетической щели) сверхпроводника [9].

Обычно для описания основных электрических характеристик сверхпроводящих структур, состоящих из комбинации сверхпроводников (S) с нормальными металлами (N), экспериментаторы часто используют резистивно-шунтированную модель (RSJ-model) [10-12], либо ее различные модификации [13, 14] из-за простоты математического аппарата, так как существующие микроскопические теории для рассматриваемых сверхпроводящих структур редко используются в связи с их сложностью [15]. В RSJ-модели для описания характеристик SIS-контакта (S – сверхпроводник, I – диэлектрик) учитывается емкостной канал, а для SNS-контакта (N – нормальный металл) емкостной канал не учитывается. Однако RSJ-модель всего лишь представляет эквивалентный электрический контур с джозефсоновским элементом и не объясняет многих физических (особенно, квантовых) свойств джозефсоновских переходов с непосредственной проводимостью – SNS-контактов, например, появление субгармонической щелевой структуры (СГС) на динамической проводимости (см. напр. [16]).

Основным микроскопическим механизмом, определяющим транспортные характеристики SNS-контактов, является андреевское отражение [17]: на SN-границе электроподобная квазичастица N-слоя, энергия которой меньше параметра порядка S-области, отражается в виде дырочноподобной квазичастицы, при этом в S-область переходит куперовская пара. При андреевском отражении квазиимпульс электроподобной квазичастицы практически не меняется, а групповая скорость меняет знак на обратный [17]. В SNS-контактах перенос куперовских пар через потенциальный барьер между двумя сверхпроводниками происходит благодаря когерентному процессу многократных андреевских отражений (MAR – multiple Andreev reflections) [18]. Эффект многократных андреевских отражений хорошо объясняет проявление СГС, составляющей для баллистических контактов высокой прозрачности серию минимумов на $\frac{dI(V)}{dV}$ -спектрах при

напряжениях $V_n = \frac{2\Delta}{en}$ в интервале температур от 0 до критической T_c (здесь Δ – энергетическая

щель (параметр порядка сверхпроводника), e – заряд электрона, n – натуральное число) [18]. Реализующийся в таких баллистических контактах эффект многократных андреевских отражений также служит основой методики андреевской спектроскопии, позволяющей надежно определять поведение сверхпроводящего параметра порядка в зависимости от температуры. Следует отметить, что существующие теоретические модели не всегда удовлетворительно описывают экспериментальные данные. В экспериментальных работах [19-21] наблюдается существенный отклик тока при напряжении V_1 ($n = 1$), когда в некоторых теоретических моделях отклик тока при V_1 вообще не наблюдается.

В некоторых ВТСП энергетическая щель носит осциллирующий характер в диапазоне энергии 60-100 meV из-за активного электрон-фононного взаимодействия. (Осцилляция энергетических параметров в рассматриваемом интервале энергии наблюдается и в Элиашберговских спектрах). Одна из моделей слабоосциллирующей энергетической щели в диапазоне энергий 60-100 meV приведена на рисунке 1.

Вероятность андреевского отражения для границы нормальный металл – сверхпроводник со слабоосциллирующим параметром порядка в диапазоне энергии 60-100 meV оценивается по классической формуле [22, 23]:

$$a(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \times \begin{cases} \varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)(\varepsilon^2 - \Delta(\varepsilon)^2)^{1/2}, & |\varepsilon| > \Delta(\varepsilon), \\ \varepsilon - i(\Delta(\varepsilon)^2 - \varepsilon^2)^{1/2}, & |\varepsilon| < \Delta(\varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

где ε – энергия, i – мнимая единица.

Из графика зависимости коэффициента андреевского отражения от энергии (рисунок 1) видно, что отклонение от классической формы наблюдается при положительных значениях энергии в диапазоне от 65-95 meV.

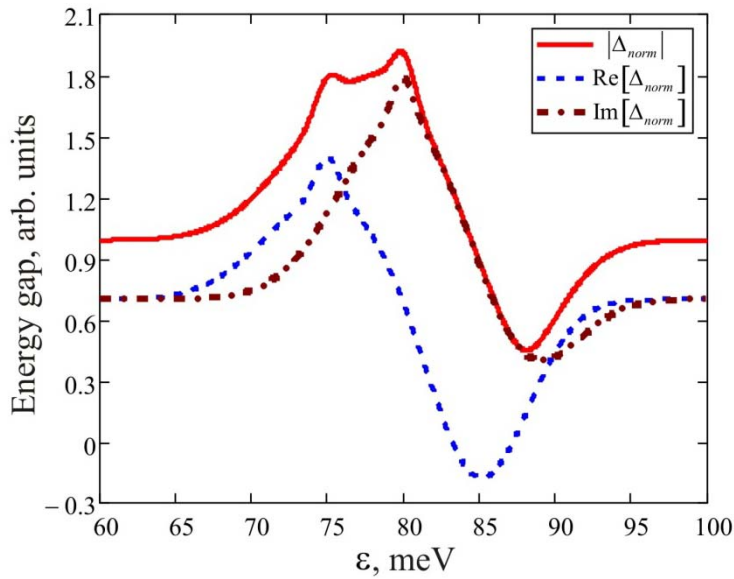


Рисунок 1 – Зависимость энергетической щели от энергии в диапазоне 60-100 meV: сплошная кривая – модуль, пунктирная – вещественная часть, штрихпунктирная – мнимая часть

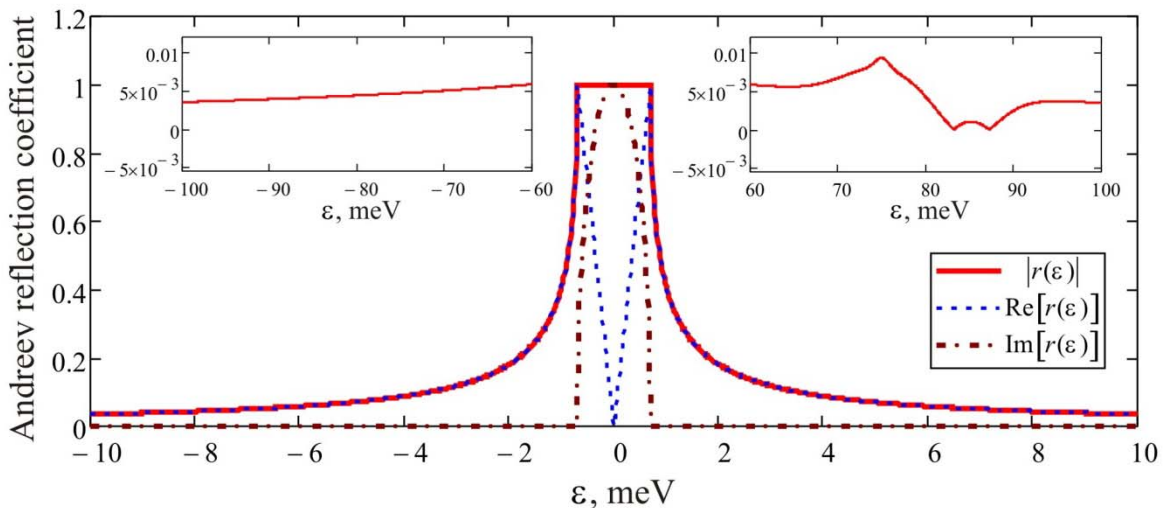


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента андреевского отражения от энергии: сплошная кривая – модуль, пунктирная – модуль вещественной части, штрихпунктирная – модуль мнимой части (на вставке – изменение значения коэффициента андреевского отражения при $\varepsilon = -(100 \div 60)$ meV (слева), $\varepsilon = 60 \div 100$ meV (справа))

Расчет вольтамперной характеристики (ВАХ) и динамической проводимости баллистического SNS-контакта производился с помощью матрицы рассеяния, которая переводит состояние свободных квазичастиц, налетающих на область взаимодействия друг с другом (или с препятствием), в состояние разлетающихся после взаимодействия частиц [24]. В рамках известной модели Аверина–Бардаса процесс рассеяния электронов в баллистическом SNS-контакте характеризуется матрицей рассеяния следующего типа:

$$S_{el} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r^* t/t^* \end{pmatrix} \quad (2)$$

где $|t|^2 = D$ – прозрачность барьера, $|r|^2 = R$ – вероятность отражения. Матрица рассеяния для дырок является комплексно-сопряженной аналогией выражения (2): $S_h = S_{el}^*$. В рассматриваемой модели энергия электрона увеличивается на eV каждый раз, когда он проходит с левого сверхпроводящего берега на правый, в тоже время дырка увеличивает свою энергию, проходя через тонкий слой нормального металла N в противоположном направлении. Таким образом, волновые функции электроноподобной и дырочноподобных квазичастиц сдвинуты на $2eV$. Далее с учетом этих сдвинутых на $2eV$ волновых функций электроноподобной и дырочноподобных квазичастиц преобразуется матрица рассеяния (2). Учитывая следующие равенства комплексно-сопряженных функций, определяющих амплитуды вероятностей андреевских и нормальных отражений квазичастиц, $A(-\varepsilon, -V) = -A^*(\varepsilon, V)$ и $B(-\varepsilon, -V) = -B^*(\varepsilon, V)$, а также коэффициент андреевского отражения (1) получается окончательное уравнение для определения вольтамперной характеристики баллистического SNS-контакта:

$$I_k = \frac{e}{\pi\hbar} \left[eV \delta_{k0} - \int d\varepsilon \tanh \left\{ \frac{\varepsilon}{2T} \right\} \left(J(\varepsilon) (a_{2k} A_k^* + a_{-2k} A_{-k}) \right) + \sum_n \left(1 + a_{2k} a_{2(n+k)}^* \right) (A_n A_{n+k}^* - B_n B_{n+k}^*) \right] \quad (3)$$

(Здесь \hbar – приведенная постоянная Планка, V – напряжение, ε – энергия, $T = (1 + i \cdot h)^{-1}$ – величина, определяющая прозрачность системы (h – высота барьера), $J(\varepsilon) = \sqrt{1 - |a(\varepsilon)|^2}$, $a(\varepsilon)$ – коэффициент андреевского отражения, A , B – амплитуды вероятностей андреевски и нормально отраженных квазичастиц).

Результаты численного моделирования ВАХ и $\frac{dI(V)}{dV}$ -спектров баллистического SNS-контакта по уравнению (3) с учетом коэффициента андреевского отражения (1) приведены при прозрачности барьера 0,98 (высота барьера 0,144) на рисунке 3, при прозрачности барьера 0,95 (высота барьера 0,229) на рисунке 4, при прозрачности барьера 0,9 (высота барьера 0,33) на рисунке 5.

В режиме прозрачности 98% выражено наблюдаются андреевские особенности динамической проводимости при $n = 1 \div 9$. В районе $n = 1$ появились существенные изменения в виде провала, отсутствующие на классических зависимостях для случая высокой прозрачности, но наблюдающиеся во многих экспериментальных работах (см. напр. [19]). По расчету амплитуда $\frac{dI(V)}{dV}$ -спектра при $n = 1$ составляет ≈ 1 усл. ед., после достижения этого значения спектр плавно уменьшается до $\approx 0,4$ усл. ед. (рисунок 3). Далее при различных значениях n от 1 до 9 отчетливо наблюдаем эффект многократных андреевских отражений: при $n = 2$ амплитуда спектра $\approx 1,9$ усл. ед., минимум $\approx 1,2$ усл. ед.; при $n = 3$ амплитуда спектра $\approx 2,25$ усл. ед., минимум $\approx 1,5$ усл. ед.; при $n = 4$ амплитуда спектра $\approx 2,8$ усл. ед., минимум $\approx 2,75$ усл. ед. и т.д. (рисунок 3).

С увеличением высоты барьера SNS-контакта от 0,144 до 0,33 (прозрачность – 90%) глубина провалов, проявляющихся около андреевских пиков при различных значениях n , и амплитуды

$\frac{dI(V)}{dV}$ -спектра уменьшаются (рисунки 3-5). Следует отметить, что при падении прозрачности до 90% СГС наблюдается в 8 значениях n (рисунки 4, 5).

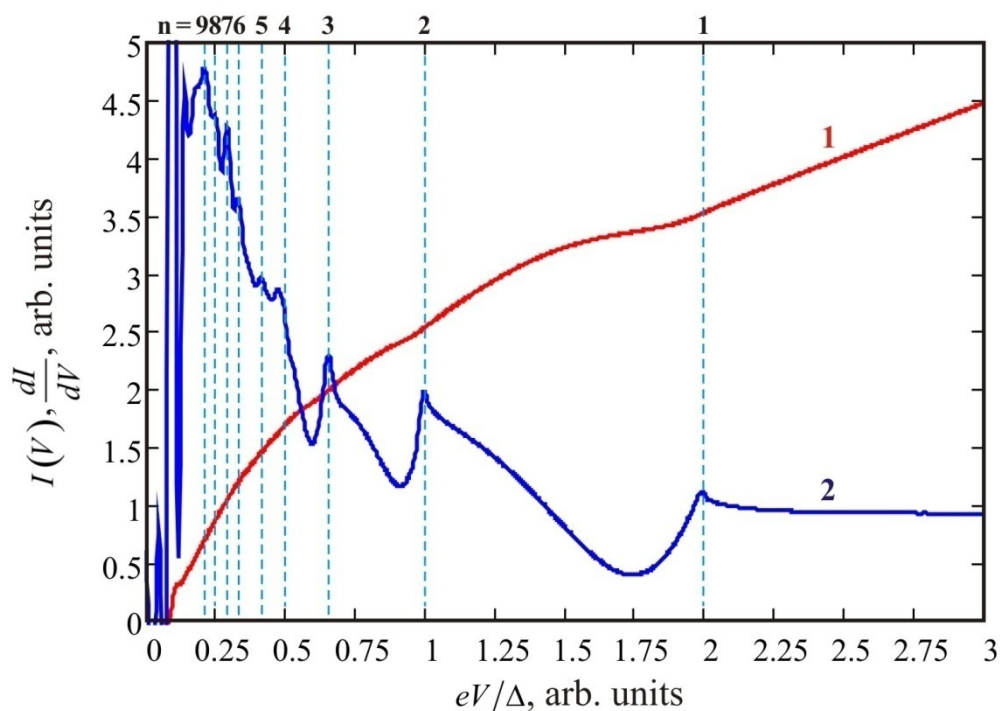


Рисунок 3 – Вольт-амперная характеристика (1) и динамическая проводимость (2) SNS-контакта при прозрачности барьера 0,98 (высота барьера 0,144)

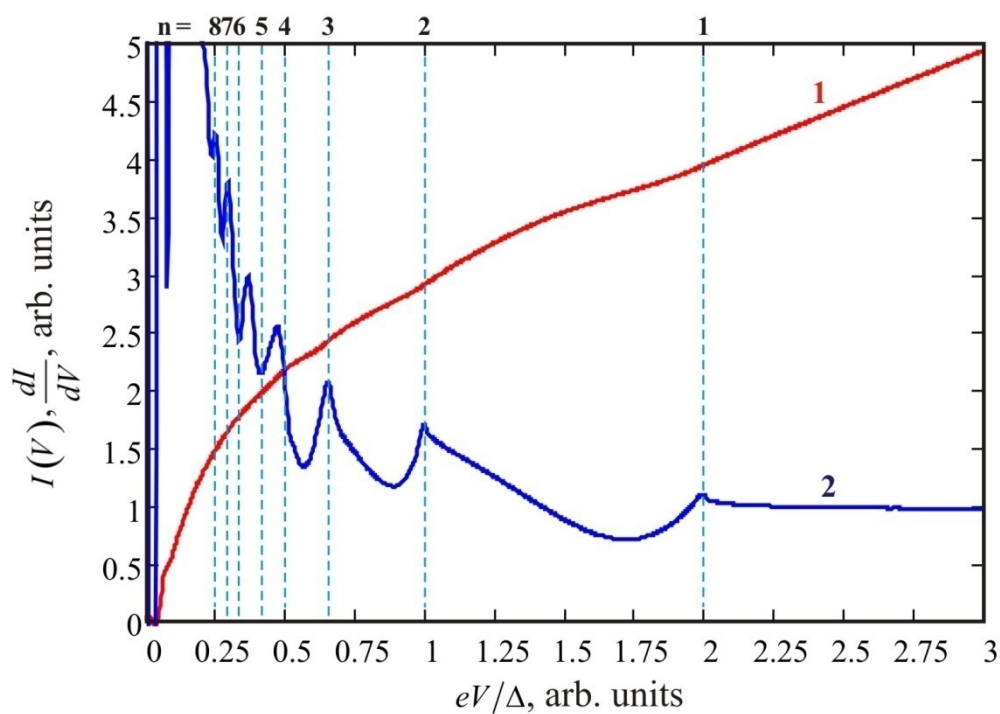


Рисунок 4 – Вольт-амперная характеристика (1) и динамическая проводимость (2) SNS-контакта при прозрачности барьера 0,95 (высота барьера 0,229)

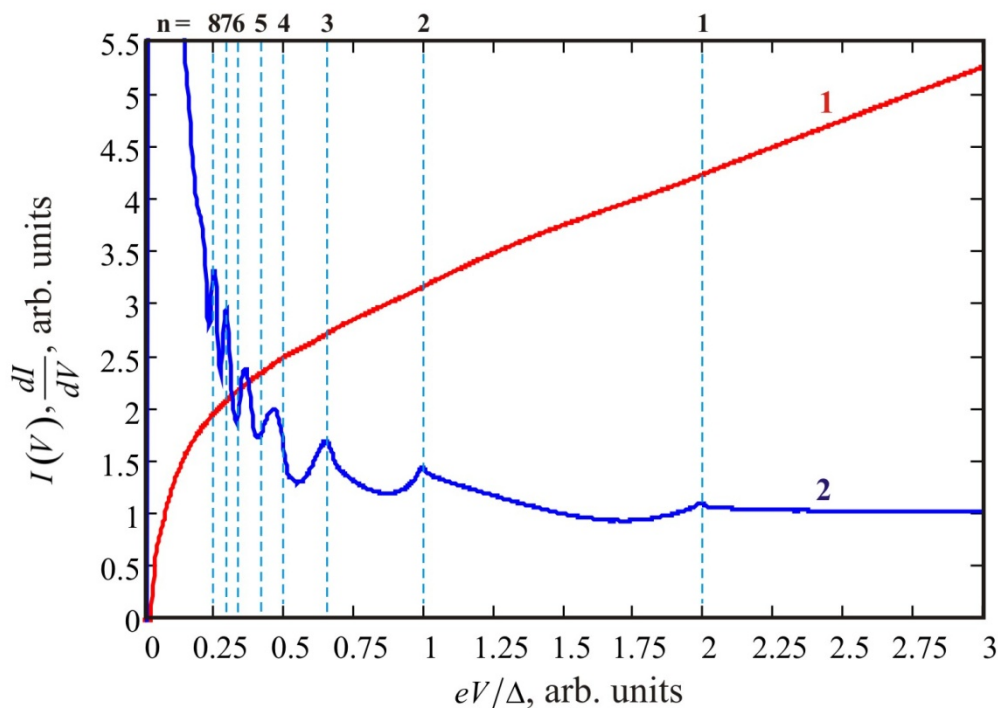


Рисунок 5 – Вольт-амперная характеристика (1) и динамическая проводимость (2) SNS-контакта при прозрачности барьера 0,9 (высота барьера 0,33)

В рассчитанных $\frac{dI(V)}{dV}$ -спектрах появились более существенные изменения, на наш взгляд, связанные с осцилляциями энергетической щели в диапазоне энергии 60-100 meV. Четвертая андреевская особенность ($n = 4$) SNS-контакта при прозрачности 90% является минимумом, при 95% принимает промежуточное положение, а при 98% и выше становится максимумом. А пятая андреевская особенность ($n = 5$) является минимумом при относительно низких коэффициентах прозрачности, при 98% и выше из минимума становится выраженным максимумом.

Таким образом, в данной работе проведено модельное исследование динамической проводимости баллистических контактов в режиме высокой прозрачности (0,9-0,98) на основе сверхпроводников со слабоосциллирующим параметром порядка в диапазоне энергии 60-100 meV; определены особенности субгармонической щелевой структуры SNS-контактов при значениях n от 1 до 8 для случая $D = 0,9; 0,95; 0,98$; выявлено, что в подобных объектах наблюдаются существенные изменения андреевских спектров, а именно, трансформация минимумов в максимумы четвертой и пятой андреевских особенностей ($n = 4; 5$) при увеличении коэффициента прозрачности.

Работа поддержана грантами МОН РК (проект №1332/ГФ-14-ОТ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект №14-32-50485).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Müller K.A., Bednorz J.G. The Discovery of a Class of High-Temperature Superconductors // Science. – 1987. – Vol. 237. – P. 1133-1139.
- [2] Jhinwan Lee, Fujita K., Schmidt A.R., Chung Koo Kim, Eisaki H., Uchida S., Davis J. C. Spectroscopic Fingerprint of Phase-Incoherent Superconductivity in the Underdoped $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+d}$ // Science. – 2009. – Vol. 325. – P. 1099-1103.
- [3] Горьков Л.П., Копнин Н.Б. Высокотемпературные сверхпроводники с точки зрения эксперимента // УФН. – 1988, вып.1. – Т. 156. – С. 117-135. [Gor'kov L.P., Kopnin N.B. High- T_c superconductors from the experimental point of view // Sov. Phys. Usp. – 1988. – Vol. 31. – P. 850-860.]
- [4] Садовский М.В. Высокотемпературная сверхпроводимость в слоистых соединениях на основе железа // УФН. – 2008. – Т. 178. – С. 1243-1271. [Sadovskii M.V. High-temperature superconductivity in iron-based layered compounds // Phys. Usp. – 2008. – Vol. 51. – P. 1201-1227.]

- [5] Ивановский А.Л. Новые высокотемпературные сверхпроводники на основе оксиарсенидов редкоземельных и переходных металлов и родственных фаз: синтез, свойства и моделирование // УФН. – 2008. – Т. 178. – С. 1273-1306. [Ivanovskii A.L. New high-temperature superconductors based on rare-earth and transition metal oxyarsenides and related phases: synthesis, properties, and simulations // Phys. Usp. – 2008. – Vol. 51. – P. 1229-1260.]
- [6] Ерёмин И.М. Антиферромагнетизм в железосодержащих сверхпроводниках: магнитный порядок в модели с коллективизированными электронами // УФН. – 2014. – Т. 184. – С. 875-882. [Eremin I.M. Antiferromagnetism in iron-based superconductors: magnetic order in the model of delocalized electrons // Phys. Usp. – 2014. – Vol. 57 – P. 807-813.]
- [7] Kleiner R., Müller P. Intrinsic Josephson effects in high- T_c superconductors // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 49. – P. 1327.
- [8] Schlenga K., Kleiner R., Hechtfisher G., Mößle M., Schmitt S., Müller P., Helm Ch., Preis Ch., Forsthofer F., Keller J., Johnson H. L., Veith M., Steinbeiß E. Tunneling spectroscopy with intrinsic Josephson junctions in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ and $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+\delta}$ // Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 57. – P. 14518.
- [9] Ponomarev Ya.G., Kuzmichev S.A., Mikheev M.G., Sudakova M.V., Tchesnokov S.N., Timergaleev N.Z., Yarigin A.V., Maksimov E.G., Krasnosvobodtsev S.I., Varlashkin A.V., Hein M.A., Mueller G., Piel H., Sevastyanova L.G., Kravchenko O.V., Burdina K.P., Bulychiev B.M. Evidence for a two-band behavior of MgB_2 from point-contact and tunneling spectroscopy // Solid State Commun. – 2004. – Vol. 129. – P. 85-89.
- [10] McCumber D.E. Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions // J. Appl. Phys. – 1968. – Vol. 39. – P. 3113-3118.
- [11] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. – М.: Наука, 1985. – 320 с. [Likharev K. K. Dynamics of Josephson junctions and circuits. – Gordon and Breach Science Publishers, 1986. – 614 p.]
- [12] Barone A., Paterno G. Physics and Applications of the Josephson Effect. – New York: Wiley & Sons, 1982. – 639 p.
- [13] Saitoh K., Ishimaru Y., Fuke H., Enomoto Y. A Model Analysis for Current-Voltage Characteristics of Superconducting Weak Links // Jpn. J. Appl. Phys. – 1997. – Vol. 36, 3A. – P. L272-L275.
- [14] Seed R.G., Vittoria C., Widom A. Excess current in shunted Josephson weak links // J. Appl. Phys. – 1994. – Vol. 75. – P. 8195-8197.
- [15] Kümmel R., Gunsenheimer U., Nicolsky R. Andreev scattering of quasiparticle wave packets and current-voltage characteristics of superconducting metallic weak links // Phys. Rev. B. – 1990. – Vol. 42. – P. 3992.
- [16] Octavio M., Tinkham M., Blonder G.E., Klapwijk T.M. Subharmonic energy-gap structure in superconducting constrictions // Phys. Rev. B. – 1983. – Vol. 27. – P. 6739.
- [17] Андреев А.Ф. Теплопроводность промежуточного состояния сверхпроводников // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – С. 1823. [Andreev A.F. Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors // Sov. Phys. JETP. – 1964. – Vol. 19. – P. 1228-1231.]
- [18] Blonder G.E., Tinkham M., Klapwijk T.M. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion // Phys. Rev. B. – 1982. – Vol. 25. – P. 4515-4532.
- [19] Kuzmicheva T.E., Kuzmichev S.A., Mikheev M.G., Ponomarev Ya.G., Tchesnokov S.N., Eltsev Yu.F., Pudalov V.M., Pervakov K.S., Sadakov A.V., Usoltsev A.S., Khlybov E.P., Kulikova L.F. Experimental study of the intrinsic multiple Andreev reflections effect in $\text{GdO}(\text{F})\text{FeAs}$ superconductor array junctions // EPL. – 2013. – Vol. 102. – P. 67006.
- [20] Кузьмичев С.А., Кузьмичева Т.Е., Болталин А.И., Морозов И.В. Спектроскопия многократных андреевских отражений сверхпроводящего LiFeAs : анизотропия параметров порядка и их температурное поведение // Письма в ЖЭТФ. – 2013. – Vol. 98. – P. 816-825. [Kuzmichev S.A., Kuzmicheva T.E., Boltalin A.I., Morozov I.V. Multiple andreev reflections spectroscopy of superconducting LiFeAs single crystals: Anisotropy and temperature behavior of the order parameters // JETP Letters. – 2014. – Vol. 98. – P. 722-730.]
- [21] Кузьмичёва Т.Е., Кузьмичёв С.А., Михеев М.Г., Пономарёв Я.Г., Чесноков С.Н., Пудалов В.М., Хлыбов Е.П., Жигadlo Н.Д. Андреевская спектроскопия железосодержащих сверхпроводников: температурная зависимость параметров порядка и их скейлинг с T_c // УФН. – 2014. – Vol. 184. – P. 888-897. [Kuzmicheva T.E., Kuzmichev S.A., Mikheev M.G., Ponomarev Ya.G., Tchesnokov S.N., Pudalov V.M., Khlybov E.P., Zhigadlo N.D. Andreev spectroscopy of iron-based superconductors: temperature dependence of the order parameters and scaling of $\Delta_{L,S}$ with T_c // Phys. Usp. – 2014. – Vol. 57. – P. 819-827.]
- [22] Averin D., Bardas A. ac Josephson Effect in Single Quantum Channel // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 75. – P. 1831-1834.
- [23] Tanaka Y., Kashiwaya S. Theory of the Josephson effect in d-wave superconductors // Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 53. – P. R11957.
- [24] Лесовик Г.Б., Садовский И.А. Описание квантового электронного транспорта с помощью матрицы рассеяния // УФН. – 2011. – Т. 181. – С. 1041. [Lesovik G.B., Sadovskyy I.A. Scattering matrix approach to the description of quantum electron transport // Phys. Usp. – 2011. – Vol. 54. – P. 1007-1059.]

REFERENCES

- [1] Müller K.A., Bednorz J.G. The Discovery of a Class of High-Temperature Superconductors. *Science*, **1987**, 237, 1133-1139 (in Eng.).
- [2] Jhinwhan Lee, Fujita K., Schmidt A.R., Chung Koo Kim, Eisaki H., Uchida S., Davis J. C. Spectroscopic Fingerprint of Phase-Incoherent Superconductivity in the Underdoped $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+d}$. *Science*, **2009**, 325, 1099-1103 (in Eng.).
- [3] Gor'kov L.P., Kopnin N.B. High-temperature superconductors in terms of the experiment. *Sov. Phys. Usp.*, **1988**, 31, 850-860 (in Eng.).

- [4] Sadovskii M.V. High-temperature superconductivity in iron-based layered compounds. *Phys. Usp.*, **2008**, 51, 1201-1227 (in Eng.).
- [5] Ivanovskii A.L. *Phys. Usp.*, **2008**, 51, 1229-1260 (in Eng.).
- [6] Eremin I.M. *Phys. Usp.*, **2014**, 57, 807-813 (in Eng.).
- [7] Kleiner R., Müller P. *Phys. Rev. B.*, **1994**, 49, 1327 (in Eng.).
- [8] Schlenga K., Kleiner R., Hechtfischer G., Möhle M., Schmitt S., Müller P., Helm Ch., Preis Ch., Forsthofer F., Keller J., Johnson H. L., Veith M., Steinbeiß E. *Phys. Rev. B.*, **1998**, 57, 14518 (in Eng.).
- [9] Ponomarev Ya.G., Kuzmichev S.A., Mikheev M.G., Sudakova M.V., Tchesnokov S.N., Timergaleev N.Z., Yarigin A.V., Maksimov E.G., Krasnosvobodtsev S.I., Varlashkin A.V., Hein M.A., Mueller G., Piel H., Sevastyanova L.G., Kravchenko O.V., Burdina K.P., Bulychev B.M. *Solid State Commun.*, **2004**, 129, 85-89 (in Eng.).
- [10] McCumber D.E. *J. Appl. Phys.*, **1968**, 39, 3113-3118 (in Eng.).
- [11] Likharev K. K. *Dynamics of Josephson junctions and circuits*. Gordon and Breach Science Publishers, 1986. 614 p (in Eng.).
- [12] Barone A., Paterno G. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. New York: Wiley & Sons, 1982. 639 p (in Eng.).
- [13] Saitoh K., Ishimaru Y., Fuke H., Enomoto Y. *Jpn. J. Appl. Phys.*, **1997**, 36, 3A, L272-L275 (in Eng.).
- [14] Seed R.G., Vittoria C., Widom A. *J. Appl. Phys.*, **1994**, 75, 8195-8197 (in Eng.).
- [15] Kümmel R., Gunsenheimer U., Nicolsky R. *Phys. Rev. B.*, **1990**, 42, 3992 (in Eng.).
- [16] Octavio M., Tinkham M., Blonder G.E., Klapwijk T.M. *Phys. Rev. B.*, **1983**, 27, 6739 (in Eng.).
- [17] Andreev A.F. *Sov. Phys. JETP*, **1964**, 19, 1228-1231 (in Eng.).
- [18] Blonder G.E., Tinkham M., Klapwijk T.M. *Phys. Rev. B.*, **1982**, 25, 4515-4532 (in Eng.).
- [19] Kuzmicheva T.E., Kuzmichev S.A., Mikheev M.G., Ponomarev Ya.G., Tchesnokov S.N., Eltsev Yu.F., Pudalov V.M., Pervakov K.S., Sadakov A.V., Usoltsev A.S., Khlybov E.P., Kulikova L.F. *EPL*, **2013**, 102, 67006 (in Eng.).
- [20] Kuzmichev S.A., Kuzmicheva T.E., Boltalin A.I., Morozov I.V. *JETP Letters*, **2014**, 98, 722-730 (in Eng.).
- [21] Kuzmicheva T.E., Kuzmichev S.A., Mikheev M.G., Ponomarev Ya.G., Tchesnokov S.N., Pudalov V.M., Khlybov E.P., Zhigadlo N.D. *Phys. Usp.*, **2014**, 57, 819-827 (in Eng.).
- [22] Averin D., Bardas A. *Phys. Rev. Lett.*, **1995**, 75, 1831-1834 (in Eng.).
- [23] Tanaka Y., Kashiwaya S. *Phys. Rev. B.*, **1996**, 53, R11957 (in Eng.).
- [24] Lesovik G.B., Sadovskyy I.A. *Phys. Usp.*, **2011**, 54, 1007-1059 (in Eng.).

**ЖОҒАРЫ МӨЛДІРЛІК РЕЖИМІНДЕ 60-100 meV ЭНЕРГИЯ ДИАПАЗОНЫНДА
ӘЛСІЗ АУЫТҚЫҒАН РЕТТЕЛУ ПАРАМЕТРЛІ АСҚЫН ӨТКІЗГІШТЕР НЕГІЗІНДЕГІ
БАЛЛИСТИКАЛЫҚ КОНТАКТІЛЕР ДИНАМИКАЛЫҚ ӨТКІЗГІШТІГІН МОДЕЛЬДЕУ**

Д. М. Сергеев, С. А. Кузьмичев, З. К. Аймаганбетова, К. Ш. Шункеев

Тірек сөздер: асқын өкізгіштік, бірнеше реттік Андреев шағылуы, динамикалық өткізгіштік, вольтамперлік сипаттама, баллистикалық контакт, барьер мөлдірлігі.

Аннотация. Мақалада Аверин–Бардас моделі аясында жоғары мөлдірлік жағдайы үшін асқын өткізгіш – қалыпты металл – асқын өткізгіш (SNS) баллистикалық контактілерінің вольтамперлік сипаттамалары мен динамикалық өткізгіштіктері есептелді, мұнда контакт құраушы асқын өткізгіш материалдардың энергетикалық саңылауы күшті электрон-фонондық әсерлесуінен 60-100 meV энергия диапазонында әлсіз ауытқушылыққа ие. $V_4 = 2\Delta/4e$, $V_5 = 2\Delta/5e$ кернеу мәндерінде SNS-контактісінің мөлдірлік коэффициентін 90%-дан 98%-ға өсіргенде (немесе барьер биіктігін 0,33-тен 0,144-ке азайтқанда) Андреев спектрлерінің минимумдары максимумдарға түрленетіндігі анықталды. Алынған нәтижелер эксперименталдық мәліметтермен сәйкес келеді.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 124 – 128

SEARCH OF THE HOMOLOGOUS NUCLEOTIDE SEQUENCES BASED ON BIOINFORMATIC MODELING

B. M. Mazakova¹, A. T. Zhakipov², A. C. Zhumakhanova¹

¹S. Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Astana, Kazakhstan,

²Lomonosov Moscow State University (MSU) branch of Kazakhstan, Astana

Keywords: nucleotide sequence homology, alignment, bioinformatics, Smith-Waterman algorithm.

Abstract. This paper will consider the problem of searching the sequence of nucleotide homology, the result of which is the construction ordered by degree of similarity with the query of *list of sequences*. Subsequently, this list can be used by geneticists to determine the degree of relatedness of organisms. Solution of the problem is reduced to finding the optimal alignment.

In other words, it is necessary to find such sites in the sequences and a transformation that they would give the maximum weight on the similarity. The result of this work is the software with graphical user interface that provides homology search and display the corresponding results.

УДК 004.42

БИОИНФОРМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ НЕГІЗІНДЕ ГОМОЛОГИЯЛЫҚ НУКЛЕОТИДТІ ТІЗБЕКТЕРДІ ІЗДЕУ

Б. М. Мазақова¹, А. Т. Жақыпов², А. С. Жұмаханова¹

¹С. Сейфуллин атындағы Қазақ Агротехникалық университет

²М. В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстандық филиалы, Астана

Тірек сөздер: нуклеотидті тізбектер, гомологтар, теңестіру, биоинформатика, Смит-Ватерман алгоритмі.

Аннотация. Осы жұмыста тізбектер тізімін сұратумен ұқсаушылық дәрежесі бойынша реттелген құрылым нәтижесі болатын нуклеотидті тізбектердің гомологтарын табу есебі қарастырылады. Кейін бұл тізімді организмдердің туыстық дәрежесін анықтау үшін генетиктер қолдана алады. Қойылған есептің шешімі оңтайлы теңестіруді табуға бағытталған. Басқаша айтқанда, салыстырылатын тізбектерде ұқсаушылық бойынша максимал ықпал ететіндей бөліктерді және өзгерісті табу қажет. Осы жұмыстың қорытындысы гомологтарды табу және сәйкес нәтижелерді шығаруды іске асыратын пайдаланушылық графикалық интерфейс бар бағдарламалық өнім болып табылады.

Биоинформатика – төмендегілерді қамтитын [1] әдістер және тәсілдер жиынтығы:

1. Салыстырмалы геномикадағы (геномдық биоинформатика) компьютерлік талдаудың математикалық әдістері.

2. Белоктардың кеңістіктік құрылымын (құрылымдық биоинформатика) болжау үшін алгоритмдер және бағдарламалар әзірлемесі.

3. Есептеу әдіснамаларға сәйкес стратегияларды зерттеу, сондай-ақ, биологиялық жүйелердің ақпараттық күрделігін жалпы басқару.

Биоинформатиканың негізгі мақсаты – биологиялық үдерістерді түсінуге ықпал ету. Биоинформатиканың басқа тәсілдерден айырмашылығы осы мақсатқа жетудегі қарқынды есептеу

әдістерін жасау және қолдануды көздеуі деп саналады. Осындай әдістер үлгілері: бейнелерді танып білу, datamining, машиналық оқыту алгоритмдері және биологиялық деректердің визуалдандыруы. Зерттеушілердің негізгі күш салуы тізбектерді теңестіру есептерін шешуге, гендерді табуға (гендерді кодтайтын ДНҚ аймағын табу), геномның мағынасын ашуға, дәрі-дәрмектерді құрауға, дәрі-дәрмектерді әзірлеуге, ақуыз құрылымын теңестіруге, ақуыз құрылымын болжауға, гендердің дәлдігін және «ақуыз-ақуыз» өзара әрекетін болжауға, ассоциацияларды толықгеномды іздеуге және эволюцияны модельдеуге бағытталған. Қазіргі күні биоинформатика биологиялық деректерді талдау және басқаруда кездесетін практикалық және теориялық мәселелерді шешуге арналған есептеу және статистикалық әдістер мен теорияларды, алгоритмдерді, деректер қорын жасау және жетілдіруді білдіреді.

Алдағы қарастыру жеңіл болу үшін бірнеше анықтамаларды енгіземіз.

Тізбекті қарапайым өзгерту – әріпті алмастыру немесе әріпті өшіру немесе әріпті кірістіру.

Редакциялық арақашықтық – бір тізбекті басқасына аударатын қарапайым өзгертулердің минимал саны. *Тізбектерді салыстыру есебін ресімдеу*: минимал редакциялық арақашықтық және оны іске асыратын өзгертулер жиынтығын табу.

Бұл есептің негізгі түсінігін теңестіру құрайды.

Тізбектерді теңестіру – осы тізбектерде ұқсас бөліктерді оңай көру үшін екі немесе одан көп ДНҚ, РНҚ мономерлер тізбектерінің немесе ақуыздардың бір-бірінің астында қатар орналасуына негізделген биоинформатикалық әдіс. Екі молекуланың алғашқы құрылымының ұқсастығы олардың функционалдық, құрылымдық немесе эволюциялық өзара байланысын [1] көрсете алады. Көбінде теңестіру нәтижесін түсіндіруде, тізбектер матрицаның жолдарында бірдей элементтер (нуклеотидтер және аминқышқылдар) бір-бірінің астында (бір бағанда) болатындай орналасады. «Алшақтықтар» «-» белгісімен алмастырылады немесе ұяшық бос қалады. Іздеу алгоритмдері үлкен деректер қорында көрсетілген өлшемдер бойынша бір берілген тізбекпен ұқсас тізбектерді іздеу үшін қолданылады. Кеңінен танымал бағдарламалар: BLAST және FASTA3х.

Қос теңестіру екі тізбектің ұқсас бөліктерін табу үшін қолданылады. Ғаламдық және жергілікті теңестірулер ерекшеленеді.

Ғаламдық теңестіру тізбектер бүкіл ұзындығы бойынша ұқсас болатынын ұйғарады. Ғаламдық теңестіру екі кіріс тізбекті толығымен қамтиды.

Жергілікті теңестіру қолданылады, егер тізбектер туыстық (гомологиялық) сияқты туыстық емес бөліктерді де қамтыған жағдайда. Жергілікті теңестірудің нәтижесі тізбектердің әрқайсысында бөлікті таңдау және осы бөліктердің арасында теңестіру болып табылады.

Қос теңестіруді шығару үшін динамикалық бағдарламалау әдісінің түрлері қолданылады: ғаламдық теңестіру үшін Нидлман–Вунш алгоритмі, жергілікті үшін – Смит–Ватерман алгоритмі. Теңестіру параметрлері – сәйкестік үшін сыйлықақы; – сәйкессіздік үшін айыппұл; – делеция үшін айыппұл.

Ғаламдық теңестіру Нидлман–Вунш алгоритмі – биоинформатикада аминқышқылды немесе нуклеотидті тізбектердің теңестіруін құруда қолданылатын екі тізбектің (оларды А және В деп атаймыз) теңестіруін орындауға арналған алгоритм. Алгоритмді 1970 жылы Сол Нидлман және Кристиан Вунш [3] ұсынды. Нидлман–Вунш алгоритмі динамикалық бағдарламалау үлгісі бола отырып, ол биологиялық тізбектерді салыстыруда динамикалық бағдарламалау қолданбасының алғашқы үлгісі де болды. Теңескен символдардың сәйкестігі ұқсастық матрицасымен беріледі. Мұндағы $S(a, b)$ – а және b символдарының ұқсастығы. Сондай-ақ, d болып белгіленген, алшақтық үшін сызықтық айыппұл қолданылады. Мысалы, егер ұқсастық матрицасы кестемен берілсе

–	A	G	C	T
A	10	-1	-3	-4
G	-1	7	-5	-3
C	-3	-5	9	0
T	-4	-3	0	8

онда теңестіру

A G A C T A G T T A C (3.1)

C G A – – – G A C G T (3.2)

$d = -5$ алшақтық үшін айыппұлмен бірге баға төмендегідей:

$$S(A,C) + S(G,G) + S(A,A) + 3 \times d + S(G,G) + S(T,A) + S(T,C) + S(A,G) + S(C,T) = \\ = -3 + 7 + 10 - (3 \times 5) + 7 - 4 + 0 - 1 + 0 = 1.$$

Ең жоғарғы бағамен теңестіруді табу үшін A тізбегінде неше символ болса, сонша жолдарды және B тізбегінде неше символ болса, сонша бағандарды қамтитын F матрицасы белгіленеді. i жолындағы және j бағанында жазба F_{ij} болып белгіленеді. Сонымен, егер біз n және m өлшеміндегі тізбектерді теңестірсек, онда қажет жадының саны $O(nm)$ болады. Алгоритм жұмысының барысында F_{ij} шамасы A -да алғашқы $i = 0, \dots, n$ символдарын және B -да алғашқы $j = 0, \dots, m$ символдарын теңестіру үшін оңтайлы бағаның мәндерін қабылдайды. Онда Беллман оңтайлылық принципі төмендегідей болады:

$$\text{Базис:} \quad F_{0j} = d \cdot j \quad (3.4), \quad F_{i0} = d \cdot i \quad (3.3)$$

Оңтайлылық принципіне негізделген рекурсия:

$$F_{ij} = \max(F_{i-1, j-1} + S(A_i, B_j), F_{i, j-1} + d, F_{i-1, j} + d).$$

F матрицасы есептеліп шығарылғанда, оның F_{ij} элементі мүмкін болатын теңестірулер ішінен максимал бағаны береді. Осындай бағаны иеленген теңестірудің өзін есептеу үшін оның қайдан шыққанын көру үшін оң жақ төменгі шақпақтан бастап, ондағы мәндерді үш мүмкін негіздермен (сәйкестік, кірістіру немесе делеция) салыстыру қажет. Сәйкестік жағдайында A_i және B_j теңестірілген, делеция жағдайында A_i алшақтықпен теңестірілген, ал алшақтықпен кірістіру жағдайында B_j теңестірілген. (Жалпы жағдайда, альтернативтік оңтайлы теңестірулерге әкелетін, бірдей мәндерімен бір нұсқадан артық болуы мүмкін.)

Смит–Ватерман алгоритмі тізбектердің жергілікті теңестірулерін алу үшін арналған, яғни екі нуклеотидті немесе ақуыздық тізбектердің ұқсас бөліктерін анықтау үшін. Тізбектерді бүкіл ұзындығы бойынша теңестіруді жүзеге асыратын Нидлман–Вунш алгоритмінен айырмашылығы, Смит–Ватерман алгоритмі барлық мүмкін ұзындықтардың кесінділерін салыстырады және барлық кесінділер және осы кесінділердің барлық теңестірулері бойынша ұқсастық мөлшерін оңтайландырады. Алгоритмді 1981 жылы [3] Т.Ф.Смит және М.Ватерман ұсынған. Нидлман–Вунш алгоритміне ұқсас, Смит–Ватерман алгоритмі динамикалық бағдарламалау принципін қолданады. Ол бағалау сапасының мөлшерін қолдану жөніндегі оңтайлы жергілікті теңестіруді табуға кепілдік береді. Бұл бағалау мөлшері – бір аталатын салмақ, немесе алмастырулар және «гэптер» үшін айыппұлдар (яғни кірістірулер мен делециялар) матрицасының қолдануын қамтитын (Score) теңестіру есебі (3.1) мысалында теңестіру оңтайлы болады

$$\begin{matrix} GA \\ GA \end{matrix}$$

ал оған сәйкес баға

$$S(G,G) + S(A,A) = 7 + 10 = 17.$$

Нидлман–Вунш алгоритміндегідей, (3.3) ережесі бойынша F матрицасы құрылады, мұндағы рекурсия төмендегідей:

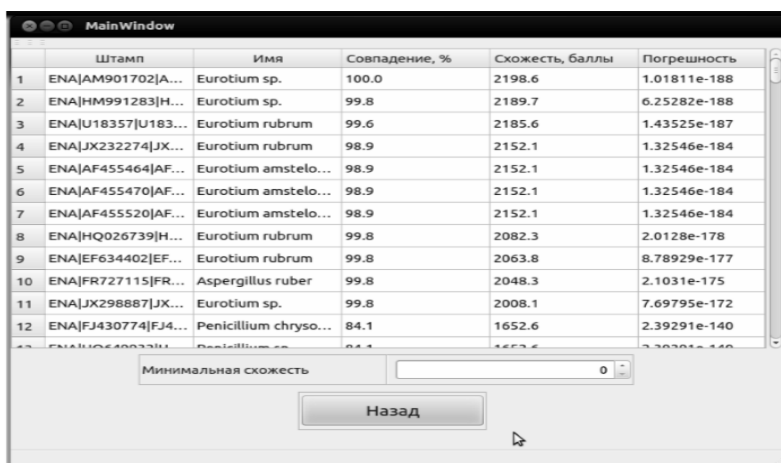
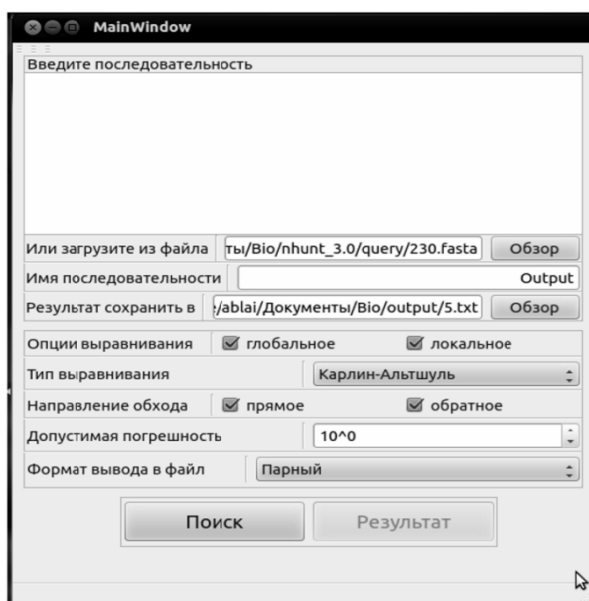
$$F_{ij} = \max(F_{i-1, j-1} + S(A_i, B_j), F_{i, j-1} + d, F_{i-1, j} + d, 0).$$

Теңестірудің құрылуы басталатын жол соңының нүктесі былай анықталады:

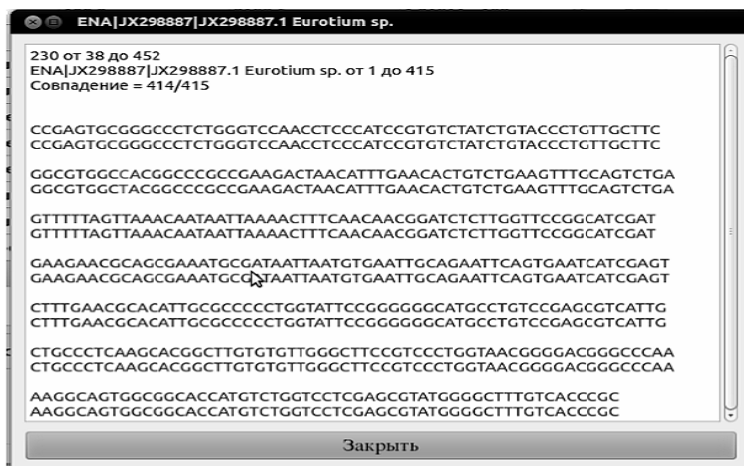
$$(i_{\max}, j_{\max}) = \text{argmax} F_{ij}.$$

Ағымдағы F_{ij} элементінде оң алдынгы қалаушылар біткен кезде теңестірудің құрылу үдерісі аяқталады.

Бағдарламаны жазу үшін жоғарыда сипатталған Нидлман–Вунш и және Смит–Ватерман теңестіру алгоритмдері, C++ бағдарламалау тілі, Qt5, ОС Linux біріктірілген әзірлеу ортасы. Пайдаланушыға енгізу үшін ұсынылатын кіріс параметрлері – сұрату-тізбек (оны қамтитын файлға жол немесе тікелей енгізу), іздеу нәтижесі форматталып шығарылған файлға жол, теңестіру типі, мүмкін болатын ауытқушылық және шығару форматы. Бағдарламаның интерфейсін күрделендірмеу үшін, сәйкестік үшін сыйлықақы, сәйкессіздік үшін айыппұл, делецияның ашылуы және жалғасуы, сәйкестіктің минимал саны сияқты теңестіру параметрлерінің мәндері үнсіздік бойынша орнатылған. «Іздеу» батырмасын басқанда деректер қоры бойынша гомологтарды іздеу жүргізіледі. Деректер қорының өзі ENA-дан (European Nucleotide Archive) алынған. Шығару ретінде сұратумен ұқсас, кему бойынша реттелген гомологтар кестесі беріледі.



Кесте штамп, түрдің атауы, дәл келу пайызы, теңестіру салмағы және ауытқушылық сияқты деректерді қамтиды. Мұнда көрсетілген теңестіру салмағынан кем емес тізбектерді ғана шығаруға мүмкіндік беретін фильтри бар. Үнсіздік бойынша бұл шек 0-ге тең. Кестенің кез-келген жолын таңдауда теңестірудің өзін қарап шығуға болады



ӘДЕБИЕТ

- [1] Дурбин Р., Эдди Ш., Крэг А., Митчисон Г. Анализ биологических последовательностей. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2006. – 480 б.
- [2] Бородовский М., Екишева С. Задачи и решения по анализу биологических последовательностей. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2008. – 420 б.
- [3] Сетубал Ж., Мейданис Ж. Введение в вычислительную молекулярную биологию. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2007. – 420 б.
- [4] Altschul S., Gish W., Miller W., Myers E., Lipman D. Basic local alignment search tool. – Journal of Molecular Biology, 215(3): 403–410, October 5, 1990.

REFERENCES

- [1] Durbin R, Eddy S., A. Krogh, G. Mitchison analysis of biological sequences. - M. - Izhevsk: "Regular and chaotic dynamics", 2006, 480 p. (in Russ.)
- [2] Borodovskii M., S. Ekisheva Challenges and solutions for the analysis of biological sequences. - M. - Izhevsk: "Regular and chaotic dynamics ung", 2008, 420 p. (in Russ.)
- [3] J. Setubal, Meydanis J. Introduction to computational molecular biology. - M. - Izhevsk: "Regular and chaotic dynamics", 2007, 420 p. (in Russ.)
- [4] Altschul S., Gish W., Miller W., Myers E., Lipman D. Basic local alignment search tool. – Journal of Molecular Biology, October 5, 1990, 215(3): 403–410, (in English.).

**ПОИСК ГОМОЛОГИЧЕСКИХ НУКЛЕОИДНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
НА ОСНОВЕ БИОИНФОРМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Б. М. Мазакова¹, А. Т. Жакыпов², А. С. Жумаханова¹

¹Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина (Астана)

²Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломаносова (Астана)

³Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина (Астана)

Ключевые слова: нуклеотидные последовательности, гомологи, выравнивание, биоинформатика, алгоритм Смита-Ватермана.

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача поиска гомологов нуклеотидных последовательностей, результатом которой является построение упорядоченного по степени схожести с запросом списка последовательностей. Впоследствии этот список может использоваться генетиками для определения степени родства организмов. Само решение поставленной задачи сводится к поиску оптимального выравнивания. Иными словами, нужно найти такие участки в сравниваемых последовательностях и такое преобразование, что они давали бы максимальный вес по схожести. Итогом данной работы является программный продукт с пользовательским графическим интерфейсом, реализующий поиск гомологов и вывод соответствующих результатов.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 129 – 135

**PHYSICAL PROCESSES IN CRYSTALS
OF SUPERDENSE NEUTRON STARS IN THE CRUSTS****N. Zh. Takibayev¹, M. N. Takibayeva¹, V. O. Kurmangaliyeva¹, D. M. Nassirova²**¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,²Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: Takibayev@gmail.com

Keywords: neutron stars envelopes, phonon and nuclear interactions, density oscillations.

Abstract. A short review of research results of last years is given concerning the study of physical processes in the envelopes of neutron stars, particularly the phenomena of quantum neutron capture by superdense crystalline structures, inverse beta decay of nuclei, phonon and nuclear interactions, local accumulation of excited nuclei and oscillation of density in the envelopes of neutron stars. The motivation is given for the conduction of new experiments on the coordinated registration of the glitches in pulses of electromagnetic radiation and the fluxes of neutrinos in order to determine the element composition of neutron stars envelopes.

УДК 52-1/-8:539.14; 524.1:539.14

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В СВЕРХПЛОТНЫХ КРИСТАЛЛАХ
В ОБОЛОЧКАХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД****Н. Ж. Такибаев¹, М. Н. Такибаева¹, В. О. Курмангалиева¹, Д. М. Насирова²**¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,²Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: оболочки нейтронных звезд, фоновые и ядерные взаимодействия, осцилляции плотности.

Аннотация. Дается краткий обзор результатов исследований последних лет, связанных с изучением физических процессов в оболочках нейтронных звезд, в частности, явлений квантового «захвата» нейтронов сверхплотной кристаллической структурой, обратного бета распада ядер, фоновых и ядерных взаимодействий, локального накопления возбужденных ядер и осцилляция плотности в оболочках нейтронных звезд. Обосновывается проведение новых экспериментов по согласованной регистрации глюонов в пульсациях электромагнитного излучения и потоков нейтрино для определения элементного состава оболочек нейтронных звезд.

Космические исследования занимают сейчас приоритетное положение не только в прикладных применениях космической техники, например, для создания и совершенствования глобальных сетей коммуникационных связей, но также и для проведения научных исследований дальнего и ближнего космоса [1-4]. Открытия последних лет в этой области привлекают большое внимание к исследованиям космоса как опытных специалистов, так и талантливой молодежи.

К числу таких новых загадочных открытий можно отнести открытие темной материи и темной энергии, а к числу загадочных объектов – магнетары, черные дыры и нейтронные звезды, физика которых остается во многом пока не разгаданной.

Нами были проведены теоретические исследования и расчеты физических явлений, происходящих в оболочках нейтронных звезд.

Следует отметить, что свойства материи нейтронной звезды меняются от почти обычного состояния на поверхности, какой мы ее знаем в земных лабораторных условиях, до совсем экзотических состояний в ее центре. Уже на малой глубине от поверхности в оболочках нейтронной звезды, т.е. от нескольких сот метров до полутора километра, материя приобретает характер сжатого кулоновского кристалла. Еще глубже находится мантия – сверхплотный раствор «горячих» нейтронов, электронов и остатков ядер, т.е. сверхплотная плазма. В центре звезды, как полагают, находится большое нейтронное ядро, кварк-глюонная масса, странная материя или иная необычная материя, форма и свойства которой не ясны. Вопрос остается открытым, но интерес к этой задаче не ослабевает.

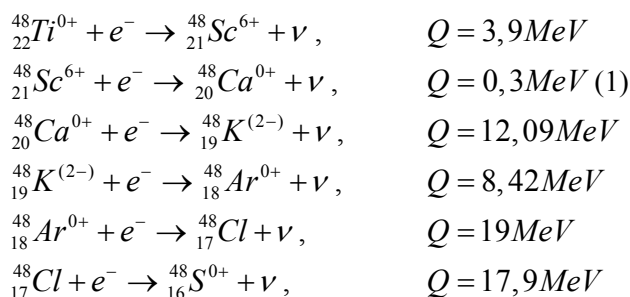
Массив накопленных физических и астрофизических данных, а также опыт теоретических оценок и расчетов показывают, что для внешнего наблюдателя основными источниками информации о звезде являются характеристики излучений с поверхности звезды и ее ближнего окружения (атмосферы, подстилающей поверхности и оболочек, магнитного поля, аккрецирующей извне материи или близкой туманности, спутника или близкой звезды). И уже как «сверхтонкая структура» могут быть приняты во внимание процессы, происходящие в центральном ядре или глубинах нейтронной звезды. В то же время физические процессы, протекающие в оболочках нейтронных звезд, могут оказывать непосредственное влияние на поверхностные явления и характер излучения, и поэтому также являются особо важными источниками информации о звезде.

Физическое описание процессов протекающих в оболочках нейтронных звезд и определение их характеристик еще позволяет использовать хорошо известные подходы квантовой физики. Однако, несмотря на это, процессы и реакции, происходящие в оболочках нейтронных звезд, приобретают уже совсем иной характер, в сравнении с процессами и реакциями, происходящими на Солнце или на Земле, а также в условиях лабораторных экспериментов [5,6].

Так, если рассматривать сверхплотное вещество в оболочках нейтронных звезд, где действуют мощные сдавливающие гравитационные силы, вытесняющие электроны с орбит атомов и создающие вырожденную электронную Ферми-жидкость, то слабые реакции в ядрах могут пойти вспять, т.е. вместо реакций β -распада, начнутся реакции поглощения электронов ядрами с испусканием нейтрино – реакции обратного β -распада [2, 7, 8].

Процессы такого рода интенсивно развиваются на определенной глубине в оболочках нейтронных звезд, где наиболее энергетически выгодным состоянием вещества является кристаллическая структура: голые ядра в узлах кристаллической решетки, которая «утоплена» в вырожденную электронную Ферми-жидкость [9]. Важно, что при этом ядра еще сохраняют свои индивидуальные свойства, так как расстояния между ними намного больше размеров ядер [2, 9]. Характеристики ядер нам известны из лабораторных экспериментов, которые можно найти в международной системе баз ядерных данных (см., например, [10, 11]). Таким образом, можно, следуя квантовым свойствам среды и задавая силу внешних воздействий, проследить развитие и изменения процессов в сверхплотных кристаллических структурах. В частности, оценить реакции захвата электронов ядрами с испусканием нейтрино и процессы нейтронизации вещества, определить появление новых «необычных» состояний в определенных слоях оболочек нейтронных звезд [2, 12-16].

Исходя из разных вариантов первичного химического состава вещества нейтронных звезд (например, железистых [15], хромовых или алюминиевых звезд [6, 17]), были рассмотрены соответствующие взаимосвязанные цепочки реакций. Например, для титановых звезд (распространенность изотопа ${}^{48}_{22}\text{Ti}$ в природе составляет 73 %) следует:



Q это пороговая энергия реакции, т.е. если $E_e > Q$, то реакция является открытой по энергии.

Отметим, что в этой цепочке значения пороговых энергий для каждой четной по счету реакции меньше пороговой энергии предшествующей реакции. Например, порог второй реакции для ${}^{48}_{21}\text{Sc}^{6+}$ будет меньше порога первой реакции, т.е. для ${}^{48}_{22}\text{Ti}^{0+}$. Это означает, что вторая реакция уже является открытой и может сразу же реализоваться вслед за первой.

Следует, однако, принять во внимание, что квантовые числа в ядрах второй реакции в левой (т.е. для ${}^{48}_{21}\text{Sc}^{6+}$) и правой (т.е. для ${}^{48}_{20}\text{Ca}^{0+}$) частях сильно различаются, так что прямые переходы между ними с испусканием γ -кванта будут оставаться маловероятными. Это также говорит об очень малой вероятности перехода из возбужденных состояний ${}^{48}_{20}\text{Ca}^*$ в его более низкие возбужденные состояния с изменением спинов на значения $2+$ или $4+$. Таким образом, переход исходного ядра ${}^{48}_{21}\text{Sc}^{6+}$ при электронном захвате в основное состояние для ядра кальция, оказывается, по такому пути невозможным.

Из реакции (1) и таблицы видно, что ядра ${}^{48}_{20}\text{Ca}^*$ не могут сбросить возбуждение за счет испускания γ -кванта, поскольку энергии электронов еще будет недостаточно – порог второй реакции, хотя и мал, но создает определенный энергетический запрет для перехода между каналами. Кроме этого, имеется большое различие в квантовых числах ядер в реакции (1).

Данные по энергиям возбужденных состояний ${}^{48}_{20}\text{Ca}^*$ и энергиям гамма-квантов приведены в таблице.

Экспериментальные данные по изотопу ${}^{48}_{20}\text{Ca}^{0+}$ [10]

Возбужденные состояния ядра ${}^{48}_{20}\text{Ca}^*$		
Энергия возбужденных состояний (MeV)	Квантовые числа	Энергия гамма-кванта (MeV)
3,8315	2+	3,8313
3,8317	2+	3,8322
3,832	2+	3,8318
3,832.3	2+	3,8323
3,8325	2+	3,8322
4,283	0+	0,451
4,503	4+	0,672

Квантовые запреты в γ - и β - переходах здесь играют очень важную роль: во-первых, практически невозможен переход между основными состояниями ядер ${}^{48}_{21}\text{Sc}^{6+}$ и ${}^{48}_{20}\text{Ca}^{0+}$, а первый возбужденный уровень у ${}^{48}_{20}\text{Ca}^*$ оказывается чуть большим, чтобы переход на него стал бы возможным. Это говорит о большой вероятности образования ядер ${}^{48}_{20}\text{Ca}^*$ в квази-возбужденных состояниях. Действительно, при электронном захвате дочернее ядро ${}^{48}_{21}\text{Sc}^{6+}$ могло бы перейти в нижнее или даже в основное состояние ядра ${}^{48}_{20}\text{Ca}^{0+}$, но этому мешают правила отбора, из которых следует, что переходы с сильно различающимися спинами ($|\Delta I| > 1$) оказываются сильно подавленными.

Как пример, приведем данные для возбужденных состояний ядра ${}^{24}\text{Mg}$, возникающих при β -переходе из ядра натрия ${}^{24}\text{Na}$ [18, 19]. Эксперимент дает следующие значения для переходов между уровнями: с $\Delta I = 4$ вероятность оказывается порядка $\omega \approx 10^{-13}$, для $\Delta I = 2$ вероятность $\omega \approx 10^{-5}$, а для $\Delta I = 0$ $\omega \approx 1$.

Хотя эти приведенные данные относятся к прямому переходу, что соответствует лабораторным экспериментам в земных условиях, важно, что запрет следует из общих правил квантовой физики и является справедливым. Отметим, что, если различие в квантовых числах ядер в начальном и конечном состояниях больше, вероятность перехода становится на порядки меньше. Конечно, при этом следует учитывать сумму квантовых чисел, приходящихся на легкие частицы (нейтрино и гамма-кванты).

Существенным являются и условия снятия возбуждения за счет испускания гамма квантов. В лабораторных экспериментах в земных условиях такое снятие возбуждения ограничивается только правилами соответствия квантовых чисел в конечном и начальном состояниях. Но в сверхплотной материи такой процесс может быть «запертым» уже самой сверхплотной средой. Перенос энергии в среде становится очень сложным процессом, и его описание требует учета многих взаимозависимостей и взаимосвязей. Уже тот факт, что длина волны гамма кванта возбуждения является много большей величины постоянной решетки, указывает на вовлеченность в процесс как излучающего ядра, так и соседних ядер, а также их воздействий на вырожденную электронную ферми-жидкость, появление квазичастиц в организованной сверхплотной среде и т.п.

Ясно поэтому, что вещество оболочек нейтронных звезд находится не только в условиях экстремально высоких давлений, но и в условиях сильно нелинейных взаимодействий. Привычный анализ состояния вещества становится затруднительным из-за появления комплекса новых явлений и процессов в экстремально плотной среде. Поэтому, процессы, протекающие в нейтронных звездах, требуют учета большого числа явлений и более сложных расчетов и анализа протекающих процессов. Одним из мощных инструментов теоретического анализа в этом случае является квантовая теория квазичастиц, дополненной методами физики нелинейных явлений. В этом плане развиваемый авторами теоретический подход описания вещества в экстремальных условиях позволяет выявить и дать численные оценки ряда важных явлений и процессов, происходящих в оболочках нейтронных звезд. В основу подхода положены не только квантовая физика квазичастиц, но и квантовая теория систем нескольких взаимодействующих частиц (или тел) с учетом резонансных состояний [13-16, 20, 21].

Нелинейные взаимодействия в сверхплотных кристаллических структурах внешних оболочек нейтронных звезд, приводят к ряду новых явлений и эффектов. Нелинейность в таких средах обязана чрезвычайно малому параметру решетки, значительно меньшему размера электронных атомных орбит. Такие сверхплотные кристаллы, где расстояния между ядрами вещества очень малы, стимулируют образование возбужденных состояний ядер в реакциях электронного захвата и поддерживают их длительное существование. Показано, что рост плотности числа таких ядер и их нелинейные взаимодействия ведут к генерации высоких мод и индуцированному излучению в кристалле. В свою очередь, энергичные гамма кванты, рассеиваясь на ядрах и электронах среды, могут порождать нейтрино-антинейтринные пары, и могут вызывать фотоядерные реакции и реакции с выбиванием нейтронов из ядер [14, 16].

Сброс индуцированного излучения сменяется периодом накопления возбужденных состояний. Время накопления возбужденных состояний зависит, конечно, от элементного состава вещества и глубины залегания данного слоя оболочки. При достижении критических значений плотности возбужденных ядер возникает лавинный процесс – индуцированный сброс когерентного излучения или сверх возбуждения ядер с последующим выбросом массы свободных нейтронов [16, 20, 21].

Нелинейные процессы в оболочках нейтронных звезд сопровождаются, кроме того, и периодическими всплесками излучений нейтрино [14, 21].

В сверхплотных кристаллах ядерные реакции и возбужденные состояния ядер становятся участниками резонансных взаимодействий фононов кристалла с фононами внутри ядра. Такие процессы особенно интенсивно будут возникать на определенных глубинах в оболочках нейтронных звезд, где становятся возможными ядерные реакции захвата электронов ядрами (нуклидами), находящимися в узлах кристаллической решетки. Для каждого нуклида имеется своя пороговая глубина в оболочке нейтронной звезды, с которой начинаются соответствующие реакции захвата электронов.

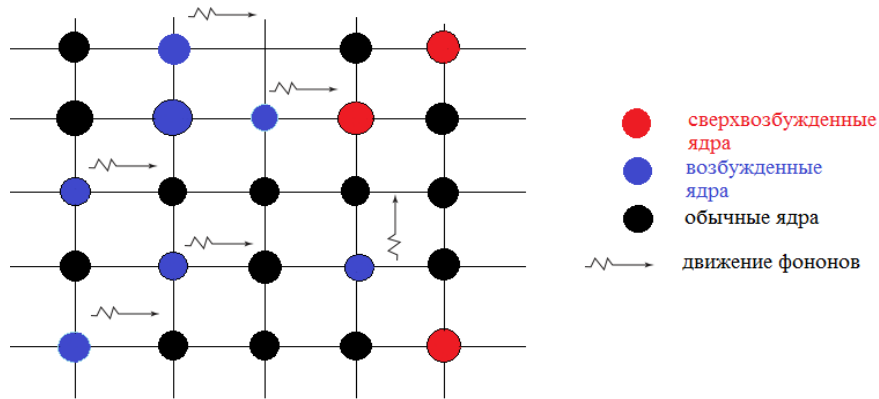


Рисунок 1 – Резонансные взаимодействия фононов кристалла с фононами ядра

В зависимости от элементного состава первичного вещества нейтронной звезды, им будут отвечать разные типы ядерных реакций. Оценка энергетического выхода этих реакций и их особенностей даст понимание развития ядерных процессов в нейтронных звездах и роли их первичного химического состава.

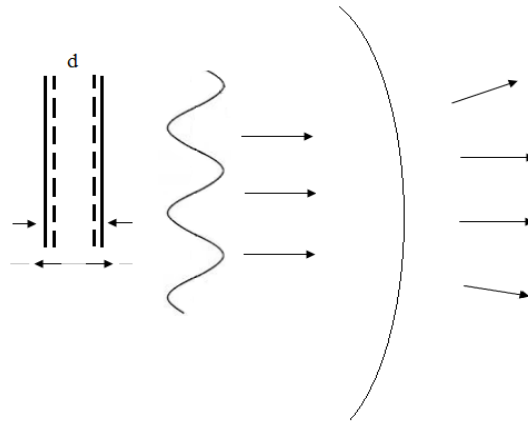


Рисунок 2 – Распространение волн, модулирующих излучение

Резонансные переходы между кристаллическими и ядерными фононами, между фононами и фотонами (поляритоны), фермиевскими электронами, экситонами и ядрами будут усиливать нелинейный отклик как внутри самих ядер, так и между ядрами в сверхплотном кристалле. Нелинейные взаимодействия в самой кристаллической среде и внутри ядер кристалла ведут к периодическим выплескам высокоэнергичных электромагнитных волн, локальным изменениям плотности в слое оболочки и, соответственно, к звездотрясениям, генерации нейтринного излучения и другим неординарным явлениям (см. рисунок 2).

Так, расчеты показали, что микроструктура излучений нейтронных звезд зависит от их элементного состава или, более конкретно, от скорости накопления критической плотности ядер в возбужденных состояниях. Эта скорость определяется скоростью реакций обратного β -распада, т.е. скоростью реакций слабого взаимодействия – именно такие реакции и содержат информацию о ядрах (нуклидах) материи и об элементном составе вещества нейтронной звезды.

На основании полученных выводов нами предлагается провести комплекс экспериментов с согласованной регистрацией потоков нейтрино и микроструктуры гамма излучений от нейтронных звезд для определения их элементного состава и динамики внутренних процессов.

В настоящий момент идет широкомасштабный сбор данных электромагнитных излучений, особенно, в оптическом и радиодиапазонах [22] а также эксперименты по регистрации рентгеновских источников [23]. Однако нейтринные эксперименты в сочетании с регистрацией радио и рентгеновских излучений пока не проводятся. Проведение предлагаемых комплексных экспери-

ментов может значительно обогатить наши знания о состояниях вещества в экстремальных условиях.

Важно отметить и следующее. Экстремально высокие плотности вещества ведут к своеобразному упрощению его структуры, что, в свою очередь, дает возможность исследования этой структуры в рамках теорий ферми-жидкости, квантовой теории взаимодействия сложных систем, физики квазичастиц и нелинейных взаимодействий. Их совместное использование ведет к определенным упрощениям общего описания, несмотря на кажущуюся возрастающую сложность.

Указанные теории и используемые в них методы были применены и обобщены для описания процессов, происходящих в оболочке нейтронной звезды и в центральном твердом ядре белых карликов [20, 21].

Конечно, такое рассмотрение имеет вполне определенные пределы, которые ограничены, прежде всего, плотностями вещества сравнимыми или большими средней плотности ядерной материи. При таких плотностях уже должна работать физика субъядерных систем, т.е. квантовая хромодинамика, ее методики и подходы.

Свойства мантии и ядра нейтронной звезды остаются за рамками проводимых исследований – их физика пока непонятна и проявлений, прямо связанных с ними, в экспериментах и наблюдениях пока не обнаружено.

Однако, многие процессы и наблюдаемые явления такие, как глюки, внезапные выбросы вещества и излучения, паузы или провалы в спектрах, уже могут быть оценены и интерпретированы в рамках разработанных выше подходов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] The NASA Astrophysics Data System: adswww.harvard.edu/; science.nasa.gov/astrophysics/astrophysics-data-centers.
- [2] Shapiro S. L., Teukolsky S. A., Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects, Wiley, New York.-1983.
- [3] Потехин А.Ю. УФН.- 2010. Т. 180. № 12. - С.1279-1304.
- [4] Popov S.B., The Zoo of neutron stars, Phys of Particle and Nuclei, V-39, 1136, 2008.
- [5] Андерсен Р., Эхо Большого взрыва, В мире науки, № 12. 2013.
- [6] Воронов В.К., Подоппелов А.В., Современная физика, М. КомКнига 2005, 512 с., ISBN 5-484-00058-0.
- [7] Нусипалиева М., Насирова Д., Такибаева М. О ядерных реакциях в оболочках нейтронных звезд. Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. - 2013. № 2 (288). - С. 35-38.
- [8] Насирова Д.М., Такибаев Н.Ж., Курмангалиева В.О., Такибаева М.Н., «Реакции обратного β – распада в оболочках нейтронных звезд», Известия НАН РК, серия физико-математическая, 2 (294), 2014, с. 50-52.
- [9] Киржниц Д.А., О внутреннем строении сверхплотных звезд, ЖЭТФ, Т 38. Вып. 2. 503, 1960/
- [10] <http://cdfc.sinp.msu.ru/>
- [11] <http://canrdb.kaznu.kz>
- [12] Takibayev N., Neutron Resonance States in Overdense Crystals, Few-Body Systems, 2013, V 54, 447-450 DOI 10.1007/s00601-012-0410-6.
- [13] Takibayev N., Class of Model Problems in Three-Body Quantum Mechanics That Admit Exact Solutions, Physics of Atomic Nuclei, 2008, V 71, 460-468, ISSN 1063-7788.
- [14] Takibayev N., Exact Analytical Solutions in Three-Body Problems and Model of Neutrino Generator, EPJ Web of Conferences 3, 05028 (2010); DOI:10.1051/epjconf/20103005028.
- [15] Takibayev N., Kato R., Takibayeva M., Sarsembayeva A., Nasirova D., “Neutron Resonances in Few-Body Systems and the EOS of Neutron Star Crust”, Few-Body Systems, 2013. - DOI 10.1007/s00601-013-0598-0.
- [16] Takibayev N., Kato R., Nasirova D., “Excited nuclei in Neutron Star Crust”, Adv. Studies Theor. Phys, 2013. Vol.- 7. - P.151 – 161.
- [17] Насирова Д.М. "Трехчастичные нейтронные резонансы и реакции в оболочках нейтронных звезд", Известия НАН РК, № 3 (289), Алматы, 2013, с. 8-13
- [18] Мухин К.Н., Экспериментальная ядерная физика, том 1 Физика атомного ядра, М, Энергоатомиздат, 1983, 616 с.
- [19] Otsuka N., Semkova V., Kenzhebayev N., Ergashev F., Kurmangalieva V., Nusipalyeva M., Takybayeva M., “Compilation of Experimental Nuclear Reaction Data Measured in Central Asia”, INDC, Proceedings of the Fourth Asian Nuclear Reaction Database Development Workshop, IAEA, February 2014, Vienna, Austria, p 56-60.
- [20] Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физике Насировой Д.М., 2013 г., 121 с.
- [21] Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физике Такибаевой М.Н., 2014 г., 151 с.
- [22] // <http://chandra.harvard.edu/>
- [23] ATNF Pulsar Catalogue, Australia Telescope National Facility, <http://www.atnf.csiro.au>

REFERENCES

- [1] The NASA Astrophysics Data System: adswwww.harvard.edu; science.nasa.gov/astrophysics/astrophysics-data-centers.
- [2] Shapiro S. L., Teukolsky S. A., Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects, Wiley, New York.-**1983**. (in Russ.)
- [3] Potechin A.Y.UFN.- **2010**. Т. 180. № 12. - С.1279-1304. (in Russ.)
- [4] Popov S.B., The Zoo of neutron stars, Phys of Particle and Nuclei, V-39, 1136, **2008**. (in Eng.)
- [5] Andersen R., EhoBolshogovzryiva, V mire nauki, № 12. **2013**.(in Russ.)
- [6] Voronov V.K., Podoplelov A.V., Sovremennayafizika, M. KomKniga,**2005**, ISBN 5-484-00058-0, 512 s.(in Russ.)
- [7] Nusipalieva M., Nasirova D., Takibaeva M. O yaderniyhreaktsiyah v obolochkahneytronnyihzvezd. Izvestiya NAN RK. ser. fiz-mat. - **2013**. # 2 (288). - S. 35-38.(in Russ.)
- [8] Nasirova D.M., Takibaev N.Zh., Kurmangalieva V.O., Takibaeva M.N., «Reaktsii obratnogo beta – raspada v obolochkah neytronnyih zvezd», Izvestiya NAN RK, seriya fiziko-matematicheskaya, 2 (294), **2014**, s. 50-52.(in Russ.)
- [9] KirzhnitsD.A., Ovnutrennemstroeniisverhplotnyihzvezd, ZhETF, T 38. Vyip. 2. 503, **1960**. (in Russ.)
- [10] <http://cdfc.sinp.msu.ru/>
- [11] <http://canrdb.kaznu.kz>
- [12] Takibayev N., Neutron Resonance States in Overdense Crystals, Few-Body Systems, **2013**, V 54, 447-450 DOI 10.1007/s00601-012-0410-6.(in Eng.)
- [13] Takibayev N., Class of Model Problems in Three-Body Quantum Mechanics That AdmitExact Solutions, Physics of Atomic Nuclei, **2008**, V 71, 460-468, ISSN 1063-7788.(in Eng.)
- [14] Takibayev N., Exact Analytical Solutions in Three-Body Problems and Model of Neutrino Generator,EPJ Web of Conferences 3, 05028 (**2010**); DOI:10.1051/epjconf/20103005028.(in Eng.)
- [15] Takibayev N.,Kato R., Takibayeva M., Sarsembayeva A., NasirovaD.,“Neutron Resonances in Few-Body Systems and the EOS of Neutron Star Crust”, Few-Body Systems, **2013**. - DOI 10.1007/s00601-013-0598-0.(in Eng.)
- [16] Takibayev N.,Kato R., Nasirova D., “Exited nuclei in Neutron Star Crust”, Adv. Studies Theor. Phys, **2013**. Vol.- 7. - P.151 – 161.(in Eng.)
- [17] Nasirova D.M. " Trehchastichnyieneytronnyierezonansyireaktsii v obolochkahneytronnyihzvezd", Izvestiya NAN RK, # 3 (289), Almatyi, **2013**, s. 8-13.(in Russ.)
- [18] Muhin K.N., Eksperimentalnayayadernayafizika, tom 1 Fizikaatomnogoyadra, M, Energoatomizdat, **1983**, 616 s.(in Russ.)
- [19] Otsuka N., Semkova V., Kenzhebeyev N., Ergashev F., Kurmangalieva V., Nusipalyeva M., Takybayeva M., “Compilation of Experimental Nuclear Reaction Data Measured in Central Asia”, INDC, Proceedings of the Fourth Asian Nuclear Reaction Database Development Workshop, IAEA, February 2014, Vienna, Austria, p 56-60.(in Eng.)
- [20] Dissertatsiyanasoiskanieuchenoystepenidoktorafilosofii (PhD) pofizikeNasirovoy D.M., **2013** g., 121 s.(in Russ.)
- [21] Dissertatsiyanasoiskanieuchenoystepenidoktorafilosofii (PhD) pofizikeTakibaevoy M.N., **2014** g., 151 s.(inRuss.)
- [22] // <http://chandra.harvard.edu/>
- [23] ATNF Pulsar Catalogue, Australia Telescope National Facility, <http://www.atnf.csiro.au>

НЕЙТРОНДЫҚ ЖҰЛДЫЗДАРДЫҢ ҚАБЫҚШАЛАРЫНДАҒЫ АСАТЫҒЫЗ КРИСТАЛЛДАРДАҒЫ ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕССТЕР

Н. Ж. Такибаев¹, М. Н. Такибаева¹, В. О. Курмангалиева¹, Д. М. Насирова²

¹Әл-Фараби атындағы Қазақұлттықуниверситеті, Алматы, Қазақстан,

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: нейтрондық жұлдыздардың қабықшалары, фонндық және ядролық әсерлесулер, тығыздық осциляциялары.

Аннотация. Нейтрондық жұлдыздардың қабықшаларындағы физикалық процесстерді зерттеумен байланыстысоңғы жылдардағы зерттеулердің қысқаша нәтижелеріне шолу жасалған. Соның ішінде нейтрондардың асатығыз кристалдық құрылымдармен кванттық «қармау» құбылысы, ядролардың кері бета ыдырауы, фонндық және ядролық әсерлесулер, қозған ядролардың жергілікті жиналуы мен нейтрондық жұлдыздардың қабықшаларындағы тығыздық осциляциясы. Электромагниттік сәулелену пульсацияларында глюктарды сәйкес тіркеу бойынша және нейтрондық жұлдыздардың қабықшаларындағы элементтердің құрамын анықтау үшін жаңа тәжірибелер жасау негізделеді.

Поступила 17.03.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 136 – 141

T-CONTROLLABILITY OF NONLINEAR THROTTLE DRIVE

F. R. Gusmanova, A. Alltybay, M. Zh. Sakypbekova

Kazakh national university named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: vestnik_kaznpu@mail.ru, arshynbek.ntu@gmail.com, mika_alibi@mail.ru

Keywords: throttle drive, control, t-stability of, t-controllability, Hurwitz matrix, positive definite matrix

Abstract. The article deals with the nonlinear equation of the throttle drive as the main model of this equation is obtained by converting the automatic control system with nonlinear elements. To obtain the automatic control system the transfer matrix is showed. For a system without control with nonlinear elements function in the form of Lyapunov is obtained.

The concepts of t-stability and t-controllability are regarded. The problem of T- controllability of nonlinear throttle drive satisfying the properties of stability on an infinite time interval was solved.

ӘОЖ 62

СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ДРОССЕЛЬДІК ЖЕТЕКТІҢ Т-БАСҚАРЫЛУЫ

Ф. Р. Гусманова, А. Алтыбай, М. Ж. Сақыпбекова

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: дроссельдік жетек, басқару, Т-орнықтылық, Т-басқару, Гурвиц матрицасы, оң-анықталған матрица

Аннотация. Мақалада сызықтық емес дроссельдік жетектің теңдеуі жұмыстың басты моделі ретінде беріледі. Осы теңдеуді түрлендіре отырып, сызықтық емес элементтері бар автоматтық басқару жүйесі алынды. Алынған автоматты басқару жүйесінің ауыстыру матрицасы келтіріледі. Басқарусыз сызықтық емес элементтері бар жүйенің Ляпунов түріндегі функциясы алынады. Т-орнықтылық пен Т-басқару ұғымдары қарастырылады. Шексіз уақыт аралығындағы орнықтылық қасиеттерін қамтамасыз ететін сызықтық емес дроссельдік жетектің Т-басқару есебі шешілді.

Сызықтық емес дроссельдік жетектің

, (1)

түріндегі теңдеуін қарастырайық, мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_3 & a_4 & 0 & a_1 \\ -\gamma & -\theta_1 & -\beta & -\theta & \gamma \\ 0 & 0 & -a & -b & 0 \\ c & 1 & e & 0 & -c \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{C_k}{m} - \frac{cF_k}{m}, \quad a_2 = \frac{C_k}{m} - \frac{cF_k}{m} + \frac{k_n}{m}, \quad a_3 = \frac{f}{m}, \quad a_4 = \frac{F_k s}{m},$$

$$a = S_1 n / (F_1 k^{1n}), \quad b = (C_k^{1/(F \cdot k^n)}),$$

$$\alpha = \frac{2E}{V}, \quad \beta = r (2E^2)/V + (2E^2)/V ((S_1 n^2 2)/(F_1 k^{1n}) + (S_1 n^2 2)/(F_1 k^{1n})),$$

$$\gamma = S_n \frac{C_k}{F_k} \cdot \frac{2E}{V}, \quad \theta = S_n \frac{2E}{V} \cdot (C_k^{1/(F \cdot k^n)}), \quad \theta_1 = S_n \frac{2E}{V}.$$

$$x_1 = y_H, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt}, \quad x_3 = P_F x_4 = y_U, \quad x_5 = y_n,$$

\tilde{u} – басқару [1].

Y_1 -ге катысты

$$Y_1 = \mu b \sqrt{\frac{P_H}{\rho}} \sqrt{1 - c_0 x_2 \text{sign} \sigma_1} \cdot F(\sigma_1) = \alpha_0 F(\sigma_1, \sigma_2)$$

өрнегін ұсынайық, мұндағы

$$\alpha_0 = \mu b \sqrt{\frac{P_H}{\rho}}, \quad c_0 = \frac{1}{P_H}, \quad \sigma_1 = l^T x, \quad \sigma_2 = c^T x = x_2$$

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1) \psi(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{1 - \sigma_2 \text{sign} \sigma_1}.$$

Және

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{f(\sigma_1)}{\sigma_1} \leq \mu < +\infty, \quad f(0) = 0, \quad |\sigma_2| < 1, \\ 0 < \psi(\sigma_1, \sigma_2) \leq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

$\sigma_2 \neq 0$ болғанда,

$$\sigma_2 = \eta^T x = x_2$$

болсын.

(1) жүйені екі сызықтық емес элементі бар автоматтық басқару жүйесіне келтіруге болады:

$$\dot{x} = Ax + M\varphi(\sigma) + Lu, \quad \sigma = Nx$$

мұндағы,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} \\ \gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} l^T \\ \eta^T \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = l^T x, \quad \sigma_2 = \eta^T x.$$

(2) шарт орындалған кезде

$$0 \leq \frac{\varphi_1(\sigma_1)}{\sigma_1} \leq \frac{f(\sigma_1)\psi(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1} \leq \mu_1 \tag{3}$$

$$0 \leq \frac{\varphi_2(\sigma_2)}{\sigma_2} \leq \mu_2 = \infty$$

теңсіздіктерінің орындалатынын байқауға болады.

(3) теңсіздік

$$\tau_1(\sigma_1 - \mu_1^{-1}\varphi_1(\sigma_1))\varphi_1(\sigma_1) \geq 0,$$

$$\tau_2\sigma_2\varphi_2(\sigma_2) \geq 0$$

немесе

$$\varphi^T(\sigma)(\sigma - \mu^{-1}\varphi(\sigma)) \geq 0$$

шарттарымен пара-пар.

(2) жүйенің сызықты бөлігінің ауыстыру матрицасы

$$W(\varphi) = N(A - pE)^{-1}M$$

түріндегі 2x2 матрицасы болып табылады.

$$\dot{x} = Ax + M\varphi(\sigma), \quad \delta = Nx \tag{4}$$

түріндегі басқарусыз (2) жүйе үшін

$$V(x) = x^T Hx + q_1 \int_0^{\sigma_1} \varphi_1(\lambda) d\lambda + q_2 \int_0^{\sigma_2} \varphi_2(\lambda) d\lambda \tag{5}$$

Ляпунов түріндегі функцияны алайық, мұндағы $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ - нақты параметрлер; H - оң-анықталған матрица.

$\varphi_2(\sigma_2)$ – компоненті құрғақ үйкеліске сәйкес келетіндіктен әрі қарай оны [2] алмастырылған толықтырылған функция деп есептеп, жүйе шешімін А. Ф. Филиппов [3] мағынасында қабылдаймыз.

Сонымен қатар,

$$\tau = \text{diag}\{\tau_1, \tau_2\} > 0, \quad \mu^{-1} = \text{diag}\{\mu_1^{-1}, 0\} \geq 0$$

матрицаларын енгіземіз.

Ляпунов функциясынан t бойынша толық туындысын, яғни барлық дерлік t үшін

$$\begin{aligned} \dot{V} = & x^T (A^T H + H A)x + 2x^T [HM + 0,5(A^T N^T q + N^T \tau)]\varphi + \\ & + \varphi^T (-\tau\mu^{-1} + \text{Re}qNM)\varphi + q_1 \dot{\sigma}_2 \int_0^{\sigma_1} f(\sigma_1) \frac{\partial \psi(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 - \varphi^T \tau (\sigma - \mu^{-1}\varphi). \end{aligned} \tag{6}$$

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = - \int_0^{\sigma_1} f(\sigma_1) \frac{\partial \psi(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_1} d\sigma_1$$

белгілеуін енгізе отырып, (6) қатынастан

$$-\dot{V} = V_1 + V_2 + q_1 \delta_3 \Phi(\sigma_1, \sigma_2) \tag{7}$$

өрнегін аламыз, мұндағы

$$\begin{aligned} V_1 &= x^T G x \Phi(\sigma_1, \sigma_2) + 2x^T g \varphi + \varphi^T D \varphi \\ -G &= A^T H + H A, \quad -g = H M + 0,5(A^T N^T q + N^T \tau) \\ -D &= \tau \mu^{-1} + R e q N M \\ V_2 &= \varphi^T \tau (\sigma - \mu^{-1} \varphi) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 \neq 0 \text{ болғанда } \sigma_1 \Phi(\sigma_1, \sigma_2) > 0,$$

және

$$\dot{\sigma}_2 \Phi(\sigma_1, \sigma_2) = c^T x \Phi(\sigma_1, \sigma_2) = c^T A x \Phi(\sigma_1, \sigma_2) + c^T M \varphi(\sigma) \Phi(\sigma_1, \sigma_2) = c^T A x \Phi(\sigma_1, \sigma_2) + \gamma_0 \varphi_1(\sigma_1) \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$$

яғни, $\gamma_0 \geq 0$ болғанда оң жақтағы екінші қосылғыш теріс емес болады.

Демек, (7) қатынастан

$$-\dot{V} = V_1 + V_2 + V_3 + q_1 c^T A x \Phi(\sigma_1, \sigma_2) - \delta_0 \sigma_1 \Phi(\sigma_1, \sigma_2) + V_4 \tag{8}$$

өрнегін аламыз, мұндағы

$$\begin{aligned} V_3 &= q_1 \gamma_0 \varphi_1(\sigma_1) \Phi(\sigma_1, \sigma_2) \geq 0, & \gamma_0 &\geq 0, \\ V_4 &= \delta_0 \sigma_1 \Phi(\sigma_1, \sigma_2) \geq 0, & \delta_0 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = l^T x$$

болғандықтан

$$q_1 c^T A = \delta_0 l^T \tag{9}$$

деп ұсынайық. Сонда (8) қатынастан

$$-\dot{V} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \tag{10}$$

өрнегін аламыз.

Енді $-\dot{V} \geq 0$ теңсіздігі орындалу үшін $V_1 \geq 0$ теңсіздігі орындалатындай бізге H оң анықталған матрицаны таңдау қажет. Ол үшін барлық $0 \leq \omega < \infty$ үшін

$$\pi(\omega) = D + R e (q N A + \tau N) (A - i \omega E)^{-1} M \geq 0 \tag{11}$$

жеткілікті болады [4] және (A, M) мен (A, X) жұптары толығымен басқарылатын және бақыланатын болуы керек, мұндағы $A = A^T N^T \tau + N^T \tau$, яғни $(A, A M, A^2 M, A^3 M, A^4 M)$ және $(X, A^* X, A^{*2} X, A^{*3} X, A^{*4} X)$ матрицаларының рангі $n = 5$ болуы керек.

$$\begin{aligned} A &= (A - i \omega E) + i \omega E, \\ A(A - i \omega E)^{-1} &= i \omega (A - i \omega E)^{-1} + E, \\ N A (A - i \omega E)^{-1} M &= N M + i \omega W(\omega) \end{aligned}$$

қатынастарын ескеріп, (11) өрнектен барлық $0 \leq \omega < \infty$ үшін

$$\pi(\omega) = \tau \mu^{-1} + R e (\tau + i \omega q) W(\omega) \geq 0 \tag{12}$$

қатынасын аламыз.

(12) жиілік шарты Лурьенің шешуші теңдеулерін

$$\begin{aligned} A^T H + H A + \mu \mu^T &= 0 \\ H M - g &= \mu \Gamma \\ g &\equiv -\frac{1}{2} (A^T N^T q + N^T \tau), \quad \Gamma > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\Gamma = \tau\mu^{-1} - R\epsilon(qNM)$$

қанағаттандыратын $H = H^T > 0$ матрицасының бар болуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылатыны белгілі.**

$$Q(x, \varphi) = (2Nx + \varphi^T(\sigma)qN^T - q_1\Phi(\sigma_1, \sigma_2)c)^T L \quad (14)$$

белгілеуін енгізейік.

Уақыттың жартылай шексіз $[0, \infty)$ аралығында қарастырылатын (2), (4) жүйелер үшін T - орнықтылық пен T -басқару ұғымдарын қарастырайық.

Анықтама 1 [5]. Егер (4) жүйе Ляпунов бойынша толық орнықты және

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = 0$$

теңдігі орындалатындай t уақыты бар болса, онда (4) жүйенің $x = 0$ қобалжымаған қозғалысын деп айтамыз, мұндағы t_1 уақыт мезгілі тиімді тез әсер ету есебін шығарады.

Анықтама 2 [5]. Егер тұтасымен T -орнықтылықты қамтамасыз ететін $u(x, t) \in U$ басқаруы бар болса, онда (2) басқарылатын үрдіс тұтасымен T -басқарылады деп айтамыз.

Келесі теорема ақиқат.

Теорема. Келесі шарттар орындалсын:

1. A – Гурвиц матрицасы және $W(p)$ матрицасының $\omega_{ij}(\varphi)$ ауыстыру функцияларының арасында бөлімінде тұрған полиномның дәрежесі $n = 5$ болатындай және алымында тұрған полиноммен ортақ түбірі жоқ және егер $q_i \neq 0$ болса, онда $-\frac{T_i}{q_i}$ шамасы $\omega_{ij}(\varphi)$ функция полюсі болмайтындай ауыстыру функциясы бар болады;

$$2. \quad q_1 c^T A = \delta_0 I^T, \quad \delta_0 \geq 0, \quad q_1 \geq 0$$

3. (12) жиілік шарты орындалады және оң-анықталған H матрицасы (13) Лурьенің шешуші тендеуінен анықталады.

4.

$$u = -\frac{k \operatorname{sgn} Q(x, \varphi)}{|Q(x, \varphi)|} \quad (15)$$

басқару, мұндағы $k > 0$ – тұрақты параметр, $Q(x, \varphi)$ (14) формуламен анықталады.

Сонда (2) жүйе тұтасымен T -басқарылады.

Дәлелдеу. Ляпунов функциясын (5) түрінде қарастырамыз және (6)-(10) ескеріп

$$\dot{V} \leq Q(x, \varphi)u \leq -k \quad (16)$$

(15) басқаруымен қос теңсіздігін аламыз.

Сонда (2) жүйенің тұтас орнықтылығы үшін барлық жағдайлар(9) жиілік шарты орындалған жағдайда орын алады және (2) жүйенің T -орнықтылығын аламыз, яғни

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = 0, \quad (17)$$

мұндағы

$$T = t_1 = \frac{V(x_0)}{k} < \infty$$

(5) Ляпунов функциясы үшін.

Шынында да, (16) қатынасты 0-ден t -ға дейін интегралдасак $t \geq \frac{V(x_0)}{k} = t_1$ және $t \in [t_1, \infty)$:

$V(x(t)) \equiv 0$ болғанда

$$0 < V(x(t)) \leq V(x_0) - kt < 0$$

аламыз, демек, (16) шартты аламыз.

t_1 уақыт мезгілі тиімді тез әсер ету есебін шығаратынын көрсетейік.
Қарама-қарсы ұсынайық.

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = 0$$

теңдігі орындалатындай $t_1^* < t_1$ уақыт мезгілі бар болсын.

Бұл жерде

$$kt_1^* < kt_1 = V_0 = V(x_0),$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq -k$$

қатынасын 0-мен t_1 аралығында интегралдасак

$$V(t_1) - V(t_1^*) \leq -kt_1 + kt_1^*$$

теңсіздігін аламыз, немесе

$$0 \leq -V_0 + kt_1^*,$$

яғни,

$$V_0 \leq kt_1^*$$

ал бұл (17) теңсіздікке қайшы. Теорема дәлелденді.

ӘДЕБИЕТ

[1] Гусманова Ф.Р., Шеркешбаева Б.К. Сыртқы әсері жоқ гидравликалық жетектің орнықтылығы // «Мұнай-газ саласының ғылыми-технологиялық және экологиялық мәселелеріндегі математикалық модельдеу» VIII Қазақстан-Ресей халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы баяндамаларының тезистері. – Атырау мұнай және газ институты. 2014, 20-21 маусым. 40б.

[2] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400с.

[3] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем.сб.

[4] Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика. –Т.25. – №7. – 196. – С.1017-1029.

[5] Бияров Т.Н., Кенесбаев С.М., Калимолдаев М.Н. Т-управляемость в целом нелинейных систем автоматического управления // «Деп.научн. работы» КазНИИНКИ, 1992. – № 3909-Ка92. –Вып.2.

REFERENCES

[1] Gusmanova F.R., Sherkeshbaeva B.K. Abstracts VIII Kazakh-Russian international scientific-practical conference "Mathematical modeling in science and technology and environmental issues oil and gas industry", Atyrau Institute of Oil and Gas, 2014, June 20-21. 40 p. (in Kaz).

[2] Gelig A.H., Leonov G.A. Stability of nonlinear systems with non-unique equilibrium state. Moscow: Nauka, 1978, 400 p. (in Russ).

[3] Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand side // Matem.sb., V.51 (93), №1, 1960, p. 98-126 (in Russ).

[4] Yakubovich V.A. Method of matrix inequalities in the theory of stability of nonlinear control systems. Absolute stability of forced oscillations. Automation and Remote Control, V.25, №7, 196. p.1017-1029.

[5] Biyarov T.N., Kenesbay S.M., Kalimoldaev M.N. T-controllability of nonlinear systems of automatic control. "Dep.nauchn. work "KazNIINKI, 1992, №3909-Ka92, issue 2.

Т-УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО ДРОССЕЛЬНОГО ПРИВОДА

Ф. Р. Гусманова, А. Алтыбай, М. Ж. Сақыпбекова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: дроссельный привод, управление, Т-устойчивость, Т-управляемость, Гурвица матрица, положительно-определенная матрица.

Аннотация. В статье рассматривается уравнение нелинейного дроссельного привода как основная модель работы. Преобразовывая это уравнение получена система автоматического управления с нелинейными элементами. Для полученной системы автоматического управления приведена передаточная матрица. Для системы без управления с нелинейными элементами получена функция в виде Ляпунова. Рассматриваются понятия Т-устойчивости и Т-управляемости. Решена задача Т-управляемости нелинейного дроссельного привода удовлетворяющая свойствам устойчивости на бесконечном промежутке времени.

Поступила 24.02.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 142 – 146

UDC 538.9

**AB INITIO CALCULATIONS OF BAND GAPS
OF CsPbI₃ AND RbPbI₃ HALYDE PEROVSKITES**

B. K. Abdykadyrov, N. Zh. Takibaev

Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan. E-mail: abkxat@gmail.com

Key words: DFT, perovskites, VASP, zone structure.

Abstract. We have performed first principles density functional calculations of CsPbI₃ and RbPbI₃ halyde perovskites. Lead halide perovskites have attracted great interest because of rapid improvements in the efficiency of photovoltaics based on these materials. To predict new related functional materials, a good understanding of the correlations between crystal chemistry, electronic structure properties is required. Used approach is density functional calculations with the Perdew, Burke, and Ernzerhof method of Generalized Gradient Approximation (PBE-GGA) and the projector-augmented-wave method as implemented in VASP. Their characteristics in cubic phases were determined along with calculation of the forbidden band widths. For cubic phases of the CSPbI₃ and RbPbI₃ - type perovskites crystalline structures forbidden band widths are 1,45 eV and 1,78 eV respectively. The calculated parameters are found to agree well with the experimental data.

INTRODUCTION

Current development of computer technologies allows to set up computational experiments and make them an integral part of modern research.

Researchers therefore have got practical capabilities for simulation of both ideal crystals and structurally imperfect real crystals and artificial compounds [1].

Interest to study such compounds is related to their potential practical applications in, for instance, solar power generation [2].

ABM₃-type perovskites are intensively studied due to their various promising electronic, electro-mechanic and conductive properties for numerous and diverse applications [3]. One of the important application areas for these perovskites is laser systems: a large cation A in the perovskite structure can be Nd (III) and Sm (III), which are the main laser ions [4].

Since the particular attention is paid to solar power generation, we have to mention works performed in Oxford University where thin film solar cell has been created with light absorption for 15 % better than that of the best silicon-based cells [5]. This thin film solar cell of the new generation has been created based on an organo-metallic crystalline semiconductor material called perovskite. It is reported that the new cells have simple design and can be easily large-scale produced employing available precipitation process currently used in production of silicon solar cells. Group of the University of Oxford [5] created a thin film solar cell based on a new class of perovskite compounds.

The first study of ABM₃-type perovskites performed within the density functional theory by Muller on the CsPbI₃ [6]. After that, many works further developed the computational methods up high levels of precision. There are extensive analytical works devoted to specific materials and compounds [7]. As an example we can refer to calculations [3] where structure and optoelectronic properties of CsPbM₃ (M=Cl, Br, I) perovskites were determined. The structure and electronic properties were calculated with Wien2 software code employing the method FP-LAWP (full potential linearized augmented plane wave method).

In the present paper we calculated structure and electric properties of CSPbI₃, RbPbI₃ perovskites in cubic phase. The calculations were performed with VASP software employing the method GGA-PBE.

Objective of the present work is to test the calculation methods and compare the results on CsPbI_3 , RbPbI_3 perovskite structures in cubic phases with the previously obtained data with using different methods [2, 3, 6].

CALCULATION

Perovskite is usually crystallized in rhombic crystal system (pseudocubic). So, in the pseudoisometric coordination structure of TiCaO_{12} perovskite, each Ca atom is surrounded by 12 oxygen atoms occupying a cuboctahedron vertexes, and Ti atom is in the octahedral coordination. There is a characteristic hatching on the pseudocubic faces parallel to the edges [8].

Our calculations and ABM₃ numerical simulations showed that the crystalline structures of the perovskites CsPbI_3 have the following characteristic varieties (phases): cubic phase (Fig. 1), tetragonal (Fig. 2.a) and orthorhombic phase (Fig.2.b).

These phases demonstrate different characteristics - width of the energy gap and lattice parameters.

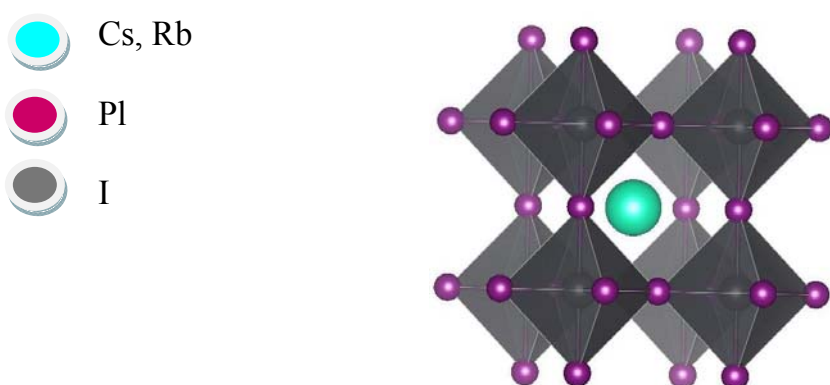


Figure 1 – Pm-3m crystal structure of the CsPbI_3 , RbPbI_3 perovskites (visualized in VESTA software)

Due to peculiarities of their structure, perovskites can reveal ferroelectric, ferromagnetic and superconducting properties [4]. In perovskite structure A-atom represents a large sessile cation. The B atom has smaller size and can move. Perovskite can be in cubic or in non-cubic phase. Non-cubic phases are achieved by a shift of atoms or by octahedral tilt.

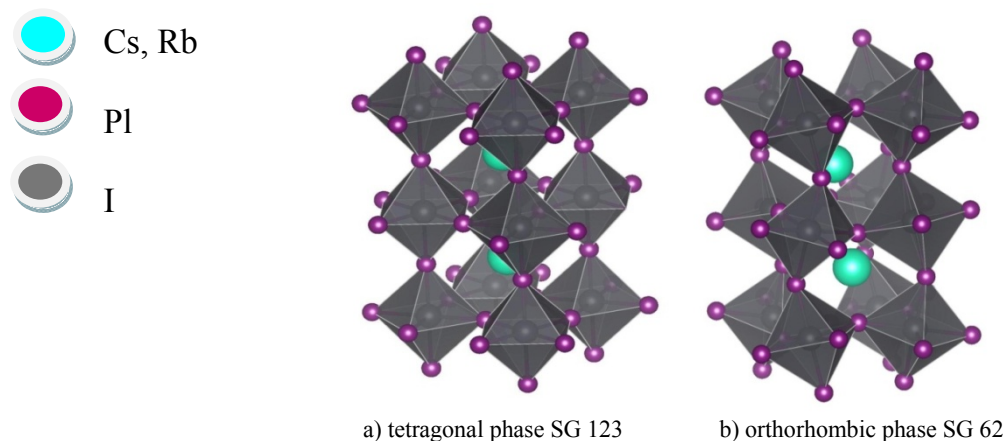


Figure 2 – P4/mmm tetragonal structure and Pmc2₁ orthorhombic structure of CsPbI_3 and RbPbI_3 perovskites

The pseudopotentials method in the software package VASP was applied in this work for optimization of the lattice geometry and obtaining the equation of state (EOS). The method GGA-PBE was used for the perovskite CsPbI_3 in cubic phase [9]. We considered the following valence electron configuration: $5s^25p^66s^1$ for Cs, $4s^24p^65s^1$ for Rb, $5d^{10}6s^26p^2$ for Pb, and $5s^25p^5$ for I. The electronic wave

functions were expanded with plane waves up to a kinetic-energy cutoff of 400 eV except for structural optimization, where a kinetic energy cutoff of 520 eV has been applied to reduce the effects of Pulay stress. The momentum space integrations were performed using a $5 \times 4 \times 4$ Γ -centered Monkhorst-Pack k -mesh [29].

RESULTS AND DISCUSSION

The total energy vs volume with a given space group for one perovskite formula unit cell is calculated to show the equation of state diagram, and at each given volume, the cell shape and internal atomic coordinate was fully optimized. Calculated EOS of the optimized CSPbI₃ and RbPbI₃ perovskite structures are presented at Fig.3. The structure demonstrates that that most stable phase in CsPbI₃ and RbPbI₃ is orrhorhombic.

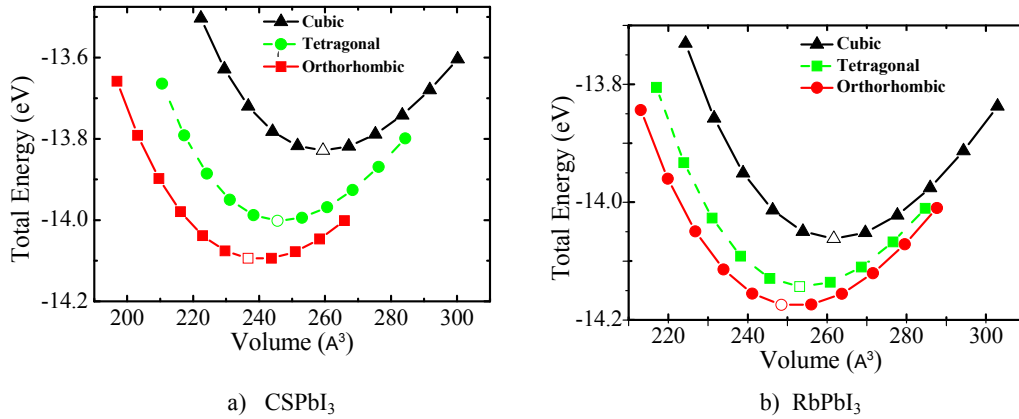


Figure 3 – Total energy vs volume of the CSPbI₃ and RbPbI₃ perovskite structures

Calculated zone-energy structures of CSPbI₃ and RbPbI₃ perovskites in cubic phase are presented at Fig.4. and Fig.5 The structure demonstrates direct transition. The valence band maximum and the conduction zone minimum are located in the G point of the Brillouin zone

The top of the valence band at 1.1056 eV is located in the point 0 0 0. The minimum of the conduction zone 2,5710 eV is located at 0 0 0 in reverse coordinates. Direct transitions are therefore permitted and an electron can emit photon directly. The energy gap width (E_G) was found to be - 1.11 eV.

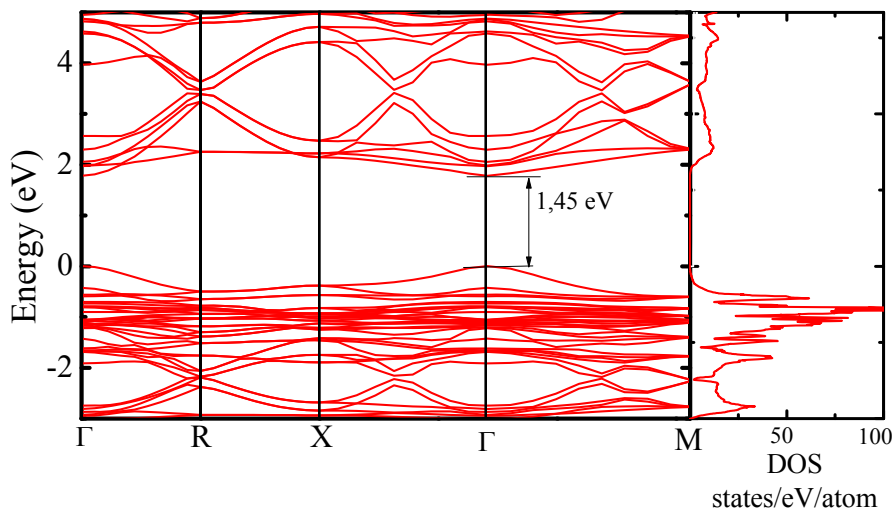


Figure 4 – Band structure of the Pm-3m cubic phase of the CsPbI₃ perovskite

Calculation outcomes are presented in Table below along with data of other scientists.

Lattice parameters, energy gap width

Structure(authors)	Cryst. Group	Lattice parameter (Å)	Energy gap width, E_g (eV)
CsPbI ₃ (This work)	221	6.34	1.46
RbPbI ₃ (This work)	221	4.14	1.78
CsPbI ₃ (Murtaza) [3]	221	6.18	1.3
CsPbI ₃ (Other exp.) [10]	221	6.29	1.1

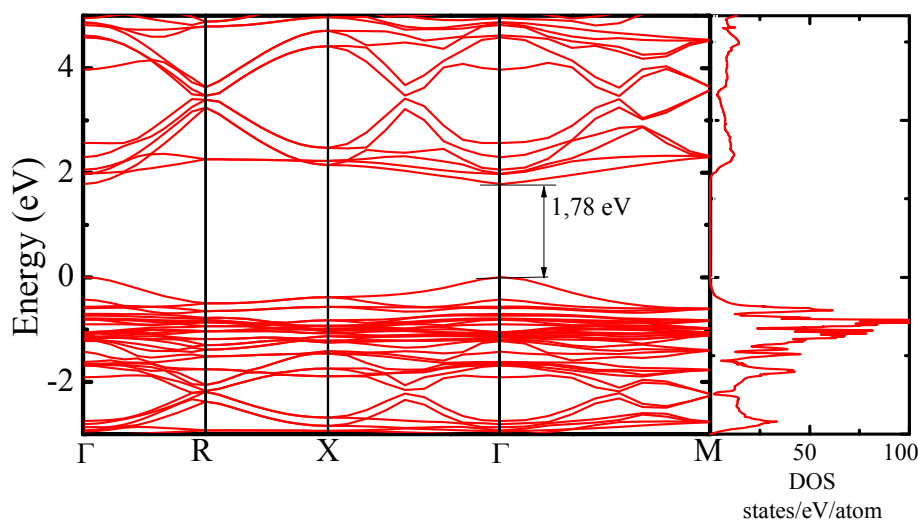


Figure 5 – Band structure of the Pm-3m cubic phase of the RbPbI₃ perovskite

The top of the valence band at 1.245 eV is located in the point 0 0 0. The minimum of the conduction zone 3,0292 eV is located at 0 0 0 in reverse coordinates. Direct transitions are therefore permitted and an electron can emit photon directly. The energy gap width (E_G) was found to be – 1.7842 eV.

CONCLUSION

In summary we examined the structural and electronic properties of CSPbI₃ and RbPbI₃ perovskites. The method used for simulations and calculations describes quite well the structure properties of the CSPbI₃ and RbPbI₃ perovskites and provides satisfactory results for the energy gap width. It was determined that the structure of CsPbI₃ in cubic phase has the energy gap width is 1.465 eV. With of forbidden zone in RbPbI₃ is 1.7842 eV.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Evarestov R.A., Kotomin E.A., Zhukovski Yu.F. DFT study of a single F center an cubic SrTiO₃ perovskite. International Journal of Quantum Chemistry. 2005, № 106, 2173-2183p.
- [2] Mingzhen Liu, Michael B. Johnston, Henry J. Snaith. Efficient planar heterojunction perovskite solar cells by vapour deposition. Nature, 2013, № 501.
- [3] G.Murtaza, Ifikhar Ahmad. First principle study of the structural and optoelectronic properties of cubic perovskites CsPbM(M= Cl, Br,I). Physica B, Volume 206, 2011, p 3222-3229.
- [4] M. Borovski. Perovskites: structure, properties and uses. Nova Science publishers. 2011.
- [5] Henry J. Snaith. Perovskites: the emergence of a New Era for Low-cost, high-efficiency Solar Cell, The journal of Physical Chemistry Letters, 2013, Volume 4, Issue 21, 3623–3630p.
- [6] C.K. Muller, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. 32, 1959.
- [7] HuixhiLv, HongweiGao, Yue Yang, Lekun Liu, Density functional theory (DFT) investigation on the structure and electronic properties of the cubic perovskite PbTiO₃. Applied Catalysis A General, 2011, Volume 404.

- [8] Pena M. A., Fierro J. L, Chemical Structures and Performance of Perovskite Oxides. Chemical Review, 2001, Volume 101. (in Eng.).
[9] G. Kresse, J. Furthmüller. Phys. Rev. B, Volume 54, 1996, p. 1169.
[10] D.M. Trots, S.V. Myagkova . Journal of physical chemistry Solids, 2008, Volume 69.

REFERENCES

- [1] Evarestov R.A., Kotomin E.A., Zhukovski Yu.F. DFT study of a single F center an cubic SrTiO₃ perovskite. International Journal of Quantum Chemistry. 2005, № 106, 2173-2183p. (in Eng.).
[2] Mingzhen Liu, Michael B. Johnston, Henry J. Snaith. Efficient planar heterojunction perovskite solar cells by vapour deposition. Nature, 2013, № 501. (in Eng.).
[3] G.Murtaza, Iftikhar Ahmad. First principle study of the structural and optoelectronic properties of cubic perovskites CsPbM(M= Cl, Br,I). Physica B, Volume 206, 2011, p 3222-3229. (in Eng.).
[4] M. Borovski. Perovskites: structure, properties and uses. Nova Science publishers. 2011. (in Eng.).
[5] Henry J. Snaith. Perovskites: the emergence of a New Era for Low-cost, high-efficiency Solar Cell, The journal of Physical Chemistry Letters, 2013, Volume 4, Issue 21, 3623–3630p. (in Eng.).
[6] C.K. Muller, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. 32, 1959. (in Eng.).
[7] HuixhiLv, HongweiGao, Yue Yang, Lekun Liu, Density functional theory (DFT) investigation on the structure and electronic properties of the cubic perovskite PbTiO₃. Applied Catalysis A General, 2011, Volume 404. (in Eng.).
[8] Pena M. A., Fierro J. L, Chemical Structures and Performance of Perovskite Oxides. Chemical Review, 2001, Volume 101. (in Eng.).
[9] G. Kresse, J. Furthmüller. Phys. Rev. B, Volume 54, 1996, p. 1169. (in Eng.).
[10] D.M. Trots, S.V. Myagkova . Journal of physical chemistry Solids, 2008, Volume 69. (in Eng.).

CSPbI₃ И RbPbI₃ ГАЛОГЕНИД ПЕРОВСКИТТЕРДІҢ ТЫЙЫМ САЛЫНҒАН ЗОНА ЕНІН АВ ІНІТІО ЕСЕПТЕУ

Б. К. Абдыкадыров, Н. Ж. Такибаев

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Тірек сөздер: тығыздық функционал теориясы, VASP, электронды зоналық құрылым.

Аннотация. CsPbI₃ и RbPbI₃ галогенид перовскиттер бірінші принциптерден тығыздық функционалы негізінде зерттелді. Бұл материалдарды зерттеу осы материалдардың күн энергетикасында кең қолданылу мүмкіндігімен байланысты. Материалдардың жаңа функционалдық қасиеттерін болжау үшін олардың электрондық қасиеттері мен кристаллохимияны зерттеу маңызды. Есептеу VASP бағдарламасында жасалған. Perdew, Burke, и Ernzerhof тәсілі, градиентті жалпылама жуықтау әдісі қолданылған. CsPbI₃ и RbPbI₃ галогенид перовскиттер құрылымдық қасиеттері анықталып, электрондық қасиеттері есептелген. CsPbI₃ и RbPbI₃ перовскиттердің есептелген тыйым салынған зона ені сәйкесінше 1,45 и 1,78 eV. Есептеу барысында алынған нәтиже эксперименталды мәліметке сәйкес келеді.

АВ ІНІТІО РАССЧЕТЫ ШИРИНЫ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ ГАЛОГЕНИД ПЕРОВСКИТОВ CsPbI₃ И RbPbI₃

Б. К. Абдыкадыров, Н. Ж. Такибаев

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: теория Функционала Плотности, VASP, электронная зонная структура.

Аннотация. Были проведены расчеты из первых принципов галогенид перовскитов CsPbI₃ и RbPbI₃. Интерес к изучению таких соединений связан с их возможными практическими применениями, в частности, для использования в солнечной энергетике. Для предсказания новых функциональных свойств материалов необходимы исследования электронных свойств и кристаллохимии. Расчет произведен в программе VASP. Использованный подход Perdew, Burke, и Ernzerhof и метод Обобщенного Градиентного Приближения (PBE-GGA) и метод проекционированных дополненных плоских волн. Определены структурные свойства галогенид перовскитов CsPbI₃ и RbPbI₃ и рассчитаны их электронные свойства. Значение ширины запрещенной зоны для перовскитов CSPbI₃ и RbPbI₃ в кубической фазе 1,45 eV и 1,78 eV соответственно. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными.

Поступила 24.02.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 147 – 153

**INVESTIGATION OF INFLUENCE OF DISPERSIBILITY
OF PULVERIZED COAL INJECTION ON THERMAL
CHARACTERISTICS OF THE COMBUSTION IN THE COMBUSTION
CHAMBER OF THE BOILER BKZ-160 ALMATY TPP-3****A. S. Askarova, S. A. Bolegenova, S. A. Bolegenova,
Z. H. Gabitova, V. Yu. Maximov, A. B. Yergaliyeva**

Kazakh national university named after al-Farabi, Physico-Technical Department Almaty, Kazakhstan.
E-mail: Aliya.Askarova@kaznu.kz, Bolegenova.Symbat@kaznu.kz, ergalieva1990@mail.ru

Keywords: computer modeling, combustion chamber, pulverized coal, temperature field, chemical energy, turbulence, monodisperse torch, polydisperse torch.

Abstract. The subject matter of the proposed research was to study the turbulent heat and mass transfer processes in high-reacting flows and determination of thermal characteristics in a real three-dimensional physical-chemical system (combustion chamber). Numerical simulation was conducted with the help of computer software package FLOREAN, tested as a result of computational experiments on a number of TPP RK [1-3]. The main method of solving the equations of mathematical problem is the method of control volume. One of the important properties of the control volume method is that it incorporated the exact integral conservation of quantities such as mass, momentum and energy for any group of control volumes and, consequently, on the whole computational domain.

In this paper we presented the results of computer simulation of turbulent combustion of pulverized coal torch in the chamber of the boiler BKZ-160 Almaty TPP-3. A comparative analysis of the results of computational experiments monodisperse and polydisperse burning coal-fired torches, which are compared with experimental data obtained directly on the TPP. It is shown that the difference in the mean temperatures for the mono- and polydisperse flow pulverized particles are observed in the active combustion, while the exit of the combustion chamber temperature field is aligned and the differences in the values are reduced. Chemical energy reaches a maximum in the fuel mixture flow, that is, in the region of intense reactions between a fuel and an oxidant. It is in these areas, you can see the differences in the values of the chemical energy released by the combustion.

УДК 536.46.:532.517.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИСПЕРСНОСТИ
ПЫЛЕУГОЛЬНОГО ТОПЛИВА НА ТЕПЛОВЫЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ
В ТОПОЧНОЙ КАМЕРЕ КОТЛА БКЗ-160 АЛМАТИНСКОЙ ТЭЦ-3****А. С. Аскарова, С. А. Болегенова, С. А. Болегенова,
З. Х. Габитова, В. Ю. Максимов, А. Б. Ергалиева**

КазНУ им. аль-Фараби, физико-технический факультет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: компьютерное моделирование, камера сгорания, пылеугольное топливо, температурное поле, химическая энергия, турбулентность, монодисперсный факел, полидисперсный факел.

Аннотация. Целью настоящей работы являлось исследование процессов турбулентного теплопереноса в высокотемпературных реагирующих потоках и определение тепловых характеристик в реальной трехмерной физико-химической системе (камера сгорания ТЭС). Численное моделирование проведено при

помощи компьютерного пакета программ FLOREAN, проверенного в результате вычислительных экспериментов на ряде ТЭЦ РК [1-3]. Основным методом решения уравнений математической задачи является метод контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области.

В работе были представлены результаты компьютерного моделирования турбулентного горения пылеугольного факела в камере котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3. Был проведен сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов горения монодисперсного и полидисперсного пылеугольных факелов, которые сравнены с экспериментальными данными, полученными непосредственно на ТЭС. Показано, что различия в средних температурах для моно- и полидисперсного потока пылеугольных частиц наблюдаются в области активного горения, в то время как к выходу из топочной камеры поле температуры выравнивается, а различия в значениях уменьшаются. Химическая энергия достигает максимальных значений в области подачи аэросмеси, то есть в области интенсивных реакций между топливом и окислителем. Именно в этих областях можно видеть различия в значениях химической энергии, выделяемой в результате горения.

Исследования различных химических процессов в газовой среде являются актуальными на сегодняшний день, поскольку рассматриваются во многих областях науки и техники, и представляют огромный практический интерес у исследователей и инженеров. Взаимодействие потока газа и химических процессов описывается сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Незаменимым эффективным методом теоретического исследования таких течений является численное моделирование. Применение численного моделирования и проведение вычислительных экспериментов могут позволить оптимально решать многие научные и проектно-конструкторские задачи.

Вычислительный эксперимент в данной работе был проведен с помощью стартового пакета программ FLOREAN [4-6] на примере реальной энергетической установки камеры сгорания котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3. Этот пакет программ был использован для основы численных исследований и был дополнен нами новой компьютерной программой GEOM, которая пишется всегда при выборе нового объекта исследования (топочная камера), с учетом геометрии, размеров горелочных устройств, их формы и расположением в пространстве камеры сгорания. В этой компьютерной программе учитываются все характеристики сложного реального физико-химического процесса в выбранном нами объекте исследования и задаются граничные условия для решения выбранной задачи исследования, адекватно отражающие этот процесс.

Алматинская ТЭЦ оснащена 6 котлами БКЗ-160, паропроизводительность каждого из которых 160 т/час, с установленной электрической мощностью – 173 МВт и тепловой – 335,26 Гкал/ч. По боковым сторонам топочной камеры расположены 4 блока прямоточных щелевых горелок (по 2 горелки в блоке), направленных по касательной к окружности диаметром 60x4 с шагом 64 мм.

В данной работе было проведено исследование горения пылеугольного факела с осредненным диаметром угольных частиц $d_p = 60$ мкм (монодисперсный факел) и с частицами различных фракций (полидисперсный факел). Полидисперсному факелу соответствует следующее процентное распределение угольных частиц по размерам: $d_p = 10$ мкм – 10 %; $d_p = 30$ мкм – 20 %; $d_p = 60$ мкм – 40 %; $d_p = 100$ мкм – 20 %; $d_p = 120$ мкм – 10 %. На рисунках 1-6 представлены тепловые характеристики процесса горения.

На рисунке 1 приведены кривые распределения средних значений температуры горения поли- и монодисперсного факелов по высоте топочного пространства.

Из рисунка 1 видно, что наибольшие изменения (максимумы и минимумы) распределения температуры приходятся на область расположения горелочных устройств. Это связано с тем, что в этой области происходит наиболее интенсивное смешение углерода топлива с кислородом воздуха, также интенсивно протекают химические реакции окисления. Максимумы объясняются тем, что при смешении топлива и окислителя происходит процесс воспламенения, химический процесс взаимодействия приводит к выделению большого количества тепла. Минимумы же температуры объясняются тем, что аэросмесь, подаваемая через горелки, холодная ($T_a = 250$ °С). Это характерно как для полидисперсного факела, так и для монодисперсного факела.

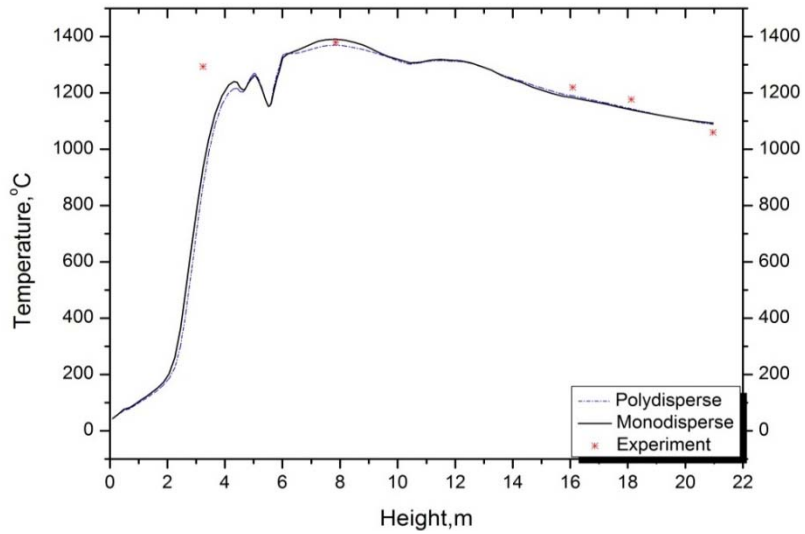


Рисунок 1 – Сравнение средних значений температуры для поли- и монодисперсного факелов по высоте топочной камеры и сравнение с экспериментом [7]

Учитывая, что в составе полидисперсного факела присутствуют крупные фракции с большей поверхностной площадью взаимодействия, и что химическое реагирование топлива и окислителя протекает за очень короткое время (1-2 с), поэтому наблюдается увеличение температуры на некоторое значение. В начале факела, когда происходит воспламенение угольных частиц, мы наблюдаем одинаковые значения температуры как у моно-, так и у полидисперсного факела.

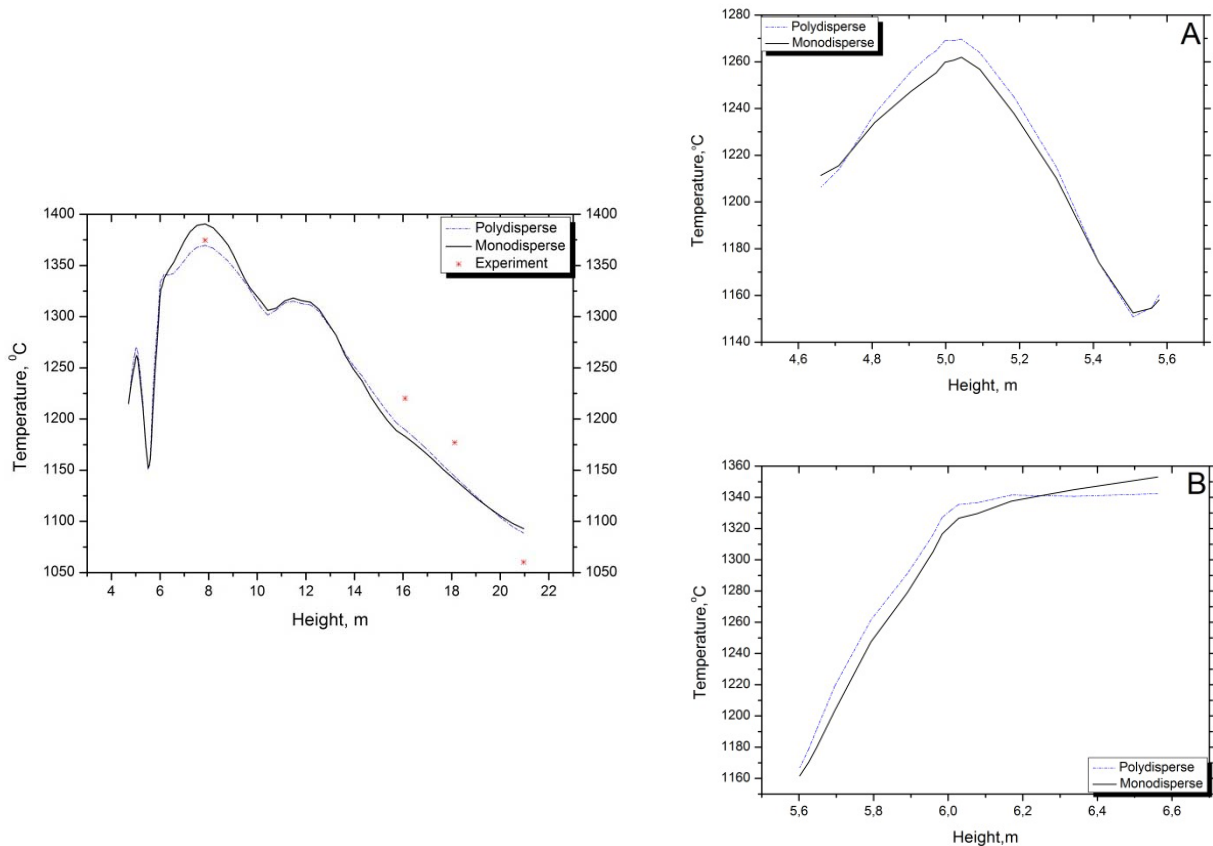


Рисунок 2 – Сравнение средних значений температуры для поли- и монодисперсного факелов по высоте топочной камеры и сравнение с экспериментом [7] (масштаб увеличенный)

Однако затем можно заметить значительные различия. Температура полидисперсного факела в области выше ярусов горелок имеет меньшие значения. Это можно объяснить наличием крупных фракций угольных частиц, которые воспламеняются и сгорают медленнее. Это приводит к тому, что максимум температуры для полидисперсного факела ниже, чем максимальная температура монодисперсного факела. На выходе температуры обоих факелов практически выравниваются (рисунок 2).

На рисунке 2 приведено изменение температуры по высоте топочной камеры в увеличенном масштабе. Здесь возможно более детально рассмотреть различия в распределении температуры. Мы видим, что экспериментальные точки, полученные в результате измерений непосредственно на ТЭС [7], расположены ближе к кривой полидисперсного факела, поскольку такой факел отвечает реальным условиям технологического процесса. Относительная погрешность численного эксперимента в сравнении с натурными измерениями на высоте 7,85 м составляет 0,71% для полидисперсного факела и 0,8% для монодисперсного факела, а на выходе из топочной камеры – 2,67 и 3,08% соответственно.

На рисунках 3, 4 представлены 3D графики распределения температуры по высоте камеры сгорания. Эти рисунки являются дополнительным подтверждением сказанного выше относительно поля температуры.

Трехмерные графики, полученные методом 3-D моделирования, дают возможность полностью охарактеризовать поле температуры в любой точке топочной камеры с очень высокой точностью. Картина распределения температуры в поперечном сечении камеры сгорания ($z=7,85$ м, $K=64$) представлена на рисунке 3. При горении полидисперсной угольной пыли в сечении: $z=7,85$ м, $K=64$ средняя температура составляет 1370 °С, а при горении монодисперсной пыли – 1390 °С. Максимальная температура полидисперсного факела ниже на 33 °С. Это объясняется тем, что в состав полидисперсного факела входят частицы угольной пыли разных размеров, в том числе и достаточно крупные ($d=100, 120$ мкм), для которых процесс воспламенения и горения затруднен по сравнению с более мелкими частицами монодисперсного факела ($d=60$ мкм) и занимают больше времени.

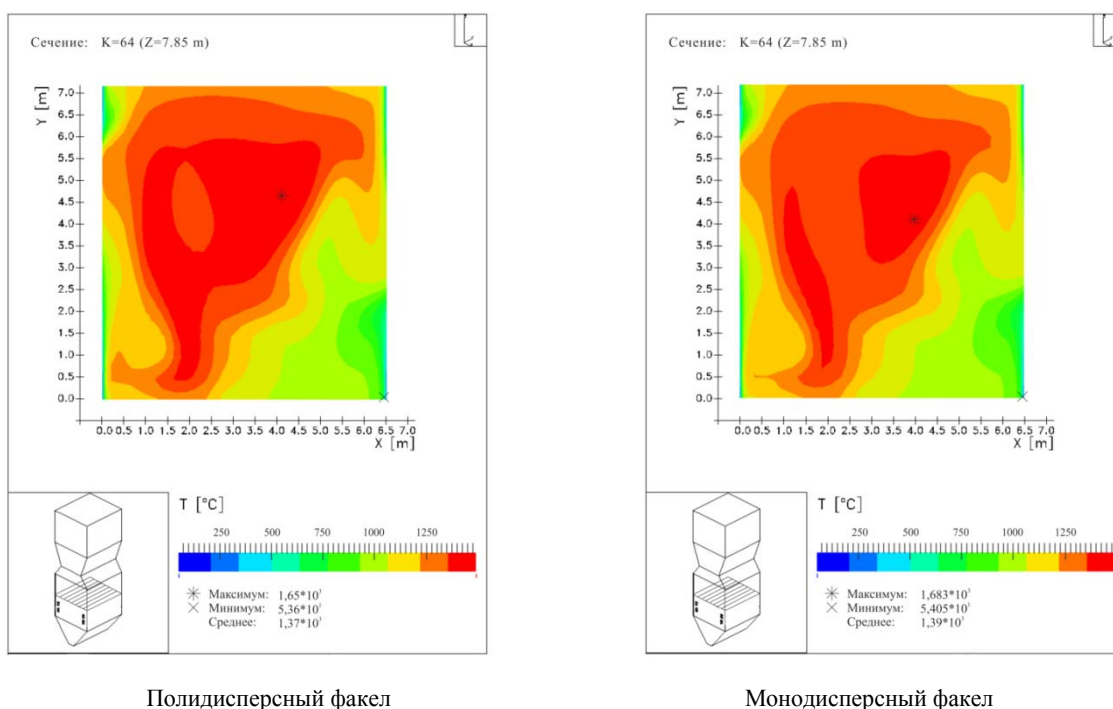
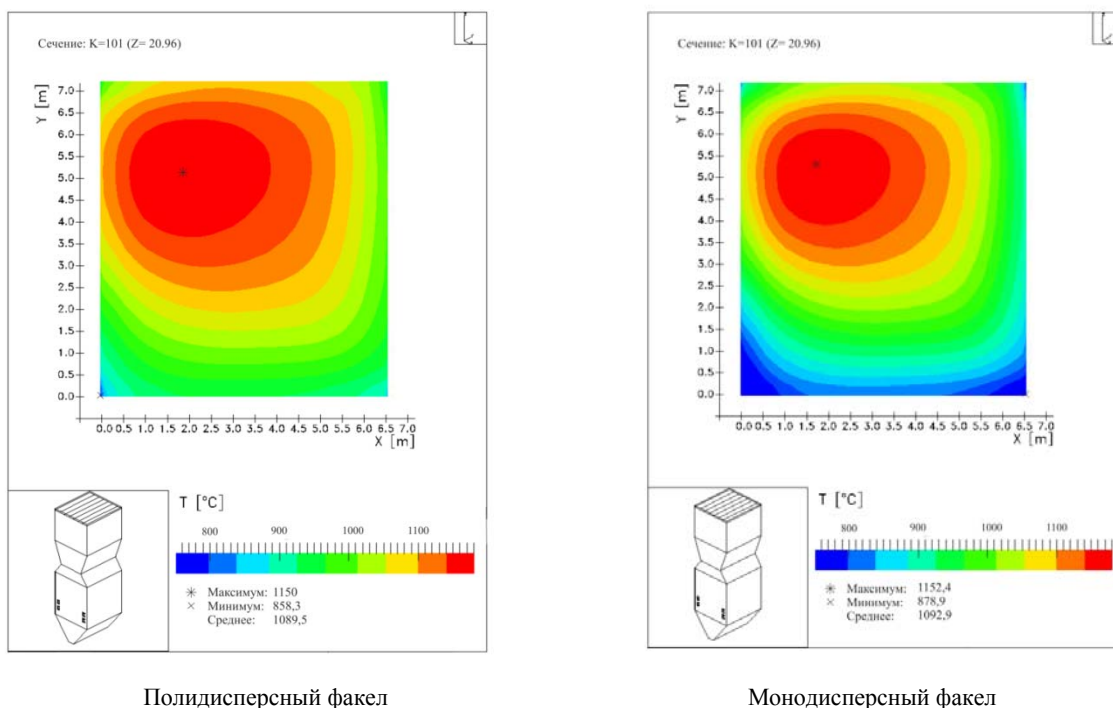


Рисунок 3 – Распределение температуры в поперечном сечении топочной камеры ($z=7,85$ м, $k=64$) котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3



Полидисперсный факел

Монодисперсный факел

Рисунок 4 – Распределение температуры в поперечном сечении топочной камеры ($z=20,96$ м, $k=101$) котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3

Из анализа рисунка 4 следует, что картины распределения температуры на выходе из топочной камеры схожи, как и следовало ожидать. Однако средняя температура полидисперсного факела ниже и равна $1089,5$ °С, а для монодисперсного она составляет $1092,9$ °С. Значение температуры на выходе, измеренной непосредственно на ТЭЦ [7] ближе к значению температуры для полидисперсного факела (рисунок 1) и составляет $T = 1060$ °С.

В связи с большой скоростью подачи топлива и окислителя в области горелок наблюдается высокий уровень турбулентности, который обеспечивает тщательное перемешивание топлива и окислителя, и соответственно здесь и происходит интенсивное протекание химических реакций горения (рисунок 5).

Область расположения горелок с наибольшей концентрацией углерода и кислорода является областью высвобождения тепловой энергии. Поэтому в этой области наблюдается четко выраженные максимумы и минимумы химической энергии Q_{chem} , которые наблюдаются около верхнего и нижнего яруса горелок (2 максимума на кривой распределения Q_{chem} при $z = 4,998$ м и $z = 5,938$ м). Здесь же приведены кривые распределения химической энергии в областях этих двух максимумов в увеличенном виде (рисунок 5А, 5В).

Мы видим, что ход кривой в области первого максимума химической энергии Q_{chem} (рисунок 5 А) и второго максимума распределения химической энергии Q_{chem} (рисунок 5 В) совпадает с кривой распределения температуры T (рисунок 2А, 2В).

Отчетливо видно, что минимальные значения энергии, выделяемой за счет химических реакций, для обоих случаев наблюдается на выходе из топочной камеры, где все процессы горения с выделением тепла почти завершены.

Сказанное выше подтверждается 3-х мерным распределением химической энергии Q_{chem} (рисунок 6), соответствующее сечению $z = 5,02$ м. Здесь наблюдается наибольшее отличие в распределении химической энергии для моно- и полидисперсного пылеугольных факелов.

В работе было проведено исследование процессов турбулентного теплопереноса в высокотемпературных реагирующих потоках и определены его тепловые характеристики. В результате проведенных вычислительных экспериментов получены основные закономерности распределения температурного поля в объеме топочной камеры. В центральной области камеры

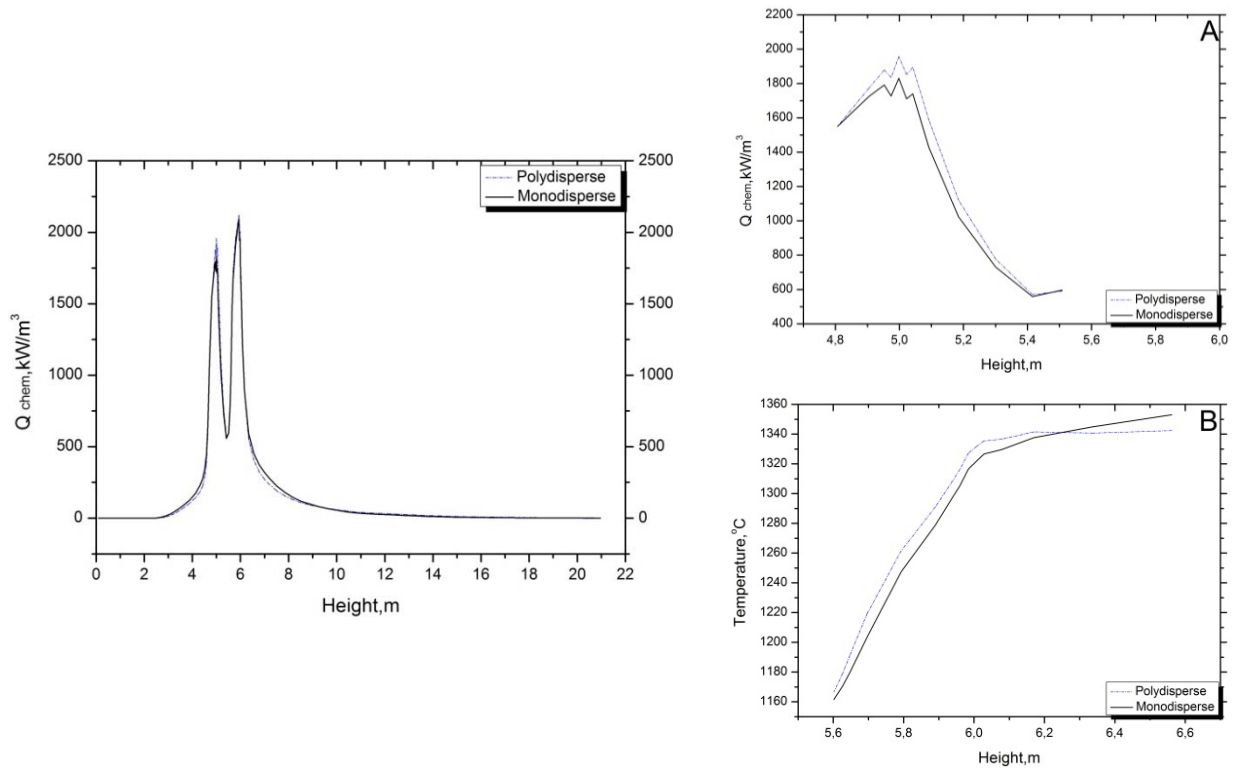


Рисунок 5 – Сравнение средних значений химической энергии Q_{chem} для поли- и монодисперсного факелов по высоте топочной камеры

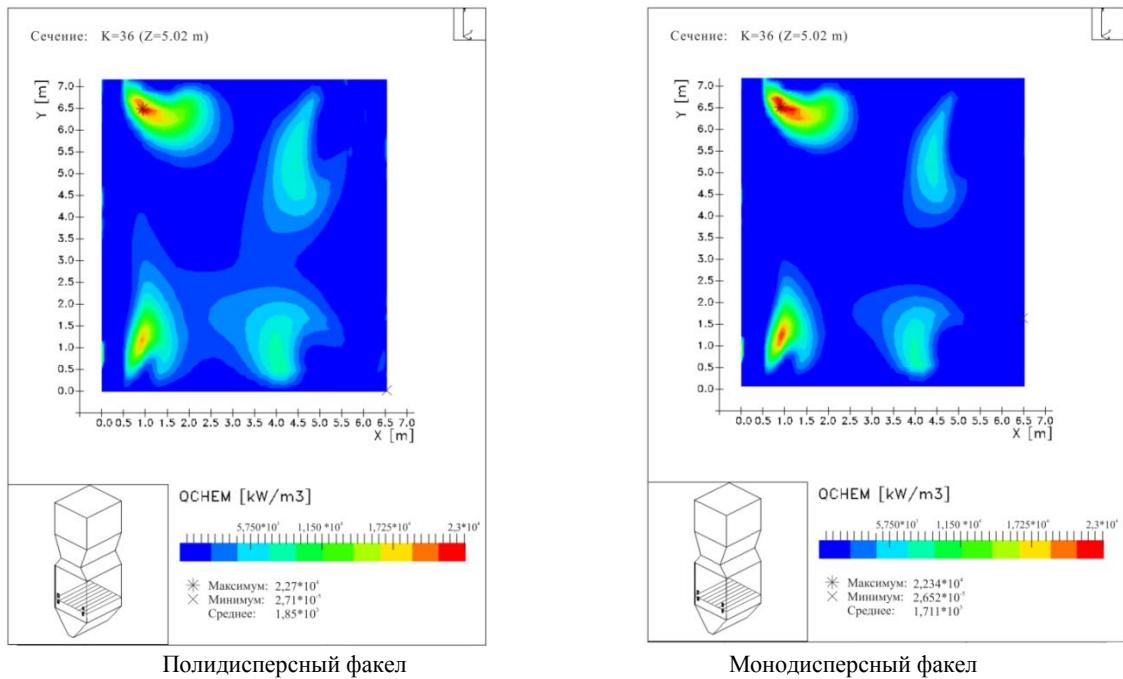


Рисунок 6 – Распределение химической энергии в поперечном сечении топочной камеры ($z = 5,02$ м, $k = 36$) котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3

сгорания в области расположения горелочных устройств наблюдаются максимумы и минимумы значений температуры, которые непосредственно связаны с воспламенением пылегазового факела и холодной температурой аэросмеси. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы, как рекомендации по оптимизации процесса горения с целью повышения его эффективности

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аскарова А.С., Болегенова С.А., Бекмухамет А., Оспанова Ш.С., Бекетаева М.Т., Габитова З.Х., Ергалиева А.Б. Теплофизические характеристики при сжигании твердого пылеугольного топлива в топочных камерах ТЭС // Materials of IV "Science, Technology and Higher Education" Conference, January 2014, Westwood, Canada 2014, 323-330 pp.
- [2] Аскарова А.С., Болегенова С.А., Березовская И.Э., Бекетаева М.Т., Ергалиева А.Б. Численное моделирование пылеугольного топлива в камере сгорания котла БКЗ-160 в целях уменьшения выбросов вредных веществ // Материалы 18-ой Всероссийской научной конференции молодых ученых (ВНКСФ-18), г. Красноярск, Россия, 2012г., с.698-699.
- [3] Аскарова А.С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б. Влияние силы тяжести на аэродинамические характеристики процесса горения пылеугольного топлива в камере сгорания // Межотраслевой институт "Наука и образование", Екатеринбург. - №7, 2014. - С. 8-12.
- [4] Müller H. Numerische Berechnung dreidimensionaler turbulenter Strömungen in Dampferzeugern mit Wärmeübergang und chemischen Reactionen am Beispiel des SNCR-Verfahrens und der Kohleverbrennung: Fortschritt-Berichte VDI-Verlag. – 1992. – Reihe 6, №268. – 158 s
- [5] Leithner, R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. – Braunschweig, 2006. - 52 p.
- [6] Askarova, A.S., Lavrichsheva, Ye., Leithner, R., Müller, H., Magda, A. Combustion of low-rank coals in furnaces of Kazakhstan Coal-firing Power Plants // VDI Berichte. – 2007. – №1088. – P.497-502.
- [7] Алияров Б.К., Алиярова М.Б. Сжигание казахстанских углей на ТЭС и крупных котельных. – Алматы, 2011. – 306 с.

REFERENCES

- [1] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bekmuhamet A., Ospanova Sh.S., Beketaeva M.T., Gabitova Z.H., Ergalieva A.B. *Materials of IV "Science, Technology and Higher Education" Conference, 2014*, 323-330 (in Russ.)
- [2] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Berezovskaja I.E., Beketaeva M.T., Ergalieva A.B. *Materialy 18-oy Vserossiyskoj nauchnoy konferencii molodykh uchennyh (VNKSF-18), 2012*, 698-699 (in Russ.)
- [3] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maksimov V.Ju., Ergalieva A.B. *Mezhotraslevojinstitut "Nauka i obrazovanie", 2014*, №7, 8-12 (in Russ.)
- [4] Müller H. *Fortschritt-Berichte VDI, 1992*, Reihe 6, №268, 158 (in Germ.)
- [5] Leithner, R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture, **2006**, 52 (in Eng.)
- [6] Askarova, A.S., Lavrichsheva, Ye., Leithner, R., Müller, H., Magda, A. *Berichte VDI, 2007*, №1088, 497-502 (in Eng.)
- [7] Alijarov B.K., Alijarova M.B. *Szhiganie kazhastanskikh uglej na TJeS i krupnyh kotel'nyh, 2011*, 306 (in Russ.)

АЛМАТЫ ЖЭО-3 БКЗ-160 ҚАЗАНДЫҒЫНЫҢ ЖАНУ КАМЕРАСЫНДАҒЫ ЖАНУ ПРОЦЕСІНІҢ ЖЫЛУЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫНА ШАҢКӨМІРЛІ ОТЫННЫҢ ДИСПЕРСТІЛІГІНІҢ ӘСЕРІН ЗЕРТТЕУ Ә. С. Асқарова, С. А. Бөлегенова, С. А. Бөлегенова, З. Х. Ғабитова, В. Ю. Максимов, А. Б. Ергалиева

Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, физика-техникалық факультеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: компьютерлік модельдеу, жану камерасы, шаңкөмірлі отын, температура өрісі, химиялық энергия, турбуленттілік, монодисперсті алау, полидисперсті алау.

Аннотация. Аталған жұмыстың мақсаты – жоғартемпературалы әсерлесетін ағынлардағы турбулентті жылумасса тасымалы процестерін зерттеу және нақты физика-химиялық үшөлшемді жүйедегі жылудық сипаттамаларды анықтау (ЖЭС жану камерасы). Сандық модельдеу FLOREAN бағдарлама пакеті көмегімен жүзеге асырылды, аталған бағдарлама ҚР бірқатар ЖЭО жүргізілген есептеу тәжірибелерінде сынақтан өткен [1-3]. Математикалық есеп теңдеулерін шешудің негізгі әдісі – бақыланған көлем әдісі болды. Бақыланған көлем әдісінің маңызды қасиеттерінің бірі – мұнда бақылаушы көлемдердің кез келген тобында масса, қозғалыс мөлшері мен энергия сияқты шамалардың интегралдық сақталуы алдын ала беріледі, сәйкесінше, барша есептеу аймағында да олардың мәндері сақталады.

Жұмыста Алматы ЖЭО-3 БКЗ-160 қазандығының жану камерасындағы шаңкөмірлі алаудың турбулентті жануын компьютерлік модельдеу нәтижелері келтірілген. Монодисперсті және полидисперсті шаңкөмірлі алаулардың жануына есептеу тәжірибелері жүргізіліп, салыстырмалы талдау жасалынды. Соңғысы ЖЭС-да алынған тәжірибелік мәліметтермен салыстырылды. Моно және полидисперсті ағын бөлшектерінің орташа температуралары белсенді жану аймағында байқалады, ал жану камерасының шығысында температура өрісі біркелкі мәнге жетеді, ал температураның айырмашылығы кемиді. Химиялық энергия аэроқоспаны беру облысында, яғни отын мен тотықтырғыш арасындағы қарқынды реакция аумағында максимум мәніне жетеді. Осы аймақтарда жану нәтижесінде бөлінетін химиялық энергияның айырмашылықтарын байқауға болады.

Поступила 24.02.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 154 – 159

SOLUTION STEREOMETRIC TASKS WITH APPLICATION OF VECTORS

K. Abdrahmanov¹, N. A. Kassimova²

¹South Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent, Kazakhstan,

²Regional social and innovative university, Shymkent, Kazakhstan

Keywords: vectors, operations, addition and subtraction of vectors, coplanarity of three vectors, the problem with affine content.

Abstract. This paper discusses methods for solving problems using stereometric properties of vectors are examined. The problems of using affine properties, ie addition, vichitanie vectors and multiplication of vectors by a number. These tasks are on paralele and crossing of strait lines.

ОӘЖ 514.1

ВЕКТОРЛАРДЫ ҚОЛДАНЫП СТЕРЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ

Қ. Абдрахманов¹, Н. А. Касимова²

¹Оңтүстік Қазақстан педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан,

²Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: векторлар, векторларды қосу және азайту амалдары, үш вектордың компланарлығы, аффиндік мазмұнды есептер.

Аннотация. Мақалада векторларды қолданып стереометриялық есептерді шешу мәселелері қарастырылған. Векторларды қосып алу және санға көбейту қасиеттерін пайдаланып аффиндік мазмұнды есептер шығарудың әдістері келтірілді.

Соңғы жылдары орта мектептің математика пәнінің бағдарламасына векторлар және оларды қолданып геометриялық есептерді шығару тақырыптары енгізілген. Бірақ, векторлар теориясын үйренгенмен, оларды геометриялық есептерді шығаруда белгілі қиыншылықтар туғызады. Ол қиыншылықтарды математика пәнінің мұғалімі өздігінен оңай шеше алмайды. Сондықтан, векторларды стереометриялық есептерді шешуде қолдану тақырыбы, орта мектеп математикасының өзекті мәселелерінің бірі болып табылады.

Векторларды қолданып шығарылатын стереометриялық есептерді екі бөліп қарастыруға болады, оларды аффиндік және метрикалық деп атаймыз. Бұл жұмыста стереометрияда кездесетін аффиндік мазмұнды есептер қарастырылып, оларды векторларды қолданып шығару әдістері көрсетілген.

Аффиндік мазмұны бар есептерді үш топқа бөліп қарастыруға болады. Бірінші топқа есептің шарты векторлар арқылы берілмеген жағдайы қарастырылады. Мұндай есептерді шығаруда кесінділерді векторлар арқылы өрнектеп, векторларды қосу және санға көбейту амалдары қарастырылады, Кейбір жағдайларда векторлардың параллельдік шарттары да қолданылады. Екінші топқа түзу мен жазықтықтардың векторлы-параметрлі өрнектерін қолданып есептеуге және

дәлелдеуге берілегін есептер жатады. Үшінші топқа шартында векторлар берілген есептер жатады. Бұл тақырыптағы есептер мұғалімдердің өзіне белгілі қиыншылықтар туғызады. Себебі, бұл тақырыпта есептер шығаруға әдістемелік нұсқаулар өте аз кездеседі.

Аффиндік мазмұны бар есептерді шешуге қажетті негізгі формулалар мен арақатынастар тізімін дәлелдеусіз келтірейік:

$$1. \text{ Кез келген үш нүкте } A, B \text{ және } C \text{ үшін } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}; \quad \vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$$

$$2. \text{ Егер } \vec{AC} = k \vec{CB} \text{ болса, онда } \vec{OC} = \frac{\vec{OA} + k \vec{OB}}{1 + k}$$

$$3. \text{ Кез келген бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте } A, B \text{ және } C \text{ үшін } \vec{OC} = h \vec{OA} + (1 - h) \vec{OB}, \quad A \neq B \text{ шарты орындалуы қажетті және жеткілікті}$$

$$4. \text{ Егер } M \text{ } AB \text{ кесіндісінің ортасы болса } \vec{OA} - \vec{AM} = \vec{MB}, \text{ онда } \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

$$5. \text{ Егер } ABCD \text{ параллелограммы берілсе, онда } \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

6. Егер M мен N AB және CD кесінділерінің ортасы болса, онда

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}), \quad \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC}).$$

7. ABC үшбұрышының центроиді G нүктесі үшін

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}), \quad \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{O}$$

8. $ABCD$ тетраэдрінің центроиді G нүктесі үшін

$$\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}), \quad \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{O}$$

9. Төртеуі бір жазықтықта жататын A, B, C, D нүктелерінің үшеуі A, B, C бір түзде жатпаса

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \quad (*) \quad \vec{OD} = (1 - \alpha - \beta) \vec{OA} + \alpha \vec{OB} + \beta \vec{OC} \quad (**)$$

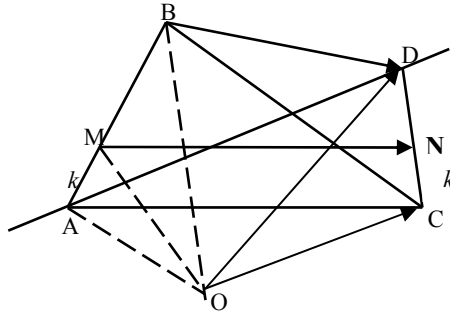
Керісінше егер осы екі теңсіздіктің біреуі орындалса онда екіншісі де орындалады және A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатады.

10. Егер a l түзуінің бағыттаушы векторы болса $A \in l$ онда $P \in l$ кез келген нүктесі үшін $\vec{OP} = \vec{OA} + k \vec{a}$ мұндағы k P нүктесінің түзде орналасуымен бір мәнді анықталады, ал O кеңістіктегі кез келген нүкте.

Бұл формулалар мен ара қатыстар орта мектептің бағдарламасында толық берілмейді. Бірақ математика пәнінің мұғалімдері білуі қажет деп санаймыз. Аффиндік мазмұны бар есептерді шығаруға мысалдар келтіреміз.

1-есеп. Бір жазықтықта жатпайтын төрт нүкте A, B, C, D берілген, M және N нүктелері AB және CD кесінділерін бірдей қатынаста бөледі. $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k$. AC, BD, MN түзулері бір жазықтыққа параллел болатынын дәлелдеңіздер.

Шешуі: Есептің шартын векторлар арқылы жазып көрсетеміз. $\vec{AM} = k \vec{MB}, \vec{CN} = k \vec{ND}$ (1-сурет) $\vec{AC}, \vec{BD}, \vec{MN}$ векторларын AC, BD, MN түзулерінің бағыттаушы векторлары деп аламыз. Осы үш вектордың компланар екенін көрсетсек жеткілікті. O – кез келген кеңістіктегі нүкте болсын. Онда:



1-сурет

$$\begin{aligned} \vec{OM} - \vec{OA} &= k(\vec{OB} - \vec{OM}); & \vec{ON} - \vec{OC} &= k(\vec{OD} - \vec{ON}) \\ (\vec{OM} - \vec{OA}) - (\vec{ON} - \vec{OC}) &= k\left((\vec{OB} - \vec{OM}) - (\vec{OD} - \vec{ON})\right) \\ (\vec{OM} - \vec{ON}) - (\vec{OC} - \vec{OA}) &= k\left((\vec{OB} - \vec{OD}) - (\vec{ON} - \vec{OM})\right) \end{aligned}$$

немесе

$$\vec{NM} - \vec{CA} = k(\vec{DB} - \vec{NM}), \quad \vec{NM} + k\vec{NM} = \vec{CA} + k\vec{DB}, \quad (k+1)\vec{NM} = \vec{CA} + k\vec{DB}$$

яғни

$$\vec{NM} = \frac{1}{k+1}\vec{CA} + \frac{k}{1+k}\vec{DB}$$

Демек \vec{NM} векторы \vec{CA} , \vec{DB} , векторлары бойынша жіктеледі, яғни бұл үш вектор комплиментар екен. Бұл есепті векторларды қолданбай шығаруға болады. Онда қосымша салулар жүргізіп орта мектепте өтпейтін теоремаларды қолдану керек болады. Ал ұсынылып отырған әдіс, ең оңай жолы болып саналады.

2-есеп. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призма берілген. M_1, N_1, P_1 сәйкесінше B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 кесінділерінің орта нүктелері. AM_1, BN_1, CP_1 түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіздер.

Шешуі: (2-сурет) Призманың анықтамасы бойынша

$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{m}, \quad \vec{OB} = \vec{OB}_1 + \vec{m}, \quad \vec{OC} = \vec{OC}_1 + \vec{m}$$

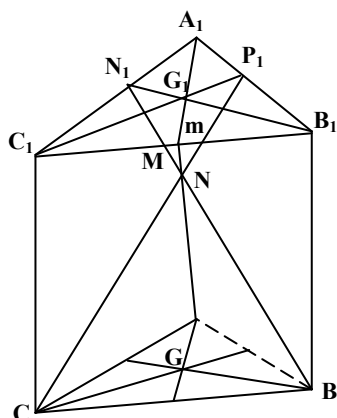
мұнда $\vec{AA}_1 = \vec{BB}_1 = \vec{CC}_1 = \vec{m}$, ал O кеңістіктің кез келген нүктесі. AM_1, BN_1, CP_1 түзулерінің параметрлік теңдеулерін жазайық.

$$AM_1: \vec{OX} = \vec{OA}_1 + \vec{m} + k\left(\frac{1}{2}\vec{OB}_1 + \frac{1}{2}\vec{OC}_1 - \vec{OA}_1 - \vec{m}\right)$$

$$BN_1: \vec{OY} = \vec{OB}_1 + \vec{m} + l\left(\frac{1}{2}\vec{OC}_1 + \frac{1}{2}\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1 - \vec{m}\right)$$

$$CP_1: \vec{OZ} = \vec{OC}_1 + \vec{m} + n\left(\frac{1}{2}\vec{OA}_1 + \frac{1}{2}\vec{OB}_1 - \vec{OC}_1 - \vec{m}\right),$$

$\vec{OX} = \vec{OY} = \vec{OZ}$ болған жағдайда бұл үш түзу бір нүктеде қиылысады екен. Ол үшін $k = l = n = \frac{2}{3}$



2-сурет

болуы қажетті шарт. Бұл мәнді түзулердің теңдеуіне қойғанда $\vec{OX} = \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1)$,

$$\vec{OY} = \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}(\vec{OC}_1 + \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1),$$

Осыдан $\vec{OX} = \vec{OY} = \vec{OZ} = \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}(\vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \vec{OA}_1)$ шығады.

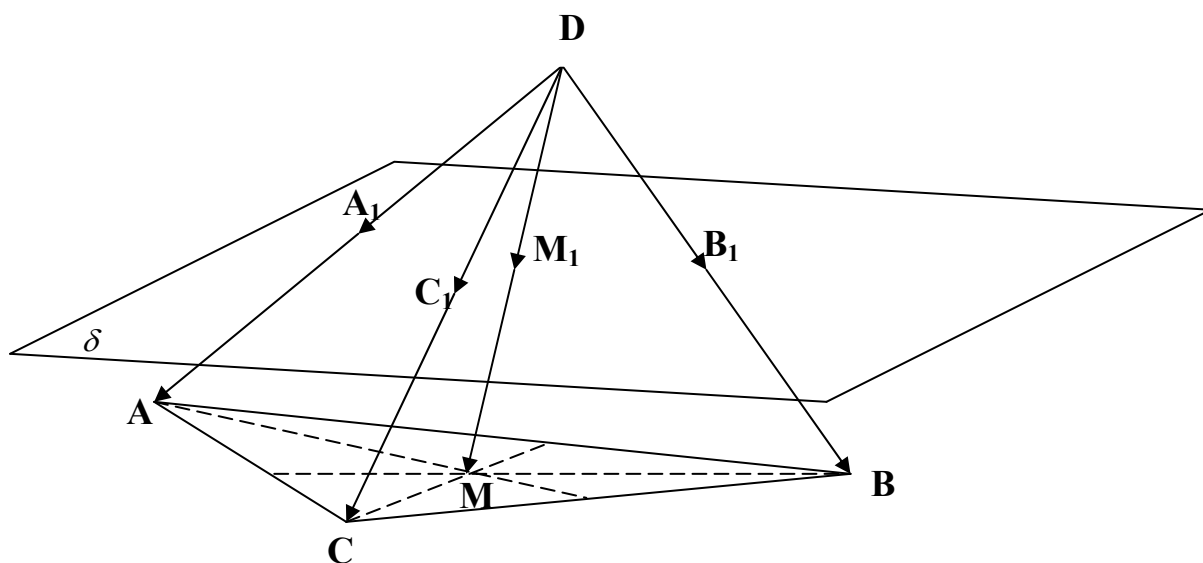
X нүктесінің орнын нақты табу үшін O нүктесі ретінде $A_1B_1C_1$ үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесін G_1 алайық. $O \equiv G_1$. Бұл жағдайда $\vec{GA}_1 + \vec{GB}_1 + \vec{GC}_1 = \vec{0}$ болғандықтан $\vec{GX} = \frac{1}{3}\vec{m}$ орындалады.

Демек AM_1, BN_1, CP_1 түзулерінің қиылысу нүктесі N GG_1 кесіндісіне $1/2$ қатынасындай бөледі. Мұндағы G ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі.

Бұл есепті векторларды қолданбай шығаруға да болады, бірақ ол өте күрделі жолмен болып кетеді. Сондықтан бұл өте жеңіл жолмен шығарылған жағдайы болып саналады.

3-есеп. $DABC$ тетраэдрінің DA, DB, DC қырларының δ жазықтығын A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қияды. $\frac{DA_1}{DA} = p, \frac{DB_1}{DB} = q, \frac{DC_1}{DC} = r$. Егер M ABC үшбұрышының медианаларының қиылысу нүктесі болса, онда δ жазықтығының DM кесіндісін қиып өтетін M_1 нүктесі үшін $\frac{DM_1}{DM} = k$ қатынасын табыңыздар.

Шешуі: $\vec{DA}_1 = p\vec{DA}, \vec{DB}_1 = q\vec{DB}, \vec{DC}_1 = r\vec{DC}, \vec{DM}_1 = k\vec{DM}$ мұнда $\vec{DM}_1 = \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC})$ A_1, B_1, C_1 бір жазықтықта жататын болғандықтан $\vec{C_1M_1}, \vec{C_1A_1}, \vec{C_1B_1}$ векторлары компланар яғни (3-сурет).



3-сурет

$\vec{C_1M} = x\vec{C_1M_1} + y\vec{C_1B_1}$ немесе $\vec{DM_1} - \vec{DC_1} = x(\vec{DA_1} - \vec{DC_1}) + y(\vec{DB_1} - \vec{DC_1})$ орнына сәйкес өрнектерді қойсақ

$$\frac{k}{3}(\vec{DA_1} + \vec{DB} + \vec{DC}) - r\vec{DC} = x(p\vec{DA} - r\vec{DC}) + y(\vec{DB} - r\vec{DC})$$

$$\frac{k}{3}\vec{DA} + \frac{k}{3}\vec{DB} + \frac{k}{3}\vec{DC} - r\vec{DC} = xp\vec{DA} - xr\vec{DC}$$

$$\frac{k}{3}\vec{DA} + \frac{k}{3}\vec{DB} + \left(\frac{k}{3} - r\right)\vec{DC} = xp\vec{DA} + yq\vec{DB} - (xr + yr)\vec{DC}$$

Сәйкес векторлардың алдындағы коэффициенттері тең болғандықтан

$$\frac{k}{3} = px, \quad \frac{k}{3} = qy, \quad \frac{k}{3} - r = -rx - ry \quad \text{Осыдан} \quad x = \frac{k}{3p}, \quad y = \frac{k}{3q}$$

Ал үшінші теңдіктен $\frac{k}{3} - r = -\frac{rk}{3p} - \frac{rk}{3q}$ немесе $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$

ӘДЕБИЕТ

- [1] Фетисов А.И. Геометрия: Учебное пособие по программе старших классов. – М.: АПН, 1963.
- [2] Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. – М.: Просвещение, 1977.
- [3] Аргунов Б.И. Элементарная геометрия: Учебное пособие для пединститутов. – М.: Просвещение, 1966.

REFERENCES

- [1] Fetisov A.I. Geometriya: Uchebnoye posobie po programme starchykh klassov. M.: APN, 1963.
- [2] Kolyagin J.M. i dr. Metodika преподавание matematiki v srednei shkole. Chasnye metoliki. M.: Proshvechenye, 1977.
- [3] Argunov B.I. Eleventarnaye geometya: Uchebnoye posobie dlya pedinstitutov. M.: Proshvecheye, 1966.

РЕШЕНИЕ СТРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕКТОРОВ**К. Абдрахманов¹, Н. А. Касимова²**¹Южно-Казакстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казакстан,²Регониальное социальное-инновационный университет, Шымкент, Казакстан

Ключевые слова: векторы, операции, сложения и вычитания векторов, компланарность трех векторов, задачи с аффинными содержаниями.

Аннотация. В работе рассматриваются методы решения стереометрических задач с применением свойств векторов. Рассматриваются задачи с применением аффинных свойств, то есть сложения, вычитания векторов и умножение векторов на число. Эти задачи на параллельность и пересечения прямых.

Поступила 24.02.2015 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 159 – 164

**METHODS OF APPLICATION PROPERTIES
OF THE SCALAR PRODUCT OF VECTORS
TO SOLVE PROBLEMS IN THE METRIC SPACE****M. D. Shinibaev¹, N. A. Kassimova²**¹South Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent, Kazakhstan,²Regional social and innovative university, Shymkent, Kazakhstan

Keywords: vectors, property scalar product of vectors, geometric inequality, metric problems

Abstract. This paper discusses methods for solving problems using stereometric properties of vectors. Methods of application properties of the scalar proyzvedeniya vectors to solve problems in a metric space are carried out. The paper also shows the main vector of the formula used in streometry. The results of the work are useful for teachers of mathematics teaching in the senior forms.

ОӘЖ 514.1

**ВЕКТОРЛАРДЫҢ СКАЛЯР КӨБЕЙТІНДІЛЕРІНІҢ
ҚАСИЕТТЕРІН ПАЙДАЛАНЫП КЕҢІСТІКТЕ
МЕТРИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ ӘДІСТЕРІ****М. Д. Шыныбаев¹, Н. А. Касимова²**¹Оңтүстік Қазакстан педагогикалық институты, Шымкент, Қазакстан,²Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университеті, Шымкент, Қазакстан

Тірек сөздер: векторлар, векторларды скаляр көбетіндісінің қасиеттері, геометриялық теңсіздіктер метрикалық есептер.

Аннотация. Мақалада векторлардың аффиндік қасиеттерімен бірге, олардың скаляр көбетінділерінің қасиеттерін пайдаланып кеңістіктегі метрикалық есептерді шығарудың әдістері қарастырылған.

Орта мектепте векторлар тақырыбын оқытқанымен оларды есептер шығаруда қолдануына аса көңіл бөлінбейді. Оқушылар математиканың теориясын қолданып өз бетінше есептер шығаруды үйренгенде ғана толық, нақты білім алған деп санау керек. Векторларды стереометриялық есептерді шығаруда қолдануды есептердің түрлеріне байланысты екі топқа бөлінді. Олар аффиндік және метрикалық деп аталды.

Метрикалық мазмұны бар есептерді шығару әдістерін қарастырамыз. Аффиндік есептерге қарағанда метрикалық есептер ауқымы кеңірек. Метрикалық мазмұны бар есептерді шығаруда аффиндік әдістермен қатар векторлардың скаляр көбейтіндісі қолданылады.

Метрикалық есептерді қойылымына байланысты келесідей бес топқа бөліп қарастыруға болады: арақашықтықтарды есептеу; бұрыштарды есептеу; векторларды жіктеу; нүктелер жиынын табу; геометриялық теңсіздіктер. Кейбір есептерді бірнеше түрге жатқызуға болады. Бұл топтағы есептер планиметриялық және стереометриялық болуы да мүмкін.

Бұл топтағы есептерді қарастыра алдында мектеп математика курсының бағдарламасында кездесетін келесі метрикалық-векторлық формулалар келтіріледі:

$$1. \text{ Кез келген үш нүкте } A, B \text{ және } C \text{ үшін } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2)$$

$$2. \text{ Кез келген екі вектор } \vec{a} \text{ және } \vec{b} \text{ үшін } \left(\vec{a}, \vec{b} \right) \leq a^2 b^2$$

$$3. \text{ Нольдік емес екі вектор үшін } \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = 0 \text{ орындалады егер } a \perp b$$

$$4. \text{ Нольдік емес екі вектор } \vec{a} \text{ және } \vec{b} \text{ үшін } \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$5. \text{ Кез келген үш вектор } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ үшін } \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$$

$$6. \text{ Кез келген екі вектор } \vec{a} \text{ және } \vec{b} \text{ үшін } \left| \vec{a} + \vec{b} \right| \leq \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|, \quad \left| \vec{a} - \vec{b} \right| \geq \left| \left| \vec{a} \right| - \left| \vec{b} \right| \right|$$

$$7. \text{ Кез келген 4 нүкте } A, B, C, D \text{ үшін } ABCD = \frac{1}{2} (|AD|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 - |BD|^2)$$

Осы тақырыпқа шығарылатын бірнеше мысалдар қарастырамыз

1-есеп. Радиусы R тең шеңбер ABC үшбұрышына сырттай сызылған. Осы шеңбердің центрі O нүктесінен ABC үшбұрышы бойынша салынған $ABCD$ параллелограммының D төбесіне дейінгі қашықтықты табыңыздар.

Шешуі: $ABCD$ параллелограмм болғандықтан (1-сурет).

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD} \quad OD^2 \quad \text{табайық} \quad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$$

$$OD^2 = 3R^2 + 2R^2 - c^2 - 2R^2 + a^2 - 2R^2 - b^2 \text{ немесе } OD^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$$

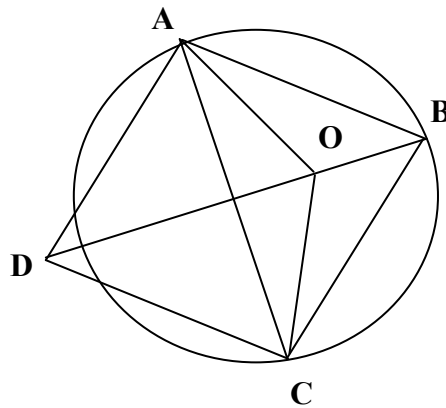
Салдар: $a^2 + b^2 + R^2 \geq c^2$

Осыдан $a^2 + b^2 + R^2 = c^2$ егер $D = 0$ онда $\angle C = 120^\circ$ $\angle A = \angle B = 30^\circ$ салдарда көрсетілген теңсіздіктен басқа да теңсіздіктер шығады:

$$1. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \text{ болғандықтан } a^2 = 4R^2 \sin^2 A$$

$$b^2 = 4R^2 \sin^2 B \quad c^2 = 4R^2 \sin^2 C \text{ Осыдан } \sin^2 A + \sin^2 B + \frac{1}{4} \geq \sin^2 C$$

$$2. \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}, \quad \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}, \quad \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2C}{2} \text{ болғандықтан,}$$



1-сурет

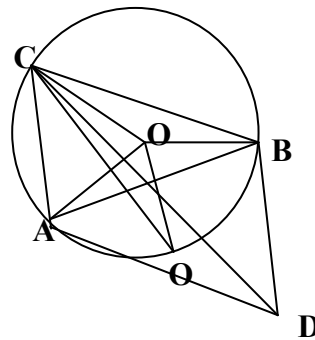
$$\frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1 - \cos 2C}{2},$$

$$1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + \frac{1}{2} \geq 1 - \cos 2C$$

$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leq \frac{3}{2}$. Бұл қарастырылған есептің шартын басқа түрде келтірсе болады:

ABC үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтары мен сырттай сызылған шеңбердік радиусы R берілген. Шеңбердің центрі O нүктесіне AB қабырғасы бойынша симметриялы O_1 нүктесінен бойынша C төбесіне дейінгі қашықтықты O_1C табыңыздар.

Егер үшбұрыштың қабырғалары берілсе және сырттай сызылған шеңбердік радиусы R берілсе. Бұл мәселенің шешімі 2-суреттен көрініп тұрғандай, шындығында CO_1 AB кесіндісінің ортасы M нүктесі бойынша OD -ға симметриялы. Онда $CO_1 = OD$ осыдан $\vec{CO}_1 = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$



2-сурет

2-есен. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипеді берілген.

Келесі теңдіктің орындалатынын дәлелдеңіздер.

$$|AC_1|^2 = |AB_1|^2 + |AC|^2 + |AD_1|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 - |AA_1|^2$$

Шешімі: Жалпы айтқанда параллелепипедтің әр бір төбесінде 7 кесінді түйіседі. Параллелепипедтің диагоналы, 3 жақтарының диагоналы, 3 қыры. Осыдан үшжақтарының диагоналының квадраттарынан үш қырының квадраттарын алып тастасақ ол параллелепипедтің диагоналының квадратына тең болады. $\vec{AB} = \vec{a}$ $\vec{AD} = \vec{b}$ $\vec{AA}_1 = \vec{c}$ $\vec{AC}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{AA}_1 = \vec{c}$

$$\vec{AD}_1 = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{AB}_1 = \vec{a} + \vec{c} \quad \text{демек} \quad \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)^2 + \left(\vec{a} + \vec{c}\right)^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2 - \vec{c}^2$$

дәлелдеуіміз керек. Жақшаларды ашып жіберсек келесі тепе теңдікке келеміз:

$$\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(\vec{a}\vec{b}\right) + 2\left(\vec{b}\vec{c}\right) + 2\left(\vec{a}\vec{c}\right).$$
 Осымен байланысты бірнеше теңдікті келтірсе болады:

$$1. \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$2. \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 4\left(\vec{a}\vec{b}\right)$$

$$3. \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}\left(\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2 + \left(\vec{c} - \vec{a}\right)^2\right)$$

$$4. (a+b-c-d)^2 = (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-b)^2 - (c-d)^2$$

Бұл төрт теңдіктер геометриялық тілде келесідей қасиеттерді сипаттайтынын көрсетеді:

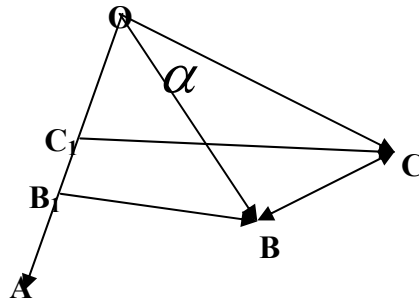
1. Параллелограммның диагоналарының квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең.

2. Параллелограммның диагоналарының квадраттарының айырымы оның қабырғаларының төрт еселенген көбейтіндісін олардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткендегіге тең болады.

3. Үшбұрыштың кез келген нүктесінен олардың медианаларының қиылысу нүктесіне дейінгі ара қашықтық, осы нүктеден үшбұрыштың төбелеріне дейінгі ара-қашықтықтарының қосындысының квадратының үштен бірінен үшбұрыштың қабырғаларының қосындысының квадратының тоғыздан бірін шегіріп тастағанға тең.

4. Тетраэдрдің қарама-қарсы екі қырларының орталарын қосатын кесіндінің төрт еселенген квадраты қалған екі қосы қырларының квадраттарының қосындысынан осы қырларының қосындысын алып тастағанға тең болады.

3-есен. Үшжақты бұрыштың үш жазық бұрыштары берілген. Осы үшжақты бұрыштың екі жақты бұрыштарын табыңыздар.



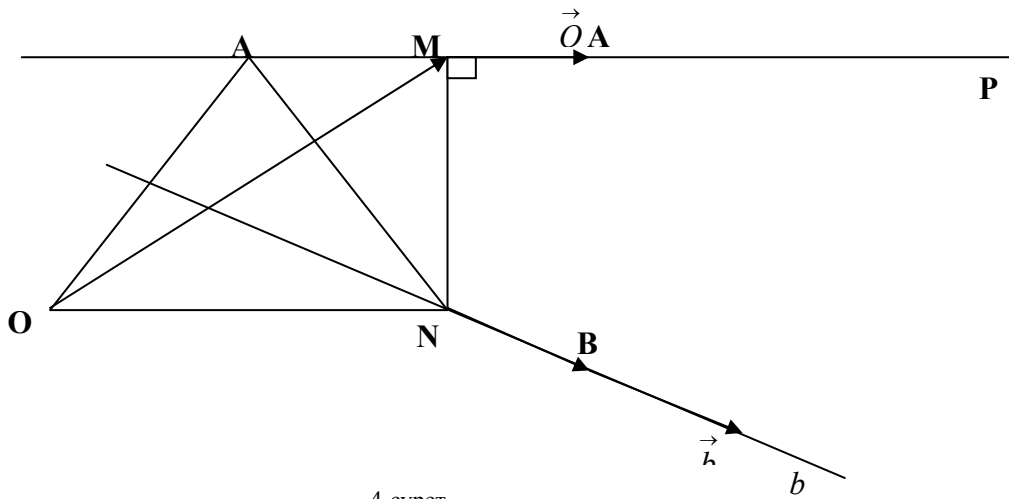
3-сурет

Шешуі: Үш жақты бұрыштың қырларында О төбесінен бастап бірлік векторларды алайық $l_1 = \vec{OA}$, $l_2 = \vec{OB}$, $l_3 = \vec{OC}$ $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{AOB} = \gamma$ деп белгілейміз. Екі жақты бұрыштарды $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ деп алайық. B_1 және C_1 нүктелері B және C нүктелерінің OA қырындағы проекциялары болсын. (3-сурет) онда $BC = BB_1 + B_1C_1 + C_1C$.

Осы теңдіктің екі жағын квадраттаймыз.

Сонда $\vec{BC}^2 = \vec{BB}_1^2 + \vec{B}_1C_1 + \vec{C}_1C^2 + 2\vec{BB}_1 \vec{C}_1C$ себебі $\vec{BB}_1 \vec{B}_1C_1 = 0, \vec{C}_1C \vec{B}_1C_1 = 0$; Бірақ $\vec{BC}^2 = 2 - 2 \cos \alpha; \vec{BB}_1^2 = \sin^2 \gamma; \vec{CC}_1^2 = \sin^2 \beta \quad \vec{BB}_1 \vec{CC}_1 = -\vec{BB}_1 \vec{C}_1C = -\sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A};$
 $\vec{B}_1C_1^2 = \left(\vec{OC}_1 - \vec{OB}_1\right)^2 = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \beta \cos \gamma$

Осыдан $2 - 2 \cos \alpha = \sin^2 \gamma + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \beta \cos \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}$, демек $\cos \alpha = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}$. Осыдан $\cos \hat{A} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$ бұл формула үшжақтар үшін ең маңызды формулалардың бірі болып табылады. Егер екі жазықтық перпендикуляр болса $\hat{A} = 90^\circ$ онда $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$



4-сурет

4-есен. Екі өзара перпендикуляр айкас түзулер берілген p және q олардың векторлық тендеулері $P: \vec{OP} = \vec{OA} + \alpha \vec{a}, q: \vec{OQ} = \vec{OB} + \beta \vec{b}$ мұндағы α мен β параметрлер $\alpha, \beta \in R$ ал $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$ бірлік бағыттаушы векторлар. Бұл екі түзулердің ортақ перпендикулярлары MN . \vec{MN} векторының $\vec{a}, \vec{b}, \vec{AB}$ векторлары бойынша жіктелуін табыңыздар.

Шешуі: 4-суреттен $\vec{OM} = \vec{OA} + \alpha_1 \vec{a} \quad \vec{ON} = \vec{OB} + \beta_1 \vec{b} \quad \vec{MN} = \vec{AB} + \beta_1 \vec{b} - \alpha_1 \vec{a}$ α_1 және β_1 табамыз. \vec{MN} векторын скаляр түрде \vec{a} және \vec{b} векторларына көбейтеміз:

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{a} + \beta_1 \vec{a} - \alpha_1 = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{b} + \beta_1 - \alpha_1 \vec{a} \vec{b} = 0 \end{cases} \text{ себебі } \vec{a} \perp \vec{MN}, \vec{b} \perp \vec{MN}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ болғандықтан } \alpha_1 = \vec{AB} \cdot \vec{a}, \beta_1 = -\vec{AB} \cdot \vec{b},$$

$$\text{Осыдан } \vec{MN} = \vec{AB} - \left(\vec{AB} \cdot \vec{a}\right) \vec{a} - \left(\vec{AB} \cdot \vec{b}\right) \vec{b}$$

Осы формуланы пайдаланып $|\vec{MN}|$ ұзындығын яғни екі айқас түзулердің арасындағы ара қашықтықты табуға болады.

Осы тақырыпқа шығарылған есептердің мазмұнын талдау арқылы келесідей қорытындыға келеміз.

Біріншіден, векторлардың жіктелуіне берілген есептерде ең маңыздысы, вектор-ды базистік векторлар бойынша жіктелуі. Осы жіктелудегі коэффициенттерін пайдаланып:

1. Арақашықтықпен бұрыштарды табуға болады;
2. Параллел кесінділердің қатынастарын табуға болады;
3. Жеке нүктелердің жазықтықтағы және кеңістіктегі орналасуының параметрлерін анықтауға болады;
4. Нүктелер жиынын сипаттауға болады.

Векторлардың базистік векторларға жіктелуіндегі коэффициенттерді табу, координаталар жүйесін ендіріп векторлардың координаталарын табумен сыбайлас екенін көреміз.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Фетисов А.И. Геометрия. Учебное пособие по программе старших классов. – М.: АПН, 1963.
- [2] Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики. – М.: Просвещение, 1977.
- [3] Аргунов Б.И. Элементарная геометрия: Учебное пособие для пединститутов. – М.: Просвещение, 1966.

REFERENCES

- [1] Fetisov A.I. Geometria. Uchebnoe posobie po programme starchih klassov. M.: APN, 1963.
- [2] Kolyagin J.M. i dr. Metodika преподавание matematiki v srednei shkole. Chasnye metoliki. M.: Proshvechenye, 1977.
- [3] Argunov B.I. Eleventarnaye geometya// Uchebnoe posobie dlya pedinstitutov. M.: Proshvecheye, 1966.

МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ

М. Д. Шыныбаев¹, Н. А. Касимова²

¹Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,
²Региональное социально-инновационный университет, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: векторы, свойство скалярного произведения векторов, геометрические неравенство, метрические задачи.

Аннотация. В работе рассматриваются методы решения стереометрических задач с применением свойств векторов. Проведены методы применения свойств скалярного произведения векторов для решения метрических задач в пространстве. В работе, также приведены основные векторные формулы применяемые в стереометрии. Результаты работы полезны для учителей математики преподающих в старших классах.

Поступила 24.02.2015 г.

МАЗМУНЫ

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

Кулешов Б.Ш., Судоплатов С.В. О-минималдық теориялар үшін бинарлық формулалардың алгебралардағы таралымы туралы.....	5
Бажиков К.Т., Касимов А.О., Усембаева С.А., Калиев М. Сымсыз сенсорлы желілердің қолдану болашағы.....	14
Орынбаев С.А., Бекбаев А.Б., Байбутанов Б.К. Бірфазалы автономды инвертор.....	18
Дідәбек Г., Тенгеева А.А. Бір шеттік есептің меншікті функциялар жүйесінен базис құру.....	24
Кәлменов Т.Ш., Сұраған Д. Айнымалы коэффициентті эллиптикалық дифференциалдық теңдеулер үшін шегаралық интегралдық шарттар.....	29
Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Құралымның компьютерлік модель деуі тереңдіктің сояного диапиризма.....	36
Төрбек Б.Т. Көпөлшемді шардағы бір көлемдік потенциалдың шекаралық шарты.....	41
Бараев А., Жұмбаев М.Ж., Ахметов Н.М., Тулип А.С., Бариев М. Қорғандық байланыстардың бұрғы бағанының мәжбүрлі тербеліс үрдісіне әсер етуін зерттеу.....	44
Асанова А.Т., Иманчиев А.Е. Екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін үшнүктелі шеттік есептің шешілімділігі туралы.....	50
Көшеров Т.С., Серік А.С., Сеитов А. Лазерлік ықпалдың поликристалды кремний құрылымына әсері.....	56
Бажиков К.Т., Касимов А.О., Усембаева С.А., Толепбергенова Г. Сымсыз сенсорлы желілер.....	61
Бақтыбаев Қ., Дәлелханқызы А., Бақтыбаев М.Қ. Күшті байланған каналдар әдісі және альфа бөлшектердің Ne, Mg ядроларының жұп изотоптарында шашырауы.....	66
Иманбаев Н.С. Дирихле есебі тектес біртекті шеттік шарттармен берілген Коши-Риман операторының меншікті мәндерін зерттеуге берілген есеп туралы.....	73
Қожамқұлова Ж.Ж., Қойшиева Т.Қ., Нүсіпбекова А.Н., Ибадуллаева А. Ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы жағдайында болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауды жетілдіру.....	78
Бакирова Э.А., Искакова Н.Б., Армия Т. Екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін сызықты шеттік есебінің шешілімділігі.....	83
Сұраған Д. Ньютон потенциалының екінші сипаттық саны жайнда.....	89
Бажиков К.Т., Құрмансейіт М., Абеннова А., Серік А. Кеуекті кремнийдің фотолюминесценциялық қасиеттері.....	94
Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Березовская И.Э., Шортанбаева Ж.К., Максұтханова А.М., Осанова Ш.С., Мұқашева Г.К., Ергалиева А.Б. Әртүрлі бұрқу жылдамдықтарындағы сұйық отынның бұрқу және жануын компьютерлік модельдеу.....	98
Құсайынов А.С., Құсайынов С.Г., Тұрмағанбет Г.Б., Саматқызы Н. Бір параллель алгоритмдегі уақыттық қатардың Херст экспонентасының және фракталды өлшемділігінің мәндерін бағалау.....	104
Жанабаев З.Ж., Қожагулов Е.Т., Жексебай Д.М. Программаланатын интегралды схемада нейрондық тордың электронды моделі.....	110
Сергеев Д.М., Кузьмичев С.А., Аймағанбетова З.К., Шункеев К.Ш. Жоғары мөлдірлік режимінде 60-100 meV энергия диапазонында әлсіз ауытқыған реттелу параметрлі асқын өткізгіштер негізіндегі баллистикалық контактілер динамикалық өткізгіштігін модельдеу.....	116
Мазақова Б.М., Жақыпов А.Т., Жұмаханова А.С. Биоинформатикалық модельдеу негізінде гомологиялық нуклеотидті тізбектерді іздеу.....	124
Такибаев Н.Ж., Такибаева М.Н., Курманғалиева В.О., Насирова Д.М. Нейтрондық жұлдыздардың қабықшаларындағы асатығыз кристаллдардағы физикалық процесстер.....	129
Гусманова Ф.Р., Алтыбай А., Сақыпбекова М.Ж. Сызықтық емес дроссельдік жетектің т-басқарылуы.....	136
Абдықадыров Б.К., Такибаев Н.Ж. CsPbI ₃ және RbPbI ₃ галогенид перовскиттердің тыйым салынған зона енін ab initio есептеу.....	142
Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Фабитова З.Х., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б. Алматы ЖЭО-3 БКЗ-160 қазандығының жану камерасындағы жану процесінің жылулық сипаттамаларына шаңкөмірлі отынның дисперстілігінің әсерін зерттеу.....	147
Абдрахманов Қ., Касимова Н.А. Векторларды қолданып стереометриялық есептерді шығару.....	154
Шыныбаев М.Д., Касимова Н.А. Векторлардың скаляр көбейтінділерінің қасиеттерін пайдаланып кеңістікте метрикалық есептерді шығару әдістері.....	159

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования

Куллешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Об алгебрах распределений бинарных формул для вполне о-минимальных теорий.....	5
Бажиков К.Т., Касимов А.О., Усембаева С.А., Калиев М. Перспективы беспроводных сенсорных сетей.....	14
Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Бекбаев А.Б. Однофазный автономный инвертор.....	18
Дилоабек Г., Тенгаева А.А. Построение базиса из системы собственных функций одной краевой задачи.....	24
Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Граничные интегральные условия эллиптических дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.....	29
Баймухаметов А.А., Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г. Компьютерное моделирование формирования глубинного соляного диапиризма.....	36
Торребек Б.Т. Граничные условия одного объемного потенциала в многомерном шаре.....	41
Бараев А., Жумабаев М.Ж., Ахметов Н.М., Тулип А.С., Бариев М. Исследование влияния замковых соединений на вынужденный колебательный процесс буровой колонны.....	44
Асанова А.Т., Иманчиев А.Е. О разрешимости трехточечной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.....	50
Кошеров Т.С., Серик А.С., Сеитов А. Влияние лазерного воздействия на свойства поликристаллического кремния.....	56
Бажиков К.Т., Касимов А.О., Усембаева С.А., Толепбергенова Г. Беспроводные сенсорные сети.....	61
Бактыбаев К., Далелханкызы А., Койлык Н.О., Бактыбаев М.К. Метод сильно-связных каналов и неупругие рассеяния альфа-частиц на четных изотопах Ne, Mg.....	66
Иманбаев Н.С. О задаче на собственные значения оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле.....	73
Кожамкулова Ж.Ж., Койшиева Т.Қ., Нусипбекова А.Н., Ибадуллаева А. Совершенствование профессиональной подготовки будущих учителей в условиях активного развития информационных технологий.....	78
Бакирова Э.А., Искакова Н.Б., Армия Т. О разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.....	83
Сураган Д. Ньютон потенциалының екінші сипаттық саны жайнда.....	89
Бажиков К.Т., Құрмансейіт М., Абеннова А., Серік А. Фотолюминесцентные свойства пористого кремния.....	94
Аскарова А.С., Болегенова С.А., Березовская И.Э., Шортанбаева Ж.К., Максутханова А.М., Оспанова Ш.С., Мукашева Г.К., Ергалиева А.Б. Компьютерное моделирование распыла и горения жидкого топлива при различных скоростях впрыска.....	98
Кусаинов А.С., Кусаинов С.Г., Тұрмағанбет Г.Б., Саматқызы Н. Оценка значений экспоненты Херста и фрактальной размерности временного ряда в одном параллельном алгоритме.....	104
Жанабаев З.Ж., Кожагулов Е.Т., Жексебай Д.М. Электронная модель нейронной сети на программируемой интегральной схеме.....	110
Сергеев Д.М., Кузьмичев С.А., Аймаганбетова З.К., Шункеев К.Ш. Моделирование динамической проводимости баллистических контактов на основе сверхпроводников со слабоосциллирующим параметром порядка в диапазоне энергии 60-100 meV в режиме высокой прозрачности.....	116
Мазакова Б.М., Жакыпов А.Т., Жумаханова А.С. Поиск гомологических нуклеотидных последовательностей на основе биоинформатического моделирования.....	124
Такибаев Н.Ж., Такибаева М.Н., Курмангалиева В.О., Насирова Д.М. Физические процессы в сверхплотных кристаллах в оболочках нейтронных звезд.....	129
Гусманова Ф.Р., Алтыбай А., Сақыпбекова М.Ж. Т-управляемость нелинейного дроссельного привода.....	136
Абдыкадыров Б.К., Такибаев Н.Ж. Ab initio расчеты ширины запрещенной зоны галогенид перовскитов CsPbI ₃ и RbPbI ₃	142
Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Габитова З.Х., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б. Исследование влияния дисперсности пылеугольного топлива на тепловые характеристики процесса горения в топочной камере котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3.....	147
Абдрахманов К., Касимова Н.А. Решение строметрических задач с применением векторов.....	154
Шыныбаев М.Д., Касимова Н.А. Методы применения свойств скалярного произведения векторов для решения метрических задач в пространстве.....	159

CONTENTS

Theoretical and experimental researches

<i>Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V.</i> On algebras of distributions of binary formulas for quite o-minimal theories.....	5
<i>Bazhikov K.T., Kasimov A.O., Usembayeva S.A., Kaliev M.</i> Prospects of wireless sensor networks.....	14
<i>Orynbayev S.A., Moldakhmetov S.S., Bekbayev A.B.</i> Single phase stand-alone inverter.....	18
<i>Dildabek G., Tengayeva A.</i> Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one boundary value problem.....	24
<i>Kalmenov T.Sh., Suragan D.</i> Integral boundary conditions of elliptic differential equations with variable coefficients.....	29
<i>Baymukhabetov A.A., Martynov N.I., Tanirbergenov A.G.</i> Computer modelling of formation of deep salt diapirism.....	36
<i>Torebek B.T.</i> Boundary conditions of the one volume potential in multidimensional ball.....	41
<i>Baraev A., Zhumabayev M.Zh., Akhmetov N.M., Tulip A.S., Bariev M.</i> Study of the influence of tool joints on forced oscillatory process of the drill string.....	44
<i>Asanova A.T., Imanchiev A.E.</i> On the solvability of a three-point boundary value problem for a differential equation of second order.....	50
<i>Kosherov T., Serik A., Seitov A.</i> Influence of laser treatment on the properties of polycrystalline silicon.....	56
<i>Bazhikov K.T., Kassimov A.O., Usembayeva S.A., Tolepbergenova G.</i> Wireless sensor networks.....	61
<i>Baktybaev K., Dalelkhankyzy A., Baktybaev M.K.</i> Method strongly connected channels and inelastic scattering of alpha particles at even isotopes of Ne, Mg.....	66
<i>Imanbayev N.S.</i> About the eigen value problem of Cauchy-Riemann operator with homogeneous boundary conditions of Dirichlet task type.....	73
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Koishieva T.K., Nusipbekova A.N., Ibadullaeva A.</i> Improvement of training teachers in the active development of information technology.....	78
<i>Bakirova E.A., Iskakova N.B., Arnya T.</i> Solvability of linear boundary value problem for ordinary differential equation second order.....	83
<i>Suragan D.</i> On the second characteristic number of the newton potential.....	89
<i>Bazhikov K.T., Kurmaseit M., Abenova A., Serik A.</i> Photoluminescence properties of porous silicon.....	94
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Berezovskaya I.E., Shortanbayeva Zh.K., Maksutkhanova A.M., Ospanova Sh.S., Mukasheva G.K., Yergalyeva A.B.</i> Computer simulation of liquid fuel spray and combustion at different injection velocities....	98
<i>Kussainov A.S., Kussainov S.G., Turmaganbet G.B., Samatkyzy N.</i> Hurst exponent and fractal dimension of a time series estimate in a single parallel algorithm.....	104
<i>Zhanabaev Z.Zh., Kozhagulov Ye.T., Zhexebay D.M.</i> Electronic models of neural network at programmable integrated circuit.....	110
<i>Sergeyev D.M., Kuzmichev S.A., Aimagambetova Z.K., Shunkeyev K.Sh.</i> Modeling of the dynamic conductivity of superconductor-based ballistic contact with weak oscillated order parameter in the energy range 60-100 meV in high transparency mode.....	116
<i>Mazakova B.M., Zhakipov A.T., Zhumakhanova A.C.</i> Search of the homologous nucleotide sequences based on bioinformatic modeling.....	124
<i>Takibayev N.Zh., Takibayeva M.N., Kurmangaliyeva V.O., Nassirova D.M.</i> Physical processes in crystals of superdense neutron stars in the crusts.....	129
<i>Gusmanova F.R., Altybay A., Sakyzbekova M.Zh.</i> T-controllability of nonlinear throttle drive.....	136
<i>Abdykadyrov B.K., Takibaev N.Zh.</i> Ab initio calculations of band gaps of CsPbI ₃ and RbPbI ₃ halyde perovskites.....	142
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Gabitova Z.H., Maximov V.Yu., Yergaliyeva A.B.</i> Investigation of influence of dispersibility of pulverized coal injection on thermal characteristics of the combustion in the combustion chamber of the boiler BKZ-160 Almaty TPP-3.....	147
<i>Abdrahmanov K., Kassimova N.A.</i> Solution stereometric tasks with application of vectors.....	154
<i>Shinibaev M.D., Kassimova N.A.</i> Methods of application properties of the scalar product of vectors to solve problems in the metric space.....	159

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.03.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,5 п.л. Тираж 300. Заказ 2.