

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**6 (310)**

**ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2016 Ж.  
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2016 г.  
NOVEMBER – DECEMBER 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2016

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** доктор PhD (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** PhD (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 5 – 9

UDC 537.311:322

**D.I. Bakranova<sup>1</sup>, S.A. Kukushkin<sup>2</sup>, I.K. Beisembetov<sup>1</sup>, A.V. Osipov<sup>2</sup>,  
K.Kh. Nussupov<sup>1</sup>, N.B. Beisenkhanov<sup>1</sup>, B.K. Kenzhaliev<sup>1</sup>, B.Zh. Seitov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Institute for Problems of Mechanical Engineering, St. Petersburg, Russia

e-mail: [dinabakranova@gmail.com](mailto:dinabakranova@gmail.com), [sergey.a.kukushkin@gmail.com](mailto:sergey.a.kukushkin@gmail.com), [rector@kbtu.kz](mailto:rector@kbtu.kz), [andrey.v.osipov@gmail.com](mailto:andrey.v.osipov@gmail.com),  
[rich-famouskair@mail.ru](mailto:rich-famouskair@mail.ru), [beisen@mail.ru](mailto:beisen@mail.ru), [bagdaulet\\_k@mail.ru](mailto:bagdaulet_k@mail.ru), [seitov\\_b85@mail.ru](mailto:seitov_b85@mail.ru)

## X-RAY ANALYSIS OF SiC EPITAXIAL FILMS GROWN BY METHOD OF ATOM REPLACEMENT ON LOW DISLOCATION SILICON SUBSTRATE

**Abstract.** In this work, SiC films were synthesized by method of atoms replacement in the silicon lattice of on the surface of low dislocation silicon substrates M-5168 brand. By methods of X-ray diffraction, ellipsometry and profilometry, the surface roughness, phase composition, thickness and quality of SiC films synthesized through the substitution of atoms in high-resistance monocrystalline (111) oriented n-type silicon wafers in a mixture of gases CO and SiH<sub>4</sub>, were studied. It is shown that the films contain the both nanocrystalline and single crystalline 3C-SiC layers with β-SiC crystallites of high degree of perfection. Dimensions of silicon carbide nanocrystals in the transition region "film-substrate" constitute values of 3–5 nm. Dimensions of large crystals of silicon carbide or monolayers reached values within 35–365 microns with a thickness of SiC films ~ 95–110 nm and the quantity of Si vacancies about 5 – 6.5 %. The results can be used in nano- and microelectronics and in the production of solar cells.

**Keywords:** thin films, silicon carbide, structure, crystallization, X-ray diffraction.

### Introduction

Silicon carbide is a wide gap semiconductor which has a high thermal conductivity, hardness and high values of intensity breakdown of electric field. It is one of the most promising materials for use in the electronics industry. The physical and electrical properties of SiC led to great interest in electronic devices and sensors on the basis of silicon carbide for use in high temperature and radiation [1-4]. Amorphous and crystalline SiC films are also used in photovoltaic [5,6].

In recent years, it was theoretically developed and experimentally implemented a new method of growing thin low defective SiC films on Si [7-9]. The method is based on the replacement of matrix part of silicon atoms to carbon atoms with formation of silicon carbide molecules:  $2\text{Si} + \text{CO} = \text{SiC} + \text{SiO}$ . SiC films were synthesized in special equipment described in [9]. SiC films investigated in [8,9] were grown on standard silicon substrates p- and n-type conductivity. In [8] it was shown that the higher quality of the original substrate Si, the higher the quality of the grown SiC layer structure. In this regard, in this study there was investigated the formation of SiC films on the surface of low defective M-5168 grade silicon substrates.

### Experiment

For this purpose, a series of films was prepared (# I), grown at 1250 ° C and at pressure of CO gas at 264 Pa low dislocation silicon surface. The growth time of these films was 15 min. Another series of II films was synthesized for 7 minutes at a temperature of 1330 ° C and at gas pressure of 395 Pa CO [10].

The substrates were silicon wafers of high quality n-type (111) with a resistivity of 1987 - 3165 ohm·cm, 1300 microns in thickness and 20 mm in diameter. By bilateral grinding and polishing there been removed 100 mm on each side of the silicon wafer. Further II Series samples were subjected to chemical

etching in acid mixture in a ratio of HF:HNO<sub>3</sub> = 1:10 to 870 micron, and then in an alkaline KOH solution. Samples of I series were subjected only in the alkaline etching solution KOH.

The roughness of the films was investigated with the help of the profilometer NewView 6000 (company Zygo). Phase composition and structure of the films were studied by a highly sensitive photographic X-ray diffraction using narrow collimated (0,0541.5 mm<sup>2</sup>) monochromatic (CuK $\alpha$ ) X-rays directed at an angle 5° to the sample surface [11, 12]. The intensity of X-ray reflections was measured every 0,1° on MD-100 microdensitometer. In order to determine the physical parameters of the films we used ellipsometer M-2000D J.A. Woollam, which allows reading the ellipsometric spectra in the range of 0,7 - 6,5 eV.

### Results

As research shows, the roughness on the profilometer NewView 6000 (company Zygo), at considerable area of silicon 701 Ч 526 mm (Fig. 1 a), in the treatment of the mixture of I series sample acids leads to an increase in the average surface roughness R<sub>a</sub> of the silicon surface in the 88.5 / 3 7 = 24 times and an average surface roughness of synthesized silicon carbide films on I series sample estimated to 21.168 / 5.684 = 3.72 times. Thus, chemical treatment in a mixture of HF acid: HNO<sub>3</sub> removes the deep scratches (Figure 1 b), but leads to increase the average surface roughness R<sub>a</sub> (figure 1).

Figure 2 a, b clearly shows the X-ray debayegrams for the samples of SiC series I and II contain almost all of the known  $\beta$ -modification of silicon carbide (3C-SiC).

With Jones method [13] of the x-ray line broadening (Fig.2 c) by the Scherrer formula (1) [14] we determined average size of  $\beta$ -SiC nanocrystals in different planes:

$$\varepsilon = \frac{R\lambda}{\beta \cdot \cos \theta}, \quad (1)$$

where  $\varepsilon$  – average crystallite size (nm); R = 2,86 cm – camera radius (cm);  $\lambda$  = 0,1540 nm – wavelength of CuK $\alpha$ -ray (nm);  $\theta$  – Bragg angle;  $\beta$  – line broadening. The value of the x-ray line broadening  $\beta$  is determined from meaning  $\beta = \sqrt{\beta_s \beta_w}$  [15],  $\beta_s = B - b$  [14],  $\beta_w = \sqrt{B^2 - b^2}$  [16], where B – half-width of the X-ray line adjusted for doublet line CuK $\alpha$ , b – instrumental half-width component of line.

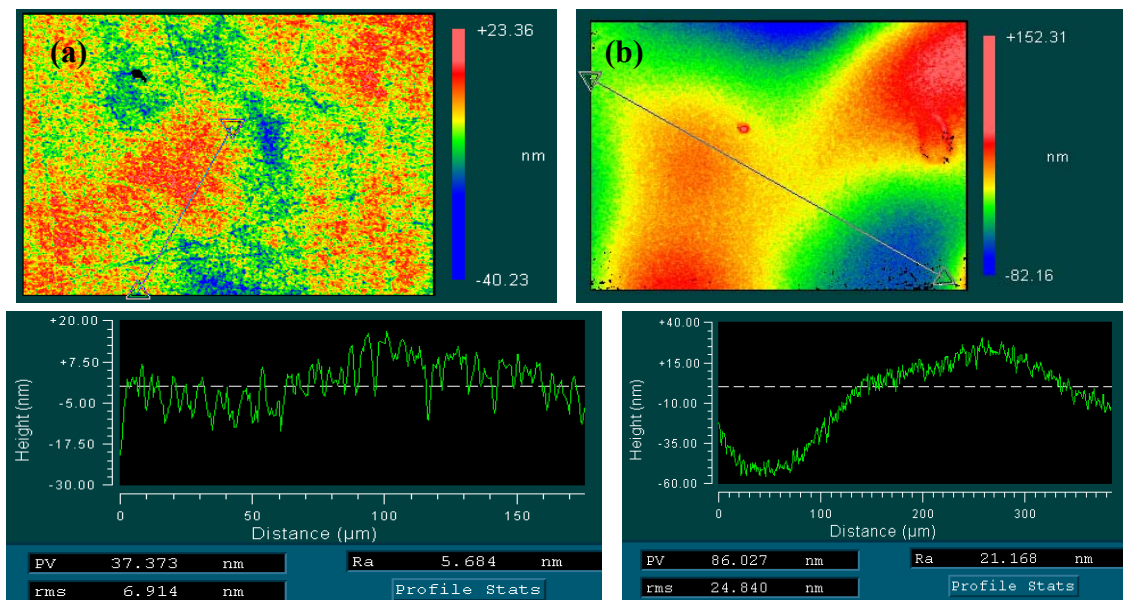


Figure 1 – The surface profile and roughness of the SiC films of II series sample (a) and II series sample (b) at areas 3504263 microns

Nano crystallite size SiC for sample I comprised values of 4,5 nm in planes (111), 3,1 nm in planes (220) and 3,0 nm in planes (311).

As it was shown in [9], SiC layer consists of SiC film layer covering triangular and shrink pores. At larger value of super saturation, the critical radius of nucleus pore has a size of a few nanometers, the critical pore radius shrinkage is of the order of atomic dimensions. This means that SiC embryo is surrounded by vacancy clusters that can merge into thin cracks surrounding the seed embryo. [9] Thus, measurement data on the nanocrystals of silicon carbide indicate that SiC nucleation sizes in the transition region "film-substrate" constitute value of 3-5 nm.

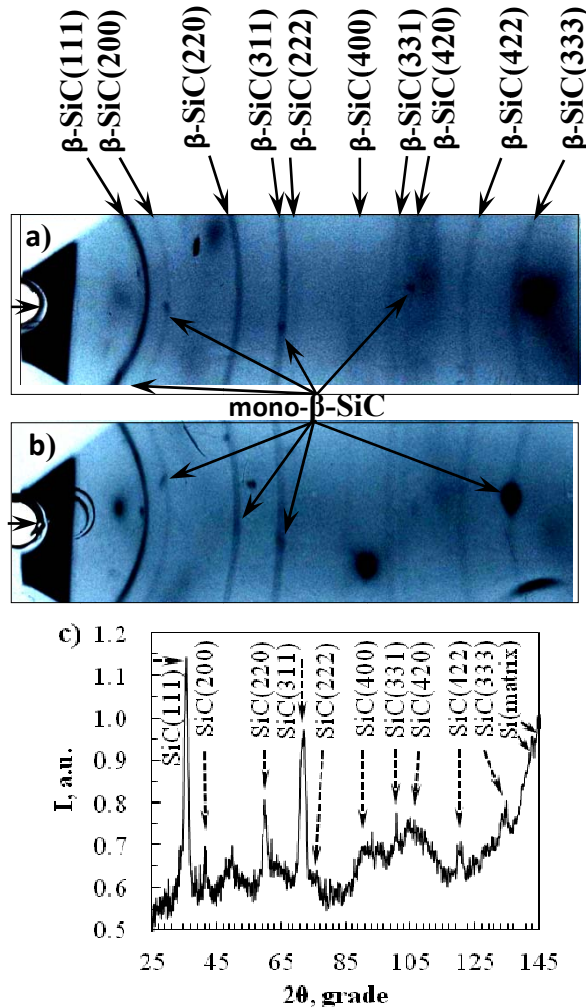


Figure 2 – X-ray powder patterns of thin film of silicon carbide I (a) and II (b) and the intensity of the X-ray reflections  $I(2\theta)$  (c), synthesized by substitution of atoms

Some lines of nanocrystalline phase  $\beta$ -SiC show single reflex overlay resulting from a large crystal reflection of silicon carbide formed in the area of X-ray beam insertion into narrow collimated surface. The method of Clark and Zimmer, based on the measurement of the size of spots and described in [15] is used, according to this method, changes in reflex sizes from 0.20 to 1.20 mm corresponds to a linear change from 0.010 to 0.085 mm grain size. With this method we determined size of  $\beta$ -SiC large crystals. For a sample of I series, sizes of large crystals or monolayers of silicon carbide totaled value of 130Ч35 mm in the plane (111), 70Ч60 mm in the plane (200), 85Ч70 mm in the plane (311) and 60Ч85 mm in the plane (420). In contrast, for the sample of II series, we observed reflex, comparable in size to the reflex of the Si substrate and the beam size. This reflex, which lies on a line  $\beta$ -SiC (333) corresponds to a crystal 365Ч220 mm and indicates the presence of the layer of  $\beta$ -SiC monocrystalline. Thickness of SiC films synthesized by substitution of atoms not normally exceed 100-150 nm [9].

Fig. 3 a, b shows elliptical plots, in other words dependence of  $\epsilon_1$  real and imaginary  $\epsilon_2$  parts of samples I and II series of the SiC film. Elliptical plots show that there are differences in structure of the SiC films of samples I and II series. According ellipsometric spectra of SiC layer thickness is

approximately on a sample of series I - 95 nm, on a sample of series II - 110 nm. Calculations using ellipsometric model [17] have shown that series of samples I contain only 5% Si vacancies, in the samples of II series - about 6.5%.

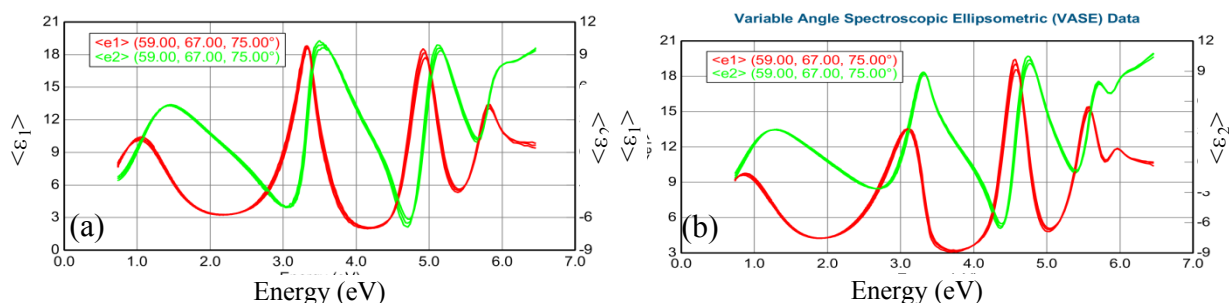


Figure 3 – Dependence of  $\epsilon_1$  real and  $\epsilon_2$  imaginary parts of dielectric permeability of films SiC / Si (111) from the photon energy for the samples of Series I (a) and II (b)

### Conclusion

With the help of the method of substitution of atoms in the silicon lattice we synthesized two series of SiC samples on the surface of the low defective silicon substrate of n-type (111) orientation (mark M-5168) grown in a mixture of gases CO and SiH<sub>4</sub>. A series of samples (№ I), was synthesized at a temperature of 1250°C and at gas pressure of CO 264 Pa on the narrow dislocation silicon surface. The growth time of these samples was 15 min. Another series of samples (№ II) was synthesized for 7 minutes at a temperature of 1330°C and at gas pressure of CO 395 Pa.

With the help of the method of profilometry it was found that treatment of HF acid in a mixture: HNO<sub>3</sub> = 1: 10 silicon substrate results in the removal of deep scratches, polishing their surfaces. On the other hand, the chemical treatment causes etch pits and the increase in roughness in the whole surface.

With the help of the method photographically XRD it was showed that the synthesized film comprises a single crystal, nanocrystalline layers and  $\beta$ -modification of silicon carbide (3C-SiC). Dimensions of nanocrystals of silicon carbide in the transition region "film-substrate" constitute values of 3-5 nm. The dimensions of large crystals of silicon carbide or monolayers reached values within 35-130 microns up to 365 microns.

Calculations performed using ellipsometric model [17] showed that samples of I series only contain 5% of Si vacancies and in series of II samples - about 6.5%. According to ellipsometric spectra, the thickness of SiC layer on the sample of I series is 95 nm, on a sample of series II is 110 nm.

### Благодарность

Бейсенханов Н.Б., Нусупов К.Х., Бейсембетов И.К., Кенжалиев Б.К., Мить К.А. и Бакранова Д.И. выражают благодарность Комитету науки МОН РК за финансовую поддержку (гранты ГР № 0262/ГФ4; ГР № 4327/ГФ4; 2015–2017 гг.).

Кукушкин С.А. и Осипов А.В. выражают благодарность РФФИ за финансовую поддержку (гранты № 15-0306155 и 16-29-03149\_2016-офи).

### REFERENCES

- [1] Muller G., Krotz G., Niemann E. SiC for sensors and high-temperature electronics. *Sens. Actuators. A.* **1994**, 43(1-3), P. 259-268.
- [2] Brown D.M., Downey E., Grezzo M., Kretchmer J., Krishnamethy V., Hennessy W., Michon G. Silicon carbide MOSFET technology. *Solid State Electronics*, **1996**, 39 (11), P. 1531– 1542. – ISSN 0038-1101.
- [3] Baliga B.J. Trends in power semiconductor devices, *IEEE Trans. Electron Devices*, **1996**, 43, P. 1717–1731.
- [4] Wu R., Zhou K., Yue C.Y., Wei J., Pan Y. Recent progress in synthesis, properties and potential applications of SiC nanomaterials. *Progress in Materials Science*, **2015**, 72, P. 1–60.
- [5] Hamakawa Y. Physics and Applications of Amorphous Silicon Carbide. In: Rahman M.M., Yang C.Y.-W., Harris G.L. (Eds.), *Amorphous and Crystalline Silicon Carbide II, Springer Proceedings in Physics*, 1989, 43, P. 164–170.
- [6] Joung Y.-H., Kang H.I., Kim J.H., Lee H.-S., Lee J. and Choi W.S. SiC formation for a solar cell passivation layer using an RF magnetron co-sputtering system. *Nanoscale Research Letters*. **2012**, 7(1):22.



- [7] Kukushkin S.A., Osipov A.V. New Method for Growing Silicon Carbide on Silicon by Solid-Phase Epitaxy: Model and Experiment. *Physics of the Solid State*, **2008**, 50, № 7, P. 1238–1245.
- [8] Kukushkin S.A. and Osipov A.V. Topical Review. Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films. *J. of Phys. D: Appl. Phys.* **2014**, 47, P. 313001-313041.
- [9] Kukushkin S.A., Osipov A.V., and Feoktistov N.A. Synthesis of Epitaxial Silicon Carbide Films through the Substitution of Atoms in the Silicon Crystal Lattice: A Review. *Physics of the Solid State*. **2014**, 56, № 8, P. 1507–1535.
- [10] Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Nussupov K. Kh., Osipov A.V., Beisenkhanov N.B. // 4th International Conference on Nano and Materials Science (ICNMS 2016). *MATEC Web of Conferences*. New York, **2016**. 43. 01003.
- [11] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si. In book: Silicon carbide – Materials, Processing and Applications in Electronic Devices. **2011**. Edited by Moumita Mukherjee. InTech. Chapter 4. P. 69 – 114.
- [12] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers. *J. of Materials Science: Materials in Electronics*. **2008**, 19, P. 254–262.
- [13] Jones F.W. The measurement of particle size by the X-ray method. Proc. Roy. Soc. – London, **1938**, 166A, P. 16–43.
- [14] Scherrer P. Bestimmung der Größe und der inneren Struktur von Kolloidteilchen mittels Röntgenstrahlen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*. **1918**. 26. P. 98-100.
- [15] Taylor A. X-ray Metallography. John Wiley & Sons, Inc.: New York – London, **1961**, 993p.
- [16] Warren B.E., Bischof J. The structure of silica glass by X-ray diffraction studies. *Journal of American Ceramic Society*. **1938**, 21, № 1. P. 49–54.
- [17] Kukushkin S.A., Osipov A.V. Determining polytype composition of silicon carbide films by UV ellipsometry. *Technical Physics Letters*. **2016**, 42(2), P. 175–178.

Д.И. Бакранова<sup>1</sup>, С.А. Кукушкин<sup>2</sup>, И.К. Бейсембетов<sup>1</sup>, А.В. Осипов<sup>2</sup>,  
К.Х. Нусупов<sup>1</sup>, Н.Б. Бейсенханов<sup>1</sup>, Б.К. Кенжалиев<sup>1</sup>, Б.Ж. Сейтов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан;  
<sup>2</sup> PFA Машинатану мәселелер институты, Санкт-Петербург, Ресей

#### АҚАУЫ АЗ КРЕМНИЙ МАТРИЦАЛАРЫНДАҒЫ АТОМДАРДЫҢ ОРНЫН БАСУ ӘДІСІМЕН АЛЫНҒАН ЭПИТАКСИАЛДЫ SiC ҚАБЫРШАҚТАРЫН РЕНТГЕНДІК ТАЛДАУ

**Аннотация.** Ақауы аз М-5168 маркалы кремний матрицаларының бетіне, кремнийдің кристалдық торындағы атомдардың орнын басу әдісі арқылы SiC қабыршақтары синтезделді. Рентгендік дифракция, профилометрия және эллипсометрия әдістері арқылы, СО және SiH<sub>4</sub> газ қоспаларының атмосферасында жоғарыомды монокристалды n-типті Si(111) матрицада синтезделген SiC қабыршақтарының фазалық құрамы, қалыңдығы және сапасы зерттелінді. Синтезделген қабыршақтар құрамында, жетілу дәрежесі жоғары β-SiC кристаллиттеріне ие монокристалды және нанокристалды 3C-SiC қабаттар бар екендігі көрсетілді. «Қабыршақ-матрица» өтпелі аймақтағы кремний карбиді нанокристалдарының өлшемдері 3 – 5 нм құрайды. SiC қабыршақ қалыңдығы ~ 95–110 нм және Si вакансия мөлшері ~ 5–6,5 % болған жағдайда, кремний карбидінің ірі кристалдарының немесе монокристалдарының өлшемдері 35–365 мкм құрайды. Жұмыстың нәтижелері нано- және микроэлектроникада, күн элементтерін өндіруде пайдаланылуы мүмкін.

**Түйін сөздер:** жұқа қабыршақтар, кремний карбиді, құрылым, кристалдану, рентгендік дифракция.

УДК 537.311:322

Д.И. Бакранова<sup>1</sup>, С.А. Кукушкин<sup>2</sup>, И.К. Бейсембетов<sup>1</sup>, А.В. Осипов<sup>2</sup>,  
К.Х. Нусупов<sup>1</sup>, Н.Б. Бейсенханов<sup>1</sup>, Б.К. Кенжалиев<sup>1</sup>, Б.Ж. Сейтов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан;  
<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

#### РЕНТГЕНОВСКИЙ АНАЛИЗ ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ПЛЕНОК SiC, ВЫРАЩЕННЫХ МЕТОДОМ ЗАМЕЩЕНИЯ АТОМОВ НА ПОДЛОЖКАХ НИЗКОДЕФЕКТНОГО КРЕМНИЯ

**Аннотация.** В работе на поверхности низкодефектных подложек кремния марки М-5168 синтезированы пленки SiC методом замещения атомов в решетке кремния. Методами рентгеновской дифракции, эллипсометрии и профилометрии исследованы шероховатость поверхности, фазовый состав, толщина и качество пленок SiC, синтезированных в высокоомном монокристаллическом кремнии n-типа ориентации (111) в смеси газов СО и SiH<sub>4</sub>. Показано, что синтезированные пленки содержат в себе монокристалл-лический и нанокристаллические слои 3C-SiC с кристаллитами β-SiC высокой степени совершенства. Размеры нанокристаллов карбида кремния в переходной области «пленка-подложка» составляют величины 3–5 нм. Размеры крупных кристаллов или монослоев карбида кремния составили величины в пределах 35–365 мкм при толщине пленок SiC ~ 95 – 110 нм и количестве вакансий Si ~ 5–6,5 %. Результаты могут быть использованы в нано- и микроэлектронике, в производстве солнечных элементов.

**Ключевые слова:** тонкие пленки, карбид кремния, структура, кристаллизация, рентгеновская дифракция.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 10 – 16

UDC 621.039.6, 537.523/.527

**D.G. Batryshev<sup>1,3</sup>, T.S. Ramazanov<sup>2</sup>, M.K. Dosbolayev<sup>2</sup>, M.T. Gabdullin<sup>3</sup>, Ye.Yerlanuly<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>Laboratory of Engineering Profile, Al-Farabi Kazakh National University;

<sup>2</sup>Scientific and Research Institute of Experimental and Theoretical Physics,  
Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan;

<sup>3</sup>National Nanotechnological Laboratory of Opened Type, Al-Farabi Kazakh National University  
Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabi avenue, 71

e-mail: [yerlanuly@physics.kz](mailto:yerlanuly@physics.kz)

## **SYNTHESIS OF CARBON NANOTUBES BY PLASMA ENHANCED CHEMICAL DEPOSITION METHOD IN RADIO-FREQUENCY CAPACITIVE DISCHARGE**

**Abstract.** In this work a synthesis of carbon nanotubes by plasma enhanced chemical deposition method in radio-frequency capacitive discharge is considered. As a result of the experiment, two samples were obtained – a silicon substrate with a small bright deposition on its surface and soot inside the heating element. These samples have been studied by using Ntegra Spectra Raman spectroscopy and scanning electron microscopy Quanta 3D 200i (SEM, FEI company, USA). The results of analysis indicate that carbon nanoparticles were deposited on the surface of the silicon substrate, whereas SEM and Raman spectroscopy analysis of soot indicates the presence of carbon fibers and nanotubes. The formation of CNTs and other carbonaceous nanostructures inside the quartz tube is explained by the fact that the heater material is nichrome (Ni + Cr) and the heating leads to evaporation of a small fraction of nickel, which served as a catalyst for CNT growth.

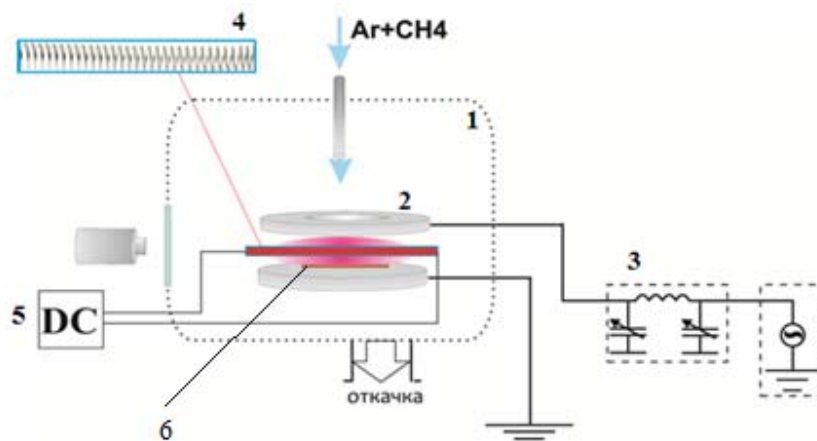
**Keywords:** carbon nanotubes, plasma chemical deposition, plasma.

### **Introduction**

Synthesis of carbon nanotubes (CNTs) by chemical vapor deposition with plasma enhanced (PECVD) is used to produce vertically aligned CNTs on substrates at relatively low temperatures [1,2]. In accordance with the type of gas discharge, there are various PECVD reactors of glow discharge [3,4], radio-frequency discharge (RF) 13.56 MHz [5-8], microwave discharge 2.56 GHz [9]. For synthesis of CNTs are also used other methods, such as electric arc spraying (EAS) of graphite [10], laser ablation [11], method of chemical vapor deposition (CVD) [12]. The advantage of PECVD method compare with other methods is an ability to control and obtain vertically aligned CNTs due to the electrical field of plasma. CNTs have a wide range of applications: in electronics (flexible displays, sensors, high-speed and efficient diodes and transistors) [13,14], in medicine (treatment of cancer, biocompatible functional drugs and markers) [15-17], in energy (creation of solar panels, fuel cells, effective cathode electrocatalyst) [18-20] and etc. Due to these facts, nowadays scientists pay great interest to the research and synthesis of CNTs. Thus, in this work a synthesis of carbon nanotubes by plasma enhanced chemical vapor deposition method at radio-frequency capacitive discharge is considered.

### **Experiment**

In this work the synthesis of CNTs by PECVD method was carried out in the experimental setup, the structure of which is shown in Figure 1. Experimental setup consists of working chamber (1), two parallel electrodes (2), where upper one is RF electrode and lower electrode is grounded, RF generator (3), heating element (4) – quartz tube with nichrome spiral, heater power source (5), pumping system and injection system of reaction gas into the working chamber.



1 – working chamber, 2 – electrodes, 3 – RF generator, 4 – heating element, 5 – heater power source, 6 – silicon substrate with a catalytic nanolayer

Figure 1 – Structure of experimental setup for synthesis of CNTs by PECVD method

On the basis of proposed scheme the experimental setup of combined radio-frequency discharge with a thermal heater was installed for the primary initiation of pyrolysis process. Figure 2 shows photos of working mode of RF plasma combustion with nichrome heater at different electrical parameters.

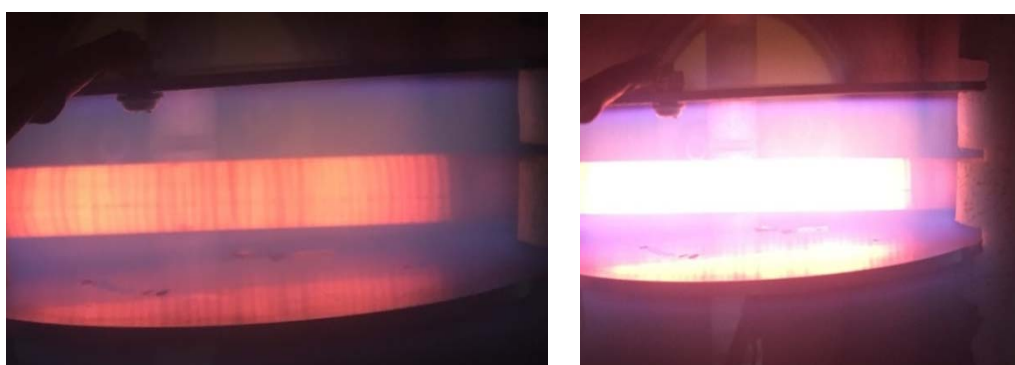
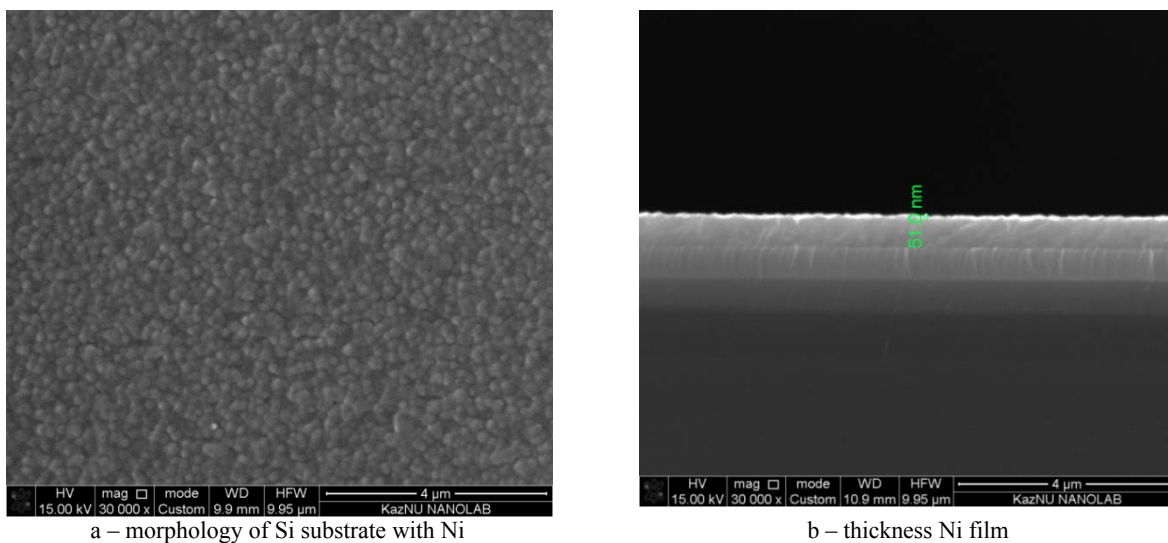


Figure 2 – PECVD process in working mode



a – morphology of Si substrate with Ni

b – thickness Ni film

Figure 3 – SEM analysis of silicon substrate with a catalytic nanolayer of nickel

It is known, that growth mechanism for CNTs can be explained by widely-accepted vapor-liquid-solid (VLS) model, where catalyst plays a main role for CNTs growth. Therefore, in order to synthesis of CNTs on silicon (Si) substrate a catalytic nickel (Ni) was deposited on the surface of silicon substrate (6) by electron-beam deposition. After deposition, obtained sample was investigated by scanning electron microscopy (SEM). SEM analysis shows that surface of silicon substrate has a uniform nickel nanolayer with thickness  $\sim 50$  nm. SEM images of Si substrate with Ni are shown in Figure 3.

Thus, the obtained silicon substrate with catalytic nanolayer is loaded into working chamber on the surface of lower electrode and then an air is pumped out from chamber, after vacuuming, a flow of working argon gas (Ar) is supplied up to the pressure of about 4 Tor and then heating element is switched on. As soon the heating element is reached the temperature of  $750^{\circ}\text{C}$ , a RF voltage is supplied to the upper electrode with power of 5-15 Wts by RF generator; as a result the argon RF plasma is ignited and held for 15 minutes. At this stage, nanoclusters (islands) of nickel are formed on the surface of the silicon substrate due to the plasma and heat treatments. These nanoclusters are the basis for the growth of CNTs on the VLS model. Indeed, Figure 4 shows a SEM image of resulting nickel nanoclusters on the surface of silicon substrate. The Figures 3 and 4 show, that before plasma and heat treatment, the surface of silicon substrate had a continuous nickel nanolayer, but after plasma and heat treatment process a separate islands of nickel nanoclusters with an average diameter of 20-70 nm were formed. According to the VLS model, the diameter of these nanoclusters determines the diameter of the synthesized CNT.

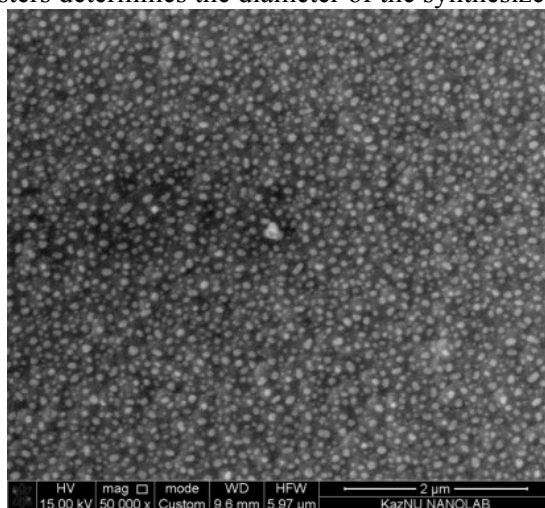


Figure 4 – SEM image of nickel nanoclusters on the surface of silicon substrate

For the formation of nickel islands on the surface of silicon substrate 15 minutes is enough, then for CNTs synthesis the working chamber was filled with an additional reaction carbonaceous gas – methane ( $\text{CH}_4$ ) up to the pressure of 5 Tor, the synthesis process takes 15-30 minutes.

Thus, two samples were obtained from the experiment – a silicon substrate with deposited carbon nanoparticles (Figure 6) and soot into the heating element (Figure 5).

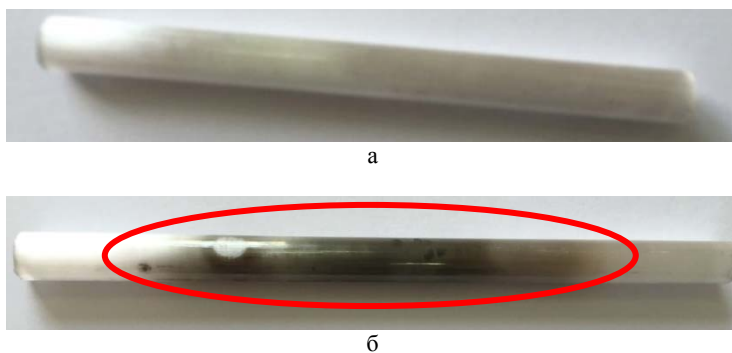


Figure 5 – Quartz tube before (a) and after (b) synthesis of CNTs by PECVD method

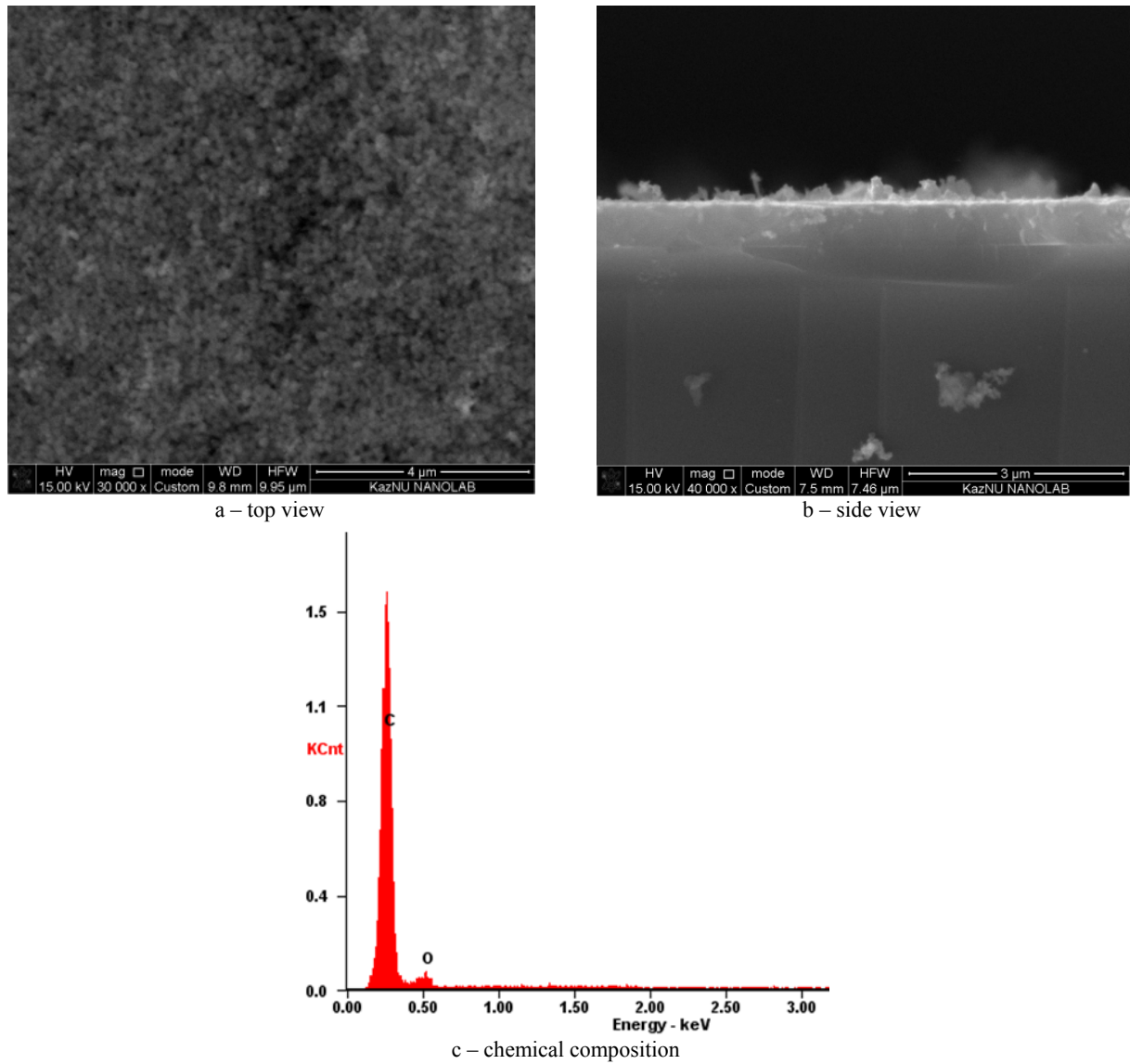


Figure 6 – SEM images and chemical composition of carbon nanoparticles deposited on the surface of silicon substrate

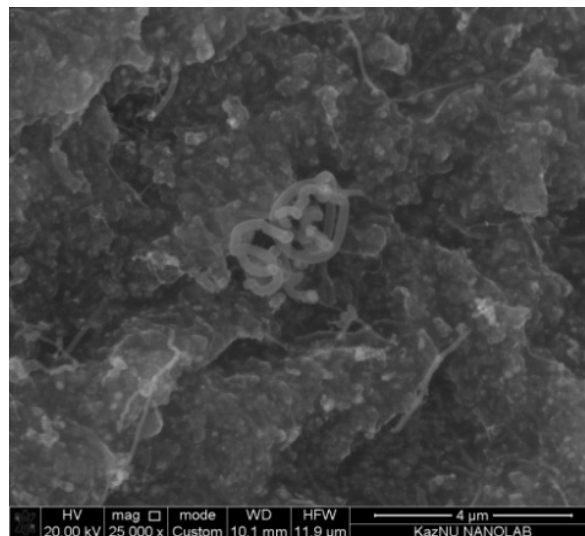


Figure 7 – SEM images of CNTs

The study of obtained samples by scanning electron microscope and Raman spectroscopy (RS) shows that formation of carbon nanoparticles during PECVD process is true and they are deposited on the surface of the silicon substrate. Figure 6 shows the SEM images of deposited carbon nanoparticles, while the SEM and RS analysis of soot indicate the presence of carbon fibers and nanotubes (Figure 7). Initially, the purpose of this work was to synthesize of CNTs on the surface of silicon substrate, but as obtained results show, there is no CNTs on silicon substrate. Perhaps, the reason is still low temperature of environment near the substrate for the growth of CNTs, but sufficient for the formation of nanoclusters of nickel.

Due to the high temperature of nichrome heater, the Ni nanoparticles were formed because of the thermal emission from heater, which led to CNTs growth and formation of soot in heating element.

Raman spectra of soot are shown in Figure 8. Raman spectrum shown in Figure 8a corresponds to the typical spectrum of multiwalled CNTs (MWCNTs) with main G, D and G' (2D) bands at frequencies of  $1591\text{ cm}^{-1}$ ,  $1360\text{ cm}^{-1}$  and  $2719\text{ cm}^{-1}$ , respectively, and also G+D band at frequency  $2950\text{ cm}^{-1}$ . G-band of this spectrum corresponds to a tangential vibrations of two adjacent carbon atoms in the CNT lattice, G' (or 2D) band corresponds to overtone of D-band, caused by two-phonon inelastic scattering. The presence of D-band and G'-band in the spectrum enables to indicate the defects in the structure and its perfection. Thus, to assess the structure the following formula of G and D bands intensity ratio can be used:  $L_a = 4,4 \cdot \frac{I_G}{I_D}$ , where  $L_a$  - area of homogeneous dispersion in the carbon structures. The value of bands intensity ratio for the spectrum is  $L_a = 4,7$ , indicating that the synthesized MWCNTs has not so bad quality. Also, the expressed 2D band in spectrum says about good quality of obtained CNTs. But fusion of D and G bands indicates the presence of amorphous phase in sample. Raman spectrum represented in Figure 8b is a typical to spectrum of Few-layer graphene (FLG). This is evidenced by the weak D band ( $1359\text{ cm}^{-1}$ ) and relatively narrow and intense G bands ( $1581,8\text{ cm}^{-1}$ ) and 2D ( $2733,6\text{ cm}^{-1}$ ).

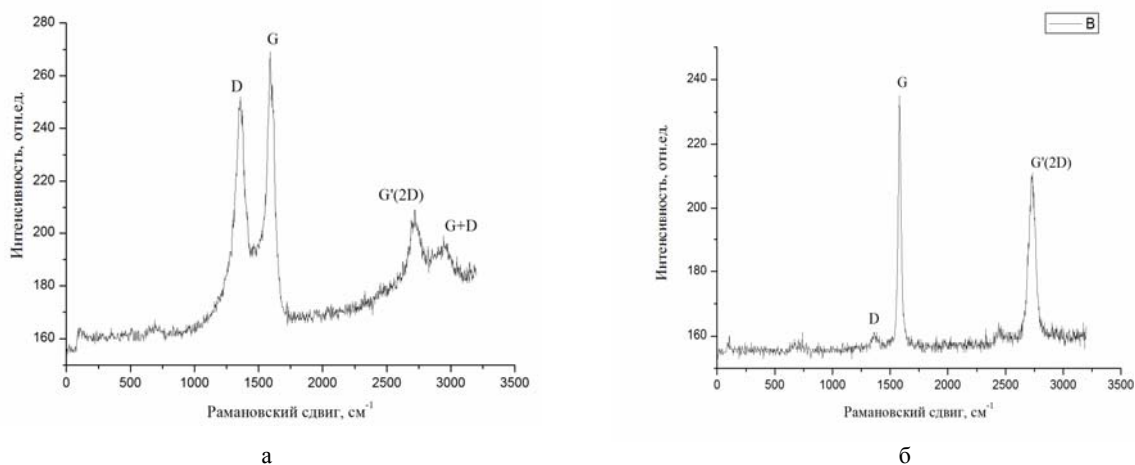


Figure 8 – Raman spectra of obtained CNTs by PECVD method

### Conclusion

In this work the synthesis of carbon nanotubes by plasma enhanced chemical vapor deposition method in a radio capacitive discharge was considered. As the result of the experiment two samples were produced – a silicon substrate with a small and white deposition on its surface and soot inside the heating element which have been investigated using SEM and RS analysis. The results of the analysis indicate that the carbon nanoparticles were deposited on the surface of silicon substrate, whereas SEM and RS analysis of soot indicate the presence of carbon fibers and nanotubes. The formation of CNTs and other carbon nanostructures inside the quartz tube is explained by the fact that the heater material is nichrome (Ni+Cr), during heating, a small fraction of nickel, which served as a catalyst for CNT growth, was allocated.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan under the grant 3214 / GF 4.

## REFERENCES

- [1] Man Y.H., Li Z.C., Zhang Z.J. Influence of plasma condition on carbon nanotube growth by rf-PECVD // Nano-Micro Letters. **2010**, V. 2, №1, P.37-41.
- [2] Wang H., Lin J., Huan C.H.A., Dong P., He J., Tang S.H., Eng W.K., Thong T.L.J., Controlled synthesis of aligned carbon nanotube arrays on catalyst patterned silicon substrates by plasma-enhanced chemical vapor deposition // Appl. Sur. Sci. **2001**. V. 181, №3, P. 248-254.
- [3] Chhowalla M., Teo K.B.K., Ducati C., Rupesinghe N.L., Amaratunga G.A.J., Ferrari A.C., Roy D., Robertson J., Milne W.I., Growth process conditions of vertically aligned carbon nanotubes using plasma enhanced chemical vapor deposition// J. Appl. Phys. **2011**, V. 90, P. 5308.
- [4] Lee D.H., Lee W.J., Kim S.O., Vertical Single-Walled Carbon Nanotube Arrays via Block Copolymer Lithography//Chem. Mater. **2009**, V. 21, №7, P. 1368-1974.
- [5] Kim U.J. Lee E.H., Kim J.M., Min Y., Kim E., Park W. Thin film transistors using preferentially grown semiconducting single-walled carbon nanotube networks by water-assisted plasma-enhanced chemical vapor deposition//Nanotechnology, **2009**, Vol. 20, №29, P.5201.
- [6] Shiratori Y., Hiraoka H., Takeuchi Y., Itoh S., M. Yamamoto, A One-step formation of aligned carbon nanotube field emitter sat 400°C//Ap. Phys. Lett. **2003**, V. 82, P.2485.
- [7] Gohier H.A., Minea T.M., Djouadi A.M., Granier A., Dubosc M., Limits of the PECVD process for single wall carbon nanotubes growth//Chem. Phys. Lett. **2006**, V. 42, №3. P.242-245.
- [8] Zhong G., Iwasaki T., Honda K., Furukawa Y., Ohdomari I., Kawarada H., Low Temperature Synthesis of Extremely Dense and Vertically Aligned Single-Walled Carbon Nanotubes // Jpn. J. Appl. Phys. **2005**, V. 44, №4A, P.1558.
- [9] Maschmann H.M.R., Amama P.B., Goyal A., Iqbal Z., Gat R., Fisher T.S., Parametric Study of Synthesis Conditions in Plasma-Enhanced CVD of High-Quality Single-Walled Carbon Nanotubes // Carbon, **2006**, V. 44, №1, P.10-18.
- [10] Абдуллин Х.А., Габдуллин М.Т., Рамазанов Т.С., Батрышев Д.Г., Исмаилов Д.В., Щур Д.В., Получение углеродных нанотрубок в дуговом разряде в среде дионизированной воды без каталитическим методом // Вестник КазНУ, физическая, **2015**, Т.53, №2, С. 68-72.
- [11] Thessetal A., Lee R, Nikolaev P, Dai H., Petit P., Robert J., Xu C., Lee Y. H., Kim S G., Rinzler A G, Colbert D T., Scuseria G E., Tomanek D., Fischer J E., Smalley R E. Crystalline Ropes of Metallic Carbon Nanotubes // Science, **1996**. V. 273, P. 483-487.
- [12] Abdullin Kh.A., Batryshev D.G., Chihray E.V., Gabdullin M.T., Ismailov D.V., Kim B.G., Togambaeva A.K., Obtaining multi walled and single-walled carbon nanotubes and nano composites // Canadian J. Phys. **2014**, V. 92, №. 7/8, P. 813-818.
- [13] Xiao L., Chen Zh, Feng Ch., Liu L., Bai Z.-Q, Wang Y., Qian L., Zhang Y., Li Q., Jiang K., Fan Sh., Stretchable, Transparent Carbon Nanotube Thin Film Loudspeakers // Nano Lett., **2008**, Vol. 8, №12, P. 4539–4545.
- [14] Zheng Q., Jiang Q., Multiwalled Carbon Nanotubes as Gigahertz Oscillators // Phys. Rev. Lett., **2002**, V. 88–045503.
- [15] Chen J., Chen S., Zhao X., Kuznetsova L.V., Wong S.S., Ojima I. Functionalized single-walled carbon nanotubes as rationally designed vehicles for tumor-targeted drug delivery // J. Am. Chem. Soc. **2008**. V. 49, no. 130. P. 16778–16785.
- [16] Devitt M.R. Tumor targeting with antibody-functionalized, radio labeled carbon nanotubes // The J. of nuclear medicine. 2007. V. 48, no. 7. P. 1180–1189.
- [17] Kateb B., Yamamoto V., Alizadeh D., Zhang L., Manohara H.M., Bronikowski M.J., Badie B. Multi-walled carbon nanotube (MWCNT) synthesis, preparation, labeling, and functionalization // Immunotherapy of Cancer, Methods in Molecular Biology. **2010**. No. 651. P. 307–317.
- [18] Ye Y., Ahn C.C., Witham C., Fultz B., Liu J., Rinzler A.G., Colbert D., Smith K.A., Smalley R.E., Hydrogen adsorption and cohesive energy of single-walled carbon nanotubes // Applied Physics Letters **1999**, 74, (16), 2307-2309.
- [19] Xu W.C., Takahashi K., Matsuo Y., Hattori Y., Kumagai M., Ishiyama S., Kaneko K., Iijima S., Investigation of hydrogen storage capacity of various carbon materials // International Journal of Hydrogen Energy **2007**, 32, (13), 2504-2512.
- [20] Panella B., Hirscher M., Roth S., Hydrogen adsorption in different carbon nanostructures. //Carbon, **2005**, Vol.43, №10, P. 2209-2214.

Д.Г. Батрышев<sup>1,3</sup>, Т.С. Рамазанов<sup>2</sup>, М.К. Досболаев<sup>2</sup>, М.Т. Габдуллин<sup>3</sup>, Е. Ерланұлы<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Инженерлік бейіндегі зертхана, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

<sup>3</sup>Ашық түрдегі Ұлттық нанотехнологиялық зертхана, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ,

Қазақстан, 050040 Алматы, әл-Фараби, 71

**ЖОҒАРЫ ЖИЛІКТІ СЫЙЫМДЫЛЫҚ РАЗРЯДЫНДА ГАЗДЫҚ ФАЗАДАН  
ПЛАЗМОХИМИЯЛЫҚ ӘДІСІМЕН КӨМІРТЕК НАНОТҮТІКШЕЛЕРІН СИНТЕЗДЕУ**

**Аннотация.** Бұл жұмыс жоғары жиілікті сыйымдылықты разрядта газдық фазадан плазмохимиялық әдісімен көміртек нанотүтікшелерін синтездеу тақырыбына арналған. Эксперимент нәтижесінде екі үлгі алынды – беттік қабатында қандай да бір ашық қондырмасы бар кремнийлік төсем және қыздыру элементінің ішіндегі күйе. Аталған үлгілер Рамандық Ntegra SPECTRA спектроскопиясымен және Quanta 3D 200i (SEM, FEI company, USA) электроды сканерлеуші микроскопия көмегімен зерттелді. Анализ нәтижелері кремнийлі төсемнің беттік қабатында көміртекті нанобөлшектердің қондырылғанын, ал күйенің ЭСМ және РС анализі көміртекті талшықтардың және нанотүтікшелердің бар екендігін дәлелдейді. Кварцтық түтікшенің ішінде КНТ және басқа да көміртекті нанокұрылымдардың пайда болуы қыздырғыш нихром (Ni+Cr) материалынан болғанымен түсіндіріледі. Қыздырғыштың температурасын жоғарылатқанда материалдан КНТ өсуіне себеп болатын никель катализаторы бөлінеді.

**Түйін сөздер:** көміртекті нанотүтікшелер, плазмохимиялық қондыру, плазма.

УДК 621.039.6, 537.523/.527

Д.Г. Батрышев<sup>1,3</sup>, Т.С. Рамазанов<sup>2</sup>, М.К. Досболаев<sup>2</sup>, М.Т. Габдуллин<sup>3</sup>, Е. Ерланулы<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Лаборатория инженерного профиля, КазНУ им. аль-Фараби,

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. аль-Фараби,

<sup>3</sup>Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, 050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71

### СИНТЕЗ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК ПЛАЗМОХИМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ОСАЖДЕНИЯ ИЗ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЕМКОСТНОМ РАЗРЯДЕ

**Аннотаци.** Данная работа посвящена синтезу углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде. В результате эксперимента были получены два образца – кремниевая подложка с неким светлым осаждением на ее поверхности и сажа внутри нагревательного элемента, которые были исследованы с помощью Рамановской спектроскопией Ntegra SPECTRA и сканирующей электронной микроскопией Quanta 3D 200i (SEM, FEI company, USA). Результаты анализа свидетельствуют, что на поверхности кремниевой подложки были осаждены углеродные наночастицы, тогда как СЭМ и РС анализ сажи свидетельствует о наличии углеродных волокон и нанотрубок. Образование УНТ и других, углеродосодержащих наноструктур внутри кварцевой трубки объясняется с тем, что материалом нагревателя является нихром (Ni+Cr), при нагревании которого из материала выделялась малая доля никеля, который служил катализатором роста УНТ.

**Ключевые слова:** углеродные нанотрубки, плазмохимическое осаждение, плазма.

#### Сведения об авторах:

Батрышев Д.Г. – ст. преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 123 каб., [batryshev@physics.kz](mailto:batryshev@physics.kz);

Рамазанов Т.С. – Профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 332 каб., [ramazan@physics.kz](mailto:ramazan@physics.kz);

Досболаев М.К. – Ассоциированный профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Алматинская обл., поселок Кокозек, ул. Жибек-жолы, д.29а Аль-Фараби 71а, физ-тех, 125 каб., [merlan@physics.kz](mailto:merlan@physics.kz);

Габдуллин М.Т. – Ст. преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 427 каб., [gabdullin@physics.kz](mailto:gabdullin@physics.kz);

Ерланулы Е. – Инженер, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 120 каб., [erlanuly@physics.kz](mailto:erlanuly@physics.kz)



## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 17 – 20

A.S. Demyanova<sup>1</sup>, A.N. Danilov<sup>1</sup>, N. Burtebayev<sup>2</sup>, D.M. Janseitov<sup>2,3</sup>,  
Zh. Kerimkulov<sup>2</sup>, D.K. Alimov<sup>2</sup>, Y.S. Mukhamejanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> NRC Kurchatov Institute, Moscow, Russia;

<sup>2</sup> Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan;

<sup>3</sup> Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

e-mail: [janseit.daniar@gmail.com](mailto:janseit.daniar@gmail.com)

EXOTIC STATES OF  $^{13}\text{C}$  NUCLEI WITH ABNORMAL RADII

**Abstract.** Differential cross-sections of the elastic and inelastic  $\alpha+^{13}\text{C}$  scattering were measured at  $E(\alpha) = 90$  MeV. The root mean-square radii ( $\langle R_{\text{rms}} \rangle$ ) of  $^{13}\text{C}$  nucleus in the states: 8.86 ( $1/2^-$ ), 3.09 ( $1/2^+$ ) and 9.90 ( $3/2^-$ ) MeV were determined by the Modified diffraction model (MDM). The radii of the first two levels are enhanced compared to that of the ground state of  $^{13}\text{C}$ , confirming the suggestion that the 8.86 MeV state is an analogue of the Hoyle state in  $^{12}\text{C}$  and the 3.09 MeV state has a neutron halo. Some indications to the abnormally small size of the 9.90 MeV state were obtained.

**Key words:** radii of excited states, modified diffraction model, neutron halo.

**Introduction.** In the last few years evidences of the existence of nuclei with abnormally large radii of excited states were obtained. In our previous experiments on inelastic scattering  $^{13}\text{C}$  ( $\alpha, \alpha^*$ ) at energies  $E(\alpha) = 29$  and 65 MeV [1,2], we have seen three of the excited state of 3.09 MeV ( $1/2^+$ ), 8.86 MeV ( $1/2^-$ ) and 9.90 MeV ( $3/2^-$ ), radii of which differ from the ground state. Because of the importance of this result, a new dimension on the scattering of alpha particles  $^{13}\text{C}$  were carried out at the energy  $E(\alpha) = 90$  MeV.

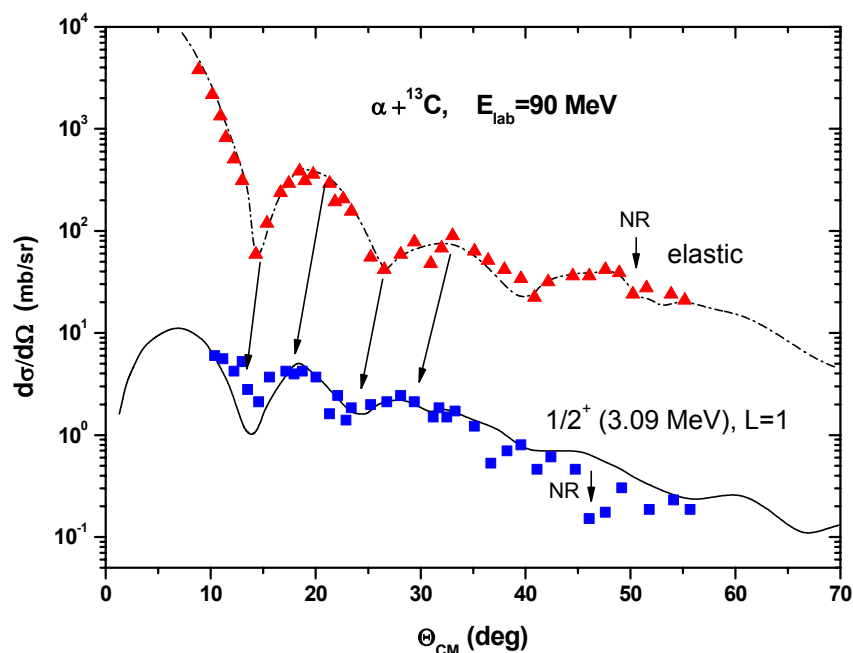


Figure 1 - The differential cross-sections  $\alpha+^{13}\text{C}$  of elastic and inelastic ( $1/2, 3.09$  MeV) scattering at  $E(\alpha)=90$  MeV. Optical model calculation results are shown by the dashed curve. The solid line corresponds to calculations by DWBA ( $L=1$ ). Positions rainbow lows are marked by vertical arrows

**Discussion and results.** The differential cross-sections of elastic and inelastic scattering of  $\alpha+^{13}\text{C}$  were measured in the K-130 cyclotron of the University of Jyväskylä, Finland. The data for the elastic and inelastic scattering (3.09 MeV), one of the most interesting of the excited state of  $^{13}\text{C}$  nucleus), are presented in Figure 1. The diffraction minima and maxima (connected by straight lines) must be in phase if the elastic and inelastic diffraction radii are equal. The observed shift of the diffraction minima and maxima in the scattering cross-section in the direction of smaller angles in the inelastic scattering points to the increase in the radius of 3.09 MeV excited state as compared with the ground state. Estimation of the mean square radius was carried out by three independent methods: the modified diffraction model (MDM) [2], the method of the nuclear rainbow (MNR) [3, 4] and the method of using the asymptotic normalization coefficients (ANC) [5, 6]. Of the three approaches similar values, confirming the validity of the used methods, were obtained (Table 1) and confirm the existence of the neutron halo in the first excited states of the  $^{13}\text{C}$  nucleus [1, 5].

Table 1 -  $R_{\text{rms}}$  mean square radii for different state of  $^{13}\text{C}$  nucleus

$E^*$ , MeV, $J^\pi$	Structure	MDM, 65 MeV	MNR, 65 MeV	ANC, 65 MeV	MDM, 90 MeV	MNR, 90 MeV
0.00, $1/2^-$	Shell model					
3.09, $1/2^+$	Neutron halo	$2.98 \pm 0.09^*$	$\geq 2.7$ [1]	$2.62 \pm 0.10$ [5] $2.68$ [7], теория	$2.882.62 \pm 0.19^*$	$\geq 2.6^*$
8.86, $1/2^-$	Diluted cluster	$2.68 \pm 0.12$ [1]	$\geq 2.5^*$		$2.632.62 \pm 0.16^*$	$\geq 2.5^*$
9.90, $3/2^-$	Compressed cluster	$2.02 \pm 0.14$ [1]			$1.76 \pm 0.23$ [8]	
*this work						

The differential cross-section of inelastic scattering of  $\alpha+^{13}\text{C}$  excited state  $1/2^-$  (8.86 MeV) at  $E(\alpha) = 65$  and 90 MeV are shown in Figure 2. As can be seen from this figure, the observed identity of the structure of the front angles (up to 45 degrees) confirms diffraction origin of the oscillations and the similarity of the diffraction radii measured at different energies. Minima at  $q \approx 2.5 \text{ fm}^{-1}$  in the experimental data at 65 MeV and  $q \approx 2.0 \text{ fm}^{-1}$  data at 90 MeV were identified as rainbow minimum (Airy). The use of MDM and MNR methods in the state of 8.86 MeV showed that the latter has increased radius (Table 1), close to the mean square radius of the Hoyle state ( $0^+$ , 7.65 MeV) in the  $^{12}\text{C}$  nucleus [2].

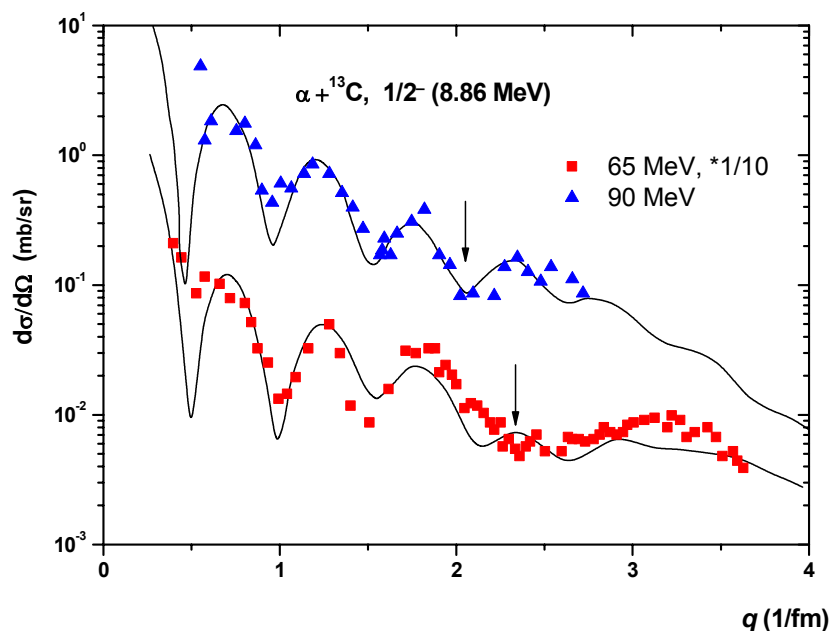


Figure 2 - the differential cross-section of inelastic scattering of  $\alpha+^{13}\text{C}$  excited state  $1/2^-$  (8.86 MeV) at energies 65 and 90 MeV, depending on the  $q$  momentum transfer. Rainbow lows items are marked with arrows

An evaluation by MDM has given the state radius value of  $3/2^-$  (9.90 MeV), which proved to be less than that of the ground state of  $^{13}\text{C}$  nucleus (Table 1). This conclusion is confirmed by comparing the various inelastic scattering cross-sections with the transfer of angular momentum  $L=2$  (Figure 3). The diffraction structure for the differential cross-section of the  $3/2^-$  (9.90 MeV) is shifted to larger angles, indicating its smaller radius. This result contradicts the predictions that have been proposed in [9], according to which the state  $3/2^-$  (9.90 MeV) must have a radius comparable to the Hoyle state. The physical reason for this decrease of the nuclei size is not yet clear.

Thus, the dilute state at 3.09 and 8.86 MeV and compact at 9.90 MeV coexist in a  $^{13}\text{C}$  nucleus with other normal radii states.

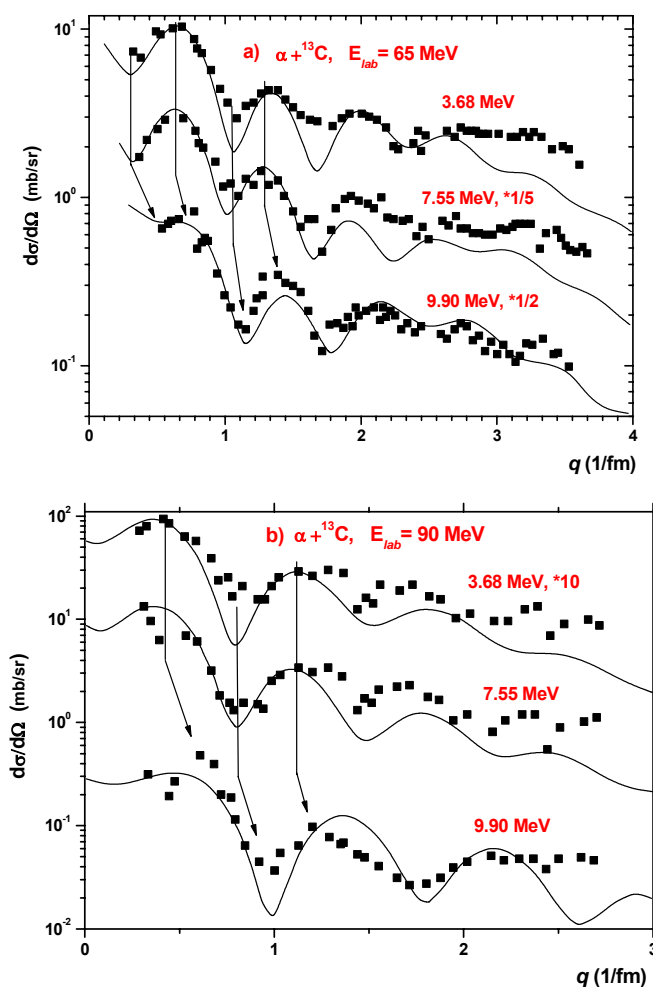


Figure 3 - the differential cross-section of inelastic scattering  $^{13}\text{C}(\alpha,\alpha)^{13}\text{C}^*$  at energies 65 and 90 MeV, at  $L=2$  for states 3.68 MeV, 7.55 MeV and 9.9 MeV of  $^{13}\text{C}$  nucleus depending on the  $q$  momentum transfer. The vertical line are drawn through the minima and maxima of the differential cross-sections of the excited levels of 3.68 and 7.55 MeV. The corresponding minima and maxima of sections of 9.9 MeV state are indicated by the arrows. The solid curves correspond to calculations by DWBA ( $L=2$ ). The data are taken from [8]

The work was supported in part by grants from the Russian Foundation for Basic Research 14-02-00560 and 15-02-01503 and grant of MES RK №1640 ГФ4.

#### REFERENCES

- [1] Demyanova A.S. et al., Spectroscopy of exotic states of  $^{13}\text{C}$  // EPJ Web of Conferences 66, 02027 (2014).
- [2] Danilov A.N. et al., Determination of nuclear radii for unstable states in  $^{12}\text{C}$  with diffraction inelastic scattering // Phys. Rev. C 80, 054603 (2009).

[3] Ohkubo S. and Hirabayashi Y., Evidence for strong refraction of  $^3\text{He}$  in an  $\alpha$ -particle condensate // Phys. Rev. C 75, 044609 (2007).

[4] Demyanova A.S. et al., Radii of cluster states in  $^{11}\text{B}$  and  $^{13}\text{C}$  // Int. J. Mod. Phys. E 20, No 4, 915 (2011).

[5] Liu Z.H. et al., Asymptotic normalization coefficients and neutron halo of the excited states in  $^{12}\text{B}$  and  $^{13}\text{C}$  // Phys. Rev. C 64, 034312 (2001).

[6] Belyaeva T.L. et al., Determination of neutron halo radii in the first excited states of  $^{13}\text{C}$  and  $^{11}\text{Be}$  with the asymptotic normalization coefficients method // Phys. Rev. C 90, 064610-1 (2014).

[7] Yamada T. and Funaki Y. Cluster states and alpha particle condensation in  $^{13}\text{C}$  // Int. J. Mod. Phys. E 17, 2101 (2008).

[8] Оглоблин А.А. и др., Возможное наблюдение в ядре  $^{13}\text{C}$  возбужденного состояния с аномально малым радиусом // Письма в ЖЭТФ, V. 102, No 4, 199 (2015).

[9] Furutachi N., Kimura M. Bent three- $\alpha$  linear-chain structure of  $^{13}\text{C}$  // Phys. Rev. C 83, 021303 (2011).

А.С. Демьянова<sup>1</sup>, А.Н. Данилов<sup>1</sup>, Н. Буртебаев<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>2,3</sup>,  
Ж. Керимкулов<sup>2</sup>, Д.К. Алимов<sup>2</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ҰЗО Курчатов Институты, Мәскеу, Ресей;

<sup>2</sup> Ядролық Физика Институты, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup> Еуразия Ұлттық Университеті, Астана, Қазақстан

### $^{13}\text{C}$ ЯДРОСЫНЫҢ ЭКЗОТИКАЛЫҚ КҮЙЛЕРІНІҢ РАДИУСТАРЫ

**Аннотация.** Осы жұмыста 90 МэВ энергияларда  $\alpha$ -бөлшектердің  $^{13}\text{C}$  ядроларында серпімді және серпімсіз шашырауының дифференциалды кималарының нәтижелері көрсетілген. Модификацияланған дифракциялық модел шеңберінде  $^{13}\text{C}$  ядросының 8.86 (1/2<sup>-</sup>), 3.09 (1/2<sup>+</sup>) және 9.90 (3/2<sup>-</sup>) МэВ қозған күйлерінің орташа квадратталған радиустары ( $\langle R_{\text{rms}} \rangle$ ) есептелді.  $^{13}\text{C}$  ядросының қозған бірінші екі күйлердің радиустары, негізгі күй радиусымен салыстырғанда, анағұрлым үлкен. Қосымша, қозған 9.90 МэВ күйінің радиусы үшін аномальды кіші шамасы алынды.

**Тірек сөздер:** қозған күйлердің радиустары, модификацияланған дифракциялық модель, нейтрондық гало.

УДК 539.171

А.С. Демьянова<sup>1</sup>, А.Н. Данилов<sup>1</sup>, Н. Буртебаев<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>2,3</sup>,  
Ж. Керимкулов<sup>2</sup>, Д.К. Алимов<sup>2</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> НИЦ Курчатовский Институт, Москва, Россия;

<sup>2</sup> Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан;

<sup>3</sup> Евразийский Национальный Университет, Астана, Казахстан

### ЭКЗОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ЯДРА $^{13}\text{C}$ С АНОМАЛЬНЫМИ РАДИУСАМИ

**Аннотация.** В данной работе представлены результаты измерения дифференциальных сечения упругого и неупругого рассеяния  $\alpha+^{13}\text{C}$  при  $E(\alpha) = 90$  МэВ. В рамках модифицированной дифракционной модели (МДМ) определены среднеквадратичные радиусы ( $\langle R_{\text{rms}} \rangle$ ) возбужденных состояний: 8.86 (1/2<sup>-</sup>), 3.09 (1/2<sup>+</sup>) и 9.90 (3/2<sup>-</sup>) МэВ ядра  $^{13}\text{C}$ . Радиусы первых двух уровней увеличены по сравнению с радиусом основного состояния ядра  $^{13}\text{C}$ , что подтверждает предположение, что состояние 8.86 МэВ является аналогом состояния Хойла в ядре  $^{12}\text{C}$  и состояние 3.09 МэВ имеет нейтронное гало. Дополнительно, получены аномально небольшие размеры для состояния 9.90 МэВ.

**Ключевые слова:** радиусы возбужденных уровней, модифицированная дифракционная модель, нейтронное гало.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 21 – 24

UDC 517.957.6

M.M. Sarsengeldin<sup>1</sup>, M.M. Slyamkhan<sup>2</sup>, N.T. Bizhigitova<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan Department of mathematics and natural sciences  
[mercy@mail.ru](mailto:mercy@mail.ru)

## ANALYTICAL SOLUTION OF HEAT EQUATION WITH MOVING BOUNDARY NOT TANGENT TO AXIS BY HEAT POLYNOMIALS

**Abstract.** It was found the analytical solution of heat equation with moving boundary with a method of heat polynomials for finding the coefficients.

**Key words:** Integral Error Functions.

### Introduction

It's well known that a wide range of transient phenomena in fields of low-temperature plasma, filtration and other evolutionary processes which are associated with phase transformations lead to the necessity of solving heat and mass transfer problems with free moving inter-phase boundaries. Development of analytical methods of solution of free boundary problems are very important for analysis of dynamics of mentioned phenomena specifically phenomena occurring in electrical contacts.

The well-known analytical method is based on the representation of a solution in the form of heat potential with following reduction of the given problem to integral equation [1]. However if the domain with moving boundary degenerates into a point at the initial time, the integral equations become singular and cannot be solved by Picard's iteration method. Asymptotic properties of such equations have been investigated in [2]. Auto-model case when the boundary  $\alpha(t)$  is moving according to the law  $\alpha(t) = c\sqrt{t}$  is considered in [3] where analytical solution is found. Solution of the problem with  $\alpha(t) = ct$  is represented by Heat potentials method in [4]. In this study we use heat polynomials which are elaborated from Integral Error Functions and its properties to solve given boundary value problem.

### Problem statement

*Definition:* The class functions  $M_\beta$  is defined by formula:  $f(t) \in M_\beta(h)$  if  $f(t)$  is continuous on the interval  $(0, t)$  and  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^\beta} = h = const$ , where  $\beta$  is any real number.

The main problem can be formulated as following. It is required to find the solution of the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

in the domain  $D: (t > 0, 0 < x < \alpha(t))$ , where  $\alpha(t) = ct$ , degenerates at the initial time:  $\alpha(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  and satisfies the initial condition

$$u(0, 0) = 0 \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$u(0, t) = \varphi(t) \quad (3)$$

$$u(\alpha(t), t) = U - const \quad (4)$$

**Problem solution:**

Solution of equation (1) can be represented in the following form

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \cdot t^n \left[ i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{x}{2a\sqrt{t}} + i^{2n} \operatorname{erfc} \left( \frac{-x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] + B_n \cdot t^{\frac{2n+1}{2}} \left[ i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - i^{2n+1} \operatorname{erfc} \left( \frac{-x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

or in the form of heat polynomials

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{2n} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m} t^m \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m+1} t^m \beta_{2n+1,m} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) = & A_0 \beta_{0,0} + \\ & A_2 (x^2 \beta_{2,0} + t \beta_{2,1}) + \\ & A_4 (x^4 \beta_{4,0} + x^2 t \beta_{4,1} + t^2 \beta_{4,2}) + \dots \\ & + A_{2n} (x^{2n} \beta_{2n,0} + x^{2n-2} t \beta_{2n,1} + \dots + x^2 t^{n-1} \beta_{2n,n-1} + t^n \beta_{2n,n}) + \dots \\ & A_1 x \beta_{1,0} + \\ & A_3 (x^3 \beta_{3,0} + x t \beta_{3,1}) + \\ & + A_5 (x^5 \beta_{5,0} + x^3 t \beta_{5,1} + x t^2 \beta_{5,2}) + \dots \\ & + A_{2n+1} (x^{2n+1} \beta_{2n+1,0} + x^{2n-1} t \beta_{2n+1,1} + \dots + x^3 t^{n-1} \beta_{2n+1,n-1} + x t^n \beta_{2n+1,n}) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\beta(n, m) = \frac{1}{2^{n+m-1} m!(n-2m)!}$$

It's easy to see that if we use expression (6) for  $x=0$ , expand function  $\varphi(t)$  into Maclaurin's series and combine like terms on the left side in (3), then we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \beta_{2n,n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

which implies following formula for  $A_{2n}$

$$A_{2n} \beta_{2n,n} = \varphi_n \quad (8)$$

where  $\varphi_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$

Utilizing (7) for  $x = ct$  from (5) we have

$$\begin{aligned} u(ct, t) = & A_0 \beta_{0,0} + \\ & A_2 (c^2 t^2 \beta_{2,0} + t \beta_{2,1}) + \\ & A_4 (c^4 t^4 \beta_{4,0} + c^2 t^3 \beta_{4,1} + t^2 \beta_{4,2}) + \dots \\ & + A_{2n} (c^{2n} t^{2n} \beta_{2n,0} + c^{2n-2} t^{2n-1} \beta_{2n,1} + \dots + c^2 t^{n+1} \beta_{2n,n-1} + t^n \beta_{2n,n}) + \dots \\ & A_1 c t \beta_{1,0} + \\ & A_3 (c^3 t^3 \beta_{3,0} + c t^2 \beta_{3,1}) + \\ & + A_5 (c^5 t^5 \beta_{5,0} + c^3 t^4 \beta_{5,1} + c t^3 \beta_{5,2}) + \dots \\ & + A_{2n+1} (c^{2n+1} t^{2n+1} \beta_{2n+1,0} + c^{2n-1} t^{2n} \beta_{2n+1,1} + \dots + c^3 t^{n+2} \beta_{2n+1,n-1} + c t^{n+1} \beta_{2n+1,n}) + \dots = U \end{aligned} \quad (9)$$

If we expand  $\psi(t)$  into Maclaurin's series combine like terms of left side and then take derivatives of both sides of (8) it is easy to derive from below relations following recurrent formula (10) for coefficient

$$\begin{aligned}
 &A_{2n+1} \\
 &A_0\beta_{0,0} = U \\
 &A_1c\beta_{1,0} + A_2\beta_{2,1} = 0 \\
 &A_2c^2\beta_{2,0} + A_3c\beta_{3,1} + A_4\beta_{4,2} = 0 \\
 &A_3c^3\beta_{3,0} + A_4c^2\beta_{4,1} + A_5c\beta_{5,2} + A_6\beta_{6,3} = 0 \\
 &A_4c^4\beta_{4,0} + A_5c^3\beta_{5,1} + A_6c^2\beta_{6,2} + A_7c\beta_{7,3} + A_8\beta_{8,4} = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &A_n c^n \beta_{n,0} + A_{n+1} c^{n-1} \beta_{n+1,1} + A_{n+2} c^{n-2} \beta_{n+2,2} + \dots + A_{2n-1} c \beta_{2n-1,n-1} + A_{2n} \beta_{2n,n} = 0 \\
 &A_{n+1} c^{n+1} \beta_{n+1,0} + A_{n+2} c^n \beta_{n+2,1} + A_{n+3} c^{n-1} \beta_{n+3,2} + \dots + A_{2n+1} c \beta_{2n+1,n} + A_{2n+2} \beta_{2n+2,n+1} = 0 \\
 &A_{2n+1} c \beta_{2n+1,n} = -A_{2n+2} \beta_{2n+2,n+1} - \sum_{m=n+1}^{2n} A_m c^{2n+2-m} \beta_{m,m-n-1}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

**Convergence**

Let's take  $t = t_0$  to prove convergence of series (3) in the interval  $0 < x < \alpha(t)$ . From (8) and (10) we get following even and odd coefficients respectively

$$A_{2n} = \frac{\varphi_n}{\beta_{2n,n}} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot 2^{3n-1} \cdot n!(2n-2n)! = \varphi^{(n)} \cdot 2^{3n-1}$$

$$A_{2n+1} = \frac{1}{c\beta_{2n+1,n}} \left[ -A_{2n+2} \varphi^{(n)} \cdot 2^{3n-1} \beta_{2n+2,n+1} - \sum_{m=n+1}^{2n} A_m c^{2n+2-m} \cdot \beta_{m,m-n-1} \right]$$

where

$$\begin{aligned}
 \beta_{2n+2,n+1} &= \frac{1}{2^{3n+2} (n+1)! (2n+2-2(n+1))!}, \\
 \beta_{m,m-n-1} &= \frac{1}{2^{2m-n-2} (m-n-1)! (2n+2-m)!}
 \end{aligned}$$

To prove convergence of (3) we have to demand convergence of

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{2n+1} \sum_{m=0}^n (ct_0)^{2n-2m+1} t_0^m \beta_{2n+1,m} \right\} \text{ and } \sum_{m=0}^n (ct_0)^{2n-2m+1} t_0^m \beta_{2n+1,m} \text{ respectively}$$

By d'Alambert's convergence test from last sentence of series (9) we get

$$\begin{aligned}
 \frac{c^{2n+1} \beta_{2n+1,0}}{c^{2n-1} \beta_{2n+1,1}} &= c^2 \frac{2^{2n} \cdot (2n+1)!}{2^{2n+1} (2n-1)!} = c^2 \frac{1}{2} \cdot (2n)(2n+1) = c^2 \cdot n(2n+1) < 1 \\
 &\Rightarrow c < \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}
 \end{aligned}$$

For  $t = t_0$  series (3) is bounded and let

$$A_{2n+1} t_0^{n+1} \sum_{m=0}^n t_0^m \beta_{2n+1,n-m} c^{2m+1} < C_1$$

$$A_{2n+1} < \frac{C_1}{t_0^{n+1} \sum_{m=0}^n t_0^m \beta_{2n+1, n-m} c^{2m+1}}$$

For any value  $t < t_0$  let's multiply both sides of latter expression by

$$t^{n+1} \sum_{m=0}^n t^m \beta_{2n+1, n-m} c^{2m+1}$$

$$A_{2n+1} t^{n+1} \sum_{m=0}^n t^m \beta_{2n+1, n-m} c^{2m+1} < C_1 \frac{t^{n+1} \sum_{m=0}^n t^m \beta_{2n+1, n-m} c^{2m+1}}{t_0^{n+1} \sum_{m=0}^n t_0^m \beta_{2n+1, n-m} c^{2m+1}} < C_1 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{n+1}$$

Take the sum of the both sides

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \sum_{m=0}^n t^{2n+1} \beta_{2n+1, n-m} c^{2m+1} < C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{n+1}$$

Thus convergence is proved

### Conclusion

Problem (1)-(4) is solved by heat polynomials. Coefficients  $A_{2n}$ ,  $A_{2n+1}$  can be calculated from recurrent formulas (8) and (10) respectively. Convergence of solution series is proved.

In the second problem, we introduced the heat equation with a moving boundary, which degenerates at the initial moment of time represented in explicit analytic form. The developed method is based on the integral functions of the error and its properties. The main idea was to find the coefficients of the linear combination of the integral error functions that a priori satisfy the heat equation.

### REFERENCES

- [1] Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. Gostehteorizdat. Moskva, 1951  
 [2] Harin S.N. // Teplovye processy v jelektricheskikh kontaktah i svyazannye s nimi singuljarnye integral'nye uravneniya. Aforeferat dissertacii. Alma-Ata, 1968  
 [3] Harin S.N. // O teplovyh zadachah s podvizhnoj granicej. Izvestija AN Kaz SSR, ser. fiz.- mat. nauk, № 3, 1965  
 [4] S.N. Kharin, M.M. Sarsengeldin. Analytical solution of heat equation with moving boundary not tangent to coordinate axis. Herald of NAS RK, 2011, 3-rd ed. Phys-math, pp. 3-8

М.М. Сарсенгельдин, М.М. Слямхан, Н.Т. Бижигитова

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ НЕ КАСАЮЩИЕСЯ ОСИ ТЕПЛОВЫМИ ПОЛИНОМАМИ

**Аннотация:** Найдено аналитическое решение уравнения теплопроводности с движущей границей методом тепловых полиномов для нахождения коэффициентов.

**Ключевые слова:** Интегральная Функция Ошибок.

М.М. Сарсенгельдин, М.М. Слямхан, Н.Т. Бижигитова

### ҚОЗҒАЛМАЛЫ ШЕКАРАСЫ БАР ОСЬКЕ ТИМЕЙТІН ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕНДЕУІНІҢ ЖЫЛУ КӨПМҮШЕЛЕРІ АРҚЫЛЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШІМІ

**Аннотация:** Қозғалмалы шекарасы бар жылуөткізгіштік тендеуінің жылу көпмүшелері арқылы аналитикалық шешімі және жылуөткізгіштік тендеуін қаңағатандыратын коэффициенттері табылды.

**Тірек сөздер:** Интегралды Қателіктер Функциясы.



## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 25 – 31

UDC: 538.958

**K.K. Dikhanbayev<sup>1</sup>, G.K. Mussabek<sup>1</sup>, V.A. Sivakov<sup>2</sup>, D. Yermukhamed<sup>1</sup>, A.T. Meiram<sup>1</sup>**<sup>1</sup> al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;<sup>2</sup> Leibniz Institute of Photonic Technology, Jena, Germany  
dkadyrjan@mail.ru**MICRO-PHOTOLUMINESCENCE IN SILICON NANO-WIRES**

**Abstract.** Silicon nano-wires are a new material with a very attractive for many different application optical properties. The main aim of the presented study is to investigate photoluminescence (PL) properties of silicon nanowires in as a function of temperature and excitation power. In this work silicon nano-wires (SiNWs) were prepared by wet chemical metal-assisted method. Monocrystalline silicon plates with p and n-type conductivity served as a substrate. Micro-photoluminescence spectra of obtained SiNWs samples measured by confocal microscopy setup. It is shown that strong PL signal centered at about 700 nm is observed only from SiNWs. Temperature-dependent PL measurements acquired for a range of temperatures 4K - 300K. It was shown that above 40K, PL signal decrease in intensity due to the increasing effect of non-radiative processes taking place causing carrier thermalization. It is also observed pronounced spectral redshift of PL spectra with increasing temperature, which is probably related with thermal de-trapping and possible migration of excitons from trapped states to lower available ones. From analysis of the PL dependence on excitation power we found that above 4  $\mu$ W of input power, quenching of PL from carrier recombination in the region  $>750$  nm is observed (slope changes from 1.23 to 0.22). The almost linear power dependence of the emission becomes sub-linear above 4  $\mu$ W which could be an indication of saturation of Si-NC states (inherently low density of states). At the intermediate to high pump power regime, Auger recombination for example is possible in Si-NC structures as the Auger lifetime is shorter than the single exciton radiative lifetime.

**Keywords:** silicon nanowires, photoluminescence, temperature dependent photoluminescence, optical properties.

**Introduction.** Silicon nano-wires with low light reflectance and high light absorbance values attract a huge interest of researchers during last 10 years because of their great application potential for microelectronics, optoelectronics, photonics, photovoltaics, bio- and chemical sensing [1-6]. One of the wide spread ways to form SiNWs that allows to control growth and structure of nanostructures is a metal-assisted chemical etching (MACE) [7-9]. There are many papers devoted to investigations of SiNWs optical properties [10-14] but only a small part reports photoluminescence studies [15-18]. We have therefore investigated temperature dependence of photoluminescence of SiNWs. Here we report on our recent results on the characterization of SiNWs micro-photoluminescence spectra.

**Experimental.** SiNWs samples obtained by MACE, which performed in a few steps. First silicon surfaces dipped into 2% hydrofluoric acid (HF) aqua solution to remove the thin native silicon oxide layer and dried by argon blow, then silicon they were immersed into the first solution (thermostated by 20°C) containing 5M HF and 0.01 M AgNO<sub>3</sub>. After a uniform layer of Ag nanoparticles was coated, the wafers were then immersed in the etchant solution composed of HF, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, and H<sub>2</sub>O (the volume ratios HF/H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>: 1:10) at room temperature in a sealed Teflon vessel. In the last step Si wafers were immersed in a solution of concentrated nitric acid solution in order to remove the excess Ag nanoparticles and rinsed with deionized water, and then dried in vacuum at 60°C. As substrates, we have used heavy doped n-type, monocrystalline silicon plates

Micro-photoluminescence (micro-PL) measurements were conducted using a confocal microscopy setup. The sample mounted on a continuous-flow liquid-helium microscope cryostat, which enabled

cooling from 300K down to 4K. A microscope objective lens, which was mounted on a piezoelectric XYZ stage, was used to focus and collect the excitation laser light (405 nm) and the emitted PL, respectively. The laser spot size on the sample was about 2 micron in diameter. Power- dependent PL data were recorded whereby the laser power was measured before the microscope objective (actual light power on the sample is about 2.6 times less than measured). A broadband polarizing beam splitter was used to transmit the laser light into the objective lens axis and to reflect the emitted PL light into a 0.3m spectrometer where it was dispersed by a 300 line/mm grating. The entrance slit of the spectrometer was kept at 50 microns. The PL was detected by a Peltier-cooled Si charge couple device (CCD) [19].

### Results and discussion.

**Micro-PL spectra at room temperature.** Figure 1 depicts room temperature spectra from three different samples: heavily n-doped SiNWs on Si substrate (A), weakly p-doped SiNWs on Si substrate (B) and weakly p-doped Si-NWs (C) on glass substrate transferred in solution. The spectra recorded at room temperature under similar experimental conditions within an excitation power range of 215-245 W/cm<sup>2</sup>. The spectrum from the SiNWs on glass is presented for qualitative comparison as a different CCD was used for its detection. Overall, strong orange-coloured PL signal centred at about 715 nm was observed, which was visible by naked eye particularly for Sample A. Furthermore, the PL peak from all samples was broad with a FWHM of the order of 200 nm. The spectra exhibited periodic fringes, which were not due to a filter or detector etalon effect confirmed by using a front-illuminated detector. We suggested that the fringes originated from light interference effects possibly due to the difference in refractive index between air, etched region and substrate. It should be mentioned that the PL recorded from different positions on the same sample presented small variations, which confirmed a degree of structural inhomogeneity in the samples.

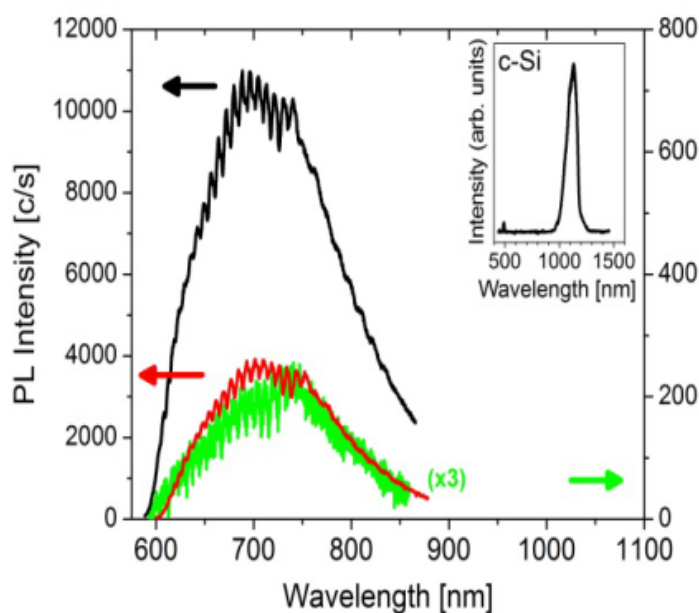


Figure 1 - PL measurements recorded at 300K from 3 different type samples: Sample A (black), Sample B (red) and Sample C (green). The input power density was 215-245W/cm<sup>2</sup>. Inset: luminescence spectrum from initial bulk c-Si wafer

The spectrum from the SiNW solution on glass exhibited similar spectral features to the spectra from the other two etched Si wafers, albeit a less intense shoulder at about 700 nm. This suggests that the observed signal from Samples A and B (black and red) in the resulting etched structures. The origin of these luminescent quantum confined states is most likely multi-fold. According to the diameters of the SiNWs (>10nm), from quantum confinement theory no shift in PL peak energy compared to the bandgap of c-Si is expected. Tests have been conducted on similar structures which showed no influence of residual (if any) Ag atoms on the PL observed. The effect of native oxide on the PL (SiO<sub>x</sub>-related states, Si/SiO<sub>2</sub> interface states) was confirmed by HF post processing which resulted in a part of the higher

energy tail of the spectra ( $>1.5$  eV) to be quenched. Based on previous structural studies [20] and consistent etching test series, the charge carrier confinement is attributed to arise in Si nano-crystals (Si-NCs), in particular core-shell Si-NCs/SiO<sub>2</sub> resulting from nanowire sidewall roughness (of the order of 1-5nm) and within the porous structure of the samples, (particularly the heavily n-doped sample).

**Temperature-dependent PL emission.** Temperature-dependent PL measurements were acquired from Sample A for a range of temperatures 4K - 300K. Figure 2 shows two typical PL spectra at 4K and room temperatures. For analysis purposes and easier comparison, the data was smoothed using Fast Fourier Transform filter (30 points) and normalized.

The data was de-convoluted into 3 peaks (at 640 nm, 716 nm, 822 nm) using multi-Gaussian peak fitting as shown in the inset. The 4K spectrum exhibits a broader FWHM compared to the room temperature spectrum which shows a pronounced narrowing in intensity from 750-900nm. As previously mentioned, the low energy tail of the spectra is linked to quantum confined Si-NC states whereas emission from the higher energies is attributed to a range of oxide-related states. The broadness of the 4K spectra reflects the size distribution of the Si-NCs. At such temperatures, carriers are expected to be localized in traps, defects and NCs in the form of excitons (electron-hole pairs) as their binding energy exceeds the thermal energy of the system.

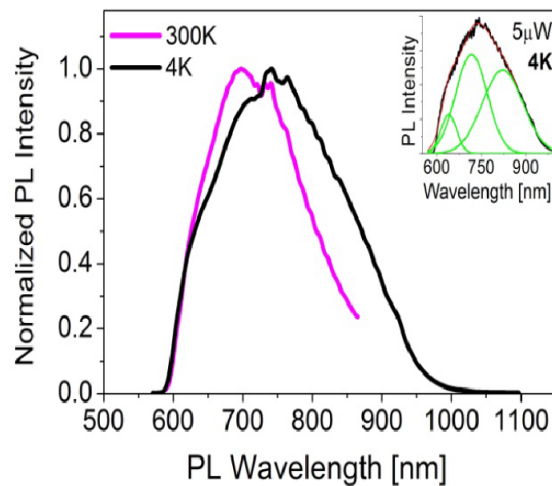


Figure 2 - Normalized PL measurements from etched Si-NWs in Sample A recorded at 300K and 4K. The input power was 4-5  $\mu$ W and laser spot size was about 2  $\mu$ m in diameter. Inset: The 4K spectrum is de-convoluted into 3 Gaussian peaks

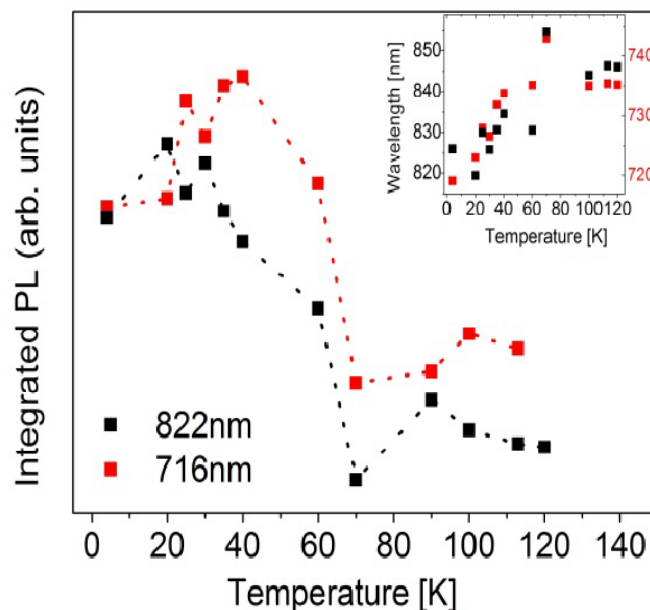


Figure 3 - Integrated PL from the de-convoluted peaks centred at 716 nm and 822 nm as a function of temperature (Sample A). Inset: Temperature-dependence of the emission wavelength of the two peaks.

Figure 3 shows the integrated PL intensity of the de-convoluted peaks 716 nm and 822 nm as a function of temperature from 4-120K. With increasing temperature a gradual quenching of the radiative contribution from the Si-NC complexes (peak 822 nm) is observed. An anti-correlated behaviour between the two peaks observed between temperatures 20-40K, whereby peak 716 nm shows an increase in intensity. Above 40K, both peaks decrease in intensity due to the increasing effect of non-radiative processes taking place causing carrier thermalization.

According to the inset of Figure 4, both peaks exhibit pronounced spectral redshift with increasing temperature. This differs from the expected temperature dependence of the bandgap of bulk Si which exhibits minimal redshift below 100K. The quenching of intensity, the spectral redshift and the reduction of FWHM for peak 822 nm suggest that thermal de-trapping and possible migration of excitons from trapped states to lower available energy states occurs. Also, the anti-correlated increase in PL intensity for peak 716 nm may suggest carrier transfer between Si-NCs and oxide/interface states.

**PL emission as a function of excitation power.** Figure 4 depicts normalized power dependent spectra from Sample B at room temperature. Sample A exhibited similar power-dependent PL behaviour. The main feature of the room temperature spectra is the spectral blue-shift accompanied by the relative intensity drop observed mainly for wavelengths > 750 nm. At 4.4K, a similar behaviour is observed in both samples with a more prominent drop in relative intensity in the long wavelength tail with increasing excitation power.

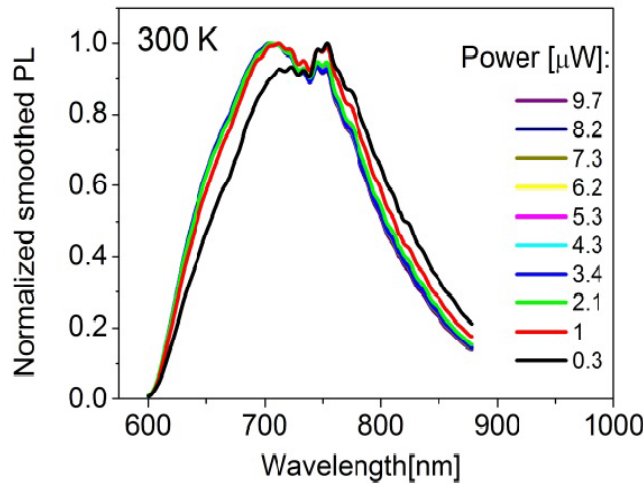


Figure 4 - Normalized power-dependent PL emission measurements from etched Si-NWs (weakly-doped p-type Si wafer) recorded at 300K. Spot diameter: 2 μm.

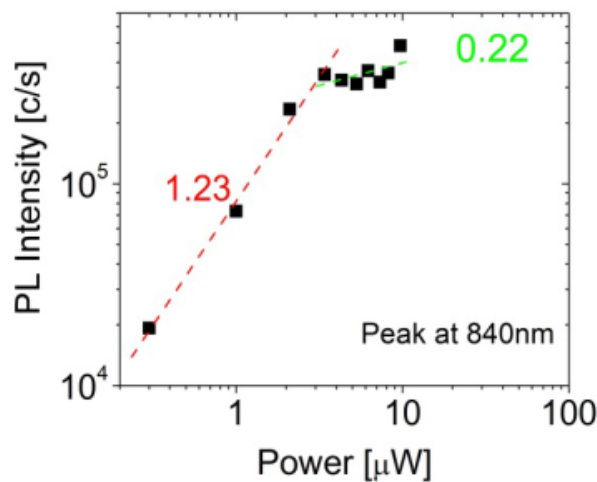


Figure 5 - The intensity of the de-convoluted peak at 840 nm (data shown in Fig. 4) is plotted as a function of excitation laser power.

Figure 5 shows the log-log plot of PL intensity of the low energy de-convoluted PL peak from the data presented in Figure 4 as a function of power. Above  $4 \mu\text{W}$  of input power, quenching of PL from carrier recombination in the region  $>750 \text{ nm}$  is observed (slope changes from 1.23 to 0.22). The almost linear power dependence of the emission becomes sub-linear above  $4 \mu\text{W}$  which could be an indication of saturation of Si-NC states (inherently low density of states). At the intermediate to high pump power regime, Auger recombination for example is possible in Si-NC structures as the Auger lifetime is shorter than the single exciton radiative lifetime.

The samples produced by varied etching times using the two step WCE process are composed of differently shaped SiNWs that all show strong visible PL in the red-orange wavelength regime ( $1.5 \dots 1.6 \text{ eV}$ ). The measured and normalized spectra of photon flux distribution vs. photon energy are shown in Fig. 6. Measured spectra corrected by taking into account the transfer function of the calibrated setup. It is visible that PL peak energies increase monotonically with increasing of etching time in the second step.

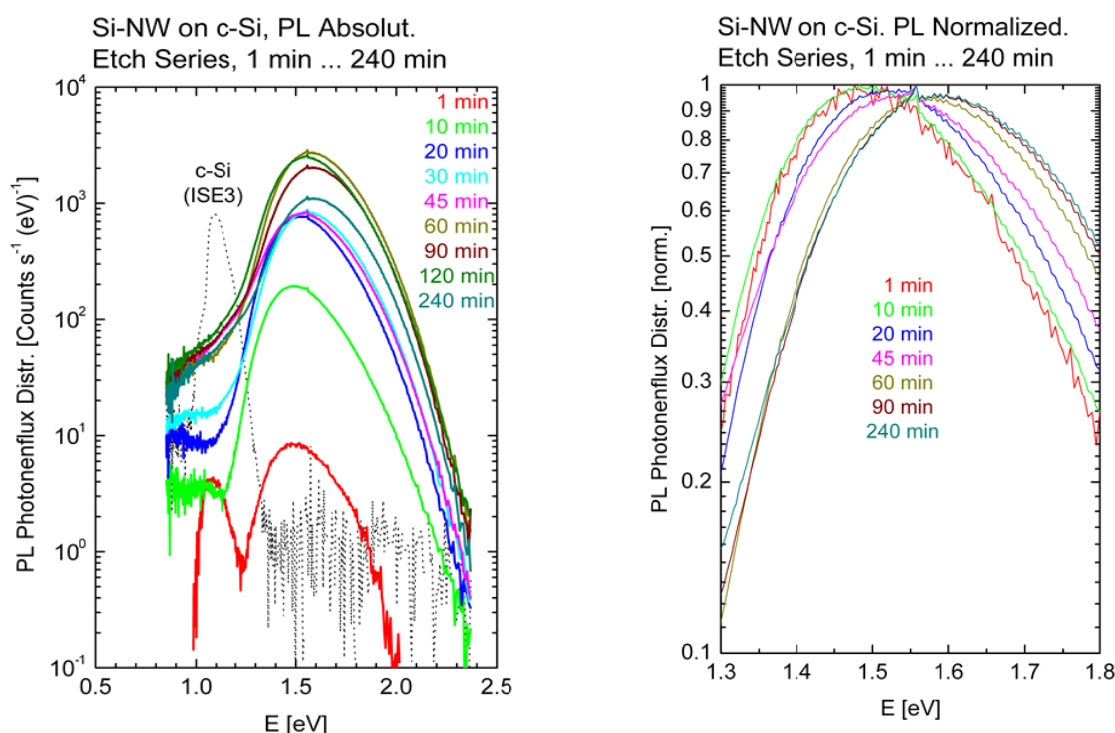


Figure 6 - Measured (left) and normalized(right) PL spectra of Si-NW samples produced by varying etching time during second etch step 2

**Conclusions.** We have performed detailed studies of photoluminescence properties of SiNWs grown by MACE on n- and p-type silicon wafers at room and low temperature. We have shown that strong PL signal centered at about  $700 \text{ nm}$  observed only from SiNWs. Temperature-dependent PL measurements acquired for a range of temperatures  $4\text{K} - 300\text{K}$ . It was shown that above  $40\text{K}$ , PL signal decrease in intensity due to the increasing effect of non-radiative processes taking place causing carrier thermalization. It is also observed pronounced spectral redshift of PL spectra with increasing temperature, which is probably related with thermal de-trapping and possible migration of excitons from trapped states to lower available ones. From analysis of the PL dependence on excitation power we found that above  $4 \mu\text{W}$  of input power, quenching of PL from carrier recombination in the region  $>750 \text{ nm}$  is observed (slope changes from 1.23 to 0.22). The almost linear power dependence of the emission becomes sub-linear above  $4 \mu\text{W}$  which could be an indication of saturation of Si-NC states (inherently low density of states).

#### REFERENCES

- [1] Föll H., Hartz H., Ossei-Wusu E., Carstensen J., Riemenschneider O. (2010) Sinanowire arrays as anodes in Li ion batteries, *Phys Status Solidi RRL*, 4(1):4-6. DOI: 10.1002/pssr.200903344

- [2] Bronstrup G., Jahr N., Leiterer C., Csaki A., Fritzsche W., Christiansen S. (2010) Optical properties of individual silicon nanowires for photonic devices, *ACS Nano*, 4(12):7113–7122. DOI: 10.1021/nn101076t
- [3] Mussabek G.K., Timoshenko V.Yu., Dikhanbayev K.K., Dzhunusbekov A.S., Taurbayev T.I., Nikulin V.E., Taurbayev Ye.T. (2013) Antireflections coatings for silicon solar cells formed by wet chemistry methods. *KazNU Bulletin, physics series*. 2(45):14-19.
- [4] Wang X., Ozkan C.S. (2008) Multisegment nanowire sensors for the detection of DNA molecules, *NanoLetters*. 8(2):398–404. DOI: 10.1021/nl071180e
- [5] Spinelli P., Verschuuren M.A., Polman A. (2012) Broadband omnidirectional antireflection coating based on subwavelength surface Mie resonators, *Nature Communications*. 3:692(1-5).DOI: 10.1038/ncomms1691
- [6] Berthing T., Sorensen C.B., Nygård J., Martinez K.L. (2009) Applications of Nanowire Arrays in Nanomedicine, *Journal of Nanoneuroscience*. 1:3–9. DOI: 10.1166/jns.2009.001
- [7] Huang Z., Geyer N., Werner P., de Boor J., Gösele U. (2011) Metal-assisted chemical etching of silicon: a review, *Adv. Materials*. 2011. 23:285–308. DOI: 10.1002/adma.201001784
- [8] Li X., Bohn P.W. (2000) Metal-assisted chemical etching in  $\text{HF}/\text{H}_2\text{O}_2$  produces porous silicon, *Applied Physics Letters*. 77(16):2572-2574. DOI: 10.1063/1.1319191
- [9] Huang Zh., Zhang X., Reiche M., Liu L., Lee W., Shimizu T., Senz S., Gosele U. (2008) Extended Arrays of Vertically Aligned Sub-10 nm Diameter [100] Si Nanowires by Metal-Assisted Chemical Etching, *Nano Letters*. 8(9):3046-3051. DOI: 10.1021/nl802324y
- [10] Gonchar K.A., Osminkina L.A., Galkin R.A., Gongalsky M.B., Marshov V.S., Timoshenko V. Yu., Kulmas M.N., Solovyev V.V., Kudryavtsev A.A., Sivakov V.A. (2012) Growth, Structure and Optical Properties of Silicon Nanowires Formed by Metal-Assisted Chemical Etching, *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*. 7:1–5. DOI: 10.1166/jno.2012.1401
- [11] Jarimaviciute-Zvalioniene R., Prosycevasa I., Kaminskiene Z., Lapinskas S. (2011) Optical Properties of Black Silicon with Precipitated Silver and Gold Nanoparticles. 40th “Jaszowiec” International School and Conference on the Physics of Semiconductors, Krynica-Zdrój. *Acta Physica Polonica A* 120(5): 942-945.
- [12] Matsui Y., Adachi S. (2013) Optical properties of “black silicon” formed by catalytic etching of Au/Si(100) wafers, *Journal of applied physics*. 113:113-123. DOI: 10.1063/1.4803152
- [13] Bett A.J., Eisenlohr J., Höhn O., Repo P., Savin H., Blasi B., Goldschmidt J.C. (2016) Wave optical simulation of the light trapping properties of black silicon surface textures, *Optics Express* A. 24(6):1-12. DOI: 10.1364/OE.24.00A434
- [14] Koynov S., Brandt M.S., Stutzmann M. (2006) Black nonreflecting silicon surfaces for solar cells, *Applied Physics Letters*. 88: 203107-1-207103-3. DOI: 10.1063/1.2204573
- [15] Baumanna A.L., Guentherb K.-M., Saringc P., Gimpela T., Kontermanna S., Seibtc M., Schade W. (2012) Tailoring the absorption properties of Black Silicon. *SiliconPV conference: 02-05 April 2012, Leuven, Belgium*, 480-484. DOI: 10.1016/j.egypro.2012.07.097
- [16] Osminkina L.A., Gonchar K.A., Marshov V.S., Bunkov K.V., Petrov D.V., Golovan L.A., Talkenberg F., Sivakov V.A., Timoshenko V.Yu. (2012) Optical properties of silicon nanowire arrays formed by metal-assisted chemical etching: evidences for light localization effect, *Nanoscale Research Letters*. 7(524):1-6. DOI: 10.1186/1556-276X-7-524
- [17] Colli A., Hofmann S., Fasoli A., Ferrari A.C., Ducati C., Dunin-Borkowski E.R., Robertson J. (2006) Synthesis and optical properties of silicon nanowires grown by different methods, *Appl. Phys. A*. 85: 247–253. DOI: 10.1007/s00339-006-3708-8
- [18] Sakurai Y., Kakushima K., Ohmori K., Yamada K., Iwai H., Shiraishi K., Nomura Sh. (2014). Photoluminescence characterization in silicon nanowire fabricated by thermal oxidation of nano-scale Si fin structure, *Optics Express* A. 22(2):1-10. DOI: 10.1364/OE.22.001997
- [19] Mullikin C., van Vliet L.J., Netten H., Boddeke F.R., van der Feltz G.W., Young I.T. (1994) Methods for CCD camera characterization, *SPIE Conference, San Jose, CA*, 2173:73-84.
- [20] Dikhanbayev K.K., Sivakov V.A., Talkenberg F., Mussabek G.K., Taurbayev Ye.T., Tanatov N.N., Shabdan E. (2015) Electron backscatter diffraction in the silicon nanowires, *Physical Sciences and Technology*. 2(2):4-11.

УДК: 538.958

**К.К. Диханбаев<sup>1</sup>, Г.К. Мусабек<sup>1</sup>, В.А. Сиваков<sup>2</sup>, Д. Ермухамед<sup>1</sup>, А.Т Мейрам<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан; №

<sup>2</sup> Лейбниц Институт фотонных технологий, г.Йена, Германия

## МИКРО-ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ КРЕМНИЕВЫХ НАНОНИТЕЙ

**Аннотация.** Кремниевые нанонити представляют собой новый материал с очень привлекательными оптическими свойствами для множества различных приложений. Основной целью представленной работы является исследование фотолюминесцентных свойств (ФЛ) кремниевых нанонитей в зависимости от температуры окружающей среды и мощности возбуждающего излучения. В данной работе кремниевые нанонити (КНН) были получены методом мокрого химического металл-стимулированного травления. Монокристаллические кремниевые пластины с р- и n-типа проводимости служили в качестве подложек для выращивания наноструктур. Микро-спектры фотолюминесценции полученных образцов КНН, измерялись с помощью установки с конфокальным микроскопом. Показано, что интенсивный сигнал ФЛ с максимумом при длине

волны 700 нм наблюдается только от КНН. Измерения спектров ФЛ в зависимости от температуры производились в диапазоне температур 4К-300К. Было показано, что при температурах выше 40К, наблюдается уменьшение интенсивности сигнала ФЛ в связи с усилением влияния нерадиационных процессов, в результате приводящих к термализации носителей. Кроме того, с ростом температуры отмечается выраженный сдвиг спектров ФЛ в красную область спектра, что, вероятно, связано с термическим захватом и возможной миграцией экситонов из локализованных состояний к более низким. Из анализа зависимости ФЛ от мощности возбуждения мы обнаружили, что при мощности возбуждающего излучения более 4 мкВт, в области с длинами волн  $> 750$  нм наблюдается угасание ФЛ, связанное с рекомбинацией носителей. Почти линейная зависимость мощности излучения становится суб-линейной при мощностях выше 4 мкВт, что может быть признаком насыщения состояний Si-NC (низкой плотности состояний).

**Ключевые слова:** кремниевые нанонити, фотолюминесценция, температурная зависимость фотолюминесценции, оптические свойства.

УДК: 538.958

К.К. Диханбаев<sup>1</sup>, Г.К. Мусабек<sup>1</sup>, В.А. Сиваков<sup>2</sup>, Д. Ермухамед<sup>1</sup>, А.Т. Мейрам<sup>1</sup>

<sup>1</sup> әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

<sup>2</sup> Лейбниц Фотондық технологиялар институты, Йена қ., Германия

### КРЕМНИЙ НАНОТАЛШЫҚТАРЫНЫҢ МИКРО-ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯСЫ

**Андатпа.** Кремний наноталшықтары алуан түрлі қолданулар үшін өте қажетті оптикалық қасиеттерге ие жаңа материал болып табылады. Берілген жұмыстың негізгі мақсаты болып қоршаған орта температурасы мен қоздырылатын сәулелену қуатына тәуелді болатын кремний наноталшықтарының фотолюминесценциялық қасиеттерін (ФЛ) зерттеу табылады. Аталған жұмыста кремний наноталшықтары (КНТ) сұйық химиялық метал-енгізілген жеміру әдісімен алынды. р- және n-типті өткізгіштігі бар монокристаллды кремний пластиналары нанокұрылымдарды өсіруге арналған төсеніштер ретінде пайдаланылды. Алынған КНТ үлгілерінің фотолюминесценциясының микро-спектрлері конфокальді микроскопы бар қондырғының көмегімен өлшенді. Максимумы 700 нм толқын ұзындығында болатын ФЛ-дың интенсивті сигналы КНТ-нан ғана байқалатыны көрсетілді. Температураға тәуелді ФЛ спектрлерін өлшеу 4К-300К температуралар диапазонында жүргізіліді. 40К-нен жоғары температураларда радиациялық емес процесстердің күшеюімен байланысты нәтижесінде тасымалдағыштардың термализациясына әкелетін ФЛ сигналы интенсивтілігінің азаюы байқалатындығы көрсетілді. Сонымен қатар температура жоғарылаған сайын ФЛ спектрлерінің спектрдің қызыл облысына айқындалған жылжуы аталып өтеді, бұл термиялық қармаумен және экситондардың локализацияланған күйлерден төменірек күйлерге мүмкін болатын миграциясымен байланысты. Қоздыратын сәуленің қуатына байланысты ФЛ-ны талдаудан біз  $> 750$  нм толқын ұзындықтары облысында қоздыратын сәулелену қуаты 4 мкВт-тан жоғары болған кезде тасымалдағыштардың рекомбинациясымен байланысты ФЛ-ның өшуі байқалатындығын таптық. 4 мкВт-тан жоғары қуаттарда сәулелену қуатының сызықтық тәуелділігі суб-сызықтық болады, бұл Si-NC (күйдің төмен тығыздығы) күйлерінің қанығуының белгісі болуы мүмкін.

**Тірек сөздер:** кремний наноталшықтары, фотолюминесценция, фотолюминесценцияның температуралық тәуелділігі, оптикалық қасиеттер.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 32 – 37

UDC 537.311:322

**D.I. Bakranova<sup>1</sup>, S.A. Kukushkin<sup>2</sup>, I.K. Beisembetov<sup>1</sup>, A.V. Osipov<sup>2</sup>,  
K.Kh. Nussupov<sup>1</sup>, N.B. Beisenkhanov<sup>1</sup>, B.K. Kenzhaliev<sup>1</sup>, B.Zh. Seitov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Institute for Problems of Mechanical Engineering, St. Petersburg, Russia;

e-mail: dinabakranova@gmail.com, sergey.a.kukushkin@gmail.com, rector@kbtu.kz,

andrey.v.osipov@gmail.com, rich-famouskair@mail.ru,

beisen@mail.ru, bagdaulet\_k@mail.ru, seitov\_b85@mail.ru

## **X-RAY ANALYSIS OF SiC EPITAXIAL FILMS GROWN BY METHOD OF ATOM REPLACEMENT ON LOW DISLOCATION SILICON SUBSTRATE**

**Abstract.** In this work, SiC films were synthesized by method of atoms replacement in the silicon lattice of on the surface of low dislocation silicon substrates M-5168 brand. By methods of X-ray diffraction, ellipsometry and profilometry, the surface roughness, phase composition, thickness and quality of SiC films synthesized through the substitution of atoms in high-resistance monocrystalline (111) oriented n-type silicon wafers in a mixture of gases CO and SiH<sub>4</sub>, were studied. It is shown that the films contain the both nanocrystalline and single crystalline 3C-SiC layers with β-SiC crystallites of high degree of perfection. Dimensions of silicon carbide nanocrystals in the transition region "film-substrate" constitute values of 3 – 5 nm. Dimensions of large crystals of silicon carbide or monolayers reached values within 35 – 365 microns with a thickness of SiC films ~ 95 – 110 nm and the quantity of Si vacancies about 5 – 6.5 %. The results can be used in nano- and microelectronics and in the production of solar cells.

**Keywords:** thin films, silicon carbide, structure, crystallization, X-ray diffraction.

УДК 537.311:322

**Д.И. Бакранова<sup>1</sup>, С.А. Кукушкин<sup>2</sup>, И.К. Бейсембетов<sup>1</sup>, А.В. Осипов<sup>2</sup>,  
К.Х. Нусупов<sup>1</sup>, Н.Б. Бейсенханов<sup>1</sup>, Б.К. Кенжалиев<sup>1</sup>, Б.Ж. Сейтов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

## **РЕНТГЕНОВСКИЙ АНАЛИЗ ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ПЛЕНОК SiC, ВЫРАЩЕННЫХ МЕТОДОМ ЗАМЕЩЕНИЯ АТОМОВ НА ПОДЛОЖКАХ НИЗКОДЕФЕКТНОГО КРЕМНИЯ**

**Аннотация.** В работе на поверхности низкодефектных подложек кремния марки М-5168 синтезированы пленки SiC методом замещения атомов в решетке кремния. Методами рентгеновской дифракции, эллипсометрии и профилометрии исследованы шероховатость поверхности, фазовый состав, толщина и качество пленок SiC, синтезированных в высокоомном монокристаллическом кремнии n-типа ориентации (111) в смеси газов CO и SiH<sub>4</sub>. Показано, что синтезированные пленки содержат в себе монокристаллический и нанокристаллические слои 3C-SiC с кристаллитами β-SiC высокой степени совершенства. Размеры нанокристаллов карбида кремния в переходной области «пленка-подложка» составляют величины 3–5 нм.



Размеры крупных кристаллов или монослоев карбида кремния составили величины в пределах 35-365 мкм при толщине пленок SiC ~ 95–110 нм и количестве вакансий Si ~ 5–6,5 %. Результаты могут быть использованы в нано- и микроэлектронике, в производстве солнечных элементов.

**Ключевые слова:** тонкие пленки, карбид кремния, структура, кристаллизация, рентгеновская дифракция.

### Введение

Карбид кремния – широкозонный полупроводник, обладающий высокой теплопроводностью, твердостью и высокими величинами напряженности электрического поля пробоя, является одним из наиболее перспективных материалов для применения в электронной промышленности. Физические и электрические свойства SiC обусловили огромный интерес к электронным приборам и сенсорам на основе карбида кремния, предназначенных для использования в условиях высоких температур и радиации [1-4]. Аморфные и кристаллические пленки SiC также находят применение в фотовольтаике [5,6].

В последние годы был теоретически разработан и экспериментально реализован новый метод роста тонких низкодефектных пленок SiC на Si [7-9]. Метод заключается в замене части атомов матрицы кремния на атомы углерода с образованием молекул карбида кремния:  $2\text{Si} + \text{CO} = \text{SiC} + \text{SiO}$ . Пленки SiC были синтезированы в специальной установке, описанной в [9]. Пленки SiC, исследуемые в работах [8,9], как правило, были выращены на стандартных кремниевых подложках р- и n-типа проводимости. В [8] было показано, что чем выше качество исходной подложки Si, тем выше качество структуры выращенного слоя SiC. В связи с этим в настоящей работе исследовалось образование пленок SiC на поверхности низкодефектных подложек кремния марки М-5168.

### Эксперимент

Для этой цели была приготовлена серия пленок, отмеченных номером I, выращенных при температуре 1250°C и давлении газа CO 264 Па на поверхности низкодислокационного кремния. Время роста этих пленок составляло 15 мин. Другая серия пленок II была синтезирована в течение 7 мин при температуре 1330°C и давлении газа CO 395 Па [10].

В качестве подложек были использованы высококачественные пластины монокристаллического кремния n-типа ориентации (111) с удельным сопротивлением 1987 – 3165 Ом·см, толщиной 1300 мкм и диаметром 20 мм. Двухсторонней шлифовкой и полировкой до обретения зеркального блеска были удалены по 100 мкм с каждой стороны пластины кремния. Далее образцы серии II были подвергнуты химическому травлению в смеси кислот в соотношении HF : HNO<sub>3</sub> = 1 : 10 до толщины 870 мкм, а затем в щелочном растворе KOH. Образцы серии I были подвергнуты травлению только в щелочном растворе KOH.

Шероховатость пленок исследовалась с помощью профилометра NewView 6000 фирмы Zygo. Фазовый состав и структура пленок исследовались методом высокочувствительной фотоаппаратурной рентгеновской дифракции с использованием узкоколлимированного (0,05Ч1,5 мм<sup>2</sup>) монохроматического (CuK<sub>α</sub>) пучка рентгеновских лучей, направленного под углом 5° к поверхности образца [11, 12]. Интенсивность рентгеновских отражений вдоль дебаеграммы измерялась через каждые 0,1° на микроденситометре MD-100. Для определения физических параметров пленок использован эллипсометр M-2000D J.A. Woollam, позволяющий снимать эллипсометрические спектры в диапазоне 0,7 – 6,5 eV.

### Результаты

Как показали исследования шероховатости на профилометре NewView 6000 фирмы Zygo, на значительных по площади участках поверхности кремния 701Ч526 мкм (рис. 1 а), обработка в смеси кислот образца серии I приводит к увеличению средней шероховатости R<sub>a</sub> поверхности кремния в  $88,5/3,7 = 24$  раза и средней шероховатости поверхности синтезированной пленки карбида кремния на образце серии I оценочно в  $21,168/5,684 = 3,72$  раза. Таким образом, химическая обработка в смеси кислот HF : HNO<sub>3</sub> приводит к удалению глубоких царапин (рис.1 б), но к увеличению средней шероховатости поверхности R<sub>a</sub> (рис.1).

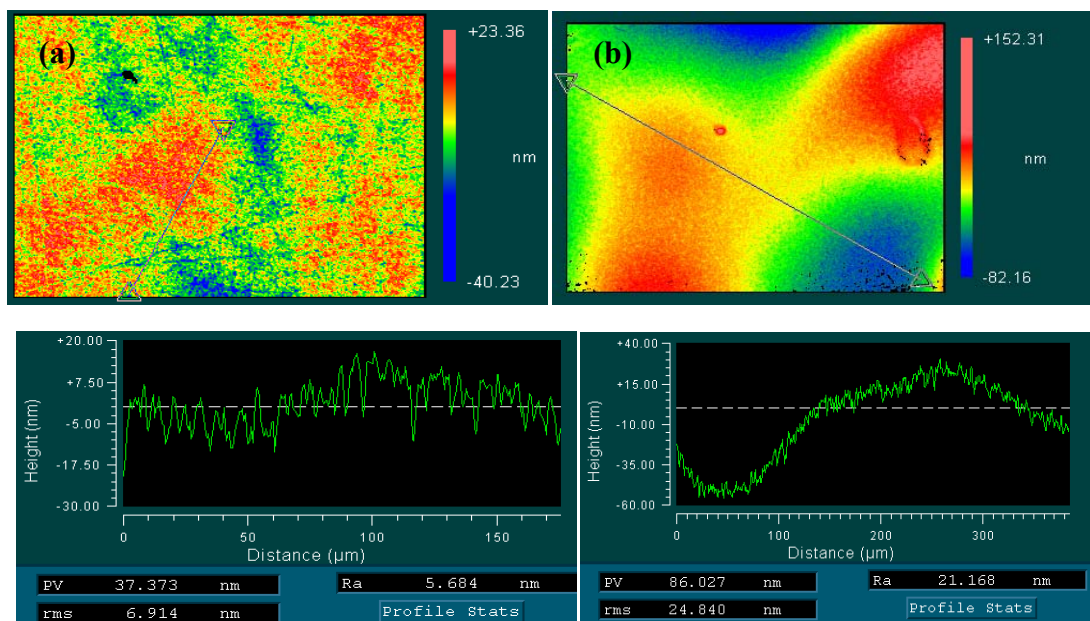


Рисунок 1 – Профиль поверхности и шероховатость пленок SiC образца серии I (a) и образца серии II (b) на участках 350x263 мкм

На рис.2 а, б наглядно показано, что рентгеновские дебаграммы для образцов SiC серии I и II содержат почти все известные линии  $\beta$ -модификации карбида кремния ( $3C$ -SiC).

С помощью метода Джонса [13] из уширения рентгеновских линий (рис.2 с) по формуле Шеррера (1) [14] были определены средние размеры нанокристаллов  $\beta$ -SiC в различных плоскостях:

$$\varepsilon = \frac{R\lambda}{\beta \cdot \cos \theta}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – средний размер кристаллита (нм);  $R = 2,86$  см – радиус камеры (см);  $\lambda = 0,1540$  нм – длина волны  $CuK_{\alpha}$ -излучения (нм);  $\theta$  – угол Вульфа-Брэгга;  $\beta$  – уширение линии. Величина уширения рентгеновской линии  $\beta$  определена из выражения  $\beta = \sqrt{\beta_s \beta_w}$  [15],  $\beta_s = B - b$  [14],  $\beta_w = \sqrt{B^2 - b^2}$  [16], где  $B$  – полуширина рентгеновской линии с поправкой на дублетность линии  $CuK_{\alpha}$ ,  $b$  – инструментальная составляющая полуширины линии.

Размеры нанокристаллов SiC для образца I составили величины 4,5 нм в плоскости (111), 3,1 нм в плоскости (220) и 3,0 нм в плоскости (311).

Как было показано в [9], слой SiC состоит из слоя пленки SiC, покрывающей треугольные поры, находящиеся под ее поверхностью, и усадочных пор, расположенных вдоль поверхности подложки. При большем значении пересыщения, при котором критический радиус зародыша SiC имеет размер порядка нескольких нанометров, критический радиус поры усадки будет порядка атомных размеров. Это означает, что зародыш SiC будет окружен вакансионными кластерами, которые могут сливаться в тонкие трещинки, окружающие зерно зародыша [9]. Таким образом, данные по измерению размеров нанокристаллов карбида кремния показывают, что размеры зародышей SiC в переходной области «пленка-подложка» составляют величины 3 – 5 нм.

На некоторых линиях нанокристаллической фазы  $\beta$ -SiC также наблюдается наложение единичного рефлекса, полученного отражением от крупного кристалла карбида кремния, сформированного в области попадания узкоколлимированного рентгеновского пучка на поверхность. Использован метод Clark и Zimmer, основанный на измерении размеров пятен и описанный в [15], согласно которому изменение размеров рефлексов от 0,20 до 1,20 мм соответствуют линейному изменению размеров зерен от 0,010 до 0,085 мм. С помощью этого метода были определены размеры крупных кристаллов  $\beta$ -SiC. Для образца серии I размеры крупных кристаллов или монослоев карбида кремния составили величины 130x35 мкм в

плоскости (111), 70460 мкм в плоскости (200), 85470 мкм в плоскости (311) и 60485 мкм в плоскости (420). В отличие от этого, для образца серии II наблюдается рефлекс, сравнимый по размеру с рефлексом от подложки Si и с размерами пучка. Этот рефлекс, лежащий на линии  $\beta$ -SiC (333), соответствует кристаллу сечением выше 3654220 мкм и указывает на наличие монокристаллического слоя  $\beta$ -SiC. При этом толщины пленок SiC, синтезированных методом замещения атомов, обычно не превосходят 100-150 нм [9].

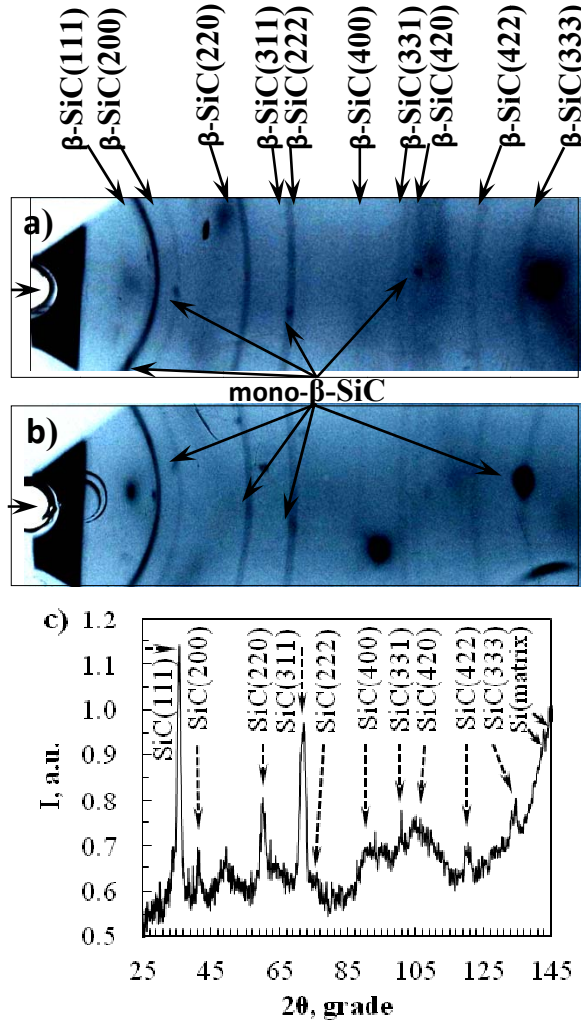


Рисунок 2 – Дебаграммы тонких пленок карбида кремния I (a) и II (b) и интенсивность рентгеновских отражений  $I(2\theta)$  (c), синтезированных методом замещения атомов

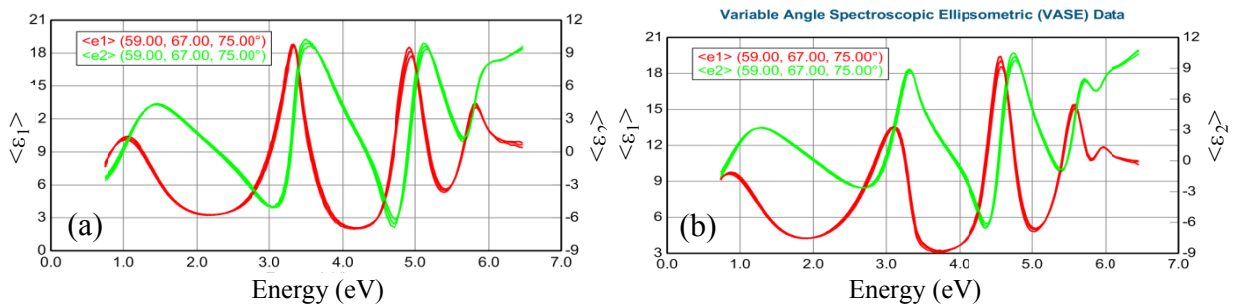


Рисунок 3 – Зависимости вещественной  $\epsilon_1$  и мнимой  $\epsilon_2$  частей диэлектрической проницаемости пленок SiC/Si(111) от энергии фотонов для образцов серий I (a) и II (b)

На рис. 3 а, б приведены эллипсограммы, т.е. зависимости вещественной  $\varepsilon_1$  и мнимой  $\varepsilon_2$  частей диэлектрической проницаемости пленок SiC образцов серий I и II. Из эллипсограмм следует, что имеются различия в структуре пленок SiC образцов серий I и II. Согласно эллипсометрическим спектрам толщины слоев SiC примерно составляют на образце серии I – 95 нм, на образце серии II – 110 нм. Расчеты, проведенные с использованием эллипсометрической модели [17], показали, что в образцах серии I содержится только 5% вакансий Si, в образцах серии II – около 6,5%.

#### Заключение

Методом замещения атомов в решетке кремния синтезированы две серии образцов SiC на поверхности низкодефектных подложек кремния n-типа ориентации (111) марки М-5168, выращенных в смеси газов CO и SiH<sub>4</sub>. Серия образцов, отмеченная номером I, была синтезирована при температуре 1250°C и давлении газа CO 264 Па на поверхности низкодислокационного кремния. Время роста этих образцов составляло 15 мин. Другая серия образцов II была синтезирована в течение 7 мин при температуре 1330°C и давлении газа CO 395 Па.

Методом профилометрии установлено, что обработка в смеси кислот HF : HNO<sub>3</sub> = 1 : 10 подложек кремния приводит к удалению глубоких царапин, полировке их поверхности. С другой стороны, химическая обработка вызывает появление ямок травления и увеличение средней шероховатости в целом по поверхности.

Фотографическим методом рентгеновской дифракции показано, что синтезированная пленка содержит в себе монокристаллический и нанокристаллический слои  $\beta$ -модификации карбида кремния (3C-SiC). Размеры нанокристаллов карбида кремния в переходной области «пленка-подложка» составляют величины 3 – 5 нм. Размеры крупных кристаллов или монослоев карбида кремния составили величины в пределах 35 – 130 мкм вплоть до 365 мкм.

Расчеты, проведенные с использованием эллипсометрической модели [17], показали, что в образцах серии I содержится только 5% вакансий Si, а в образцах серии II – около 6,5%. Согласно эллипсометрическим спектрам толщина слоя SiC на образце серии I составляет 95 нм, на образце серии II – 110 нм.

#### Благодарность

Бейсенханов Н.Б., Нусупов К.Х., Бейсембетов И.К., Кенжалиев Б.К., Мить К.А. и Бакранова Д.И. выражают благодарность Комитету науки МОН РК за финансовую поддержку (гранты ГР № 0262/ГФ4; ГР № 4327/ГФ4; 2015–2017 гг.).

Кукушкин С.А. и Осипов А.В. выражают благодарность РФФИ за финансовую поддержку (гранты № 15-0306155 и 16-29-03149\_2016-офи).

#### ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Muller G., Krotz G., Niemann E. SiC for sensors and high-temperature electronics // Sens. Actuators. A. – 43(1-3). – 1994. – P. 259-268.
- [2] Brown D.M., Downey E., Grezzo M., Kretchmer J., Krishnamethy V., Hennessy W., Michon G. Silicon carbide MOSFET technology. // Solid State Electronics. – 39 (11). – 1996. – P. 1531– 1542. – ISSN 0038-1101.
- [3] Baliga B.J. Trends in power semiconductor devices // IEEE Trans. Electron Devices. – 43. – 1996. – P. 1717–1731.
- [4] Wu R., Zhou K., Yue C.Y., Wei J., Pan Y. Recent progress in synthesis, properties and potential applications of SiC nanomaterials // Progress in Materials Science. – 72. – 2015. – P. 1–60.
- [5] Hamakawa Y. Physics and Applications of Amorphous Silicon Carbide. In: Rahman M.M., Yang C.Y.-W., Harris G.L. (Eds.), Amorphous and Crystalline Silicon Carbide II, Springer Proceedings in Physics. – 43. – 1989 – P. 164–170.
- [6] Joung Y.-H., Kang H.I., Kim J.H., Lee H.-S., Lee J. and Choi W.S. SiC formation for a solar cell passivation layer using an RF magnetron co-sputtering system. // Nanoscale Research Letters. – 2012. – 7(1):22.
- [7] S. A. Kukushkin, and A. V. Osipov. New Method for Growing Silicon Carbide on Silicon by Solid-Phase Epitaxy: Model and Experiment. // Physics of the Solid State. – 50, № 7. – 2008. – P. 1238–1245.
- [8] Kukushkin S.A. and Osipov A.V. Topical Review. Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films. // J. of Phys. D: Appl. Phys. – 47. – 2014. – P. 313001-313041.
- [9] S.A. Kukushkin, A.V. Osipov, and N. A. Feoktistov. Synthesis of Epitaxial Silicon Carbide Films through the Substitution of Atoms in the Silicon Crystal Lattice: A Review // Physics of the Solid State. – 56, № 8. – 2014. – P. 1507–1535.
- [10] Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Nussupov K. Kh., Osipov A.V., Beisenkhanov N.B. // 4th International Conference on Nano and Materials Science (ICNMS 2016). New York, 2016. MATEC Web of Conferences. 43. 01003.

- [11] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si. In book: Silicon carbide – Materials, Processing and Applications in Electronic Devices. – 2011. – Edited by Moumita Mukherjee. – InTech. – Chapter 4. – P. 69 – 114.
- [12] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers // *J. of Materials Science: Materials in Electronics*. – 19. – 2008. – P. 254–262.
- [13] Jones F.W. The measurement of particle size by the X-ray method // *Proc. Roy. Soc. – London*, 1938. – V.166A. – P. 16–43.
- [14] Scherrer P. Bestimmung der Grösse und der inneren Struktur von Kolloidteilchen mittels Röntgenstrahlen // *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*. – 1918. – Vol.26. – P. 98-100.
- [15] Taylor A. X-ray Metallography. John Wiley & Sons, Inc.: New York – London, 1961. – 993 p.
- [16] Warren B.E., Bischof J. The structure of silica glass by X-ray diffraction studies // *Journal of American Ceramic Society*. – Vol. 21, № 1. – 1938. – P. 49–54.
- [17] Kukushkin S.A., Osipov A.V. Determining polytype composition of silicon carbide films by UV ellipsometry // *Technical Physics Letters*. – 42(2). – 2016. – P. 175–178.

## REFERENCES

- [1] Muller G., Krotz G., Niemann E. SiC for sensors and high-temperature electronics. *Sens. Actuators. A*. **1994**, 43(1-3), P. 259-268.
- [2] Brown D.M., Downey E., Grezzo M., Kretchmer J., Krishnamethy V., Hennessy W., Michon G. Silicon carbide MOSFET technology. *Solid State Electronics*, **1996**, 39 (11), P. 1531– 1542. – ISSN 0038-1101.
- [3] Baliga B.J. Trends in power semiconductor devices, *IEEE Trans. Electron Devices*, **1996**, 43, P. 1717–1731.
- [4] Wu R., Zhou K., Yue C.Y., Wei J., Pan Y. Recent progress in synthesis, properties and potential applications of SiC nanomaterials. *Progress in Materials Science*, **2015**, 72, P. 1–60.
- [5] Hamakawa Y. Physics and Applications of Amorphous Silicon Carbide. In: Rahman M.M., Yang C.Y.-W., Harris G.L. (Eds.), Amorphous and Crystalline Silicon Carbide II, *Springer Proceedings in Physics*, 1989, 43, P. 164–170.
- [6] Joung Y.-H., Kang H.I., Kim J.H., Lee H.-S., Lee J. and Choi W.S. SiC formation for a solar cell passivation layer using an RF magnetron co-sputtering system. *Nanoscale Research Letters*. **2012**, 7(1):22.
- [7] S. A. Kukushkin, and A. V. Osipov. New Method for Growing Silicon Carbide on Silicon by Solid-Phase Epitaxy: Model and Experiment. *Physics of the Solid State*, **2008**, 50, № 7, P. 1238–1245.
- [8] Kukushkin S.A. and Osipov A.V. Topical Review. Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films. *J. of Phys. D: Appl. Phys.* **2014**, 47, P. 313001-313041.
- [9] Kukushkin S.A., Osipov A.V., and Feoktistov N.A. Synthesis of Epitaxial Silicon Carbide Films through the Substitution of Atoms in the Silicon Crystal Lattice: A Review. *Physics of the Solid State*. **2014**, 56, № 8, P. 1507–1535.
- [10] Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Nussupov K. Kh., Osipov A.V., Beisenkhanov N.B. // 4th International Conference on Nano and Materials Science (ICNMS 2016). *MATEC Web of Conferences*. New York, **2016**. 43. 01003.
- [11] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B. The Formation of Silicon Carbide in the SiC<sub>x</sub> Layers (x = 0.03–1.4) Formed by Multiple Implantation of C Ions in Si. In book: Silicon carbide – Materials, Processing and Applications in Electronic Devices. **2011**. Edited by Moumita Mukherjee. InTech. Chapter 4. P. 69 – 114.
- [12] Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Valitova I.V., Mit' K.A., Mukhamedshina D.M., Dmitrieva E.A. Structure properties of carbon implanted silicon layers. *J. of Materials Science: Materials in Electronics*. **2008**, 19, P. 254–262.
- [13] Jones F.W. The measurement of particle size by the X-ray method. *Proc. Roy. Soc. – London*, **1938**, 166A, P. 16–43.
- [14] Scherrer P. Bestimmung der Grösse und der inneren Struktur von Kolloidteilchen mittels Röntgenstrahlen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*. **1918**. 26. P. 98-100.
- [15] Taylor A. X-ray Metallography. John Wiley & Sons, Inc.: New York – London, **1961**, 993p.
- [16] Warren B.E., Bischof J. The structure of silica glass by X-ray diffraction studies. *Journal of American Ceramic Society*. **1938**, 21, № 1. P. 49–54.
- [17] Kukushkin S.A., Osipov A.V. Determining polytype composition of silicon carbide films by UV ellipsometry. *Technical Physics Letters*. **2016**, 42(2), P. 175–178.

Д.И. Бакранова, С.А. Кукушкин, И.К. Бейсембетов, А.В. Осипов,  
К.Х. Нусупов, Н.Б. Бейсенханов, Б.К. Кенжалиев, Б.Ж. Сейтов

#### АҚАУЫ АЗ КРЕМНИЙ МАТРИЦАЛАРЫНДАҒЫ АТОМДАРДЫҢ ОРНЫН БАСУ ӘДІСІМЕН АЛЫНҒАН ЭПИТАКСИАЛДЫ SiC ҚАБЫРШАҚТАРЫН РЕНТГЕНДІК ТАЛДАУ

**Аннотация.** Ақауы аз M-5168 маркалы кремний матрицаларының бетіне, кремнийдің кристалдық торындағы атомдардың орнын басу әдісі арқылы SiC қабыршақтары синтезделді. Рентгендік дифракция, профилометрия және эллипсометрия әдістері арқылы, CO және SiH<sub>4</sub> газ қоспаларының атмосферасында жоғарыомды монокристалды n-типті Si(111) матрицада синтезделген SiC қабыршақтарының фазалық құрамы, қалыңдығы және сапасы зерттелінді. Синтезделген қабыршақтар құрамында, жетілу дәрежесі жоғары β-SiC кристаллиттеріне ие монокристалды және нанокристалды 3C-SiC қабаттар бар екендігі көрсетілді. «Қабыршақ-матрица» өтпелі аймақтағы кремний карбиді нанокристалдарының өлшемдері 3 – 5 нм құрайды. SiC қабыршақ қалыңдығы ~ 95 – 110 нм және Si вакансия мөлшері ~ 5 – 6,5 % болған жағдайда, кремний карбидінің ірі кристалдарының немесе монокристалдарының өлшемдері 35 – 365 мкм құрайды. Жұмыстың нәтижелері нано- және микроэлектроникада, күн элементтерін өндіруде пайдаланылуы мүмкін.

**Түйін сөздер:** жұқа қабыршақтар, кремний карбиді, құрылым, кристалдану, рентгендік дифракция.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 38 – 44

UDC 621.039.6, 537.523/.527

**D.G. Batryshev<sup>1,3</sup>, T.S. Ramazanov<sup>2</sup>, M.K. Dosbolayev<sup>2</sup>, M.T. Gabdullin<sup>3</sup>, Ye.Yerlanuly<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>Laboratory of Engineering Profile, Al-Farabi Kazakh National University;

<sup>2</sup>Scientific and Research Institute of Experimental and Theoretical Physics,  
Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan;

<sup>3</sup>National Nanotechnology Laboratory of Open Type, Al-Farabi Kazakh National University  
Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabi avenue, 71  
e-mail: [yerlanuly@physics.kz](mailto:yerlanuly@physics.kz)

**SYNTHESIS OF CARBON NANOTUBES BY PLASMA CHEMICAL  
DEPOSITION METHOD FROM VAPOUR-PHASE  
IN RADIO-FREQUENCY CAPACITIVE DISCHARGE**

**Abstract.** In this work a synthesis of carbon nanotubes by plasma chemical deposition method from vapour-phase in radio-frequency capacitive discharge is considered. As a result of the experiment, two samples were obtained – a silicon substrate with a small bright deposition on its surface and soot inside the heating element. These samples have been studied by using Ntegra Spectra Raman spectroscopy and scanning electron microscopy Quanta 3D 200i (SEM, FEI company, USA). The results of analysis indicate that carbon nano particles were deposited on the surface of the silicon substrate, whereas SEM and RS analysis of soot indicates the presence of carbon fibers and nanotubes. The formation of CNTs and other carbonaceous nanostructures inside the quartz tube is explained by the fact that the heater material is nichrome (Ni + Cr) and the heating leads to evaporation of a small fraction of nickel, which served as a catalyst for CNT growth.

**Keywords:** carbon nanotubes, plasma chemical deposition, plasma.

УДК 621.039.6, 537.523/.527

**Д.Г. Батрышев<sup>1,3</sup>, Т.С. Рамазанов<sup>2</sup>, М.К. Досболаев<sup>2</sup>, М.Т. Габдуллин<sup>3</sup>, Е. Ерланулы<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>Лаборатория инженерного профиля, КазНУ им. аль-Фараби;

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. аль-Фараби;

<sup>3</sup>Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, КазНУ им. аль-Фараби,  
Казахстан, 050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71

**СИНТЕЗ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК ПЛАЗМОХИМИЧЕСКИМ  
МЕТОДОМ ОСАЖДЕНИЯ ИЗ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ  
В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЕМКОСТНОМ РАЗРЯДЕ**

**Аннотаци.** Данная работа посвящена синтезу углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде. В результате эксперимента были получены два образца – кремниевая подложка с неким светлым осаждением на ее поверхности и сажа внутри нагревательного элемента, которые были исследованы с помощью Рамановской спектроскопией Ntegra SPECTRA и сканирующей электронной микроскопией Quanta 3D 200i (SEM, FEI company, USA). Результаты анализа свидетельствуют, что на поверхности кремниевой подложки были осаждены углеродные наночастицы, тогда как СЭМ и РС анализ сажи свидетельствует о наличии углеродных волокон и нанотрубок. Образование УНТ и других, углеродосодержащих наноструктур внутри кварцевой трубки

объясняется с тем, что материалом нагревателя является нихром (Ni+Cr), при нагревании которого из материала выделялась малая доля никеля, который служил катализатором роста УНТ.

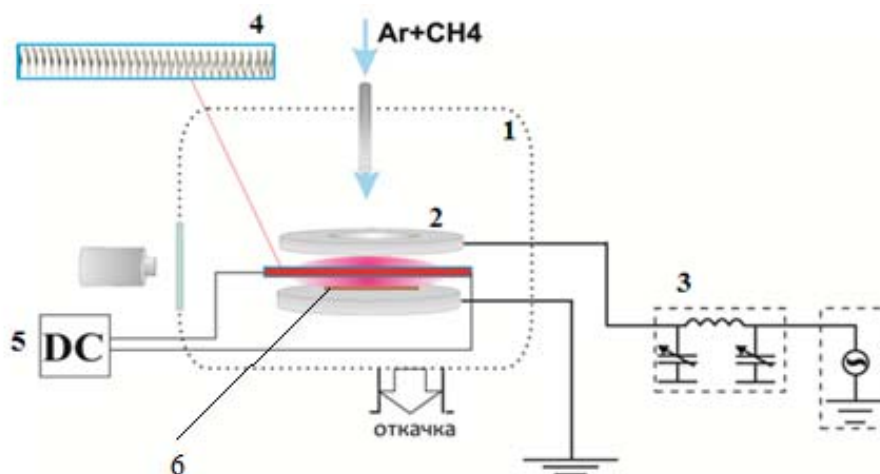
**Ключевые слова:** углеродные нанотрубки, плазмохимическое осаждение, плазма.

### Введение

Синтез углеродных нанотрубок (УНТ) методом осаждения из газовой фазы с плазменным усилением (PECVD) применяется для создания вертикально ориентированных УНТ на подложках при относительно низкой температуре [1,2]. В соответствии с типом газового разряда, для генерации плазмы существуют различные PECVD реакторы тлеющего разряда [3,4], высокочастотного (ВЧ) разряда 13,56 МГц [5-8], сверхвысокочастотного разряда 2,56 ГГц [9]. Для синтеза УНТ также применяются такие методы, как: электродуговое распыление (ЭДР) графита [10], лазерная абляция [11], метод химического осаждения углеродсодержащих паров на катализаторах (CVD) [12]. Преимущество PECVD метода, по сравнению с перечисленными выше методами, это возможность контроля и получения вертикально ориентированных УНТ за счет электрических сил плазмы. УНТ имеют широкую область применения: в электронике (гибкие дисплеи, датчики, быстродействующие и экономичные диоды и транзисторы) [13,14], в медицине (лечение онкологических заболеваний, биосовместимые функциональные препараты и маркеры) [15-17], в энергетике (создание солнечных панелей, топливные элементы, эффективный катодный электрокатализатор) [18-20] и т.д. Благодаря этому, на сегодняшний день исследование и синтез УНТ представляют большой интерес с научной точки зрения. Таким образом, в представленной работе рассматривается синтез углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде.

### Эксперимент

В данной работе синтез УНТ методом PECVD реализуется на экспериментальной установке, представленной на рисунке 1, которая состоит из рабочей камеры (1), двух параллельных электродов (2), верхний – ВЧ электрод, нижний заземленный, ВЧ генератора (3), нагревательного элемента (4) – кварцевая трубка с нихромовой спиралью, источника питания нагревателя (5), системы откачки и напуска реакционного газа в рабочую камеру.



1 – рабочая камера, 2 – ВЧ электроды, 3 – ВЧ генератор, 4 – нагревательный элемент, 5 – источник питания нагревательного элемента, 6 – кремниевая подложка с каталитическим нанослоем

Рисунок 1 – Принципиальная схема экспериментальной установки для синтеза УНТ PECVD методом

На основе представленной схемы была собрана установка комбинированного высокочастотного разряда с термическим нагревателем для первичной инициации процесса пиролиза. На рисунке 2 представлены фото рабочего режима горения ВЧ плазмы с нагревателем в методе PECVD.

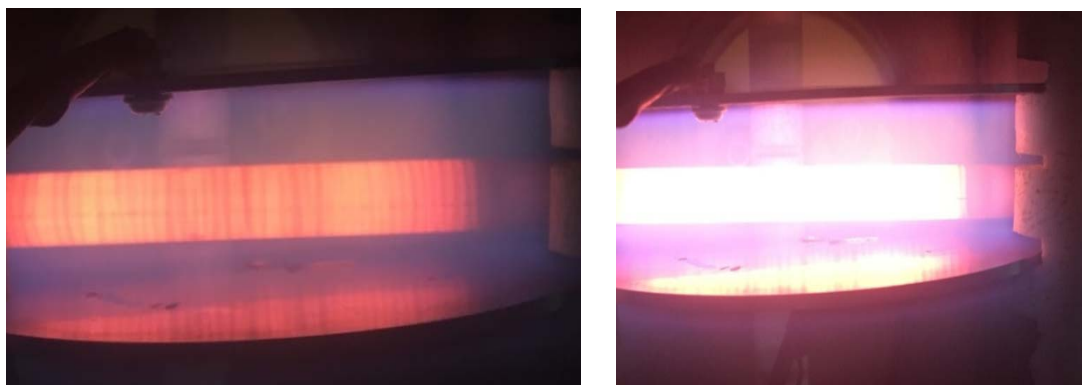


Рисунок 2 –PECVD процесс в рабочем режиме

Как известно, рост УНТ осуществляется согласно модели пар-жидкость-кристалл (ПЖК), где одной из основных элементов является катализатор. Поэтому для синтеза УНТ на кремниевой подложке (6) в начале эксперимента на ее поверхность методом электронно-лучевого напыления наносят нанослой катализатора – никеля. Далее после напыления, полученный образец исследуется на сканирующем электронном микроскопе (СЭМ). Результаты анализа показывают, что на поверхности кремниевой подложки после напыления образовался равномерный сплошной никелевый нанослой, толщиной порядка ~50нм. СЭМ изображения подложки представлены на рисунке 3.

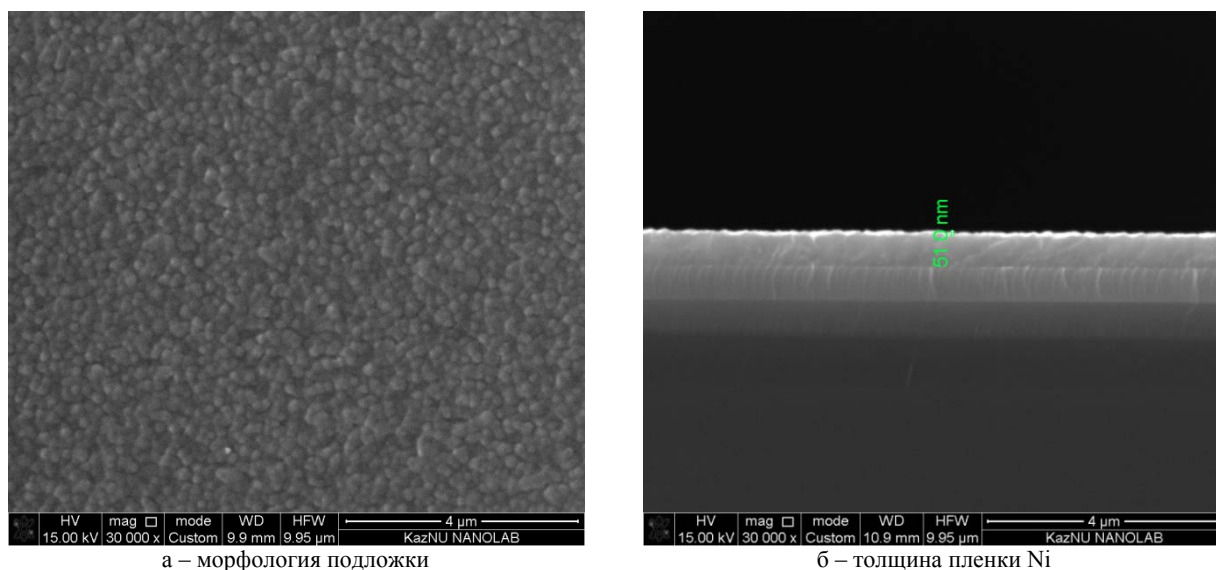


Рисунок 3 – СЭМ анализ кремниевой подложки с каталитическим нанослоем никеля

Далее полученную кремниевую подложку с каталитическим нанослоем загружают в рабочую камеру на поверхность нижнего электрода и создают условие вакуума, после установления вакуума подается поток рабочего газа аргона (Ar) до давления порядка 4 Тор и включают нагревательный элемент. Как только нагревательный элемент достигает температуры 750°C, с помощью ВЧ генератора на верхний электрод подают ВЧ напряжение с мощностью 5-15Вт, вследствие которого поджигается аргоновая ВЧ плазма и выдерживается в течение 15 минут. На данном этапе за счет плазменной и термической обработки на поверхности кремниевой подложки скалитическим нанослоем формируются нанокластеры (островки) никеля, которые являются основой для роста УНТ по модели ПЖК. Действительно, на рисунке 4 представлен СЭМ изображение полученных нанокластеров никеля на поверхности кремниевой подложки. Из рисунков 3 и 4 видно, что доплазмотермической обработки поверхность кремниевой пластины



имел сплошной никелевый слой, на которой после плазмотермической обработки образовались отдельные островки нанокластеров со средним диаметром  $\sim 20-70$  нм. Согласно модели ПЖК диаметр этих нанокластеров, в конечном счете, определяет диаметр синтезируемых УНТ.

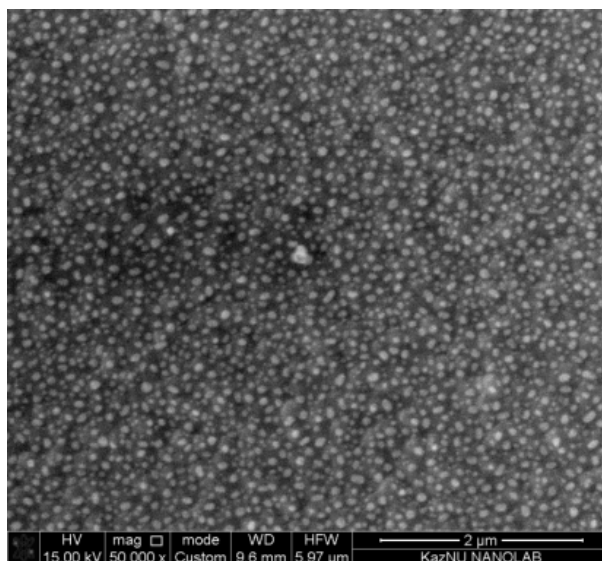


Рисунок 4 – СЭМ изображения нанокластеров на поверхности кремниевой подложки

Для образования островков никеля на поверхности кремниевой подложки достаточно 15 минут, после для роста УНТ в рабочую камеру напускается дополнительный реакционный углеродосодержащий газ – метан ( $\text{CH}_4$ ) до давления 5 Тор, затем процесс синтеза длится 15-30 минут.

Таким образом, в результате эксперимента были получены два образца – кремниевая подложка с осажденными на ее поверхности углеродными наночастицами (рисунок 6) и сажа внутри нагревательного элемента (рисунок 5).

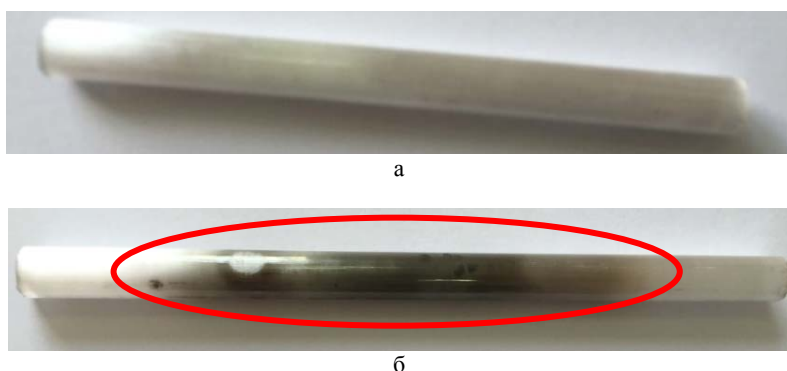
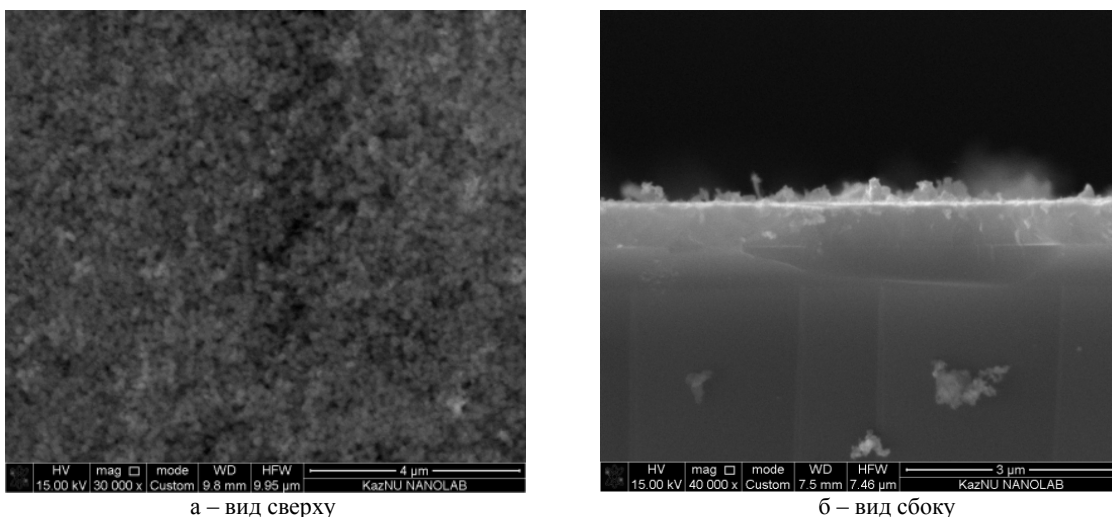


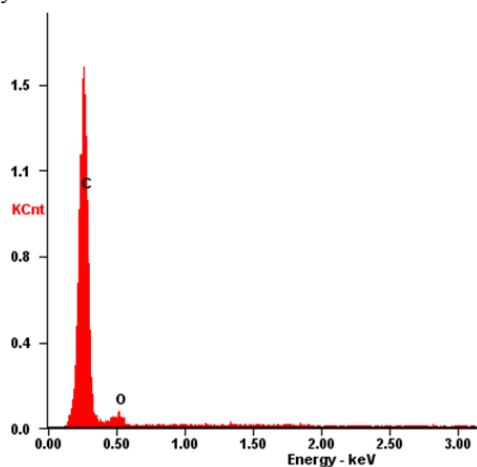
Рисунок 5 – Кварцевая трубка до (а) и после (б) синтеза УНТ методом PECVD

Исследование полученных образцов на сканирующем электронном микроскопе и Рамановской спектроскопией (РС) показывают, что действительно в процессе PECVD образуются углеродные наночастицы, которые осаждаются на поверхности кремниевой подложки. На рисунке 6 представлены СЭМ изображения осажденных углеродных наночастиц, тогда как СЭМ и РС анализ сажи свидетельствует о наличии углеродных волокон и нанотрубок (рисунок 7). Изначально, предполагалось синтез УНТ на поверхности кремниевой подложки, но как результаты анализа показывают отсутствие осаждения УНТ. Возможная причина - это все еще низкая температура среды вблизи подложки для роста УНТ, но достаточная для формирования нанокластеров никеля.



а – вид сверху

б – вид сбоку



в – химический состав

Рисунок 6 – СЭМ изображения и химический состав осажденных углеродных наночастиц на поверхности кремниевой подложки

Благодаря достаточно высокой температуре нихромового нагревателя, из последнего из-за термической эмиссии образовались наночастицы, которые и явились основой роста УНТ и образования сажи внутри нагревательного элемента.

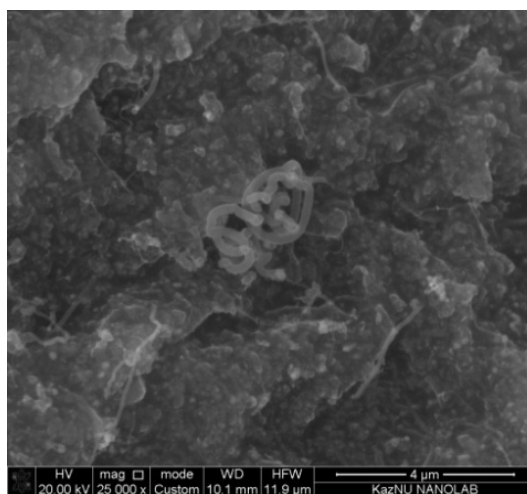


Рисунок 7 – СЭМ изображения полученных УНТ PECVD методом

Спектры рамановского рассеяния полученных образцов сажи представлены на рисунке 8. Рамановский спектр, представленный на рисунке 8а, соответствует типичному спектру многостенных УНТ (МУНТ) с основными G, D и G'(2D) – полосами при частотах  $1591\text{ см}^{-1}$ ,  $1360\text{ см}^{-1}$  и  $2719\text{ см}^{-1}$  соответственно, а также G+D – полосами при частотах  $2950\text{ см}^{-1}$ . G-полоса в данном спектре соответствует тангенциальным колебаниям двух смежных атомов углерода в решетке УНТ, G' (или 2D)-полоса соответствует обертону D-полосы, вызванной двухфононным неупругим рассеянием. Присутствие в спектре D-полосы и G'-полосы позволяет судить о дефектности структуры и ее совершенстве (качестве). Таким образом, для оценки дефектности структуры много приблечь формуле отношении интенсивностей полос D и G:  $L_a = 4,4 \cdot \frac{I_G}{I_D}$ , где  $L_a$  – область гомогенного рассеяния в углеродных структурах. Значение для данного спектра соответствует  $L_a = 4,7$ , что говорит о довольно не плохом качестве МУНТ. Свидетельство этому и выраженная полоса 2D. Но слияние полосы D и G говорит о наличии аморфной фазы в образце. Рамановский спектр, представленный на рисунке 8б, более типичен спектру многослойного графена (FLG – Few-layer graphene). Об этом свидетельствуют слабая D-полоса ( $1359\text{ см}^{-1}$ ) и довольно узкие и интенсивные полосы G ( $1581,8\text{ см}^{-1}$ ) и 2D ( $2733,6\text{ см}^{-1}$ ).

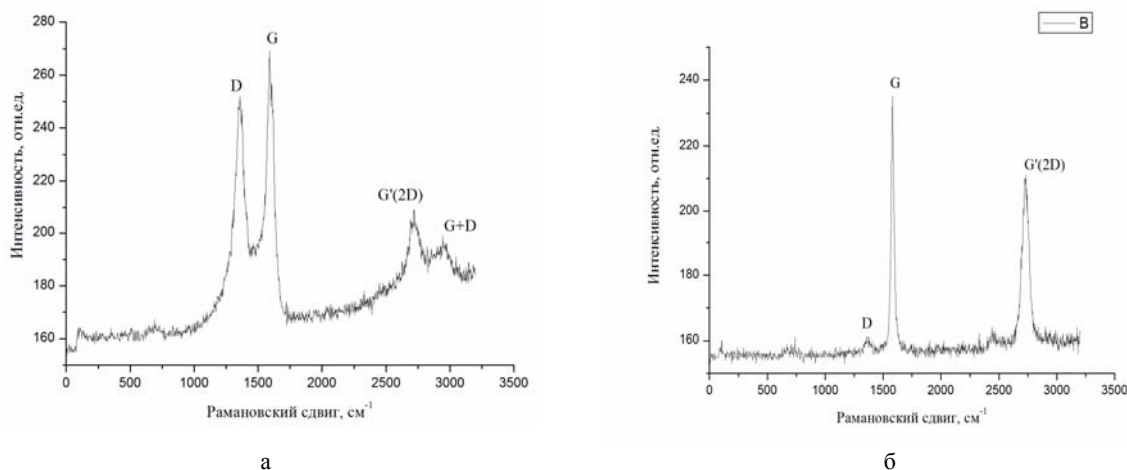


Рисунок 8 – Рамановские спектры полученных УНТ методом PECVD

### Заключение

В данной работе был рассмотрен синтез углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде. В результате эксперимента были получены два образца – кремниевая подложка с неким светлым осаждением на ее поверхности и сажа внутри нагревательного элемента, которые были исследованы с помощью РС и СЭМ анализа. Результаты анализа свидетельствуют, что на поверхности кремниевой подложки были осаждены углеродные наночастицы, тогда как СЭМ и РС анализ сажи свидетельствует о наличии углеродных волокон и нанотрубок. Образование УНТ и других углеродосодержащих наноструктур внутри кварцевой трубки объясняется с тем, что материалом нагревателя является нихром (Ni+Cr), при нагревании которого из материала выделялась малая доля никеля, который служил катализатором роста УНТ.

Данная работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках гранта 3214/ГФ 4.

### REFERENCES

- [1] Man Y.H., Li Z.C., Zhang Z.J., Influence of plasma condition on carbon nanotube growth by rf-PECVD // Nano-Micro Letters, **2010**, V. 2, №1, P.37-41.
- [2] Wang H., Lin J., Huan C.H.A., Dong P., He J., Tang S.H., Eng W.K., Thong T.L.J., Controlled synthesis of aligned carbon nanotube arrays on catalyst patterned silicon substrates by plasma-enhanced chemical vapor deposition // Appl. Sur. Sci. **2001**, Vol. 181, №3, P. 248-254.
- [3] Chhowalla M., Teo K.B.K., Ducati C., Rupesinghe N.L., Amaratunga G.A.J., Ferrari A.C., Roy D., Robertson J., Milne W.I., Growth process conditions of vertically aligned carbon nanotubes using plasma enhanced chemical vapor deposition // J. Appl. Phys. **2011**, Vol. 90, P/ 5308.
- [4] Lee D.H., Lee W.J., Kim S.O., Vertical Single-Walled Carbon Nanotube Arrays via Block Copolymer Lithography // Chem. Mater. **2009**, Vol.21, №7, P.1368-1974.

- [5] Kim, U.J. Lee E.H., Kim J.M., Min Y., Kim E., Park W., Thin film transistors using preferentially grown semiconducting single-walled carbon nanotube networks by water-assisted plasma-enhanced chemical vapor deposition//Nanotechnology, **2009**, Vol. 20, №29, P.5201.
- [6] Shiratori Y., Hiraoka H., Takeuchi Y., Itoh S., M. Yamamoto, A One-step formation of aligned carbon nanotube field emitter sat 400°C//Ap. Phys. Lett., **2003**, Vol. 82, P.2485.
- [7] Gohier HA., Minea T.M., Djouadi A.M., GranierA., Dubosc M., Limits of the PECVD process for single wall carbon nanotubes growth//Chem. Phys. Lett. **2006**, Vol. 42, №3, P.242-245.
- [8] Zhong G., Iwasaki T., Honda K., Furukawa Y., Ohdomari I., Kawarada H., Low Temperature Synthesis of Extremely Dense and Vertically Aligned Single-Walled Carbon Nanotubes// Jpn. J. Appl. Phys. **2005**, Vol. 44, №4A, P.1558.
- [9] Maschmann H.M.R., Amama P.B., Goyal A., Iqbal Z., Gat R., Fisher T.S., Parametric Study of Synthesis Conditions in Plasma-Enhanced CVD of High-Quality Single-Walled Carbon Nanotubes// Carbon, **2006**, V. 44, №1, P.10-18.
- [10] Абдуллин Х.А., Габдуллин М.Т., Рамазанов Т.С., Батрышев Д.Г., Исмаилов Д.В., Щур Д.В., Получение углеродных нанотрубок в дуговом разряде в среде дионизированной воды без каталитическим методом // Вестник КазНУ, физическая, **2015**, Т.53, №2, С. 68-72
- [11] Thess et al., Lee R., Nikolaev P., Dai H., Petit P., Robert J., Xu C., Lee Y. H., Kim S. G., Rinzler A. G., Colbert D. T., Scuseria G. E., Tomanek D., Fischer J. E., Smalley R. E. Crystalline Ropes of Metallic Carbon Nanotubes // Science, **1996**, V. 273, P. 483-487.
- [12] Abdullin Kh.A., Batryshev D.G., Chihray E.V., Gabdullin M.T., Ismailov D.V., Kim B.G., Togambaeva A.K., Obtaining multi walled and single-walled carbon nanotubes and nano composites // Canadian J. Phys. 2014, Vol. 92, № 7/8, P. 813-818.
- [13] Xiao L., Chen Zh, Feng Ch., Liu L., Bai Z.-Q, Wang Y., Qian L., Zhang Y., Li Q., Jiang K., Fan Sh., Stretchable, Transparent Carbon Nanotube Thin Film Loudspeakers// Nano Lett. **2008**, Vol. 8, №12, P. 4539–4545
- [14] Zheng Q., Jiang Q., Multiwalled Carbon Nanotubes as Gigahertz Oscillators // Phys. Rev. Lett. **2002**, Vol. 88 – 045503
- [15] Chen J., Chen S., Zhao X., Kuznetsova L.V., Wong S.S., Ojima I. Functionalized single-walled carbon nanotubes as rationally designed vehicles for tumor-targeted drug delivery // J. Am. Chem. Soc. **2008**. V. 49, no. 130. P. 16778–16785.
- [16] Devitt M.R. Tumor targeting with antibody-functionalized, radio labeled carbon nanotubes // The J. of nuclear medicine. 2007. V. 48, no. 7. P. 1180–1189.
- [17] Kateb B., Yamamoto V., Alizadeh D., Zhang L., Manohara H.M., Bronikowski M.J., Badie B. Multi-walled carbon nanotube (MWCNT) synthesis, preparation, labeling, and functionalization // Immunotherapy of Cancer, Methods in Molecular Biology. **2010**. No. 651. P. 307–317
- [18] Ye Y., Ahn C.C., Witham C., Fultz B., Liu J., Rinzler A.G., Colbert D., Smith K.A., Smalley R.E., Hydrogen adsorption and cohesive energy of single-walled carbon nanotubes // Applied Physics Letters 1999, 74, (16), 2307-2309.
- [19] Xu W.C., Takahashi K., Matsuo Y., Hattori Y., Kumagai M., Ishiyama S., Kaneko K., Iijima S., Investigation of hydrogen storage capacity of various carbon materials.// International Journal of Hydrogen Energy, **2007**, 32, (13), 2504-2512.
- [20] Panella B., Hirscher M., Roth S., Hydrogen adsorption in different carbon nanostructures // Carbon, 2005, Vol.43, №10, P. 2209-2214.

Д.Ф. Батрышев<sup>1,3</sup>, Т.С. Рамазанов<sup>2</sup>, М.К. Досболаев<sup>2</sup>, М.Т. Габдуллин<sup>3</sup>, Е. Ерланұлы<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Инженерлі бейіндегі зертхана, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

<sup>3</sup>Ашық түрдегі Ұлттық нанотехнологиялық зертхана, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Қазақстан, 050040 Алматы, әл-Фараби, 71

#### ЖОҒАРЫ ЖИЛІКТІ СЫЙЫМДЫЛЫҚ РАЗРЯДЫНДА ГАЗДЫҚ ФАЗАДАН ПЛАЗМОХИМИЯЛЫҚ ӘДІСІМЕН КӨМІРТЕК НАНОТҮТІКШЕЛЕРІН СИНТЕЗДЕУ

**Аннотация.** Бұл жұмыс жоғары жиілікті сыйымдылықты разрядта газдық фазадан плазмохимиялық әдісімен көміртек нанотүтікшелерін синтездеу тақырыбына арналған. Эксперимент нәтижесінде екі үлгі алынды – беттік қабатында қандай да бір ашық қондырмасы бар кремнийлік төсем және қыздыру элементінің ішіндегі күйе. Аталған үлгілер Рамандық Ntegra SPECTRA спектроскопиясымен және Quanta 3D 200i (SEM, FEI company, USA) электроды сканерлеуші микроскопия көмегімен зерттелді. Анализ нәтижелері кремнийлі төсемнің беттік қабатында көміртекті нанобөлшектердің қондырылғанын, ал күйенің ЭСМ және РС анализі көміртекті талшықтардың және нанотүтікшелердің бар екендігін дәлелдейді. Кварцтық түтікшенің ішінде КНТ және басқа да көміртекті нанокұрылымдардың пайда болуы қыздырғыш нихром (Ni+Cr) материалынан болғанымен түсіндіріледі. Қыздырғыштың температурасын жоғарылатқанда материалдан КНТ өсуінің катализаторы болатын никельдің шағын бөлігі айырылды.

**Түйін сөздер:** көміртекті нанотүтікшелер, плазмохимиялық қондыру, плазма.

#### Сведения об авторах:

Батрышев Д.Г. – ст. преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 123 каб., [batryshev@physics.kz](mailto:batryshev@physics.kz);  
Рамазанов Т.С. – Профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 332 каб., [ramazan@physics.kz](mailto:ramazan@physics.kz);  
Досболаев М.К. – Ассоциированный профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Алматинская обл., поселок Кокозек, ул. Жибек-жолы, д.29а Аль-Фараби 71а, физ-тех, 125 каб., [merlan@physics.kz](mailto:merlan@physics.kz);  
Габдуллин М.Т. – Ст. преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 427 каб., [gabdullin@physics.kz](mailto:gabdullin@physics.kz);  
Ерланұлы Е. – Инженер, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 120 каб., [yerlanuly@physics.kz](mailto:yerlanuly@physics.kz)

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 45 – 48

A.S. Demyanova<sup>1</sup>, A.N. Danilov<sup>1</sup>, N. Burtebayev<sup>2</sup>, D.M. Janseitov<sup>2,3</sup>,  
Zh. Kerimkulov<sup>2</sup>, D.K. Alimov<sup>2</sup>, Y.S. Mukhamejanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> NRC Kurchatov Institute, Moscow, Russia;  
<sup>2</sup> Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan;  
<sup>3</sup> Eurasian National University, Astana, Kazakhstan  
e-mail: [janseit.daniar@gmail.com](mailto:janseit.daniar@gmail.com)

EXOTIC STATES OF <sup>13</sup>C NUCLEI WITH ABNORMAL RADII

**Abstract.** Differential cross-sections of the elastic and inelastic  $\alpha+^{13}\text{C}$  scattering were measured at  $E(\alpha) = 90$  MeV. The root mean-square radii ( $\langle R_{\text{rms}} \rangle$ ) of <sup>13</sup>C nucleus in the states: 8.86 (1/2<sup>-</sup>), 3.09 (1/2<sup>+</sup>) and 9.90 (3/2<sup>-</sup>) MeV were determined by the Modified diffraction model (MDM). The radii of the first two levels are enhanced compared to that of the ground state of <sup>13</sup>C, confirming the suggestion that the 8.86 MeV state is an analogue of the Hoyle state in <sup>12</sup>C and the 3.09 MeV state has a neutron halo. Some indications to the abnormally small size of the 9.90 MeV state were obtained.

**Key words:** radii of excited states, modified diffraction model, neutron halo.

УДК 539.171

А.С. Демьянова<sup>1</sup>, А.Н. Данилов<sup>1</sup>, Н. Буртебаев<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>2,3</sup>,  
Ж. Керимкулов<sup>2</sup>, Д.К. Алимов<sup>2</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> НИЦ Курчатовский Институт, Москва, Россия;  
<sup>2</sup> Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан;  
<sup>3</sup> Евразийский Национальный Университет, Астана, Казахстан

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ЯДРА <sup>13</sup>C  
С АНОМАЛЬНЫМИ РАДИУСАМИ

**Аннотация.** В данной работе представлены результаты измерения дифференциальных сечений упругого и неупругого рассеяния  $\alpha+^{13}\text{C}$  при  $E(\alpha) = 90$  МэВ. В рамках модифицированной дифракционной модели (МДМ) определены среднеквадратичные радиусы ( $\langle R_{\text{rms}} \rangle$ ) возбужденных состояний: 8.86 (1/2<sup>-</sup>), 3.09 (1/2<sup>+</sup>) и 9.90 (3/2<sup>-</sup>) МэВ ядра <sup>13</sup>C. Радиусы первых двух уровней увеличены по сравнению с радиусом основного состояния ядра <sup>13</sup>C, что подтверждает предположение, что состояние 8.86 МэВ является аналогом состояния Хойла в ядре <sup>12</sup>C и состояние 3.09 МэВ имеет нейтронное гало. Дополнительно, получены аномально небольшие размеры для состояния 9.90 МэВ.

**Ключевые слова:** радиусы возбужденных уровней, модифицированная дифракционная модель, нейтронное гало.

**Введение.** За последние несколько лет были получены доказательства существования ядер с аномально большими радиусами возбужденных состояний. В наших предыдущих экспериментах по неупругому рассеянию <sup>13</sup>C ( $\alpha, \alpha^*$ ) при энергиях  $E(\alpha) = 29$  и 65 МэВ [1,2], мы наблюдали три возбужденных состояния 3.09 МэВ (1/2<sup>+</sup>), 8.86 МэВ (1/2<sup>-</sup>) и 9.90 МэВ (3/2<sup>-</sup>), радиусы которых отличались от основного состояния. Из-за важности полученного результата, новые измерения по рассеянию альфа-частиц на ядрах <sup>13</sup>C проводились при энергии  $E(\alpha) = 90$  МэВ.

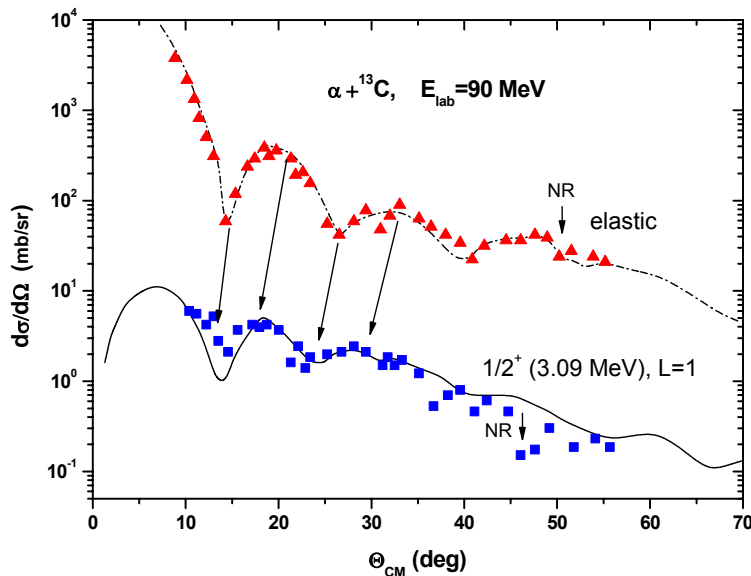


Рисунок 1 – Дифференциальные сечения  $\alpha+^{13}\text{C}$  упругого и неупругого ( $1/2, 3.09$  МэВ) рассеяния при  $E(\alpha)=90$  МэВ. Результаты расчетов оптической модели показаны пунктирной кривой. Сплошная линия соответствует расчетам по DWBA ( $L=1$ ). Позиции радужных минимумов обозначены вертикальными стрелками

**Обсуждение и результаты.** Дифференциальные сечения упругого и неупругого рассеяния  $\alpha+^{13}\text{C}$  были измерены на циклотроне К-130 университета Ювяскюля, Финляндия. Данные для упругого и неупругого рассеяния (3.09 МэВ), один из интересных возбужденных состояний в ядре  $^{13}\text{C}$ , представлены на рисунке 1. Дифракционные минимумы и максимумы (соединенные прямыми линиями) должны совпадать по фазе, если упругие и неупругие дифракционные радиусы равны. Наблюдаемое смещение дифракционных минимумов и максимумов в сечении рассеяния в сторону меньших углов в неупругом рассеянии, указывает на увеличение радиуса для возбужденного состояния 3.09 МэВ по сравнению с основным состоянием. Оценка среднеквадратичного радиуса была проведена тремя независимыми методами: модифицированная дифракционная модель (МДМ) [2], метод ядерной радуги (МЯР) [3, 4] и метод с использованием асимптотических нормировочных коэффициентов (АНК) [5, 6]. Из всех трех подходов были получены сходные значения, подтверждающие обоснованность используемых методов (Таблица 1) и подтвердить существование нейтронного гало в первом возбужденном состояний ядра  $^{13}\text{C}$  [1, 5].

Таблица 1 – Среднеквадратичные радиусы  $R_{\text{rms}}$  для разного состояния ядра  $^{13}\text{C}$

$E^*, \text{MeV}, J^\pi$	Структура	МДМ, 65 МэВ	МЯР, 65 МэВ	АНК, 65 МэВ	МДМ, 90 МэВ	МЯР, 90 МэВ
0.00, $1/2^-$	Оболочечная модель					
3.09, $1/2^+$	Нейтронное гало	$2.98 \pm 0.09^*$	$\geq 2.7$ [1]	$2.62 \pm 0.10$ [5] $2.68$ [7], теория	$2.882.62 \pm 0.19^*$	$\geq 2.6^*$
8.86, $1/2^-$	Разбавленный кластер	$2.68 \pm 0.12$ [1]	$\geq 2.5^*$		$2.632.62 \pm 0.16^*$	$\geq 2.5^*$
9.90, $3/2^-$	Сжатый кластер	$2.02 \pm 0.14$ [1]			$1.76 \pm 0.23$ [8]	

\*данная работа

Дифференциальные сечения неупругого рассеяния  $\alpha+^{13}\text{C}$  возбужденного состояния  $1/2^-$  (8.86 МэВ) при  $E(\alpha)= 65$  и 90 МэВ, показаны на рисунке 2. Как видно из этого рисунка, наблюдаемое тождественность структуры передних углов (до 45 град) подтверждает дифракционное происхождение осцилляции и сходстве дифракционных радиусов, измеренных при различных энергиях. Минимумы при  $q \approx 2.5 \text{ фм}^{-1}$  в экспериментальных данных при 65 МэВ и при  $q \approx 2,0 \text{ фм}^{-1}$  в данных при 90 МэВ были определены как минимумы радуги (Эйри). Применение методов МДМ и

МЯР в состоянии 8.86 МэВ показали, что последний имеет увеличенный радиус (таблица 1), близкий к среднеквадратичному радиусу состояния Хойла ( $0^+$ , 7.65 МэВ) в ядре  $^{13}\text{C}$  [2].

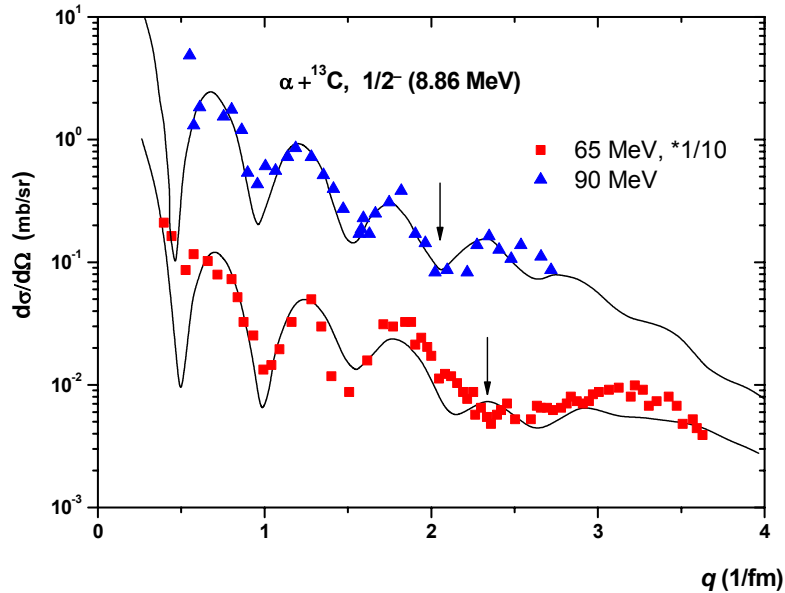


Рисунок 2 – дифференциальные сечения неупругого рассеяния  $\alpha+^{13}\text{C}$  возбужденного состояния  $1/2^-$  (8.86 МэВ) при энергиях 65 и 90 МэВ в зависимости от передачи импульса  $q$ . Позиции радужных минимумов обозначены стрелками

Оценка, проведенная по МДМ, дало значение радиуса состояния  $3/2^-$  (9.90 МэВ), который оказался меньше, чем у основного состояния ядра  $^{13}\text{C}$  (таблица 1). Этот вывод подтверждается путем сравнения различных неупругих сечений рассеяния с переносом углового момента  $L=2$  (рисунок 3). Дифракционная структура дифференциального сечения для состояния  $3/2^-$  (9.90 МэВ) смещается в сторону больших углов, указывая на его меньший радиус. Этот результат противоречит предсказаниям, которые были предложены в работе [9], согласно которому состояние  $3/2^-$  (9.90 МэВ) должно иметь радиус, сравнимой с состоянием Хойла. Физическая причина такого уменьшения размера ядра пока не ясна.

Таким образом, разбавленные состояния при 3.09 и 8.86 МэВ и компактная при 9.90 МэВ сосуществуют в ядре  $^{13}\text{C}$  вместе с другими состояниями с нормальными радиусами.

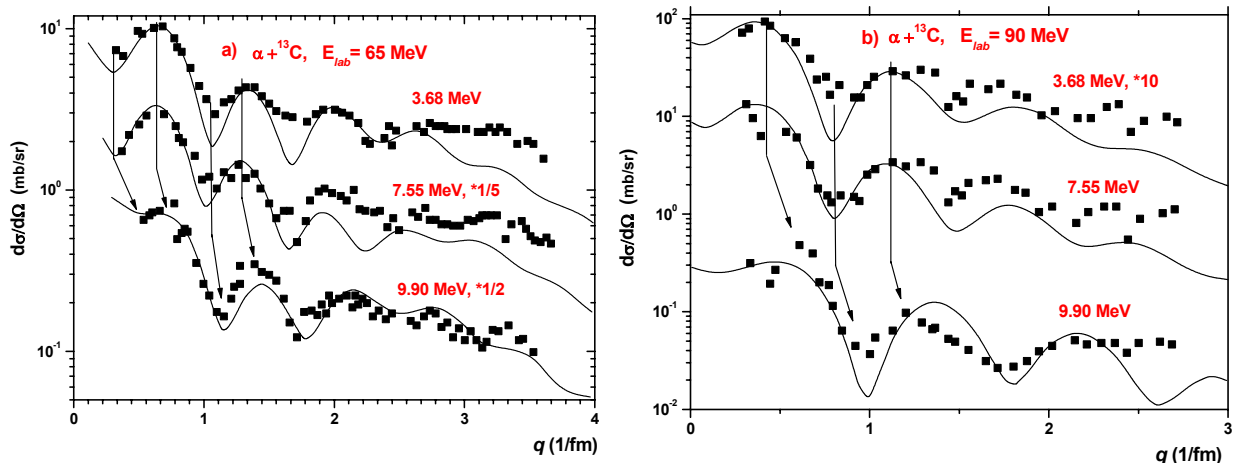


Рисунок 3 - дифференциальные сечения неупругого рассеяния  $^{13}\text{C}(\alpha, \alpha)^{13}\text{C}^*$  при энергиях 65 и 90 МэВ, при  $L=2$  для состояний 3.68 МэВ, 7.55 МэВ и 9.9 МэВ ядра  $^{13}\text{C}$  в зависимости от передачи импульса  $q$ . Вертикальные линии протягиваются через минимумы и максимумы дифференциальных сечений возбужденных уровней 3.68 и 7.55 МэВ. Соответствующие минимумы и максимумы сечений состояния 9.9 МэВ обозначены стрелками. Сплошные кривые соответствуют расчетам по DWBA ( $L=2$ ). Данные взяты из работы [8]

Работа была частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 14-02-00560 и 15-02-01503 и грантом МОН РК №1640 ГФ4.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] A.S. Demyanova et al., Spectroscopy of exotic states of  $^{13}\text{C}$  // EPJ Web of Conferences 66, 02027 (2014).  
[2] A.N. Danilov et al., Determination of nuclear radii for unstable states in  $^{12}\text{C}$  with diffraction inelastic scattering // Phys. Rev. C 80, 054603 (2009).  
[3] S. Ohkubo and Y. Hirabayashi, Evidence for strong refraction of  $^3\text{He}$  in an  $\alpha$ -particle condensate // Phys. Rev. C 75, 044609 (2007).  
[4] A.S. Demyanova et al., Radii of cluster states in  $^{11}\text{B}$  and  $^{13}\text{C}$  // Int. J. Mod. Phys. E 20, No 4, 915 (2011).  
[5] Z.H. Liu et al., Asymptotic normalization coefficients and neutron halo of the excited states in  $^{12}\text{B}$  and  $^{13}\text{C}$  // Phys. Rev. C 64, 034312 (2001).  
[6] T.L. Belyaeva et al., Determination of neutron halo radii in the first excited states of  $^{13}\text{C}$  and  $^{11}\text{Be}$  with the asymptotic normalization coefficients method // Phys. Rev. C 90, 064610-1 (2014).  
[7] T. Yamada and Y. Funaki, Cluster states and alpha particle condensation in  $^{13}\text{C}$  // Int. J. Mod. Phys. E 17, 2101 (2008).  
[8] А.А. Оглоблин и др., Возможное наблюдение в ядре  $^{13}\text{C}$  возбужденного состояния с аномально малым радиусом // Письма в ЖЭТФ, V. 102, No 4, 199 (2015).  
[9] N. Furutachi, M. Kimura, Bent three- $\alpha$  linear-chain structure of  $^{13}\text{C}$  // Phys. Rev. C 83, 021303 (2011).

#### REFERENCES

- [1] A.S. Demyanova et al., Spectroscopy of exotic states of  $^{13}\text{C}$  // EPJ Web of Conferences 66, 02027 (2014).  
[2] A.N. Danilov et al., Determination of nuclear radii for unstable states in  $^{12}\text{C}$  with diffraction inelastic scattering // Phys. Rev. C 80, 054603 (2009).  
[3] S. Ohkubo and Y. Hirabayashi, Evidence for strong refraction of  $^3\text{He}$  in an  $\alpha$ -particle condensate // Phys. Rev. C 75, 044609 (2007).  
[4] A.S. Demyanova et al., Radii of cluster states in  $^{11}\text{B}$  and  $^{13}\text{C}$  // Int. J. Mod. Phys. E 20, No 4, 915 (2011).  
[5] Z.H. Liu et al., Asymptotic normalization coefficients and neutron halo of the excited states in  $^{12}\text{B}$  and  $^{13}\text{C}$  // Phys. Rev. C 64, 034312 (2001).  
[6] T.L. Belyaeva et al., Determination of neutron halo radii in the first excited states of  $^{13}\text{C}$  and  $^{11}\text{Be}$  with the asymptotic normalization coefficients method // Phys. Rev. C 90, 064610-1 (2014).  
[7] T. Yamada and Y. Funaki, Cluster states and alpha particle condensation in  $^{13}\text{C}$  // Int. J. Mod. Phys. E 17, 2101 (2008).  
[8] А.А. Оглоблин и др., Возможное наблюдение в ядре  $^{13}\text{C}$  возбужденного состояния с аномально малым радиусом // Письма в ЖЭТФ, V. 102, No 4, 199 (2015).  
[9] N. Furutachi, M. Kimura, Bent three- $\alpha$  linear-chain structure of  $^{13}\text{C}$  // Phys. Rev. C 83, 021303 (2011).

А.С. Демьянова<sup>1</sup>, А.Н. Данилов<sup>1</sup>, Н. Буртебаев<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>2,3</sup>,  
Ж. Керимкулов<sup>2</sup>, Д.К. Алимов<sup>2</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> УЗО Курчатов Института, Мәскеу, Ресей;

<sup>2</sup> Ядролық Физика Институты, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup> Еуразия Ұлттық Университеті, Астана, Қазақстан

#### $^{13}\text{C}$ ЯДРОСЫНЫҢ ЭКЗОТИКАЛЫҚ КҮЙЛЕРІНІҢ РАДИУСТАРЫ

**Аннотация.** Осы жұмыста 90 МэВ энергияларда  $\alpha$ -бөлшектердің  $^{13}\text{C}$  ядроларында серпімді және серпімсіз шашырауының дифференциалды қималарының нәтижелері көрсетілген. Модификацияланған дифракциялық модел шеңберінде  $^{13}\text{C}$  ядросының 8.86 ( $1/2^-$ ), 3.09 ( $1/2^+$ ) және 9.90 ( $3/2^-$ ) МэВ қозған күйлерінің орташа квадратталған радиустары ( $\langle R_{\text{rms}} \rangle$ ) есептелді.  $^{13}\text{C}$  ядросының қозған бірінші екі күйлердің радиустары, негізгі күй радиусымен салыстырғанда, анағұрлым үлкен. Қосымша, қозған 9.90 МэВ күйінің радиусы үшін аномальды кіші шамасы алынды.

**Тірек сөздер:** қозған күйлердің радиустары, модификацияланған дифракциялық модель, нейтрондық гало.

#### Сведения об авторах:

Буртебаев Нассурлла - профессор, д.ф.м.н., зам. директора института ядерной физики, Алматы, Казахстан, e-mail: [nburtebayev@yandex.ru](mailto:nburtebayev@yandex.ru);

Джансейтов Данияр – e-mail: [janseit.daniar@gmail.com](mailto:janseit.daniar@gmail.com), моб. тел: +77073929252



## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 49 – 58

UDC 539.23; 539.216.1

**D.M. Sergeyev<sup>1,2</sup>, K.Sh. Shunkeyev<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe<sup>2</sup>Begeldinov Military Institute of Air Defence Forces, Aktobee-mail: [serdau@rambler.ru](mailto:serdau@rambler.ru), [serdau@mail.ru](mailto:serdau@mail.ru), [shunkeev@rambler.ru](mailto:shunkeev@rambler.ru)**COMPUTER SIMULATION OF TRANSPORT PROPERTIES OF NANOCONTACT "NIOBIUM – CARBON NANOTUBES (5,5) – NIOBIUM"**

**Abstract.** Within the framework of the density functional theory using Atomistix ToolKit with Virtual NanoLab program by simulation, transport properties of nanocontact "niobium – carbon nanotube (5,5) – niobium" were studied. At computer simulation of nanocontact the method of non-equilibrium Green's function and the local density approximation was used. The current-voltage characteristics, the differential conductivity, the transmission spectra and spectral current of considered nanocontact at different values of the bias voltage and temperature were calculated. The nature of electron transport through the reporting nanocontact shows that despite the small correlation between the size of nanocontact and the coherence length, such systems at low temperatures behave like Josephson structures. This makes possible to conclude about decreasing the size of Cooper pairs in low-dimensional systems, where the correlation between the electrons due to the absence of a periodic structure on the surface of the system is due to phonon transmitted through its volume. In these contacts at low temperature there is the coincidence of the transmission spectra at different values of the bias voltage. The obtained results may be useful for calculating of the nanoelectronics elements.

**Keywords:** nanocontact, carbon nanotube, current-voltage characteristic, differential conductivity, transmission spectra, spectral current.

УДК 539.23; 539.216.1

**Д.М. Сергеев<sup>1,2</sup>, К.Ш. Шункеев<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актобе;<sup>2</sup>Военный институт Сил воздушной обороны им. Т.Я. Бигельдинова, Актобе**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НАНОКОНТАКТА «НИОБИЙ – УГЛЕРОДНАЯ НАНОТРУБКА (5,5) – НИОБИЙ»**

**Аннотация.** В рамках теории функционала плотности с применением программы Atomistix ToolKit with Virtual NanoLab модельно исследованы транспортные характеристики наноконтакта «ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий». При компьютерном моделировании наноконтакта использовался метод неравновесных гриновских функций и аппроксимация локальной плотности. Рассчитаны вольтамперные характеристики, дифференциальная проводимость, спектры пропускания и спектральная плотность тока рассматриваемого наноконтакта при различных значениях напряжения смещения и температуры. Характер электронного транспорта через рассматриваемый нанокontakt показывает, что несмотря на малое соотношение между размером контакта и длиной когерентности, подобные системы при низкой температуре ведут себя как джозефсоновские структуры. Это позволяет сделать вывод об уменьшении размера куперовской пары в низкоразмерных системах, где корреляция между электронами из-за отсутствия периодической структуры на поверхности системы происходит за счет фонона, передаваемого через ее

объем. В подобных контактах при низкой температуре наблюдается совпадение спектров пропускания при различных значениях напряжения смещения. Полученные результаты могут быть полезными для расчетов элементов наноэлектроники.

**Ключевые слова:** наноконтакт, углеродная нанотрубка, вольтамперная характеристика, дифференциальная проводимость, спектр пропускания, спектральная плотность тока.

#### *Введение*

В настоящее время интенсивно исследуются электрофизические свойства различных наноразмерных контактов (см. например [1-3]). Это связано с разработками на их основе миниатюрных электронных компонентов микро- и наноэлектроники [4, 5]. В этом плане одним из широко используемых материалов для создания подобных наноконтактов является углеродные наноматериалы – углеродные нанотрубки (УНТ или CNT – carbon nanotube), фуллерены, графены и им родственные структуры [6-8].

Известно, что УНТ обладают такими уникальными свойствами, как сверхмалые размеры, хорошая электропроводность, высокие эмиссионные характеристики, высокая химическая стабильность и способность присоединять к себе разнообразные химические радикалы (см. например [9, 10] и цитируемые в них работы), которые позволяют на их основе создавать новые типы перспективных миниатюрных элементов электроники [11, 12]. Следует отметить, что одностенные УНТ (ОУНТ) обладают квантовым баллистическим механизмом проводимости, т.е. в них при низкой температуре электроны, являющиеся основными носителями заряда, движутся по нанотрубке, не испытывая рассеяния [9]. Поэтому особый интерес представляют структуры, состоящие из комбинаций УНТ с материалами с различными типами проводимости, например, УНТ – металл, УНТ – полупроводник, УНТ – сверхпроводник, контакты УНТ с разными значениями хиральности и т.п. В работе [13] показано, что за счет изменения хиральности ОУНТ путем внедрения в ее структуру дефекта (пары пятиугольник – семиугольник) можно изменить ее электронные свойства, например, ОУНТ с хиральностью (8,0) является полупроводником с шириной запрещенной зоны 1,2 эВ, тогда как ОУНТ с хиральностью (7,1) выступает как полуметалл (с шириной запрещенной зоны равной нулю). А в работе [14] путем внедрения дефекта в структуру ОУНТ получены гетеропереходы полупроводник – полупроводник с различными значениями ширины запрещенной зоны. Аналогичным образом можно получить сверхминиатюрные гетеропереходы полупроводник – металл. Следует отметить, что устройства, состоящие из двух соединенных ОУНТ с различными значениями хиральности, представляют собой электронно-дырочный переход размером несколько нанометров [15, 16]. Такие p-n переходы на основе УНТ применяются для разработки транзистора, а также солнечных элементов и сенсоров [17].

В работах [18-20] исследованы контакты сверхпроводник – УНТ, где основным механизмом транспорта сверхпроводящего тока (куперовских пар электронов) служит эффект многократного андреевского отражения (MAR – multiple Andreev reflections). Отметим, что в этих работах размер сверхпроводящей системы  $d$  много больше, чем длина когерентности (размер куперовской пары электронов)  $\xi$ , т.е.  $d \gg \xi$ , что не противоречит существованию куперовских пар в подобной системе. В нашем случае, размер рассматриваемого наноконтакта  $d$  много меньше, чем длина когерентности ( $d \ll \xi$ ), поэтому возникает вопрос о возможности формирования куперовских пар в подобных системах, а также как ведут себя такие системы в низкой температуре. В данной работе предпринята попытка ответить на эти вопросы, основываясь на результатах компьютерного моделирования транспортных характеристик наноконтакта «ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий» с применением программы Atomistix ToolKit with Virtual NanoLab.

#### *Описание объекта и методов исследования*

Геометрия исследуемого наноконтакта «ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий» приведена на рис. 1 а-г. Длина ниобиевых электродов по оси С составляет  $\sim 4,67$  Е, а длина УНТ  $\sim 4,922$  Е. Размер контактирующей (центральной) области составляет  $\sim 21,6$  Е.

Компьютерное моделирование наноконтакта производилось в рамках теории функционала плотности (DFT – Density Functional Theory) с применением метода неравновесных гриновских

функций (NEGF – Non-Equilibrium Green's Functions) и аппроксимации локальной плотности (LDA – local-density approximation) [21].

Основные параметры вычислительного ресурса: 8 ядерный процессор Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3,6 GHz, ОЗУ 8 Гб, тип системы – 64-разрядная операционная система, операционная система – Windows 8.1. Основные временные затраты вычислительного ресурса для различных видов операции при расчете характеристик, показанные на рис.2, приведены в таблице 1.

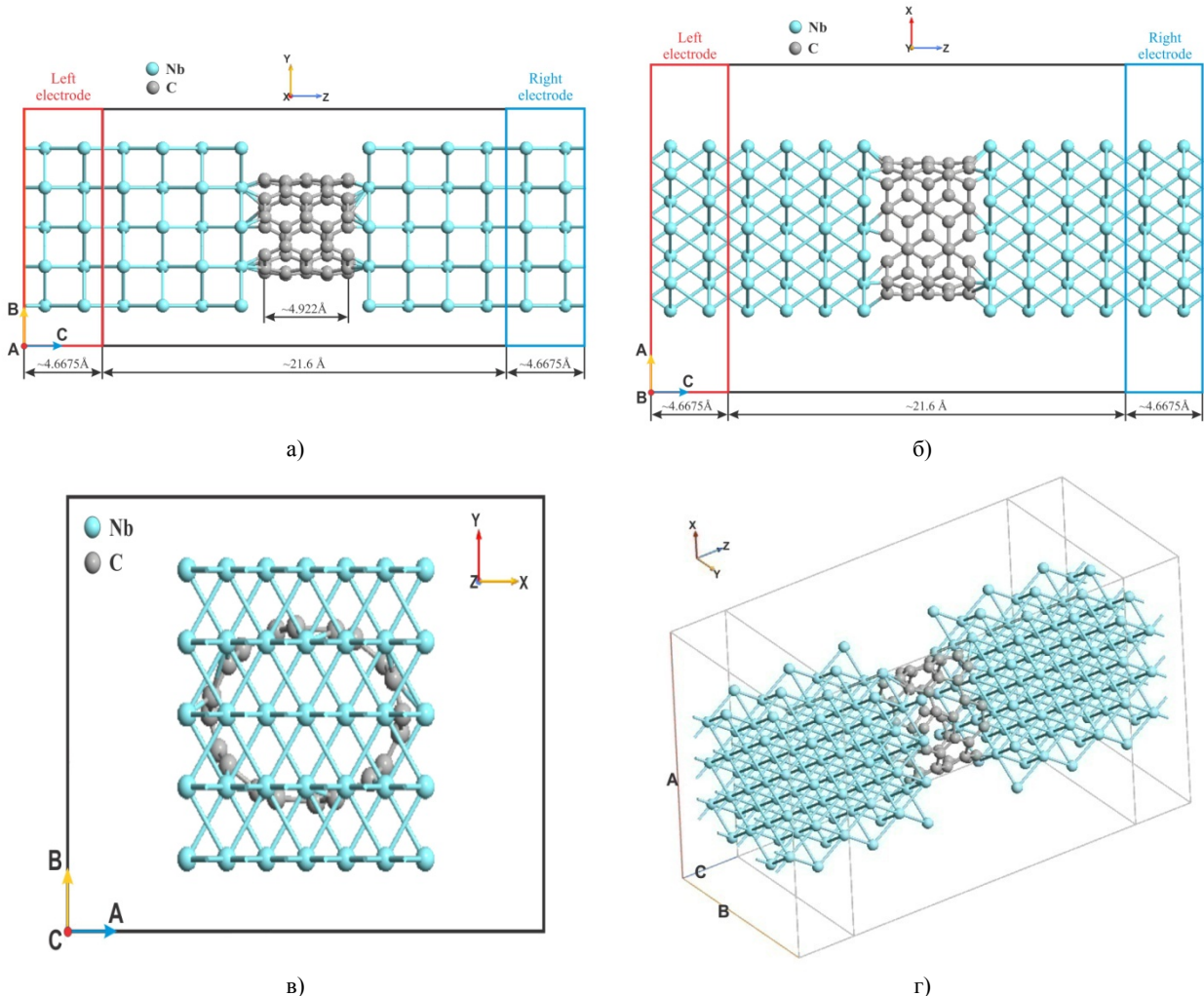


Рисунок 1 – Геометрия наноконтакта «ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий»: а) Z-Y plane; б) Z-X plane; в) X-Y plane; г) 3D.

Моделирование транспортных характеристик наноконтакта с помощью программы Atomistix ToolKit with Virtual NanoLab осуществлялось на основе нижеприведенных уравнений (1-10).

Для расчета транспортных свойств рассматриваемого наноконтакта составляется матрица плотности состояний левого и правого электродов:

$$D = D^L + D^R, \tag{1}$$

где  $D^L$ ,  $D^R$  – матрица плотности левого и правого электродов, соответственно.

$$D^L = \int \rho^L(\varepsilon) f\left(\frac{\varepsilon - \mu_L}{k_B T_L}\right) d\varepsilon, \tag{2}$$

где  $\varepsilon$  – энергия,  $\rho^L(\varepsilon)$  – спектральная матрица,  $f(\varepsilon)$  – фермиевская функция распределения квазичастиц по энергиям,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\mu_L$  – электрохимический потенциал,  $T_L$  – текущая температура левого электрода. Матрица плотности для правого электрода  $D^R$  находится аналогичным способом. Спектральная матрица определяется с применением гриновских функций:

$$\rho^L(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} G(\varepsilon) \Gamma^L(\varepsilon) G^\dagger(\varepsilon), \quad (3)$$

где  $\Gamma^L(\varepsilon)$  – матрица уширения (функция уширения),  $G(\varepsilon)$ ,  $G^\dagger(\varepsilon)$  – запаздывающая и опережающая функции Грина. Матрица уширения левого электрода описывается следующим уравнением:

$$\Gamma^L(\varepsilon) = \frac{1}{i} \left( \Sigma^L - (\Sigma^L)^\dagger \right), \quad (4)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\Sigma^L$  – собственная энергия левого электрода. Аналогичное уравнение существует для матрицы плотности правого электрода. Запаздывающая функция Грина представлена в виде

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{(\varepsilon + i\delta_+)S - H}, \quad (5)$$

или

$$G(\varepsilon) = \left[ (\varepsilon + i\delta_+)S - H - \Sigma^L(\varepsilon) - \Sigma^R(\varepsilon) \right]^{-1}, \quad (6)$$

где  $\delta_+$  – бесконечно малое положительное число,  $S$  – матрица интегралов перекрытия,  $H$  – гамильтонова матрица.

Таблица 1 – Временные затраты вычислительного ресурса для различных видов операции

№	Наименование операции	Итоговое время, сек	За один шаг, сек
1.	Матрица плотности (Density Matrix)	438968,09	495,45
2.	Спектр пропускания (Transmission Spectrum)	73585,89	728,57
3.	Интеграл вещественного пространства (Real Space Integral)	11567,71	10,69
4.	Плотность валентности (Valence Density)	3536,28	3,27
5.	Обменная корреляция (Exchange-Correlation)	1230,22	1,14
6.	Настройка матрицы плотности (Setting Density Matrix)	1028,79	257,20
7.	Постоянные термы (Constant Terms)	713,54	7,00
8.	Потенциал Хартри (Hartree Potential)	561,11	0,52
9.	Базис вещественного пространства (Real Space Basis)	533,14	5,13
10.	Диагонализация матрицы (Diagonalization)	498,64	5,42
11.	Смешивание (Mixing)	252,53	0,26
12.	Сохранение в файл	22,54	0,22
13.	Генерация базисного комплекта (Basis Set Generation)	7,51	0,07
14.	Разность плотности (Difference Density)	6,53	0,07
15.	Основная плотность (Core Density)	3,25	0,03
16.	Потенциал нейтрального атома (Neutral Atom Potential)	3,22	1,07
17.	Загрузка модулей (Loading Modules)	1,69	1,69
18.	Установка спиновой термы (Fixed Spins Term)	0,01	0,00
19.	Общее время расчета характеристик наноконтакта	539102,52	

Для расчета вольтамперной характеристики (ВАХ) и дифференциальной проводимости сначала в рамках DFT определяется функция пропускания барьера наноконтакта. Расчет зависимости функции пропускания барьера от энергии производится на основе уравнения:

$$T(\varepsilon) = \sum_k t_k^\dagger t_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k), \quad (7)$$

или

$$T(\varepsilon) = \text{tr}[\Gamma^L A^R] = \text{tr}[\Gamma^R A^L] = \text{tr}[\Gamma^L G \Gamma^R G^\dagger] = \text{tr}[\Gamma^R G \Gamma^L G^\dagger], \quad (8)$$

где  $t_k$  – амплитуда пропускания,  $\delta(\varepsilon)$  – дельта функция,  $A$  – спектральная функция.

В этом случае данный наноконтакт можно рассматривать как полупроницаемую мембрану, разделяющую два электрода, тогда функция пропускания  $T(\varepsilon)$  будет определять проницаемость этой мембраны для электронов с энергией  $\varepsilon$  [1]. При таком раскладе, ВАХ наноконтакта рассчитывается с учетом спектра пропускания на основе уравнения:

$$I(V_L, V_R, T_L, T_R) = \frac{2e^{+\infty}}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\varepsilon) \left[ f\left(\frac{\varepsilon - \mu_R}{k_B T_R}\right) - f\left(\frac{\varepsilon - \mu_L}{k_B T_L}\right) \right] d\varepsilon, \quad (9)$$

где  $T_R, T_L$  – текущие температуры правого и левого электрода,  $\mu_R, \mu_L$  – химические потенциалы правого и левого электрода.

Дифференциальная проводимость наноконтакта определяется с помощью уравнения:

$$\sigma(V_L, V_R, T_L, T_R, \alpha_L, \alpha_R) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{I(V_L + \alpha_L \delta V, V_R - \alpha_L \delta V, T_L, T_R)}{\delta V}, \quad (10)$$

где  $\alpha_L, \alpha_R$  – константы связи, при этом выполняется условие  $\alpha_L + \alpha_R = 1$ .

#### Описание и анализ результатов

На рис. 2 представлены результаты моделирования основных характеристик наноконтакта «ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий» при напряжении смещения  $V_{bias} = 0,01$  В и температуре 4,2 К. Отметим, что температура перехода ниобия в сверхпроводящее состояние (критическая температура)  $T_c \approx 9,2$  К. Расчет транспортных характеристик наноконтакта для этого случая производился в течении 6 дней 5 часов 45 мин. 2,52 сек.

Как видно, ВАХ наноконтакта напоминает ВАХ джозефсоновского элемента (рис. 3) (см. например [22]). Нулевой ток наблюдается в интервале напряжений  $\approx -6 \div 6$  мВ. При этих же значениях напряжения происходит переключение ВАХ с OFF режима в ON режим, как в наноструктурах для двухтерминального переключающего устройства (рис. 4) [23]. Это наводит на мысль о том, что, не представляет ли рассматриваемый наноконтакт джозефсоновского перехода SIS структуры (S – superconductor, I – insulator), хотя сверхпроводимость в низкоразмерной структуре может существовать при условии, если размер наноструктуры  $d$  больше или соизмерим с размером куперовской пары  $\xi$ , т.е.

$$d \geq \xi. \quad (11)$$

Все классические сверхпроводники, описываемые теорией Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), имеют относительно большую длину когерентности (см., например, табл. 2, где представлены параметры ниобиевых сверхпроводников [24]). При этом с уменьшением размера куперовских пар увеличивается критическая температура материала.

В работах [25, 26] исследован электронный транспорт через сверхпроводящую наночастицу с учетом поверхностных состояний, при этом рассмотрены следующие возможные варианты формирования куперовских пар в зависимости от соотношения между длиной когерентности и размером наночастицы:

а) при  $d \ll \xi$  сверхпроводящее состояние не возникает, поскольку образование куперовских пар невозможно;

б) при увеличении размера наночастицы до  $d \approx \xi$  в процесс формирования сверхпроводящего состояния вступают электроны, локализованные в поверхностных состояниях (рис. 5 в);

в) при  $d \gtrsim \xi$  в формировании сверхпроводимости начинают участвовать также и электроны в объемных состояниях, имеют место все возможные сценарии образования куперовских пар (рис. 5 а-в);

г) в макроскопическом пределе, когда  $d \gg \xi$ , вклады от второго (рис. 5 б) и третьего (рис. 5 в) сценариев образования куперовских пар становятся пренебрежимо малы ввиду малой доли поверхностных атомов по сравнению с объемными, и в формировании сверхпроводимости участвуют только электроны в объемных состояниях (рис. 5 а).

Также в этих работах с помощью возмущенной температурной функции Грина, рассчитанной в рамках приближенного метода кристаллических орбиталей, произведен расчет величины щели спектра сверхпроводящей наночастицы. В результате выявлено, что величина щели спектра сверхпроводящей наночастицы существенно превышает величину макроскопической сверхпроводящей щели, что свидетельствует об уменьшении  $\xi$  при уменьшении размера системы. Отметим, что взаимодействие между электронами происходит за счет фонона, передаваемого через объем наносистемы, так как на поверхности фактически не существует периодической структуры, поэтому происходит рассеяние электронов либо захват их в поверхностные состояния.

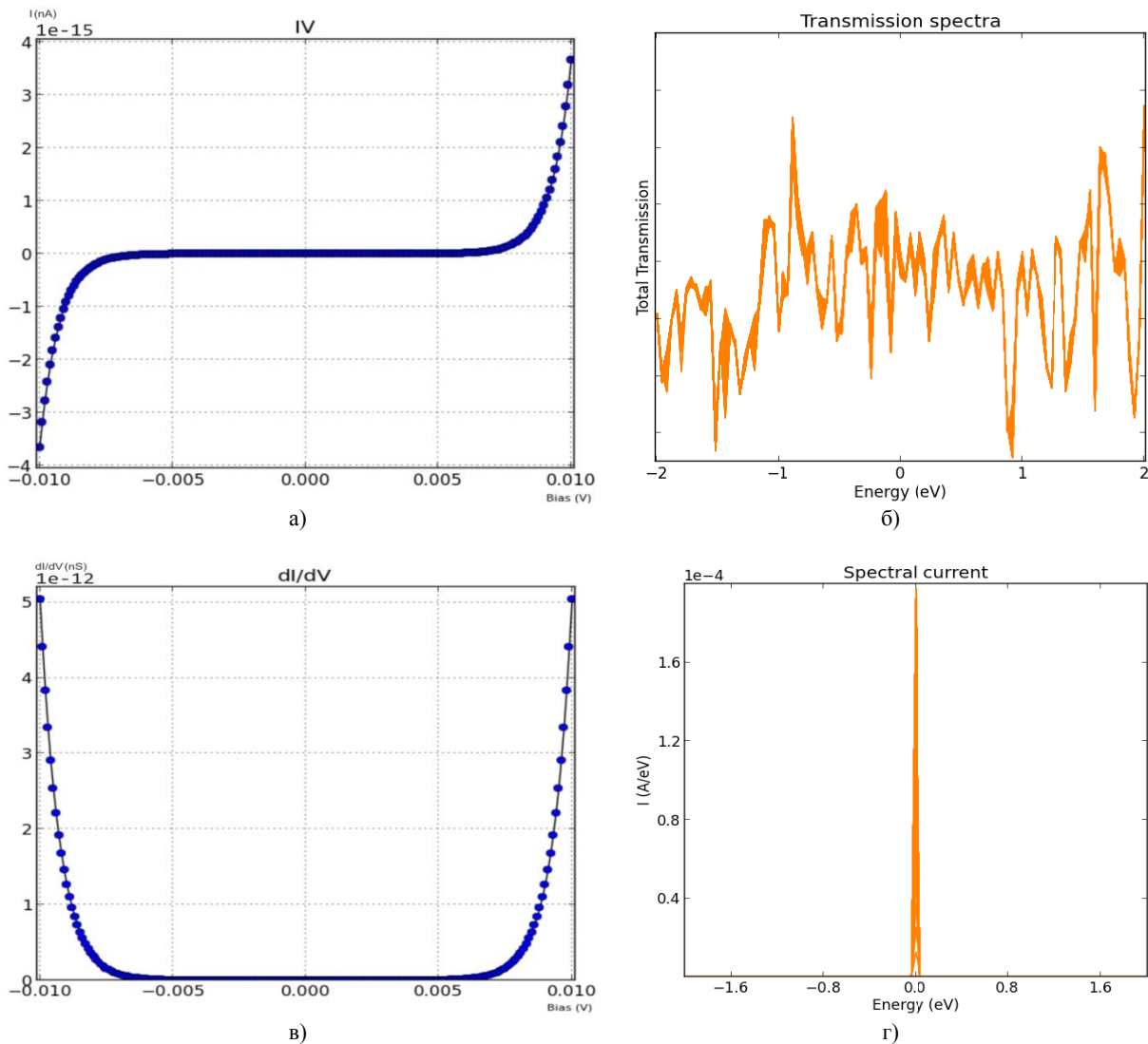


Рисунок 2 – Характеристики наноконтакта Nb – CNT (5,5) – Nb при напряжении смещения 0,01 В: а) ВАХ; б) спектр прозрачности; в) дифференциальная проводимость; г) спектральная плотность тока

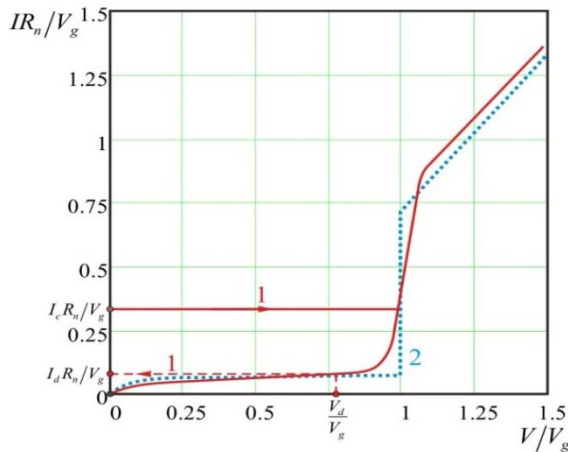


Рисунок 3 – ВАХ сверхпроводящего туннельного перехода: 1 – типичная ВАХ SIS-перехода; 2 – рассчитанная в рамках теории БКШ для идеального SIS-перехода

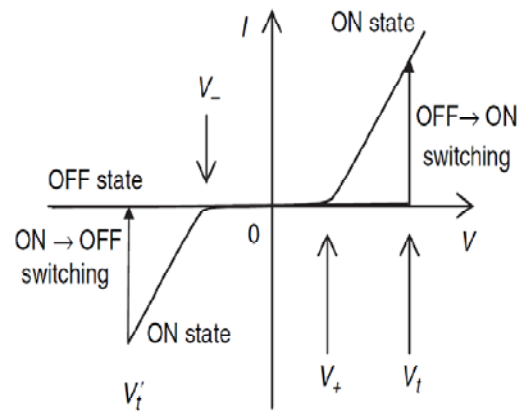


Рисунок 4 – ВАХ по постоянному току двух-терминального переключающего устройства [22].

При таком подходе, можно предположить, что в рассматриваемом наноконтакте ниобиевые берега находятся в сверхпроводящем состоянии, а сам нанокontakt ведет себя, как джозефсоновский элемент SIS типа. Тогда, в нашем случае, малое значение транспортного тока, протекающего через нанокontakt, не разрушает сверхпроводящее состояние ниобиевых сверхпроводящих берегов, за счет чего ВАХ имеет «джозефсоновский вид».

Таблица 1 – Основные параметры сверхпроводящих материалов из ниобия

Сверхпроводник	Критическая температура $T_c$ , К	Глубина проникновения $\lambda(0)$ , Э	Длина когерентности $\xi(0)$ , Э
Nb	9,2	450	380
NbTi	9,5	1600	50
NbN	16	2000	50
Nb <sub>3</sub> Sn	18,4	800	35
Nb <sub>3</sub> Ge	23	–	35

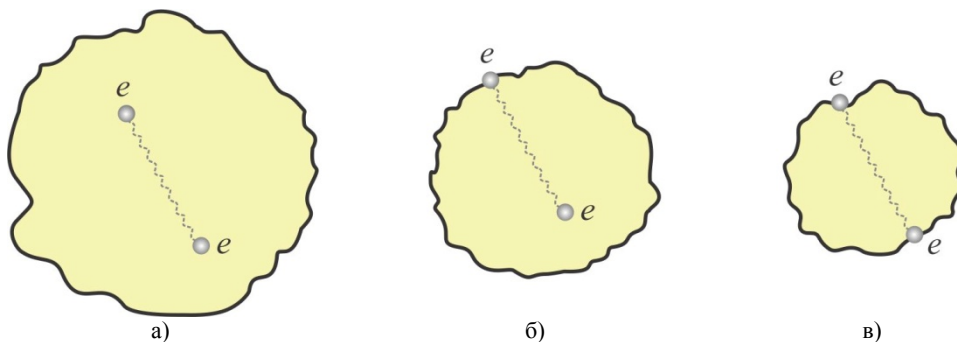


Рисунок 5 – Сценарии образования куперовских пар (согласно [25])

Спектры пропускания барьера совпадают при различных значениях напряжения от -0,01 до 0,01 В (рис. 2 б), что свидетельствует об упорядоченном взаимодействии квазичастиц. Максимумы спектра пропускания наблюдаются при отрицательной энергии  $\approx -0,7$  эВ и при положительной энергии  $\approx 1,8$  эВ, а минимумы – при  $\approx -1,6$  эВ и  $\approx 0,9$  эВ.

Дифференциальная проводимость наноконтакта имеет два максимума (присуще туннельным переходам) при напряжениях  $\mp 0,01$  В. Максимальное значение дифференциальной проводимости составляет  $5 \cdot 10^{-12}$  нСм (рис. 2 в).

Спектральная плотность тока наноконтакта увеличивается с увеличением приложенного напряжения и имеет максимальное значение  $2 \cdot 10^{-4}$  А/эВ (рис. 2 г).

На рис. 6 а-г приведены результаты моделирования характеристик наноконтакта Nb – CNT (5,5) – Nb при напряжении смещения 0,5 В. ВАХ квазилинейная и похожа на омическую зависимость. Омическая зависимость ВАХ связана с тем, что величина транспортного тока, протекающего через нанокontakt, достаточна для разрушения сверхпроводящего состояния в левых и правых берегах.

Спектры пропускания барьера флуктуирует при различных значениях приложенного напряжения. На рис. 6 б показаны спектры пропускания для отмеченных точек ВАХ на рис 6 а.

Максимумы дифференциальной проводимости наблюдаются при напряжениях  $\mp 0,42$  В и составляют  $3 \cdot 10^{-4}$  См.

Спектральная плотность тока – неоднозначная и заметно меняется при различных значениях приложенного напряжения. Максимальное значение спектральной плотности тока  $2,2 \cdot 10^{-4}$  А/эВ проявляется при энергии 0,3 эВ.

Подобные характеристики наблюдаются у наноконтакта Nb – CNT (5,5) – Nb и при увеличении температуры на 10 К и 20 К, что объясняется разрушением сверхпроводящего состояния берегов наноконтакта.

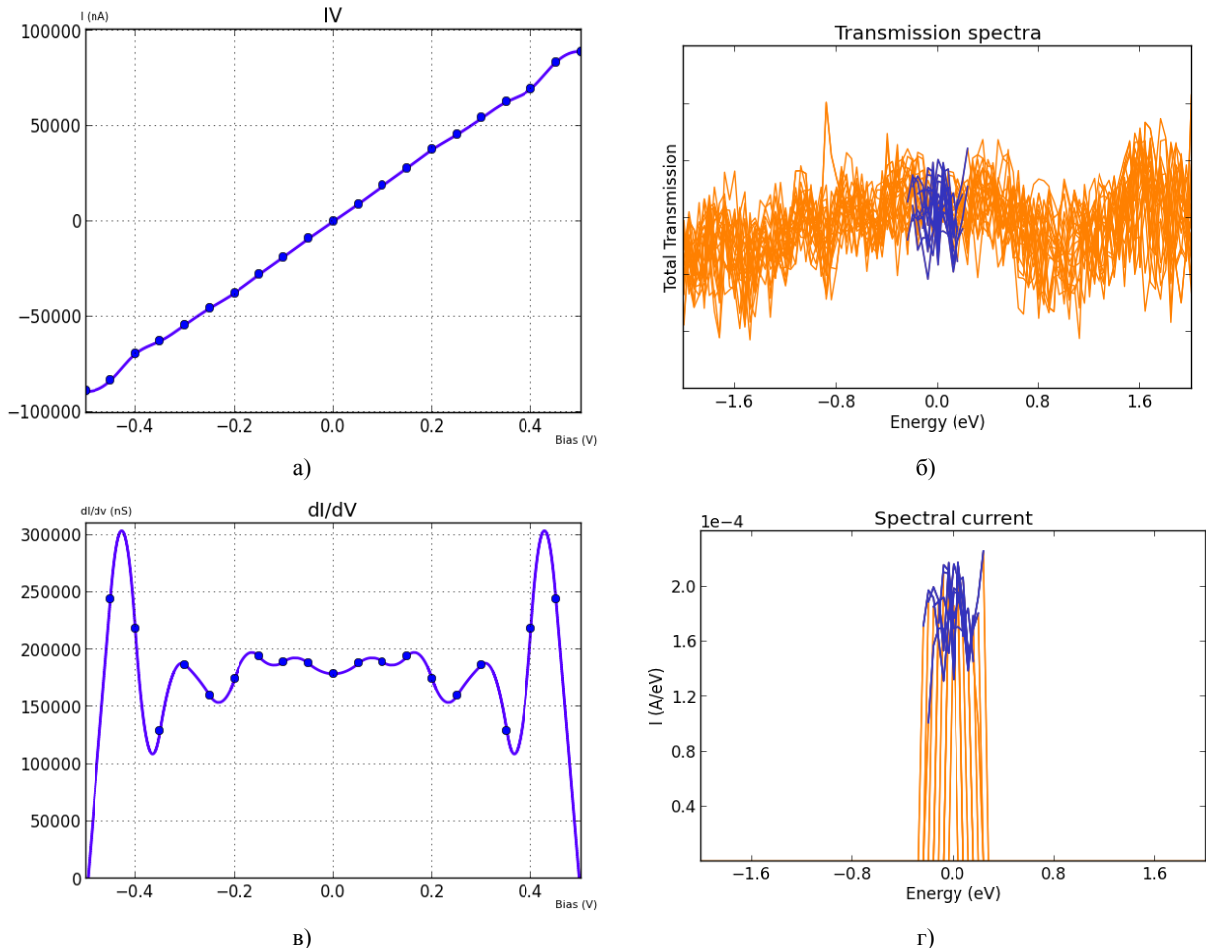


Рисунок 6 – Характеристики наноконтакта Nb – CNT (5,5) – Nb при напряжении смещения 0,5 В: а) ВАХ; б) спектр прозрачности; в)  $dI/dV$ -характеристика; г) спектральная плотность тока

### Выводы

Сравнивая характеристики наноконтакта для различных значений напряжения смещения (рис. 2, 6), можно сделать заключение о возможности существования сверхпроводящего состояния в низкоразмерных системах при невыполнении условия (11), т.е. в низкоразмерных системах возможно существенное уменьшение длины когерентности. При таком подходе в рамках теории джозефсоновского перехода хорошо объясняются форма ВАХ и спектра дифференциальной



проводимости наноконтакта, совпадение спектров пропускания наноконтакта при различных значениях напряжения, монотонно повышающаяся спектральная плотность тока наноконтакта с увеличением приложенного напряжения.

Таким образом, в данной работе модельно исследованы транспортные характеристики наноконтакта «ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий» при напряжении смещения  $V_{bias} = 0,01$  В; 0,5 В и при низких температурах и получены следующие результаты:

- Расчитаны вольтамперные и  $dI/dV$ -характеристики, спектры пропускания и спектральная плотность тока наноконтакта при различных значениях приложенного напряжения и температуре;
- Представлена возможность уменьшения длины когерентности  $\xi$  в низкоразмерных структурах по сравнению с макроскопической, вследствие чего при низких температурах структура ведет себя как джозефсоновская структура;
- Выявлено, что при температуре ниже критической, спектры пропускания наноконтакта совпадают при различных значениях напряжения.

*Работа частично поддержана грантом МОН РК (проект №4903/ГФ4).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Клавсюк А.Л., Салецкий А.М. Формирование и свойства металлических атомных контактов // УФН. – 2015. – Т. 185. – С. 1009-1030 [Klavysyuk A.L., Saletsky A.M. Formation and properties of metallic atomic contacts // Phys. Usp. – 2015. – Vol. 58. – P. 933-951.]
- [2] Чаплыгин Ю.А. Нанотехнологии в электронике. М.: Техносфера, 2005. – 448 с.
- [3] Sergeyev D., Shunkeyev K., Zhanturina N., Shunkeyev S. The influence of external weak magnetic field on anharmonic nanocontacts of Josephson type // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2013. – Vol. 49. – P. 012049.
- [4] Клавсюк А.Л., Колесников С.В., Смелова Е.М., Салецкий А.М. Моделирование процесса формирования металлических наноконтактов методом молекулярной динамики // Физика твердого тела. – 2011. – Т. 53, вып. 11. – С. 2237-2241 [Klavysyuk A.L., Kolesnikov S.V., Smelova E.M., Saletsky A.M. Molecular dynamics simulation of the formation of metal nanocontacts // Physics of the Solid State. – 2011. – Vol. 53, Issue 11. – P. 2356-2360.]
- [5] Paul W., Oliver D., Grutter P. Indentation-formed nanocontacts: an atomic-scale perspective // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2014. – Vol. 16. – P. 8201-8222.
- [6] Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon // Nature. – 1991. – Vol. 354. – P. 56-58.
- [7] Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F., Smalley R.E. C<sub>60</sub>: Buckminsterfullerene // Nature. – 1985. – Vol. 318. – P. 162-163.
- [8] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // Science. – 2004. – Vol. 306. – P. 666-669.
- [9] Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки // УФН. – 1997. – Vol. 167. – P. 945-972 [Eletskii A.V. Carbon nanotubes // Phys. Usp. – 1997. – Vol. 40. – P. 899-924].
- [10] Харламова М.В. Электронные свойства одностенных углеродных нанотрубок и их производных // УФН. – 2013. – Т. 183. – P. 1145-1174 [Kharlamova M.V. Electronic properties of pristine and modified single-walled carbon nanotubes // Phys. Usp. – 2013. – Vol. 56. – P. 1047-1073].
- [11] Cao Q., Han S.-J., Tulevski G.S., Zhu Y., Lu D.D., Haensch W. Arrays of single-walled carbon nanotubes with full surface coverage for high-performance electronics // Nat. Nanotechnol. – 2013. – Vol. 8. – P. 180-186.
- [12] Mishra A., Clayton K., Velasco V., Williams S.J., Wereley S.T. Dynamic optoelectric trapping and deposition of multiwalled carbon nanotubes // Microsystems & Nanoengineering. – 2016. – Vol. 2. – P. 16005.
- [13] Chico L., Crespi V.H., Benedict L.X., Louie S.G., Cohen M.L. Pure Carbon Nanoscale Devices: Nanotube Heterojunctions // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76. – P. 971.
- [14] Saito R., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S. Tunneling conductance of connected carbon nanotubes // Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 53. – P. 2044.
- [15] Franklin A.D., Chen Z. Length scaling of carbon nanotube transistors // Nat. Nanotechnol. – 2010. – Vol. 5. P. 858-862.
- [16] Shin H.-J., Clair S., Kim Y., Kawai M. Substrate-induced array of quantum dots in a single-walled carbon nanotube // Nat. Nanotechnol. – 2009. – Vol. 4. – P. 567-570.
- [17] Barkelid M., Zwiller V. Photocurrent generation in semiconducting and metallic carbon nanotubes // Nat. Photonics. – 2014. – Vol. 8. – P. 47-51.
- [18] Morpurgo A.F., Kong J., Marcus C.M., Dai H. Gate-Controlled Superconducting Proximity Effect in Carbon Nanotubes // Science. – 1999. – Vol. 286. – P. 263-265.
- [19] Zhong Y.-L., Akazaki T., Kanzaki K., Kobayashi Y., Takayanagi H. Superconducting proximity effect in single-walled carbon nanotubes between NbN electrodes // Science and Technology of Advanced Materials. – 2006. – Vol. 7. – P. S78-S82.
- [20] Kasumov A.Yu., Deblock R., Kociak M., Reulet B., Bouchiat H., Khodos I.I., Gorbatov Yu.B., Volkov V.T., Journet C., Burghard M. Supercurrents Through Single-Walled Carbon Nanotubes // Science. – 1999. – Vol. 284. – P. 1508-1511.
- [21] Brandbyge M., Mozos J.-L., Ordejon P., Taylor J., Stokbro K. Density-functional method for nonequilibrium electron transport // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 65. – P. 165401.
- [22] Karpov A., Blondel J., Dmitriev P., Koshelets V. A Broad Band Low Noise SIS Radiometer // IEEE Trans. on Appl. Supercond. – 1999. – Vol. 9, No 2. – P. 4225-4228.

- [23] Likharev K.K. Hybrid CMOS/Nanoelectronic Circuits: Opportunities and Challenges // *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*. – 2008. – Vol.3. – P. 203–230.
- [24] Mourachkine A. Room-Temperature Superconductivity. Cambridge Int. Science Publ., 2004. – 310 p.
- [25] Смолянкина О.Ю., Югай К.Н. Электронный транспорт через сверхпроводящую наночастицу с учетом поверхностных состояний // *Вестник НГУ. Серия Физика*. – 2009. – Т. 4, вып. 1. – С. 62-67.
- [26] Смолянкина О.Ю., Югай К.Н. Исследование поверхностных состояний наночастицы // *Вестник Омского университета*. – 2005. – № 3. – С. 9-11.

#### REFERENCES

- [1] Klavysyuk A.L., Saletsky A.M. *Phys. Usp.*, **2015**, 58, 933-951 (in Eng.).
- [2] Chaplygin Ju.A. *Nanotehnologii v elektronike*. M.: Tehnosfera, **2005**, 448 p. (in Russ.).
- [3] Sergeyev D., Shunkeyev K., Zhanturina N., Shunkeyev S. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, **2013**, 49, 012049 (in Eng.).
- [4] Klavysyuk A.L., Kolesnikov S.V., Smelova E.M., Saletsky A.M. *Physics of the Solid State*, **2011**, 53, 11, 2356-2360 (in Eng.).
- [5] Paul W., Oliver D., Grutter P. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **2014**, 16, 8201-8222 (in Eng.).
- [6] Iijima S. *Nature*, **1991**, 354, 56-58 (in Eng.).
- [7] Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F., Smalley R.E. *Nature*, **1985**, 318, 162-163 (in Eng.).
- [8] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. *Science*, **2004**, 306, 666-669 (in Eng.).
- [9] Eletsii A.V. *Phys. Usp.*, **1997**, 40, 899-924 (in Eng.).
- [10] Kharlamova M.V. *Phys. Usp.*, **2013**, 56, 1047-1073 (in Eng.).
- [11] Cao Q., Han S.-J., Tulevski G.S., Zhu Y., Lu D.D., Haensch W. *Nat. Nanotechnol.*, **2013**, 8, 180-186 (in Eng.).
- [12] Mishra A., Clayton K., Velasco V., Williams S.J., Wereley S.T. *Microsystems & Nanoengineering*, **2016**, 2, 16005 (in Eng.).
- [13] Chico L., Crespi V.H., Benedict L.X., Louie S.G., Cohen M.L. *Phys. Rev. Lett.*, **1996**, 76, 971 (in Eng.).
- [14] Saito R., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S. *Phys. Rev. B*, **1996**, 53, 2044 (in Eng.).
- [15] Franklin A.D., Chen Z. *Nat. Nanotechnol.*, **2010**, 5, 858-862 (in Eng.).
- [16] Shin H.-J., Clair S., Kim Y., Kawai M. *Nat. Nanotechnol.*, **2009**, 4, 567-570 (in Eng.).
- [17] Barkelid M., Zwiller V. *Nat. Photonics*, **2014**, 8, 47-51 (in Eng.).
- [18] Morpurgo A.F., Kong J., Marcus C.M., Dai H. *Science*, **1999**, 286, 263-265 (in Eng.).
- [19] Zhong Y.-L., Akazaki T., Kanzaki K., Kobayashi Y., Takayanagi H. *Science and Technology of Advanced Materials*, **2006**, 7, S78–S82 (in Eng.).
- [20] Kasumov A.Yu., Deblock R., Kociak M., Reulet B., Bouchiat H., Khodos I.I., Gorbatov Yu.B., Volkov V.T., Journet C., Burghard M. *Science*, **1999**, 284, 1508-1511 (in Eng.).
- [21] Brandbyge M., Mozos J.-L., Ordejon P., Taylor J., Stokbro K. *Phys. Rev. B*, **2002**, 65, 165401 (in Eng.).
- [22] Karpov A., Blondel J., Dmitriev P., Koshelets V. *IEEE Trans. on Appl. Supercond.*, **1999**, 9, 2, 4225-4228 (in Eng.).
- [23] Likharev K.K. *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, **2008**, 3, 203–230 (in Eng.).
- [24] Mourachkine A. *Room-Temperature Superconductivity*. Cambridge Int. Science Publ., **2004**, 310 p (in Eng.).
- [25] Smoljankina O.Ju., Jugaj K.N. *Vestnik NGU. Serija Fizika*, **2009**, 4, 62-67 (in Russ.).
- [26] Smoljankina O.Ju., Jugaj K.N. *Vestnik Omskogo universiteta*, **2005**, 3, 9-11 (in Russ.).

Д.М. Сергеев, Қ.Ш. Шүңкеев

- <sup>1</sup> Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе қ.
- <sup>2</sup> Т.Я. Бегельдинов атындағы Әуе қорғаныс күштерінің әскери институты, Ақтөбе қ.

#### «НИОБИЙ – КӨМІРТЕКТІ НАНОТҮТІКШЕ (5,5) – НИОБИЙ» НАНОТҮЙІСПЕСІНІҢ ТРАНСПОРТТЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫНЫҢ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУІ

**Аннотация.** Мақалада функционалды тығыздық теориясы аясында Atomistix ToolKit with Virtual NanoLab бағдарламасын қолдану арқылы «ниобий – көміртекті нанотүтікше (5,5) – ниобий» нанотүйіспесінің транспорттық сипаттамалары модельді зерттелді. Нанотүйіспені компьютерлік модельдеу барысында тепе-теңсіздік Грин функциялары әдісі мен локальды тығыздық аппроксимациясы қолданылды. Ығысу кернеуі мен температураның әртүрлі мәндерінде қарастырылып отырған нанотүйіспенің вольтамперлік сипаттамасы, дифференциалдық өткізгіштігі, өткізу спектрлері және спектральді тоқ тығыздығы есептелінді. Нанотүйіспе арқылы өтетін электронды транспорт сипаттамасы түйіспе өлшемі мен когеренттілік ұзындығы қатынасының аз шамасына қарамай мұндай жүйелер төмен температурада джозефсондық құрылымы тәрізді қасиетін көрсететіндігі белгілі болды. Бұл төменгі өлшемді жүйелерде Купер жұбының өлшемі азаятындығы туралы түйін жасауға мүмкіндік береді. Мұндай жағдайда жүйенің бетінде периодты құрылымның жоқ болуына байланысты электрондар арасындағы корреляция оның көлемі арқылы фонндар есебінен жүзеге асады. Аталмыш нанотүйіспелерде төменгі температурада ығысу кернеуінің әртүрлі мәндерінде өткізу спектрлерінің ұқсастығы байқалады. Алынған нәтижелер наноэлектрониканың элементтерін есептеуге пайдалы болуы мүмкін.

**Түйін сөздер:** нанотүйіспе, көміртекті нанотүтікше, вольтамперлік сипаттама, дифференциалдық өткізгіштік, өткізу спектрі, спектральді ток.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 59 – 66

UDC 533.92; 621.384.647

**M.K. Dosbolayev, A.U. Utegenov, A.B. Tazhen, T.S. Ramazanov, M.T. Gabdullin**IETP, NNLOT, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan  
[merlan@physics.kz](mailto:merlan@physics.kz)**DYNAMIC PROPERTIES OF PULSE PLASMA FLOW AND DUST FORMATION IN THE PULSED PLASMA ACCELERATOR**

**Abstract.** This paper presents the results of the experimental investigation of the pulsed beam characteristics. Dynamic and transport properties of a pulsed plasma flow was considered. With high-speed camera of Phantom v2512 a video plasma beam was held, after the processing, the speed of the pulse stream was determined. Materials with fractal surfaces, similar to materials obtained in tokamaks were obtained.

**Keywords:** pulse-plasma accelerator, tokamak, candidate material, dusty plasma, fractal structure.

УДК 533.92; 621.384.647

**М.К. Досболаев, А.У. Утегенов, А.Б. Тажен, Т.С. Рамазанов, М.Т. Габдуллин**

НИИЭТФ, КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО ПОТОКА И ПЫЛЕОБРАЗОВАНИЕ В ИПУ**

**Аннотация.** В данной работе представлены результаты по экспериментальному исследованию характеристик импульсного плазменного пучка. Были рассмотрены динамические и транспортные свойства импульсного плазменного потока. С помощью высокоскоростной камеры Phantom версии v2512 проводились видеосъемки плазменного пучка, из которого после обработки была определена скорость импульсного потока. Экспериментально были получены материалы с фрактальными поверхностями, аналогично материалам, получаемых в токамаках, вследствие эрозии.

**Ключевые слова:** импульсный плазменный ускоритель, токамак, кандидатный материал, пылевая плазма, фрактальная структура.

**Введение.** Одной из задач физики управляемого термоядерного синтеза, относящихся к управлению потоками плазмы, является минимизация эрозии внутрикамерных деталей, в частности, первой стенки реактора, что приводит к образованию пыли (частиц микронного размера) и наноструктурных продуктов.

Накопление пыли в объеме реактора в основном играет отрицательную роль. Во-первых, это приводит к неустойчивости горения высокотемпературной плазмы и зарождению срывов, во-вторых, к захвату и накоплению трития, что представляет проблему для безопасной эксплуатации реактора и его экономичности [1-5].

На сегодняшний день в качестве кандидатных материалов, обращенных к высокотемпературной плазме, принят углеродный материал или его композит для облицовки в области сепаратрисы в диверторе. Кандидатными материалами называют те материалы, которые могли бы охарактеризовать процессы, происходящие с материалами из которых сделан реактор и для нахождения наилучшего композита, который мог бы заменить материал деталей реактора.

Данная работа посвящена изучению формирования пыли при взаимодействии ускоренного импульсного плазменного потока с графитными пластинами и динамики самого потока. Для имитации и исследования данного процесса был использован плазменный ускоритель коаксиального типа. Ускорители коаксиального типа являются универсальными установками для генерации импульсного плазменного потока и для изучения взаимодействия его с кандидатными материалами первой стенки термоядерных установок.

**Экспериментальная установка.** Экспериментальная установка импульсного плазменного ускорителя ИПУ-30, собранная в НИИЭТФ, состоит из трех основных частей: системы электродов (плазма образуется в межэлектродном пространстве при подаче на них разрядного напряжения), вакуумной системы и системы конденсаторов (для накопления энергии электрического поля с высоковольтного источника питания). Принципиальная схема установки показана на рисунке 1 [6].

В экспериментах в качестве плазмообразующего газа был использован водород и аргон, напряжение зарядки конденсаторной батареи (C=100 мкФ) ускорителя варьировалось от 3 до 14 кВ.

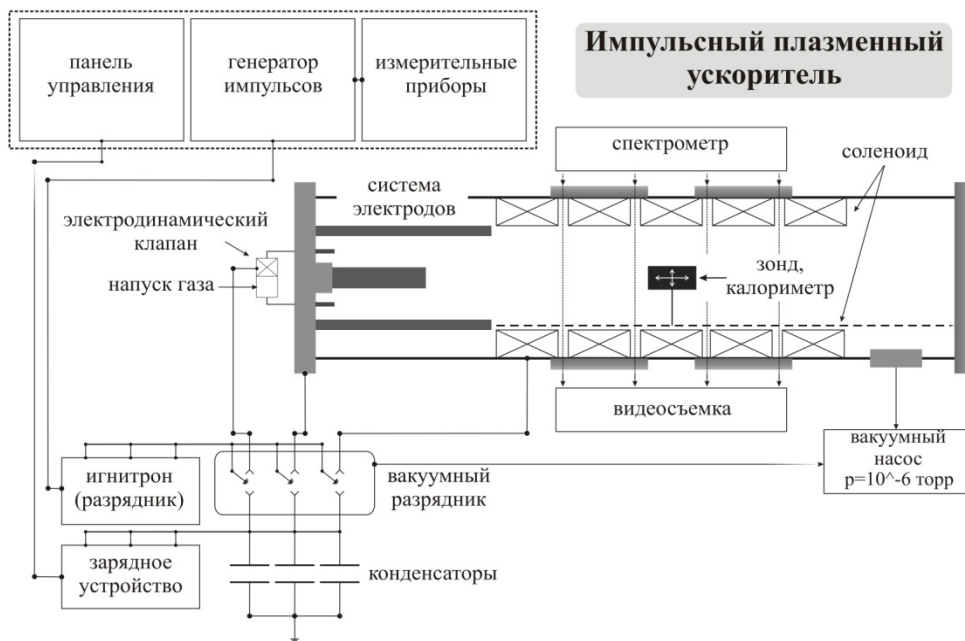


Рисунок 1 – Принципиальная схема импульсной плазменной установки

На рисунке 2 показана принципиальная схема положения мишени и контейнера для сбора материалов эрозии внутри газоразрядного реактора.

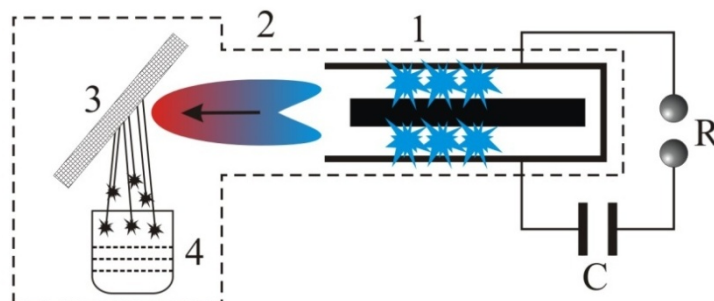


Рисунок 2 – Принципиальная схема экспериментальной установки:  
1 – система электродов; 2 – направленный импульсный плазменный поток; 3 – мишень; 4 – контейнер для сборки материалов эрозии

Принцип действия установки основан на ускорении плазменного сгустка (2), сформированного в межэлектродном пространстве при электрическом разряде собственным магнитным полем, воздействием силой Лоренца:

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}, \quad (1)$$

эквивалентной магнитному давлению

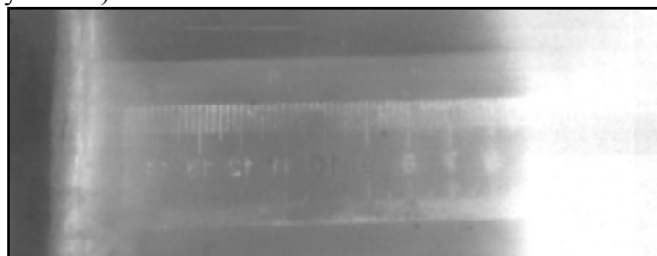
$$P = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (2)$$

где  $j$  – плотность тока;  $B$  – напряженность магнитного поля;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость.

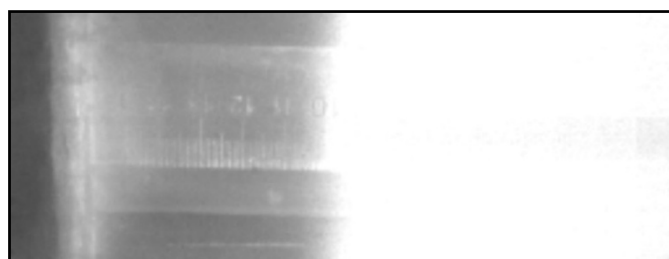
Для этого к коаксиально расположенным электродам (1) прикладывается высокое напряжение, а в рабочей камере создается высокий вакуум, достаточный для развития разряда. Разряд на межэлектродное пространство подается с помощью разрядника (R). Разрядник представляет собой два круглых плоскопараллельных медных дисков, разделенных изолятором из капролона. Вакуум создается отдельным форвакуумным насосом. Пробой вакуумного промежутка осуществляется зажиганием инициирующего искрового разряда на поджигающем электроде. Напряжение для поджига подается от специального источника высоковольтного импульса.

**Динамические и транспортные свойства плазменного потока.** Исследуя динамические свойства импульсного плазменного потока, нами было рассмотрено движение потока с истечением времени.

На данном этапе работы был исследован перенос плазменного потока, а также были проведены эксперименты по определению скорости. Эксперименты по изучению плазменного потока образованного в ИПУ-30 проводились с помощью высокоскоростной камеры Phantom версии v2512 с максимальной скоростью частоты 677000 кадров в секунду. Для изучения динамики плазменного потока на нашем эксперименте были записаны видеозаписи со скоростью 470000 кадр/сек. Видеосъемка плазменного шнура производилась через световой фильтр. Результаты определения скорости потока показаны на рисунке 3. Видно, что на первом кадре начало пучка было расположено на расстоянии  $\sim 5$  см (рисунок 3а) и на  $\sim 10$  см, как видно из следующего кадра (рисунок 3б).



а)



б)

Рисунок 3 – Фотоизображение плазменного пучка направленного от системы электродов к мишени из графита, которая расположена на расстоянии 16 см: а) – первый кадр; б) – следующий кадр

Таким образом, зная время между последующими кадрами, определялась скорость плазменного потока при напряжении 8 кВ, которая составила  $\sim 23$  км/сек.

Также по результатам видеосъемки был определен диаметр плазменного шнура, который составил ~ 4 см (рисунок 4):

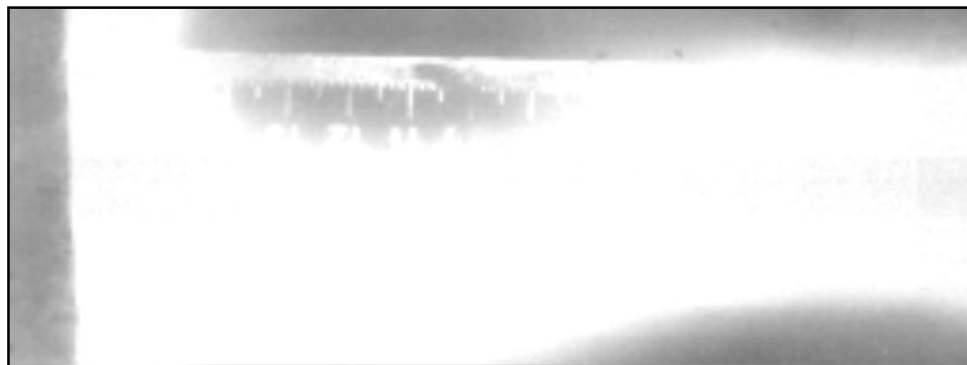


Рисунок 4 – Фотоизображение плазменного шнура

**Пылеобразования в ИПУ.** В настоящее время трудно не считаться с тем фактом, что во многих современных плазменных энергетических установках, из-за взаимодействия плазмы с поверхностью материалов, в плазму попадают макроскопические частицы (размерами до нескольких сотен микронов) из обрабатываемого материала (или из первой стенки токамака). В результате образуется плазма сложного состава: такую плазму называют пылевой или плазмой с конденсированной дисперсной фазой (обзоры [7-9]).

На работу токамака пыль влияет следующим образом:

- 1) пылинки охлаждают плазму, попадая в центральную часть;
- 2) частицы пыли инициирует малые вихри в периферийной плазме, усиливают транспорт частиц и энергии на стенку, тем самым способствуют охлаждению плазмы и срыва плазменного шнура;
- 3) стабилизация разряда за счет инжекции пыли или инертных газов.

В связи с этим, изучение пылевой плазмы направлено на исследование процесса зарядки частиц, структуры и устойчивости плазменно-пылевых образований. Много внимания ученых в сфере физики плазмы уделяется выяснению характера взаимодействия пылевых макрочастиц между собой, а также сил, действующих на макрочастицу со стороны окружающей ее плазмы.

Также срывы разряда в токамаках являются серьезной проблемой, ограничивающей срок их службы. Поэтому к исследованию срывов разряда посвящено немало научных работ. Так, например, в работе [10] представлены результаты экспериментальных исследований влияния напуска благородных газов на динамику развития срыва разряда в токамаке Т-10. В экспериментах срывы разряда вызывались разными способами: наращиванием плотности плазмы до предельной и/или инжекцией дейтериевой или примесной (углеродной) макрочастицы. Обнаружено, что спад тока при срыве разряда в Т-10 происходит в две фазы, которые отличаются существенно друг от друга разными характерными временами.

На основе вышеуказанного можно твердо утверждать насколько важны знания о механизмах пылеобразования в термоядерных установках.

В нашем случае для исследования использовался графит как один из кандидатных материалов первой стенки современных термоядерных установок. Пластина из графита (3) была расположена от источника плазмы на расстоянии 10 см, под углом 45 градусов к основной оси, как показано на рисунке 2. Такое расположение мишени сделано с целью более точного моделирования геометрии и процесса эрозии в установках токамак. Методики диагностики и сбора пыли следующие. При взаимодействии ускоренного плазменного сгустка с пластинкой графита на поверхности образуются наноструктурированные пленки и частицы пыли, которые за счет тепловой энергии попадают в контейнер для сбора образцов (4). Были случаи, когда внутри контейнера обнаруживались пленки, вырванные с поверхности графитовой пластины. Внутри контейнера коллектора расположены три секционных фильтра из стальной сетки для предотвращения ухода пыли обратно в вакуумную камеру.

Таким образом, полученные образцы подтверждали образование пленок с сильно развитыми поверхностями и фрактальными пылинками, точно такие же, как в термоядерных установках. На рисунке 5 показана расплавленная область графитовой пластины после облучения двадцати импульсами плазменного сгустка.

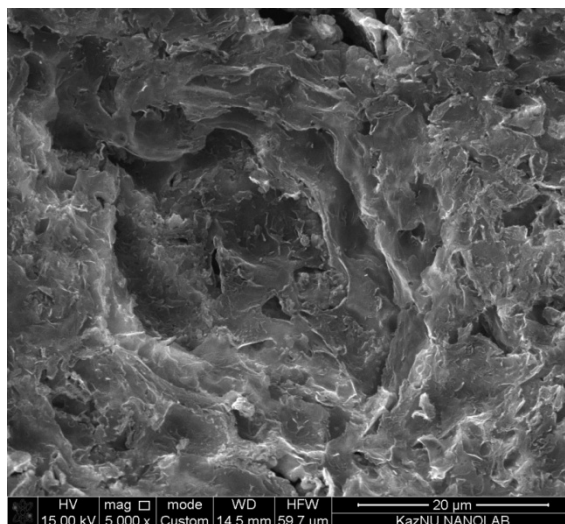


Рисунок 5 – Поверхность графитовой пластины после облучения плазмой

Как видно из рисунка поверхность имеет углубление, которое образовалось во время длительного (повторяющиеся несколько сотен микросекунд) взаимодействия с плазменным потоком. Также видно, что она имеет несколько слоев, то есть является слоистой пленкой.

Теперь рассмотрим пленки и пыли, оторванные от таких мест и упавшие на контейнер, как показано на рисунке 6 – общая картина группы таких пленок и частиц на подложке.

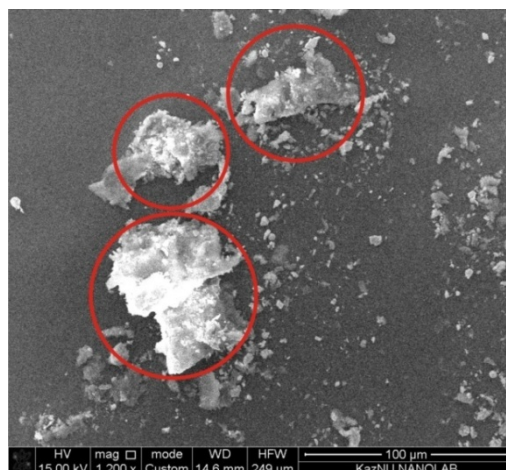


Рисунок 6 – Общий вид пленок и частиц (пыли) с наноструктурированными поверхностями

Красными кружками выделены пленки с наноструктурированными поверхностями. В большинстве случаев пленки с развитым рельефом имеют гранулы с несколькими иерархическими уровнями. Крупные гранулы состоят из более мелких элементов, которые, в свою очередь, состоят из еще более мелких. Такое образование характерно для фрактальных структур. Раньше предполагалось, что образованию такого вида структур способствует появление примеси, например, на поверхности вольфрамовой пленки образовалась фрактальная структура из примеси C, J, Ca Fe, Cr, Cu [11]. Один из примеров фрактальной структуры собственного материала представлен на рисунке 7, которые были получены в ходе данного эксперимента. Также заметно,

что эти структуры состоят из разветвленных структур типа «цветной капусты», рост таких структур может быть связан как с процессом осаждения, так и с процессом диффузии адатомов. Для этого требуется одновременное выполнение следующих условий:

а) Поток атомов должен быть изотропным, температура подложки мала (~300 К).

б) Необходимо наличие начальной неровности, такие условия создаются в наших экспериментах.

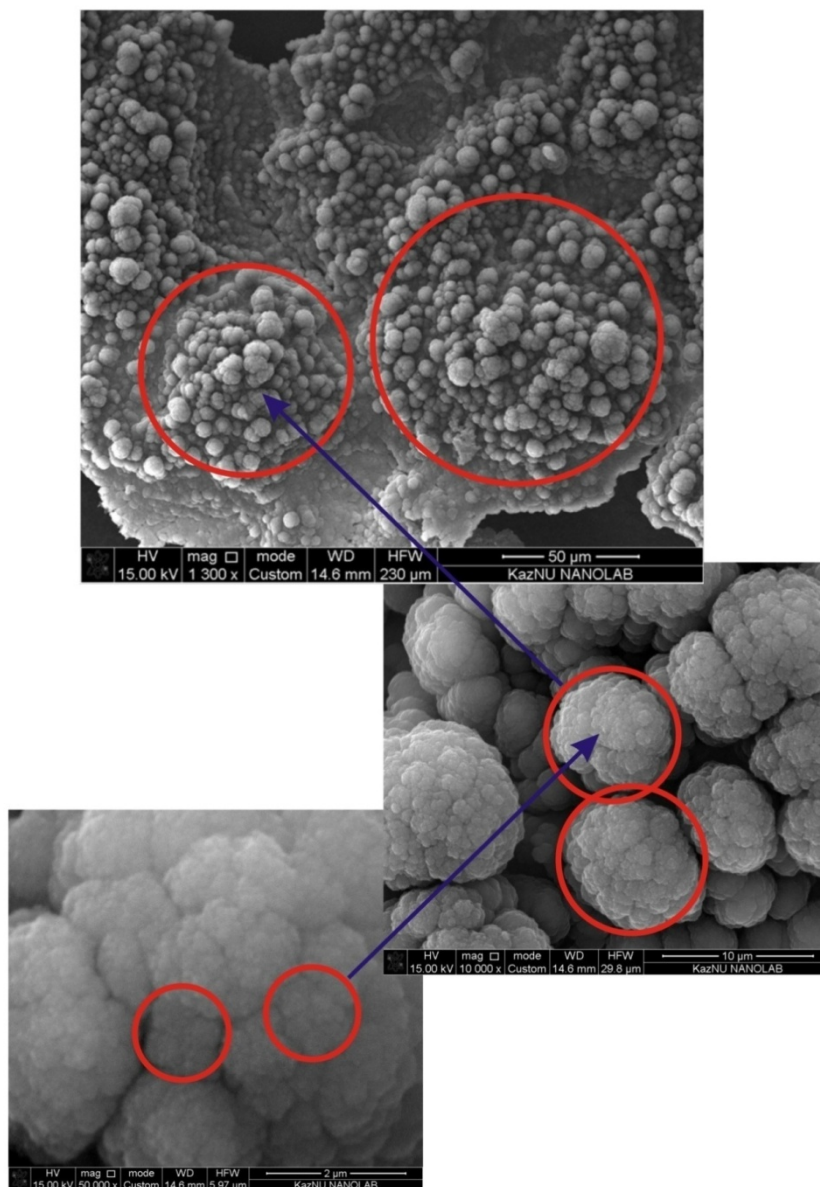


Рисунок 7 – Фрактальная структура частицы графита

Причиной появления пленки с различными рельефами (гладкие, слоистые, с фрактальной структурой) может быть появление устойчивых кластеров, либо в результате флуктуационного образования зародышей критического размера. При высоких температурах поверхности, возможен перенос адатомов к более горячим элементам рельефа (к поверхности пленки) вследствие убывания энергии активации диффузии с ростом температуры. Это способствует образованию развитой структуры на поверхности, как показано на рисунке 8.



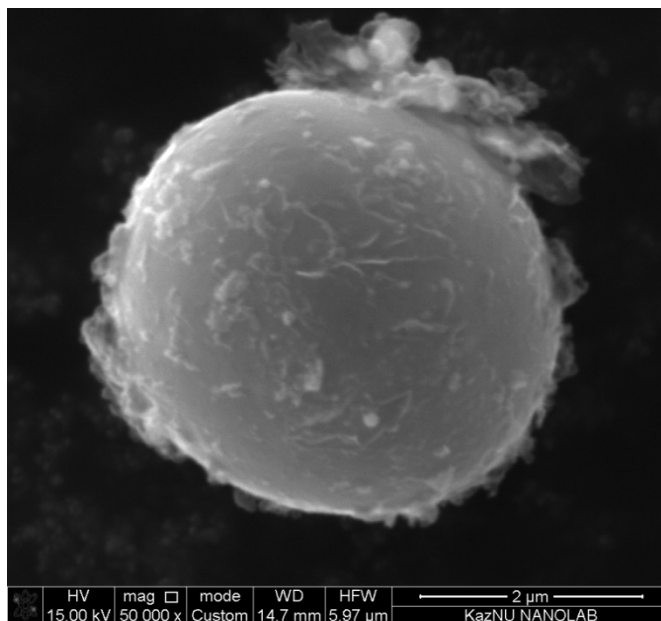


Рисунок 8 – Вид поверхности углеводородных частиц, полученных с помощью электронного сканирующего микроскопа

Кроме того, росту кластеров «снизу-вверх» может способствовать их кристаллическая структура: преимущественно растут кристаллы, у которых ось перпендикулярна грани с наименьшей плотностью (законы Шубникова и Бравэ), а также лучшее закрепление на вершинах кластеров в силу большей кривизны (и следственно, большего количества ловушек для адатомов) таких участков поверхности.

Таким образом, приведенные экспериментальные результаты характеризуют свойства (состав, размеры и т.п.) пленок и пылевых частиц в токамаках и других термоядерных установках. Тем самым дают возможность получать более глубокую информацию об их свойствах и могут объяснить механизмы пылеобразования и образования пленок с сильноразвитыми поверхностями.

**Заключение.** Были исследованы динамические характеристики импульсного плазменного потока в ИПУ-30 с помощью высокоскоростной видеокамеры. В результате было выявлено, что импульсный плазменный потока имеет скорость  $\sim 23$  км/сек с диаметром плазменного сгустка  $\sim 4$  см при напряжении 8 кВ. Также были получены образцы, подтверждающие образование пленок с сильноразвитыми поверхностями и фрактальными пылинками, точно такие же, как в термоядерных установках. Выявлено, что образование фрактальных структур, состоящие из разветвленных структур типа «цветной капусты», связаны с процессом диффузии адатомов.

*Работа была выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках гранта 3112/ГФ4.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.C. Flanagan, M. Sertoli, M. Bacharis et al. Characterising dust in JET with new ITER-like wall // Plasma physics and controlled fusion. – 2015. – 57. – 014037.
- [2] V.I. Crauz., Yu.V. Martinenko, N. Yu. Svechnikov, V.P. Smirnov, V.G. Stankevich, L.N. Khimchenko. Nanosturctures in controlled fusion devices // Uspek. Phys. Nauk. – 2010. – 180. P. 1055-1080.
- [3] G. Federici, C.H. Skinner et al. Plasma-material interactions in current tokamaks and their implications for next step fusion reactors // Nuclear Fusion. – 2001. – 41. – P. 1967-1979.
- [4] Yu.V. Martinenko, M. Yu. Nagel Formation of dust in TOKAMAK (ser. Thermonuclear fusion.). – 2009. – P. 65-72.
- [5] H-W. Bartels et al. Accident Analysis Specifications for GSSR // Safety, Environment and Health Group. Garching ITER Joint Central Team. – 2000.
- [6] A.U. Utegenov, A.B. Tazhen, M.K. Dosbolayev, T.S. Ramazanov. Experimental investigation of the interaction of plasma flow with the wall of fusion reactor // 21<sup>st</sup> International symposium on Heavy Ion Inertial Fusion. Book of abstracts. – 2016. – P. 53.
- [7] Форгов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И., Петров О.Ф. Пылевая плазма // УФН. – 2004. – № 174. – С. 495-544.

- [8] Shukla P.K. and Mamun A.A. Introduction to Dusty Plasma Physics. // Series in Plasma Physics. – London: Institute of Physics Publishing. – 2002. – P. 123-165.
- [9] Thomas H.M., Morfill G.E. Melting dynamics of a plasma crystal // Nature. – 1996. – Vol.379. – P. 806-809.
- [10] Дрёмин М.М., Капралов В.Г., Кислов А.Я., Кислов Д.А., Крупин В.А., Крылов С.В., Кулешин Э.О. и др. Влияние напуска благородных газов на срыв разряда в токамаке Т-10 // ВАНТ. – Сер. Термоядерный синтез. – 2012. – вып. 4. – С. 58-70.
- [11] Крауз В.И., Мартыненко Ю.В., Свечников Н.Ю., Смирнов В.П., Станкевич В.Г., Химченко Л.Н. Наноструктуры в установках управляемого термоядерного синтеза // УФН. – 2010. – Т.180. – С. 1055-1080.

#### REFERENCES

- [1] J.C. Flanagan, M. Sertoli, M. Bacharis et al. Characterising dust in JET with new ITER-like wall // Plasma physics and controlled fusion. **2015**, 57, 014037.
- [2] V.I. Crauz., Yu.V. Martinenko, N. Yu. Svechnikov, V.P. Smirnov, V.G. Stankevich, L.N. Khimchenko. Nanosturctures in controlled fusion devices // Uspek. Phys. Nauk, **2010**, 180, P. 1055-1080.
- [3] G. Federici, C.H. Skinner et al. Plasma-material interactions in current tokamaks and their implications for next step fusion reactors // Nuclear Fusion, **2001**, 41, P. 1967-1979.
- [4] Yu.V. Martinenko, M. Yu. Nagel Formation of dust in TOKAMAK (ser. Thermonuclear fusion.), **2009**, P. 65-72.
- [5] H-W. Bartels et al. Accident Analysis Specifications for GSSR // Safety, Environment and Health Group. Garching ITER Joint Central Team, **2000**.
- [6] A.U. Utegenov, A.B. Tazhen, M.K. Dosbolayev, T.S. Ramazanov. Experimental investigation of the interaction of plasma flow with the wall of fusion reactor // 21<sup>st</sup> International symposium on Heavy Ion Inertial Fusion. Book of abstracts. **2016**, P. 53.
- [7] Фортгов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И., Петров О.Ф. Пылевая плазма // УФН, **2004**, № 174. С. 495-544.
- [8] Shukla P.K. and Mamun A.A. Introduction to Dusty Plasma Physics. // Series in Plasma Physics. – London: Institute of Physics Publishing, **2002**, P. 123-165.
- [9] Thomas H.M., Morfill G.E. Melting dynamics of a plasma crystal // Nature, **1996**, Vol.379. P. 806-809.
- [10] Дрёмин М.М., Капралов В.Г., Кислов А.Я., Кислов Д.А., Крупин В.А., Крылов С.В., Кулешин Э.О. и др. Влияние напуска благородных газов на срыв разряда в токамаке Т-10 // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, **2012**. вып. 4. С. 58-70.
- [11] Крауз В.И., Мартыненко Ю.В., Свечников Н.Ю., Смирнов В.П., Станкевич В.Г., Химченко Л.Н. Наноструктуры в установках управляемого термоядерного синтеза // УФН. **2010**. Т.180. С. 1055-1080.

**М.К. Досболаев, А.У. Утегенов, А.Б. Тажен, Т.С. Рамазанов, М.Т. Габдуллин**

#### **ИМПУЛЬСТІК ПЛАЗМАЛЫҚ АҒЫННЫҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ МЕН ИМПУЛЬСТІ ПЛАЗМАЛЫҚ ҮДЕТКІШТЕГІ ТОЗАҢНЫҢ ПАЙДА БОЛУЫ**

**Аннотация.** Берілген жұмыста импульсті ағынның сипаттамаларын эксперимент жүзінде зерттеу нәтижелері келтірілген. Импульсті плазмалық ағынның динамикалық және транспорттық қасиеттері қарастырылған. Phantom v2512 версиялы жоғары жылдамдықты камера арқылы плазмалы ағын таспаға түсіріліп, нәтижелерді өңдеу арқылы импульсті ағынның жылдамдығы анықталды. Эксперимент жүзінде токамактарда алынатын материалдарға сәйкес фрактал бетті материалдар алынды.

**Түйін сөздер:** импульсті плазмалық үдеткіш, токамак, кандидаттық материал, тозаңды плазма, фракталды құрылым.

#### **Сведения об авторах:**

Досболаев М.К. – Ассоциированный профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Алматинская обл., поселок Кокозек, ул. Жибек-жолы, д.29а, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 125 каб. +77022144020 [merlan@physics.kz](mailto:merlan@physics.kz);

Утегенов А.У. – Научный сотрудник, НИИЭТФ при КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 121 каб, +7(707)-112-35-74 [almasbek@physics.kz](mailto:almasbek@physics.kz);

Тажен А.Б. – Лаборант, НИИЭТФ при КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 118 каб, +7(747)-706-74-06 [aigerim\\_tzh@mail.ru](mailto:aigerim_tzh@mail.ru);

Рамазанов Т.С. – профессор, член корр. НАН РК, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 331 каб., 240-46-28, 292-58-66(22-21) [ramazan@physics.kz](mailto:ramazan@physics.kz);

Габдуллин М.Т. – ст. преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 427 каб, [gabdullin@physics.kz](mailto:gabdullin@physics.kz);

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 67 – 73

UDC 521.1

**M.Zh. Minglibayev<sup>1,2</sup>, T.M. Zhumabek<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan<sup>2</sup>Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan[minglibayev@mail.ru](mailto:minglibayev@mail.ru)**ON THE ISOSCELES RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM**

**Abstract.** In this work there has been investigated the classical spatial restricted three-body problem in the barycentric reference frame when all three bodies form triangle during all the time of motion. In the barycentric reference frame, there has been emphasized a particular case when the Newtonian total force of attraction of two primary bodies acting on a massless body is central during all the time of motion. It has been proven that in order to make the Newtonian total force of attraction of two primary bodies acting on a massless body central, it is needed and sufficient triangle formed by three bodies to be isosceles and a massless body should be on the vertex of this triangle. It is shown that in this particular case all three bodies are form isosceles triangle and massless body is on the vertex of this triangle. It is proven that orbit of the isosceles restricted three-body problem is planar.

**Keywords:** restricted three-body problem, barycentric coordinate system, isosceles solution.

УДК 521.1

**М.Дж. Минглибаев<sup>1,2</sup>, Т.М. Жумабек<sup>1</sup>**<sup>1</sup>КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан<sup>2</sup>Астрофизический институт имени В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан**К РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**

**Аннотация.** В настоящей работе исследована классическая пространственная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат, когда три тела, все время движения, образуют треугольник. В барицентрической системе координат выявлен частный случай, когда ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел действующая на безмассовое тело, все время движения центральная. Доказано: для того, чтобы ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующая на безмассовое тело, была центральная, необходимо и достаточно, чтобы треугольник, образованный тремя телами, был равнобедренный, на вершине которого находится безмассовое тело. Оказалось, что в этом частном случае три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Сформулирована равнобедренная ограниченная задача трех тел, то есть задача трех тел, когда три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Доказано, что орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

**Ключевые слова:** ограниченная задача трех тел, барицентрическая система координат, равнобедренные решения.

**1. Введение.** Движения малого естественного или искусственного небесного тела в поле тяготения двух больших небесных тел (далее основные тела) хорошо описывается математической моделью широко известной ограниченной задачей трех тел [1-6]. При произвольных значениях масс основных тел задача имеет пять точек либрации - точные частные решения. Две из них решение Лагранжа, когда три тела все время движения образуют равносторонний треугольник.

Три коллинеарные решения Эйлера, когда три тела все время движения расположены на одной и той же прямой. Известны также решения в форме равнобедренного треугольника при условии, что массы основных тел, расположенных на основании равнобедренного треугольника, равны между собой [7-9]. В связи с отсутствием общего аналитического решения задачи в конечном виде многие аспекты задачи изучены различными качественными и численными методами [1-9]. Поиск новых точных частных аналитических решения задачи представляется актуальным.

Отметим, что во всех вышеуказанных известных точных частных решениях ограниченной задачи трех тел ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующая на малое тело, в барицентрической системе координат все время движения *центральная*. В связи с этим представляют интерес все случаи ограниченной задачи трех тел, когда ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующее на малое тело, *центральная*.

В настоящей работе рассмотрена классическая пространственная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат. Исследован случай, когда три тела все время движения образуют треугольник, то есть треугольная ограниченная задача трех тел. В треугольной ограниченной задачи трех тел исследован частный случай, когда три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится малое тело, то есть равнобедренная ограниченная задача трех тел. Доказано, что в равнобедренной ограниченной задаче трех тел суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел *центральная*. Показано, что орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел *плоская*.

## 2. Уравнения движения ограниченной задачи трех тел в различных системах координат.

**2.1. Классические уравнения движения ограниченной задачи трех тел в абсолютной системе координат.** Рассмотрим движения малого тела, исчезающее малой массой  $m_2$  (далее безмассовое тело) в поле тяготения двух основных тел с постоянными массами  $m_1$  и  $m_3$ . При этом тела рассматриваются как материальные точки. Математические условия ограниченной постановки задачи трех тел [1-4] могут быть написаны в виде

$$m_2 \ll m_1, m_2 \ll m_3, m_2 \approx 0. \quad (2.1)$$

Дифференциальные уравнения пространственных движений этих трех тел в абсолютной системе координат  $OX^*Y^*Z^*$  имеет широко известный вид

$$\ddot{\vec{R}}_1^* = fm_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_1^*}{R_{13}^{*3}}, \quad \ddot{\vec{R}}_3^* = fm_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_3^*}{R_{31}^{*3}}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2^* = f \left( m_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_2^*}{R_{21}^{*3}} + m_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_2^*}{R_{23}^{*3}} \right), \quad (2.3)$$

где  $\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$  - радиус-вектора тел,  $\vec{R}_{ij}^* (i \neq j)$  - расстояние между тел. Точкой в этих уравнениях и далее обозначается дифференцирование по времени  $t$ . Из системы дифференциальных уравнений (2.2) получим известное соотношение

$$m_1 \vec{R}_1^* + m_3 \vec{R}_3^* = \vec{a}^* t + \vec{b}^*, \quad \vec{a}^* = \overrightarrow{const}, \quad \vec{b}^* = \overrightarrow{const}. \quad (2.4)$$

Отсюда получим хорошо известное аналитическое выражение радиус-вектора точки  $G$ -барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат

$$\vec{R}_G^* = \frac{m_1 \vec{R}_1^* + m_3 \vec{R}_3^*}{m_1 + m_3} = \frac{\vec{a}^*}{m_1 + m_3} t + \frac{\vec{b}^*}{m_1 + m_3}. \quad (2.5)$$

Система дифференциальных уравнений (2.2) описывает задачу двух тел. Из (2.5) следует  $\ddot{\vec{R}}_G^* = 0$ , то есть барицентрическая система координат инерциальная. Уравнения движения (2.3) описывает движения безмассового тела в ньютоновской поле тяготения двух основных тел  $m_1, m_3$  - классическую пространственную ограниченную задачу трех тел в абсолютной системе координат.

**2.2. Уравнение движения в барицентрической системе координат.** Переходим на барицентрическую систему координат по формулам

$$\vec{R}_i^* = \vec{R}_G + \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

где  $\vec{R}_G$  - радиус-вектор точки  $G$  - барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат,  $\vec{r}_i$  - радиус-векторы тел в барицентрической системе координат. Пусть оси барицентрической системы координат  $Gxuz$  параллельные соответствующим осям абсолютной системы координат  $Ox^*Y^*Z^*$ . Преобразованные уравнения движения (2.2) и (2.3) имеют вид

$$\ddot{\vec{r}}_1 = f m_3 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}, \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \quad \ddot{\vec{r}}_3 = f m_1 \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3}, \quad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad (2.7)$$

$$r_{31} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{1/2} = r_{13},$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = f \left( m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right), \quad (2.8)$$

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = \Delta_{12},$$

$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2]^{1/2} = \Delta_{32}.$$

В барицентрической системе координат соотношения (2.4) преобразуется в инвариант центра масс

$$m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3 = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) описывает пространственную классическую ограниченную задачу трех тел в барицентрической системе координат.

**2.3. Решение задачи двух тел.** Из уравнений (2.7) следуют

$$\ddot{\vec{r}}_{31} = -f \frac{m_3 + m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31}. \quad (2.10)$$

Из интеграла площадей

$$\vec{r}_{31} \times \dot{\vec{r}}_{31} = \vec{c}_{31} = \overrightarrow{const} \quad (2.11)$$

следует, что в задаче двух тел орбита плоская, без потери общности, можно считать, что орбита лежит на плоскости  $Gxu$ . Решение дифференциального уравнения движения задачи двух тел (2.10) в относительной системе координат имеет вид [10]

$$r_{31} = r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}, \quad r^2 \dot{\theta} = c_{31} = c = const, \quad (2.12)$$

$$p = a(1 - e^2), \quad c^2 = \mu p, \quad \mu = f(m_1 + m_3). \quad (2.13)$$

**3. Теорема о равнобедренной ограниченной задаче трех тел** Перепишем уравнение движения пространственной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат (2.8) в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_2 = f \left( m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right). \quad (3.2)$$

Введем обозначение для единичного вектора

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2}. \quad (3.3)$$

### 3.1 Определения.

**Определение 1.** Ограниченную задачу трех тел назовем треугольной, если три тела все время движения образует треугольник.

**Определение 2.** Треугольную ограниченную задачу трех тел назовем равнобедренной, если треугольник образованный тремя телами все время движения образует равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

**Определение 3.** В барицентрической системе координат  $Gxuz$ , в треугольной ограниченной задаче трех тел ньютоновскую силу притяжения двух основных тел  $\vec{F}_2$  назовем центральной, если все время движения она направлена к началу координат и представима в виде

$$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{e}_2, \quad F_2 = |\vec{F}_2|. \quad (3.4)$$

**3.2 Теорема.** В треугольной ограниченной задаче трех тел, в барицентрической системе координат, для того чтобы сила  $\vec{F}_2$  все время движения была центральной, необходимо и достаточно, чтобы все время движения выполнялось условие

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta, \quad (3.5)$$

то есть треугольник образованный тремя телами все время движения – равнобедренный, на вершине которого находится безмассовое тело.

**Доказательство.**

**Необходимость.** Допустим, что  $\vec{F}_2$  - центральная.

Докажем, что тогда имеет место

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta, \quad (3.6)$$

то есть треугольник образованный тремя телами все время движения равнобедренный.

Так как сила  $\vec{F}_2$  - центральная, имеем

$$\vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.7)$$

Используя аналитическое выражение силы (3.2), уравнение (3.7) в раскрытом виде можно написать в следующей форме

$$f \left( \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} \vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \vec{r}_3 \right) \times \vec{r}_2 - f \left( \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \right) \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.8)$$

Из последнего уравнения следует

$$\left( \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} \vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \vec{r}_3 \right) \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.9)$$

В барицентрической системе координат имеет место инвариант центра масс (2.9). Из уравнения (2.9) получим

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_3 \vec{r}_3. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в уравнения (3.9) получим

$$m_3 \left( -\frac{1}{\Delta_{21}^3} + \frac{1}{\Delta_{23}^3} \right) \vec{r}_3 \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.11)$$

Так как мы рассматриваем треугольную ограниченную задачу трех тел  $\vec{r}_3 \times \vec{r}_2 \neq 0$ , а также учитывая, что  $m_3 \neq 0$ , из равенство (3.11) получим

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta.$$

Итак, необходимость теоремы доказана.

**Достаточность.** Допустим, что треугольник, образованный тремя телами равнобедренный, то есть выполняется равенство

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta. \quad (3.12)$$

Докажем, что тогда сила  $\vec{F}_2$  - центральная, то есть

$$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{e}_2. \quad (3.13)$$

Перепишем аналитическое выражение (3.2) для силы  $\vec{F}_2$  в виде

$$\vec{F}_2 = f \left( \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} \vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \vec{r}_3 \right) - f \left( \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \right) \vec{r}_2. \quad (3.14)$$

Используя равенство (3.12), преобразуем правую часть последнего равенства

$$\vec{F}_2 = \frac{f}{\Delta^3} (m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3) - \frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2. \quad (3.15)$$

Согласно инварианту центра сил (2.9), который выполняется в барицентрической системе координат, имеем

$$m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3 = 0. \quad (3.16)$$

Из соотношений (3.15) и (3.16) получим

$$\vec{F}_2 = -\frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2. \quad (3.17)$$

Учитывая обозначение (3.3), выражение (3.17) перепишем в виде

$$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{e}_2, \quad F_2 = \frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) r_2 \quad (3.18)$$

то есть сила  $\vec{F}_2$  центральная.

Таким образом, достаточность теоремы доказана.

### 3.3. Следствия.

**Следствие 1.** В равнобедренной ограниченной задаче трех тел, в барицентрической системе координат, ньютоновская сила притяжения двух основных тел имеет вид

$$\vec{F}_2 = -\frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2, \quad \Delta = \Delta_{21} = \Delta_{23}. \quad (3.19)$$

**Следствие 2.** Уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{f}{\Delta^3}(m_1 + m_3)\vec{r}_2, \quad \Delta = \Delta_{21} = \Delta_{23}. \quad (3.20)$$

**Следствие 3.** Из уравнений (3.20) следует, что  $\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const}$ , следовательно, орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

**3.4. Преобразование уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел к удобному виду.** Далее, используя теорему Пифагора, выразим  $\Delta^3$  через  $r_{31}$ ,  $r_2$ ,  $m_1$  и  $m_3$ . Из соответствующих прямоугольных треугольников получим

$$r_2^2 = \Delta^2 - \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2} r_{31}^2. \quad (3.21)$$

Из равенства (3.21) следует

$$\Delta^3 = (\sigma^2 r_{31}^2 + r_2^2)^{3/2}, \quad \sigma^2 = \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2}. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.22), из (3.20) получим дифференциальное уравнение движения ограниченной равнобедренной задачи трех тел в барицентрической системе координат в векторной форме

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu \frac{\vec{r}_2}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}}, \quad \mu = f(m_1 + m_3). \quad (3.23)$$

Из уравнений (3.23) следует интеграл площадей

$$\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const} \quad (3.24)$$

следовательно, орбита плоская.

**4. Об области возможных движений.** Таким образом, в барицентрической системе координат  $Gxuz$  может быть поставлена такая частная задача в ограниченной задаче трех тел, в которой все время движения три тела образует равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Как следует из интегралов площадей, орбита в задаче двух основных тел (2.11), а также орбита в ограниченной равнобедренной задаче трех тел (3.24) каждая в отдельности, плоская. При этом плоскость орбиты задачи двух основных тел и плоскость орбиты ограниченной равнобедренной задачи трех тел в общем случае не совпадают

В тоже время эти три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, который в общем случае меняет размеры, форму и ориентацию в пространстве. Поэтому необходимо анализировать сочетания этих свойств и в области возможных движений этих трех тел, что является предметом отдельной работы.

**5. Заключение.** В настоящей работе аналитически исследована пространственная ограниченная задача трех тел. Исследован случай, когда три тела все время образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Доказано, что в этом частном случае суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел центральная. Следовательно, орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

Работа частично финансированы грантами МОН РК №0069/ГФ4 и №0003-1/ПЦФ.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. - М.: Наука, 1982. – 656 с.
- [2] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
- [3] Dvorak R., Lhotka Ch. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH VerlagGmbH&Co.KGaA, 2013 –309 p.
- [4] Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики.– М.: МАКС Пресс, 2010. – 256 с.
- [5] Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 432с.



- [6] Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. – М.: Наука, 1990. – 295с.  
 [7] Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. – 524с.  
 [8] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 456 с.  
 [9] Маршал К. Задача трех тел. Москва. – Ижевск: Инст. комп. иссл., 2014. – 640с.  
 [10] Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике. Алматы: Эверо, 2009. – 277с.

#### REFERENCES

- [1] Sebehej V. Teorija orbit. Ogranichennaja zadacha treh tel. - M.: Nauka, 1982. – 656 p.  
 [2] Markeev A.P. Točki libracii v nebesnoj mehanike i kosmodinamike. – M.: Nauka, 1978. – 312 p.  
 [3] Dvorak R., Lhotka Ch. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2013 – 309 p.  
 [4] Grebenikov E.A. Matematicheskie problemy gomograficheskoj dinamiki. – M.: MAKS Press, 2010. – 256 p.  
 [5] Morbidelli A. Sovremennaja nebesnaja mehanika. Aspekty dinamiki Solnečnoj sistemy. – M. – Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2014. – 432 p.  
 [6] Brjuno A.D. Ogranichennaja zadacha treh tel. Ploskie periodicheskie orbity. – M.: Nauka, 1990. – 295 p.  
 [7] Wintner A. Analiticheskie osnovy nebesnoj mehaniki. – M.: Nauka, 1967. – 524 p.  
 [8] Duboshin G.N. Nebesnaja mehanika. Analiticheskie i kachestvennye metody. – 2-e izd. – M.: Nauka, 1978. – 456 p.  
 [9] Marshal K. Zadacha treh tel. Moskva. – Izhevsk: Inst. komp. issl., 2014. – 640 p.  
 [10] Luk'janov L.G., Shirmin G.I. Lekcii po nebesnoj mehanike. Almaty: Jevero, 2009. – 277p.

**М.Ж. Минглибаев<sup>1,2</sup>, Т.М. Жұмабек<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы;  
<sup>2</sup>В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Қазақстан, Алматы

#### ТЕҢБҮЙІРЛІ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІ

**Аннотация.** Бұл жұмыста барицентрлік координаталар жүйесінде классикалық шектелген үш дене мәселесі қарастырылған. Осы мәселенің дербес жағдайы қозғалыс кезінде үш дене барлық уақытта теңбүйірлі үшбұрыш жасайтын жағдайы зерттелінген. Бұл дербес жағдайда, барицентрлік координата жүйесінде, негізгі екі дененің массасыз денеге әсер ететін қосынды ньютондық тарту күші әрқашан да центрлік күш екені нақтыланған. Негізгі екі дененің массасыз денеге әсер ететін қосынды ньютондық тарту күші әрқашан да центрлік күш екені болуы үшін үш дене теңбүйірлі үшбұрыш жасауы қажетті және жеткілікті екені дәлелденген. Бұл жағдайда барлық уақытта теңбүйірлі үшбұрыштың төбесінде массасыз дене орналасқан. Осы дербес жағдайдың теңбүйірлі шектелген үш дене мәселесі ретінде мәселенің қойылымы қалыптасқан. Шектелген теңбүйірлі үш дене мәселесінде орбитаның жазық қисық екені дәлелденген.

**Түйін сөздер:** шектелген үш дене есебі, барицентрлік координата жүйесі, теңбүйірлі шешімдер.

#### Сведения об авторах:

Минглибаев М.Дж. – корреспондент автор, д.ф.-м.н., профессор, Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, Телефон: : +7 727 247 60 86 +7 707 108 7565, e-mail: [minglibayev@mail.ru](mailto:minglibayev@mail.ru);

Жұмабек Т.М. - Магистрант 2-курса Казахского Национального Университета им. аль-Фараби, кафедры механики, Телефон: +7 727 247 60 86 +7 747 579 03 82, e-mail: [torebekzhumabek@gmail.com](mailto:torebekzhumabek@gmail.com)

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 74 – 79

UDC 537.523/.527

**S.A. Orazbayev, D.B. Omirbekov, M.K. Dosbolayev, M.T. Gabdullin, T.S. Ramazanov**

NNLOT, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Al-Farabi avenue, 71

e-mail: [sagi.orazbayev@gmail.com](mailto:sagi.orazbayev@gmail.com)

**EXPERIMENTAL RESEARCH OF LUMINOUS EFFICIENCY  
OF DUSTY PLASMA LAMP**

**Abstract.** In this work experimental results of the influence of the synthesized carbon nanoparticles in the argon/methane gas discharge on the intensity of the plasma glow are presented. A spectral analysis of plasma was conducted. Study of surface and chemical composition of the obtained particles was carried out using the scanning electron microscope Quanta 3D 200i (SEM, USA FEI company). Also dependencies of plasma glow intensity from discharge parameters (power of discharge and gas pressure) and gas composition were obtained. It was experimentally determined that the intensity of the plasma glow slowly increases at concentration of methane in the gas and the gas pressure. Also the glow intensity quickly rises with increasing discharge power. The obtained data provides an opportunity to develop a technology of a discharge lamp with a high intensity glow.

**Keywords:** dusty plasma, nanoparticles, gas discharges.

ӘОЖ 537.523/.527

**С.А. Оразбаев, Д.Б. Өмірбеков, М.Қ. Досболаев, М.Т. Габдуллин, Т.С. Рамазанов**

АТҰНЗ, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, әл-Фараби даңғылы, 71

**СЫҢАҚТА ТОЗАҢДЫ-ПЛАЗМАЛЫ ШАМНЫҢ  
ЖАРЫҚ БЕРУ ҚАСИЕТІН ЗЕРТТЕУ**

**Аннотация.** Бұл жұмыста газдық разрядтағы аргон/метан плазмасының жарық интенсивтілігіне, сол ортада синтезделетін көміртегі нанобөлшектердің әсерінің эксперименттік нәтижелері көрсетілген. Ол үшін плазмаға спектрлік талдау жүргізілді. Жұмыста газдық фазадан нанобөлшектер синтездейтін плазма-химиялық әдіс қолданылды. Плазмадан шыққан бөлшектердің өлшемі мен химиялық құрамы электронды сканерлеуші микроскоп Quanta 3D 200i (SEM, USA FEI company) көмегімен анықталды. Сонымен қатар, плазманың жану интенсивтілігінің разряд параметрлеріне (разряд қуаты, газ қысымы) және плазма құраушы газдар қоспасының үлесіне тәуелділігімен уақыт бойынша өзгерісі алынды. Плазмада метан газының үлесін арттырғанда және газ қысымын арттырғанда плазманың жарық интенсивтілігінің өзгерісі баяулайтындығы, ал разряд қуатын арттырғанда плазманың жарық интенсивтілігінің өзгерісі артатындығы экспериментті түрде анықталды. Алынған ғылыми мәліметтер жарық интенсивтілігі жоғары газразрядтық шамды жасаудың жаңа технологиясын жасақтауға мүмкіндік береді.

**Түйін сөздер:** тозаңды плазма, нанобөлшектер, газдық разряд.

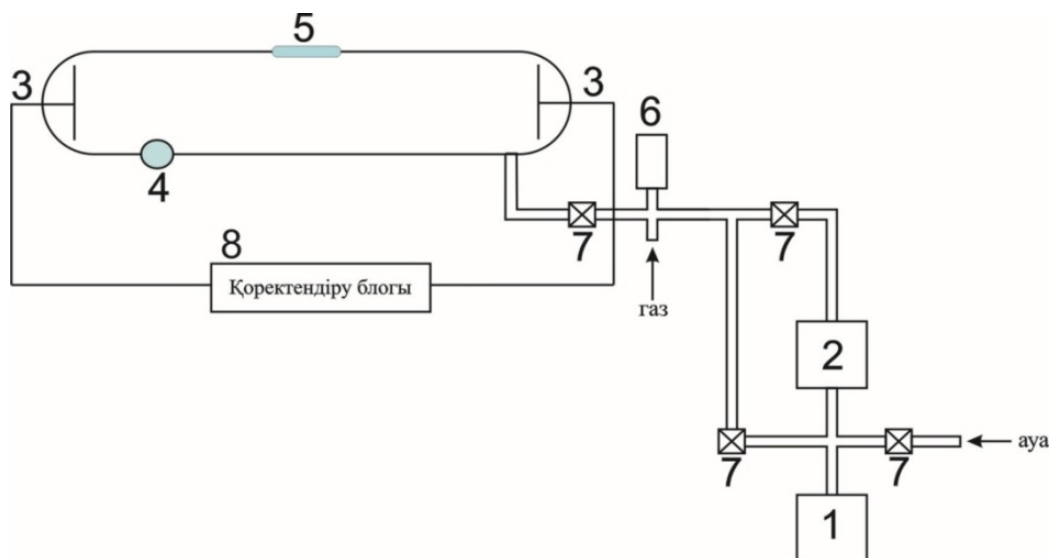
**Кіріспе**

Қазіргі кезде көптеген ғылыми-зерттеу орталықтарында нанобөлшектер алудың әдістері және оларды практикада қолдану жолдарықарқынды зерттелуде. Олардың бірі нанобөлшектерді плазмалы-химиялық әдіспен синтездеу [1-4]. Бұл әдістің негізінде көптеген технологиялық қолданбалы саланың негізі қаланды, мысалы, физикалық және биологиялық объектілерді (алмаз және метал жабындар,

қанды тазалау, стерилизатор және т.б.) өңдеу, вакуумда тоздандыру (жұқа қабықшалар қондыру), наноматериалдар мен композиттер синтезі (наноұнтақтар, графен, нанотүтікше, фуллерен). Солардың бірі – энергетика саласы, яғни энергияны үнемдеу және электрлік шамдардың жарық интенсивтілігін арттыру және т.б. мәселелер маңызды болып табылады. Соңғы ғылыми зерттеулердің нәтижесінде плазма көлеміндегі нанобөлшектердің оның жарық интенсивтілігіне әсер ететіндігі анықталды [5-8]. Газдық разрядта аргон/метан газдары қоспасының плазмасы жанғанда белгілі – бір уақыттан кейін көміртегі бөлшектерінің синтезделетіні белгілі [9-11]. Разрядтағы нанобөлшектердің синтезі газ түріне, қысымына, разряд қуатына және жану уақытына тәуелді. Плазмада нанобөлшектердің пайда болғандығын плазманың жану интенсивтілігі және плазманың спектрінің өзгерісінен байқауға болады. Нанобөлшектері бар плазманың интенсивтілігі буферлі плазманың интенсивтілігімен салыстырғанда жоғары болыңдығы эксперименттік жұмыстар барысында анықталды [12-14]. Плазмада пайда болған нанобөлшектердің жарық интенсивтілігіне әсері плазмалық ортаның оптикалық қасиеттерін эксперименттік зерттеу негізінде анықталды. Бұл тәжірибелік жұмыста газдық фазадан нанобөлшектерді синтездеу әдісі қолданылған [15-17].

### Тәжірибелік қондырғы

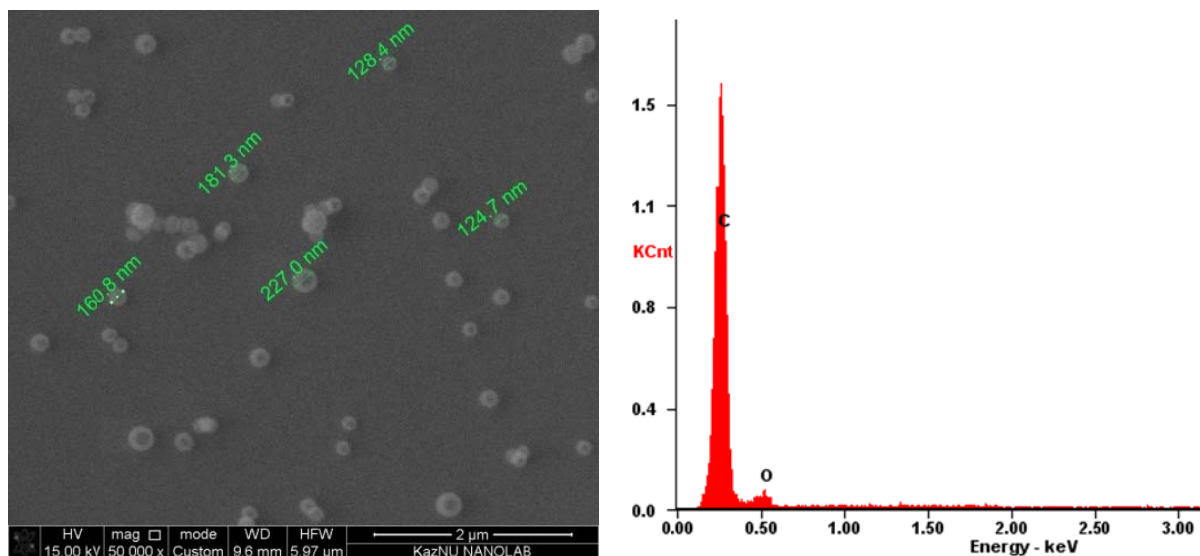
Тозданды-плазмалы шамның жарық беру қасиеті 1-суретте көрсетілген тәжірибелік қондырғыда зерттелді. Бұл тәжірибелік қондырғы негізгі үш бөліктен тұрады: вакуумдық жүйе, қоректендіру блогы және газ разрядты түтікше. Вакуумдық жүйені форвакуумдық (1) және диффузионды (2) сорғылар, сонымен қатар вакуумдық датчик (6) және клапандар (7) құрайды. Қоректендіру блогы (8) арқылы электродтарға (3) жиілігі 20 кГц кернеу беріледі. Негізгі плазмалық процесстер шыныдан жасалған газдық разрядты түтікшеде жүреді, онда әртүрлі диагностика жасауға арналған саңылау (4) және оптикалық диагностикаға арналған кварц терезе (5) орнатылған. Түтікшенің диаметрі 33 мм, ұзындығы 533 мм, яғни тұрмыста қолданылатын газразрядты шамның зертханалық үлгісі жасалған. Онда газ қысымын 0,1-1 торр аралағында, ал разряд қуатын 5-30 Вт аралығында өзгертуге болады. Плазмада нанобөлшектерді алу үшін жұмыс газы ретінде аргон/метан газдарының қоспасы қолданылды.



1 сурет – Тәжірибелік қондырғының принципіалдық сұлбасы

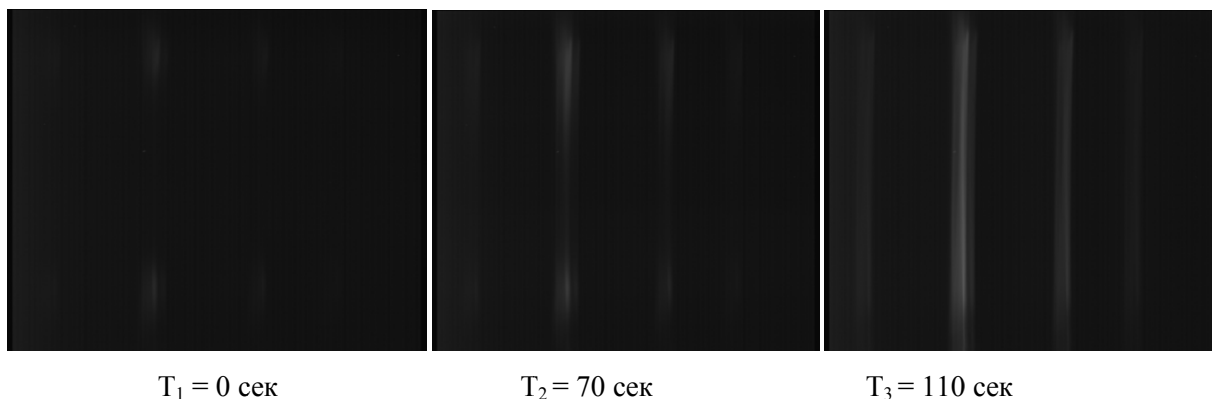
### Алынған нәтижелер

Плазмалық ортада синтезделген нанобөлшектердің СЭМ бейнесімен олардың химиялық құрамы 2-суретте көрсетілген. Осы нанобөлшектердің өсуі барысында газдық разряд плазмасының жарық интенсивтілігі өзгеретіндігі экспериментте зерттелді.



2 сурет – Синтезделген көміртек нанобөлшектері және олардың химиялық құрамы.  
(P=30 Вт және p=0,6 торр)

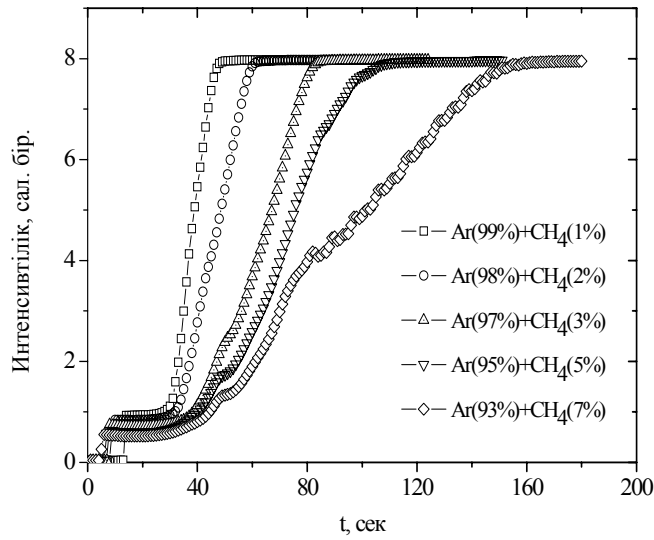
3-суреттен нанобөлшектері бар разряд плазмасының спектрі көрсетілген. Суреттен көріп отырғанымыздай, белгілі бір уақыттан кейін разрядтың жарықтылығы артады, ол – плазмада нанобөлшектердің концентрациясы артқандығын білдіреді.



3 сурет – Нанобөлшектері бар газдық разряд плазмасының спектрі. (p = 0,5 Тор, W = 15 Вт)

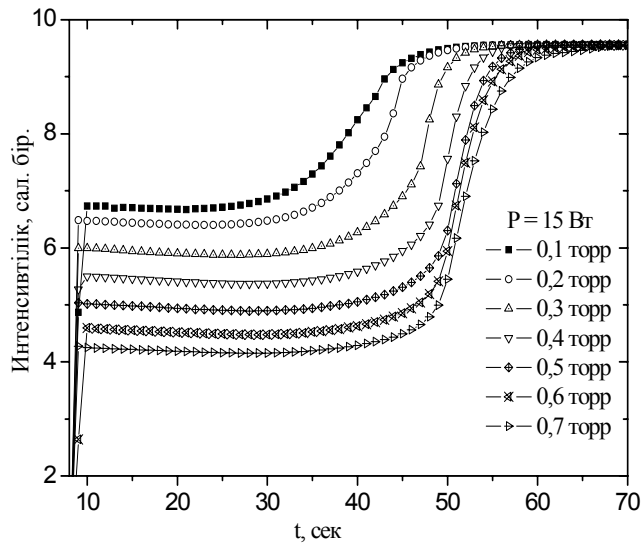
Бұл суретте t=0 секунд уақытта плазманың интенсивтілігі төмен, яғни нанобөлшектер плазмада пайда болмаған. Ал t=70 секунд уақытта плазмада нанобөлшектер пайда бола бастайды, сәйкесінше, плазма интенсивтілігі де артады. t=110 секунд уақытта нанобөлшектердің концентрациясы салыстырмалы түрде көп болғандықтан, интенсивтілігі де жоғары болады.

Ag+CH<sub>4</sub> қоспасындағы метан газының үлесінен бөлшектердің құрылымы да тәуелді екені, яғни қоспада 1%-10% метан болса, нанобөлшектер пайда болатыны, егер қоспада 10%-15% метан болса, онда нанокластерлер, ал 15%-дан көп болса, онда наноқабықшалар пайда болатыны зерттелді [18-20]. Ал, 6-суретте плазманы түзуші аргон (99%-93%) және метан (1%-7%) қоспасындағы газдардың әртүрлі үлесінде тәуелді плазманың жану интенсивтілігінің уақыт бойынша графигі көрсетілген. Графиктен көріп отырғанымыздай, метан газының үлесі артқан сайын плазмада нанобөлшектер салыстырмалы түрде ұзақ уақыттан кейін пайда болады, яғни плазманың жану интенсивтілігі де бірнеше уақыттан кейін қанығуға жетеді.



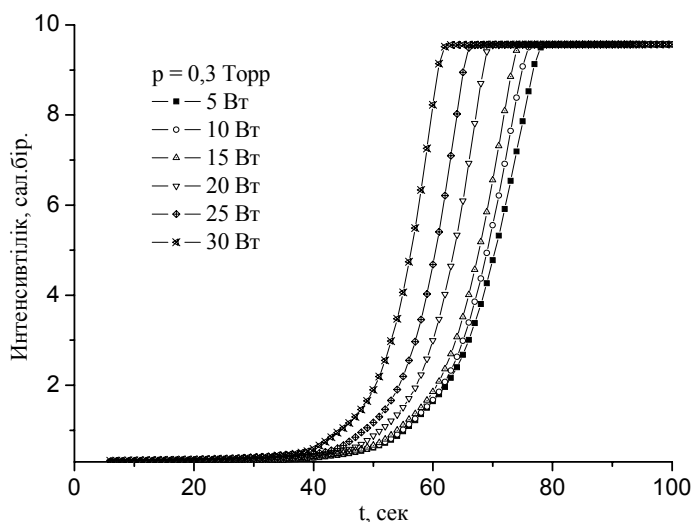
6 сурет – Тозанды-плазмалы шамның жарық интенсивтілігінің Ar/CH<sub>4</sub> газдарының үлесіне тәуелділігі

7-суретте уақыт бойынша плазманың жарық интенсивтілігінің газ қысымына тәуелділік графигі көрсетілген. Көріп отырғанымыздай, газ қысымы артқан сайын плазманың жарық интенсивтілігінің өзгерісі баяулайды. Себебі газ қысымын жоғарылатқан сайын плазмадағы нейтрал атомдардың концентрациясы артадындқтан, олардың иондалуы үшін жеткілікті уақытты қажет етеді. Сондықтан бөлшектердің пайда болу уақыты тежеледі. Сәйкесінше, плазманың жарық интенсивтілігі баяу артады.



7-сурет – Тозанды-плазмалы шамның жарық интенсивтілігінің газ қысымына тәуелділігі

8-суретте уақыт бойынша тозанды-плазмалы шамның жарық интенсивтілігінің разряд қуатына тәуелділік графигі көрсетілген.



8-сурет – Тозанды-плазмалы шамның жарық интенсивтілігінің разряд қуатына тәуелделігі

Суретте көрсетілгендей, разряд қуатының артуына байланысты плазмадағы электрондардың энергиясы артып, газдың иондалу жылдамдығы артады. Осыған байланысты иондар мен радикалдардың концентрациясы артады және иондардың бөлшек бетіне қонуы жоғарылайды. Бұл эффект бөлшектердің тез өсуіне алып келеді. Сәйкесінше, разряд қуаты артқан сайын плазманың жарық интенсивтілігі де тез артады.

Осы ғылыми мәліметтер жарық интенсивтілігі жоғары газ разрядтық шамды жасаудың жаңа технологиясын жасақтауға мүмкіндік береді.

#### REFERENCES

- [1] Orazbayev S.A., Gabdullin M.T., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Slamiya M. The method for synthesis nanoparticles from gas phase// Book of Abstracts of the 8th International conference on Plasma Physics and Plasma Technology (PPPT). - Minsk, Belarus, 2015. – P. 490
- [2] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K., Slamiya M., Obtaining nanoparticles carbon plasma from a gas phase chemical method// Bulletin of the KazNTU, series of chemical and metallurgical science.. – 2015. - № 4. – P. 504-508. (In Kazakh)
- [3] Slamiya M., Orazbayev S.A., Zhumagulov M.N., Kabyllak M., Zhumabekov A.N., Dosbolaev M.K. Ramazanov T.S., Study of the effect of dust on the plasma concentration of the luminescence intensity in the RF discharge // Bulletin of the KazNU, physical series. – 2012. №40.- P. 24. (In Kazakh)
- [4] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K. Obtaining of nano- and microparticles in plasma by CVD method// Program and Book of Abstracts of the 32nd International Conference on Phenomena in Ionized Gases (ICPIG). - Iași, Romania, 2015. – P. P3.17
- [5] Ramazanov T.S., Jumabekov A.N., Orazbayev S.A., Dosbolayev M.K., and Jumagulov M.N., Optical and kinetic properties of the dusty plasma in radiofrequency discharge // Phys. Plasmas 19, 023706 (2012); doi: 10.1063/1.3690103
- [6] Orazbayev S.A., Dosbolayev M.K., Ramazanov T.S., Silamiya M., Optical properties of the plasma gas mixtures in radio frequency discharge // Proceedings of the 8th International Scientific Conference "Modern achievements of physics and fundamental physical education". - Almaty, Kazakhstan, 2013. - P.119. (In Kazakh)
- [7] Mussayeva M.N., Orazbayev S.A. Optical properties of the plasma gas mixtures in radio frequency discharge// Book of Abstracts of the International conference of students and young scientists "World of Science". - Almaty, Kazakhstan, 2012. - P.260. (In Russian)
- [8] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Nurbolat K. Spectroscopic diagnostics of Ar/CH4 and Ar/C2H2 gas mixtures plasma// Book of Abstracts of the 15th International Conference on the Physics of Non-Ideal Plasmas, Almaty, Kazakhstan. –2015. –C. 121.
- [9] Fridman A. A., Boufendi L., Hbid T., Potapkin B. V., Bouchoule A., Dusty plasma formation: Physics and critical phenomena. Theoretical approach // J. Appl. Phys. -1996. – Vol. 79, №3.-P.1303.
- [10] Bouchoule A. and Boufendi L. Particulate formation and dusty plasma behaviour in argon-silane RF discharge // Plasma sources Sci. Technol. – 1993. – Vol. 2. - P. 204.
- [11] Wattiaux G., Mezeghrane A., Boufendi L. Electrical time resolved metrology of dust particles growing in low pressure cold plasmas// Physics of Plasmas.-2011.-Vol. 18.-P.093701.

- [12] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Silamiya M., Optical diagnostics of plasma in a gaseous mixture of RF discharge//Abstract Booklet of the XXII Europhysics Conference on Atomic and Molecular Physics of Ionized Gases (ESCAMPIG). - Greifswald, Germany, 2014. – P.1-05-12.
- [13] Orazbayev S.A., Dosbolayev M.K., Silamiya M., Jumagulov M.N., Ramazanov T.S. Optical properties of the dusty plasma in RF discharge//16<sup>th</sup>Book of abstracts of the International Congresses on Plasma Physics and 39<sup>th</sup>European Physical Society Conference on Plasma Physics (EPS/ICPP). - Stockholm, Sweden, 2012. –P.2.130.
- [14] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Silamiya M., Jumagulov M.N. Spectroscopic diagnostics of plasma gas mixtures in radio frequency discharge // Book of abstracts of the 14th International Conference on the Physics of Non-Ideal Plasmas. - Rostock, Germany, 2012. – P.152.
- [15] Cavarroc M., Jouanny M. Ch., Radouane K., Mikikian M., Boufendi L. Self-excited instabilities occurring during the nanoparticle formation in an Ar–SiH<sub>4</sub> low pressure radiofrequency plasma // J. Appl. Phys. - 2006.-Vol.99.-P.064301
- [16] Cavarroc M., Mikikian M., Perrier G., Boufendi L. Single-crystal silicon nanoparticles: An instability to check their synthesis // Applied Physics Letters – 2006. - Vol. 89. - P. 013107.
- [17] Gabdullin M.T., Orazbayev S.A., Slamiya M., Batryshev D.G., Dosbolaev M.K., Ramazanov T.S., Investigation of the process of synthesis of carbon nano and microparticles in RF plasma discharge // Abstracts of the III International Scientific Conference "Modern problems of condensed matter physics, nanotechnology and nanomaterials». – Almaty, Kazakhstan, 2014. – P. 121. (In Russian)
- [18] Gabdullin M.T., Ramazanov T.S., Orazbayev S.A., Dosbolayev M.K., Batryshev D.G., Silamiya M. Ion – beam deposition of carbon nanofilms on silicon substrate// Advanced Science Letters. -2013. - Vol. 19, № 3. - P.960-962
- [19] Orazbayev S.A., Silamiya M., Batryshev D.G., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Ramazanov T.S. Obtaining of carbon nanofilms in a plasma of RF discharge // Book of Abstracts of the XXXI the International Conference on Phenomena in Ionized Gases (ICPIG). - Granada, Spain, 2013.-P.13.
- [20] Gabdullin M.T., Slamiya M., Orazbayev S.A., Batryshev D.G., Dosbolayev M.K., Obtaining carbon nanofilms in RF discharge plasma // Proceedings of the 10th International Scientific Conference "Advanced technologies, equipment and analytical systems for materials and nanomaterials". - Almaty, Kazakhstan, 2013.–P. 223. (In Russian)

**С.А. Оразбаев, Д.Б. Омирбеков, М.К. Досболаев, М.Т. Габдуллин, Т.С. Рамазанов**

ННЛЮТ, КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, пр. аль-Фараби, 71

#### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВА СВЕТООТДАЧИ ПЛАЗМЕННО-ПЫЛЕВОЙ ЛАМПЫ**

**Аннотация.** В данной работе представлены экспериментальные результаты влияния синтезированных углеродных наночастиц в газовом разряде аргон/метан на интенсивность свечения плазмы. Для этого проведен спектральный анализ излучения плазмы. В работе был использован плазмохимический метод синтеза наночастиц из газовой фазы. Исследования поверхности и химического состава полученных наночастиц проводились с помощью сканирующего электронного микроскопа Quanta 3D 200i (SEM, USA FEI company). Также были получены зависимости интенсивности свечения плазмы от параметров разряда (мощность разряда и давление газа) и от состава газа. Было экспериментально определено, что интенсивность свечения плазмы медленно возрастает при повышении концентрации метана в газе и давления газа, и быстро возрастает при повышении мощности разряда. Полученные данные дают возможность разработать технологию газоразрядной лампы с высокой интенсивностью свечения.

**Ключевые слова:** наночастицы, пылевая плазма, газовые разряды.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 80 – 88

UDC 539.2/.6

**K.B. Zhakupov**

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

e-mail: [jakupovKB@mail.ru](mailto:jakupovKB@mail.ru)

## MODELING THERMAL BARODIFFUSION WITH CHEMICAL REACTIONS IN LIQUIDS AND GASES

**Abstract.** This article presents inductive method of the universal law of conservation of mass diffusion equation for the density of diffusing particles involved in chemical reactions, which speed is referred to mass unit and volume unit. On the basis of the Fick's law, this equation is formulated for concentration of mixture components. This equation is for the relative speed difference component with a carrier medium speed. The various forms of the equations diffusions for compressible and incompressible media are given. Inappropriateness of known laws on thermal barodiffusion over the law of conservation of mass is proved. Adequate laws of pressure and thermal diffusion are proposed and justified. Relevant equations of thermal barodiffusion with chemical reactions in liquids and gases are formulated. The problems of equations of thermal barodiffusion in an incompressible fluid are given.

**Keywords:** thermal diffusion, barodiffusion, mass, law, chemistry, reaction, pressure, equation.

УДК 539.2/.6

**К.Б.Джакупов**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОБАРОДИФФУЗИЙ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

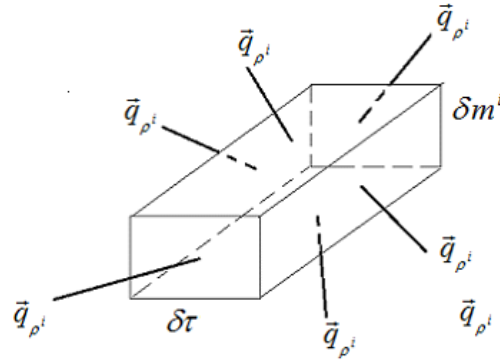
**Аннотация.** Выводится индуктивным методом из закона сохранения массы универсальное уравнение диффузии для плотности диффундирующих частиц, участвующих в химических реакциях, скорости которых отнесены к единице массы и к единице объема. На основании закона Фика данное уравнение формулируется для концентраций компонентов смеси. Получено уравнение для относительной разности скоростей компонент со скоростью несущей среды. Приводятся различные формы уравнений диффузий для сжимаемых и несжимаемых сред. Доказана неадекватность известных законов термобародиффузий закону сохранения массы. Предложены и обоснованы адекватные законы бародиффузий и термодиффузий, при которых выполняется закон сохранения массы. Сформулированы соответствующие уравнения термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах. Указаны проблемы уравнений баро-диффузий в динамических несжимаемых жидкостях.

**Ключевые слова:** термодиффузия, бародиффузия, масса, закон, химия, реакция, давление, уравнения.

В индивидуальном объеме  $\delta\tau$ , движущемся со скоростью  $\vec{v}$ , диффундируют частицы  $m_k^i$ ,  $i = 1, \dots, N$  со скоростями  $\vec{v}_k^i$ , поэтому среднемассовая скорость определяется отношением

$$\vec{v}^i = \frac{\sum_k m_k^i \vec{v}_k^i}{\sum_k m_k^i} = \frac{\sum_k m_k^i \vec{v}_k^i}{\delta m^i}$$

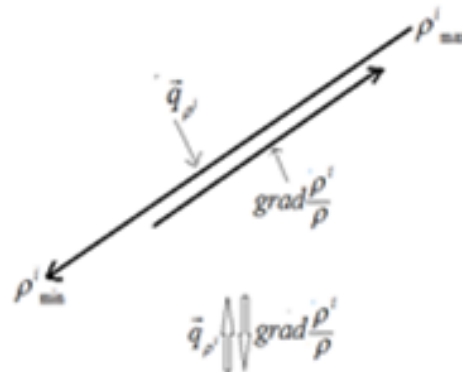




Плотность частиц задается суммарной массой частиц  $\delta m^i = \sum_k m_k^i$  к объему  $\rho^i = \frac{\delta m^i}{\delta \tau}$ ,

$$\delta m^i = \rho^i \delta \tau, \sum_{i=1}^N \rho^i = \rho, \sum_{i=1}^N \delta m^i = \delta m.$$

Концентрации  $i$ -го сорта частиц:  $C_i = \frac{\rho^i}{\rho}, \sum_{i=1}^N C_i = 1$ . В основной несущей среде  $\delta \tau$  частицы  $m_k^i$  диффундируют из области с большой плотностью  $\rho^i_{max}$  в район с меньшей  $\rho^i_{min}$  плотностью. Как показано на рисунке, вектор потока частиц параллелен и направлен противоположно градиенту концентрации.



Следовательно, поток  $\vec{q}_{\rho^i}$  частиц  $m_k^i$  связан с градиентом концентраций формулой антипараллельности векторов - закон Фика:

$$\vec{q}_{\rho^i} = -D\rho \text{grad} \frac{\rho^i}{\rho} = -D\rho \text{grad} C_i \tag{1}$$

По физическому же смыслу  $D \geq 0$  является коэффициентом диффузии.

**1°. Универсальное уравнение диффузии**

Применение закона сохранения массы в объеме  $\delta \tau$  :

$$\frac{d\delta m}{dt} = 0, \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \delta m^i = 0 \tag{2}$$

Закон сохранения массы  $\delta m^i$  в объеме  $\delta \tau$  должен сохранять эквивалентный вид исходного закона (2) и учитывать диффузию, химические и другие виды реакций. Таким требованиям соответствует закон сохранения массы

$$\frac{d\delta m^i}{dt} = -\delta\tau \operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i} + \delta m^i J^i + \delta\tau j^i, \quad (3)$$

где  $\operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i}$  – диффузия частиц,  $J^i = \sum_k J^{ki}$ , скорость изменения массы вследствие реакций  $J^{ki}$ , причем должно выполняться условие  $\sum_{i=1}^N \rho^i J^i = \sum_{i=1}^N \sum_k \rho^i J^{ki} = 0$ . Под  $J^i$  понимается отнесенная к единице **массы** скорость прироста массы  $i$ -й компоненты за счет реакций перехода от  $k$ -х компонент к  $i$ -й со скоростями  $J^{ki}$ . Аналогично  $j^i$  скорость изменения массы вследствие реакций  $j^i = \sum_k j^{ki}$ ,  $\sum_{i=1}^N j^i = \sum_{i=1}^N \sum_k \rho^i j^{ki} = 0$ , но здесь под  $j^i$  понимается отнесенная к единице **объема** скорость прироста массы  $i$ -й компоненты за счет реакций перехода от  $k$ -х компонент к  $i$ -й со скоростями  $j^{ki}$ .

Просуммировав (3) по всем  $i$ , находим выражение

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\delta m^i}{dt} = -\delta\tau \sum_{i=1}^N \operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i} + \sum_{i=1}^N \delta m^i J^i + \delta\tau \sum_{i=1}^N j^i \quad (4)$$

где в правой части все суммы равны нулю:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^N \operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i} &= \operatorname{div} \sum_{i=1}^N D\rho \operatorname{grad} C_i = \operatorname{div}(D\rho \operatorname{grad} \sum_{i=1}^N C_i) = \operatorname{div}(D\rho \operatorname{grad} 1) = 0, \\ \sum_{i=1}^N \delta m^i J^i &= \sum_{i=1}^N \rho^i \delta\tau J^i = \delta\tau \sum_{i=1}^N \sum_k \rho^i J^{ki} = 0, \quad \delta\tau \sum_{i=1}^N j^i = \delta\tau \sum_{i=1}^N \sum_k j^{ki} = 0 \end{aligned}$$

В результате (4) переходит в (3), закон сохранения массы выполнен:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\delta m^i}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \delta m^i = 0, \quad \frac{d\delta m}{dt} = 0$$

Имеют место понятные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^i \delta\tau}{dt} &= -\delta\tau \operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i} + \delta m^i J^i + \delta\tau j^i, \\ \delta\tau \frac{d\rho^i}{dt} + \rho^i \frac{d\delta\tau}{dt} &= -\delta\tau \operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i} + \rho^i \delta\tau J^i + \delta\tau j^i \end{aligned}$$

Подставляя  $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \operatorname{div}\vec{v}^i$ , получаем

$$\delta\tau \frac{d\rho^i}{dt} + \rho^i \delta\tau \operatorname{div}\vec{v}^i = -\delta\tau \operatorname{div}\vec{q}_{\rho^i} + \rho^i \delta\tau J^i + \delta\tau j^i \quad (5)$$

Подстановка закона Фика (1) в (5) и сокращение дает универсальное уравнение диффузии:

$$\frac{d\rho^i}{dt} + \rho^i \operatorname{div}\vec{v}^i = \operatorname{div}(D\rho \operatorname{grad} \frac{\rho^i}{\rho}) + \rho^i J^i + j^i,$$

где полная производная равна  $\frac{d\rho^i}{dt} = \frac{\partial\rho^i}{\partial t} + (\vec{v}^i, \text{grad}\rho^i)$  :

$$\frac{\partial\rho^i}{\partial t} + (\vec{v}^i, \text{grad}\rho^i) + \rho^i \text{div}\vec{v}^i = \text{div}(D\rho \text{grad}\frac{\rho^i}{\rho}) + \rho^i J^i + j^i$$

Свертывание  $(\vec{v}^i, \text{grad}\rho^i) + \rho^i \text{div}\vec{v}^i = \text{div}(\rho^i \vec{v}^i)$  приводит к дивергентному виду уравнения диффузии

$$\frac{\partial\rho^i}{\partial t} + \text{div}(\rho^i \vec{v}^i) = \text{div}(D\rho \text{grad}\frac{\rho^i}{\rho}) + \rho^i J^i + j^i \quad (6)$$

В [1,3] для установления связи динамики данных частиц с динамикой несущей среды вводится разность скоростей  $\vec{v}^* = \vec{v}^i - \vec{v}$ ,  $\vec{v}^i = \vec{v}^* + \vec{v}$ .

В результате уравнению (6) придается вид

$$\frac{\partial\rho^i}{\partial t} + \text{div}[\rho^i (\vec{v}^* + \vec{v})] = \text{div}(D\rho \text{grad}\frac{\rho^i}{\rho}) + \rho^i J^i + j^i \quad (7)$$

**Теорема 1.** Разность скоростей  $\vec{v}^* = \vec{v}^i - \vec{v}$  является решением уравнения  $\text{div}(\vec{v}^* \rho) = 0$ .

Доказательство. Просуммируем (8) по всем сортам частиц

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial\rho^i}{\partial t} + \text{div}[\rho^i (\vec{v}^* + \vec{v})] \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \text{div}(D\rho \text{grad}\frac{\rho^i}{\rho}) + \rho^i J^i + j^i \right\}$$

Знак суммирования относится к индексу «i»:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \rho^i + \text{div}(\vec{v}^* \sum_{i=1}^N \rho^i) + \text{div}(\vec{v} \sum_{i=1}^N \rho^i) = \text{div}(D\rho \text{grad}\sum_{i=1}^N \frac{\rho^i}{\rho}) + \sum_{i=1}^N \rho^i J^i + \sum_{i=1}^N j^i \quad (8)$$

В полученном выражении

$$\text{div}(D\rho \text{grad}\sum_{i=1}^N \frac{\rho^i}{\rho}) = \text{div}(D\rho \text{grad}1) = 0, \sum_{i=1}^N \rho^i J^i = 0, \sum_{i=1}^N j^i = 0$$

в результате (8) переходит в уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}^* \rho) + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

из которого, в силу уравнения неразрывности  $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ ,

вытекает для  $\vec{v}^*$  уравнения в частных производных

$$\text{div}(\vec{v}^* \rho) = 0 \quad (9)$$

Что требовалось доказать.

Для несжимаемой жидкости получается уравнение  $\text{div}\vec{v}^* = 0$ .

Уравнение (9) имеет очевидное решение  $\vec{v}^* \rho = \text{rot}\vec{\Psi}$ ,  $\text{div}\text{rot}\vec{\Psi} \equiv 0$ ,

где  $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}(\vec{r}, t)$  – произвольная дифференцируемая функция, которой можно манипулировать при моделировании диффузий живых существ (бактерий).

Бактерии в поисках корма могут двигаться в сторону большей концентрации питательных веществ в среде.

## 2°. Искусственное уравнение концентрации

Искусственное уравнение диффузии для концентрации получается из уравнения (6) подстановкой  $\rho^i = C_i \rho$ :

$$\frac{\partial C_i \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(C_i \rho \vec{v}^i) = \operatorname{div}(D \rho \operatorname{grad} C_i) + C_i \rho J^i + j^i$$

По связи  $\vec{v}^i = \vec{v}^* + \vec{v}$  получается иная запись

$$\frac{\partial C_i \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(C_i \rho (\vec{v}^* + \vec{v})) = \operatorname{div}(D \rho \operatorname{grad} C_i) + C_i \rho J^i + j^i,$$

где показано участие скорости несущей среды  $\vec{v}$  в диффузии. Отсутствие относительных скоростей  $\vec{v}^* \equiv 0$  является тривиальным решением уравнения теоремы  $\operatorname{div}(\vec{v}^* \rho) = 0$ , что означает совпадение среднемассовой скорости диффундирующих частиц со скоростью несущей среды.

## 3°. Уравнения диффузии при совпадении среднемассовой скорости частиц со скоростью несущей среды $\vec{v}^* \equiv 0$

При совпадении среднемассовой скорости частиц со скоростью несущей среды  $\vec{v}^i = \vec{v}$ ,  $\vec{v}^* = \vec{v}^i - \vec{v} = 0$ , что применяется наиболее часто, уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^i \vec{v}) = \operatorname{div}(D \rho \operatorname{grad} \frac{\rho^i}{\rho}) + \rho^i J^i + j^i,$$

соответственно, уравнение концентраций

$$\frac{\partial C_i \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(C_i \rho \vec{v}) = \operatorname{div}[D \rho \operatorname{grad} C_i] + C_i \rho J^i + j^i$$

В данном уравнении делаются упрощающие преобразования:

$$C_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad}(C_i \rho)) + C_i \rho \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div}(D \rho \operatorname{grad} C_i) + C_i \rho J^i + j^i,$$

где уравнение неразрывности несущей среды равно нулю:

$$C_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + C_i (\vec{v}, \operatorname{grad} \rho) + C_i \rho \operatorname{div} \vec{v} = C_i \left[ \frac{d \rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right] = 0$$

Таким образом, исходное фундаментальное уравнение диффузии (6) переходит в уравнение концентрации с участием плотности и скорости несущей среды:

$$\rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + \rho (\vec{v}, \operatorname{grad} C_i) = \operatorname{div}(D \rho \operatorname{grad} C_i) + C_i \rho J^i + j^i \quad (10)$$

## 4°. Уравнение концентрации в неподвижной среде $\vec{v} \equiv 0$

Уравнение диффузии в неподвижной основной среде  $\vec{v} \equiv 0$  и переменной плотности  $\rho$ :

$$\frac{\partial C_i \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(C_i \rho \vec{v}^i) = \operatorname{div}(D \rho \operatorname{grad} C_i) + C_i \rho J^i + j^i$$

В данном уравнении  $\vec{v}^i = \vec{v}^*$ , следовательно, скорости  $\vec{V}^i$  частиц должны быть вычислены из уравнения теоремы 1  $div(\vec{v}^i \rho) = 0$ .

В основном используется предположение, что частицы неподвижны  $\vec{v}^i \equiv 0$  и диффундируют в покоящейся среде  $\vec{v} \equiv 0$ . Поэтому уравнение концентрации для переменной плотности  $\rho \neq const$  принимает вид:

$$\frac{\partial C_i \rho}{\partial t} = div(D \rho grad C_i) + C_i \rho J^i + j^i$$

### 5°. Уравнения концентрации в неподвижной и несжимаемой среде

Для неподвижной  $\vec{v} \equiv 0$  несжимаемой  $\rho = const$  несущей среды после сокращений получается уравнение концентрации

$$\rho \frac{\partial C_i}{\partial t} = div(D \rho grad C_i) + C_i \rho J^i + j^i, \quad \frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} div(D \rho grad C_i) + C_i J^i + \frac{j^i}{\rho}$$

Подставляя в правую часть  $\rho = \rho^i / C_i$ , находим уравнение

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{C_i}{\rho^i} div(D \rho grad C_i) + C_i J^i + \frac{C_i}{\rho^i} j^i,$$

из которого после умножения на  $\rho^i$  получается

$$\rho^i \frac{\partial C_i}{\partial t} = C_i div(D \rho grad C_i) + \rho^i C_i J^i + C_i j^i$$

Уравнение концентрации принимает упрощенный вид, если нет химических реакций и других включений  $J^i \equiv 0$ ,  $j^i \equiv 0$ :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = div[D grad C_i]$$

При  $D \equiv const$  вытекает параболическое уравнение  $\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \Delta C_i$ .

### 7°. Парадоксы уравнений термодиффузии

Градиент температуры, несомненно, оказывает влияние на диффузию по вполне понятным причинам молекулярного переноса. Термодиффузия (эффект Соре) в законе сохранения массы требует дополнения

$$\delta \tau \frac{d \rho^i}{dt} + \rho^i \delta \tau div \vec{v}^i = -\delta \tau div \vec{q}_{\rho^i} + \rho^i \delta \tau J^i + \delta \tau j^i - \delta \tau div \vec{q}_T, \quad (11)$$

где введен закон термодиффузии по Лыкову [3]:

$$\vec{q}_T = -D \rho \frac{k_T}{T} grad T \quad (12)$$

Основное уравнение термодиффузии получается в виде [3]:

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial t} + div(\rho^i \vec{v}^i) = div(D \rho grad \frac{\rho^i}{\rho}) + div(D \rho \frac{k_T}{T} grad T) + \rho^i J^i + j^i$$

Уравнение термодиффузии для концентраций и  $\vec{v}^* \equiv 0$ :

$$\rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + \rho(\vec{v}, grad C_i) = div(D \rho grad C_i) + div(D \rho \frac{k_T}{T} grad T) + C_i \rho J^i + j^i$$

Парадоксальность и ошибочность уравнений термодиффузий, приведенных в [3] и основанных на законе термодиффузии (12), заключается в невыполнении закона сохранения массы, то есть получается  $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \delta m^i \neq 0$ . Действительно, суммирование по всем компонентам  $i$  уравнения (11) в правой части уравнения дает неравенство нулю по закону термодиффузии (12) [3]:

$$-\delta\tau \sum_{i=1}^N \operatorname{div} \vec{q}_T = \delta\tau \sum_{i=1}^N D\rho \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T \neq 0$$

В силу данного факта уравнения термодиффузии с данным в [3] термодиффузией (12) неадекватны закону сохранения массы.

**Теорема 2.** Закон сохранения массы (2) удовлетворяется для закона термодиффузии с физическим участием концентрации данного диффундирующего компонента:

$$\begin{aligned} \delta\tau \frac{d\rho^i}{dt} + \rho^i \delta\tau \operatorname{div} \vec{v} &= -\delta\tau \operatorname{div} \vec{q}_{\rho^i} + \rho^i \delta\tau J^i + \delta\tau j^i - \delta\tau \operatorname{div} \vec{q}_{T_i}, \\ \vec{q}_{T_i} &= -D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Суммирование в (13) по всем компонентам дает для последнего члена уравнения выражение равное нулю:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^N \operatorname{div} \vec{q}_{T_i} &= \sum_{i=1}^N D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T = \\ &= \sum_{i=1}^N D\rho \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T - D\rho N \cdot \sum_{i=1}^N C_i \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T = \\ &= ND\rho \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T - D\rho N \cdot 1 \cdot \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T = 0 \end{aligned}$$

Что требовалось доказать. Доказательства равенства нулю сумм остальных членов в правой части было осуществлено ранее. С применением закона термодиффузии (13) уравнения принимают прикладные виды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^i \vec{v}^i) &= \operatorname{div}(D\rho \operatorname{grad} \frac{\rho^i}{\rho}) + \\ &+ \operatorname{div}(D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T) + \rho^i J^i + j^i, \\ \rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + \rho(\vec{v}^i, \operatorname{grad} C_i) &= \operatorname{div}(D\rho \operatorname{grad} C_i) + \\ &+ \operatorname{div}(D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \operatorname{grad} T) + C_i \rho J^i + j^i \end{aligned}$$

### 8°. Уравнение термобародиффузии

В [3] учитывается бародиффузия:

$$\delta\tau \frac{d\rho^i}{dt} + \rho^i \delta\tau \operatorname{div} \vec{v}^i = -\delta\tau \operatorname{div} \vec{q}_{\rho^i} + \rho^i \delta\tau J^i + \delta\tau j^i - \delta\tau \operatorname{div} \vec{q}_T - \delta\tau \operatorname{div} \vec{q}_{\rho^i},$$

где по Лыкову положено  $\vec{q}_T = -D\rho \frac{k_T}{T} \text{grad}T$ ,  $\vec{q}_p = -D\rho \frac{k_p}{p} \text{grad}p$ . Нетрудно вычислить, что для данных законов термобародиффузии закон сохранения массы не выполняется.

Действительно, 
$$-\sum_{i=1}^N \text{div} \vec{q}_p = \sum_{i=1}^N D\rho \frac{k_p}{p} \text{grad}p \neq 0.$$
 Поэтому уравнения

термобародиффузии с данными в [3] законами  $\vec{q}_T = -D\rho \frac{k_T}{T} \text{grad}T$ ,  $\vec{q}_p = -D\rho \frac{k_p}{p} \text{grad}p$  неадекватны закону сохранения массы.

**Теорема 3.** Закон сохранения массы (2) удовлетворяется для законов термобародиффузий с физическим участием концентрации данного диффундирующего компонента:

$$\frac{d\rho^i}{dt} + \rho^i \text{div} \vec{v} = -\text{div} \vec{q}_{\rho^i} + \rho^i J^i + j^i - \text{div} \vec{q}_{Ti} - \text{div} \vec{q}_{pi}, \quad (14)$$

$$\vec{q}_{Ti} = -D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \text{grad}T, \quad \vec{q}_{pi} = -D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_p}{p} \text{grad}p$$

Доказательство. Суммирование в (14) по всем компонентам дает для последнего члена уравнения выражение равное нулю:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^N \text{div} \vec{q}_{pi} &= \sum_{i=1}^N D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_p}{p} \text{grad}p = \sum_{i=1}^N D\rho \frac{k_p}{p} \text{grad}p - D\rho N \cdot \sum_{i=1}^N C_i \frac{k_p}{p} \text{grad}p = \\ &= ND\rho \frac{k_p}{p} \text{grad}p - D\rho N \cdot 1 \cdot \frac{k_p}{p} \text{grad}p = 0 \end{aligned}$$

Что требовалось доказать. Доказательства равенства нулю сумм остальных членов в правой части были осуществлены ранее. С применением нового закона термобародиффузий дифференциальные уравнения принимают прикладные виды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^i}{\partial t} + \text{div}(\rho^i \vec{v}^i) &= \text{div}(D\rho \text{grad} \frac{\rho^i}{\rho}) + \text{div}(D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \text{grad}T) + \\ &+ \text{div}(D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_p}{p} \text{grad}p) + \rho^i J^i + j^i, \\ \rho \frac{\partial C_i}{\partial t} + \rho(\vec{v}^i, \text{grad}C_i) &= \text{div}(D\rho \text{grad}C_i) + \text{div}(D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_T}{T} \text{grad}T) + \\ &+ \text{div}(D\rho(1 - N \cdot C_i) \frac{k_p}{p} \text{grad}p) + C_i \rho J^i + j^i \end{aligned}$$

**Примечание 1.** Уравнения с бародиффузией имеют смысл только для сжимаемых сред с уравнениями состояния типа Клапейрона-Менделеева  $p = \rho RT$ . В уравнения динамики несжимаемой жидкости давление входит через градиент, поэтому определяется с точностью до аддитивной функции времени, то есть может принимать произвольные значения  $-\infty < p < +\infty$ . Но давление в законе бародиффузии стоит в знаменателе. По этой причине в несжимаемой жидкости уравнения с бародиффузией не подлежат применению.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: "Наука", 1973.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды. - Т.1. М.: "Наука", 1973.
- [3] Лыков А.В. Теплообмен. - М.: «Энергия», 1972. С. 560.
- [4] George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 1970.
- [5] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: «Мир», 1973.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. - М.: "Наука", 1973.
- [7] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. -М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [8] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - Алматы: Изд-во «Гылым ордасы», 2015. С. 376.
- [9] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. М.: «Наука», 1970. 547с.
- [10] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
- [11] Eringen A.C. Mechanics of Continua. N.Y., Wiley, 1967.
- [12] Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике М.: Наука, 1987. - 502 с.

REFERENCES

- [1] LG Loitsiansky Fluid Mechanics. M.: "Nauka", 1973.
- [2] Sedov LI Mechanics of solid a medium, Vol.1. M.: "Nauka", 1973.
- [3] Lykov A.V. Teplomassobmen. - M.: "Energy", 1972. p.560 .
- [4] George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama in 1970.
- [5] John Batchelor . Introduction to fluid dynamics. M.: "Mir", 1973.
- [6] Landau L.D., EM Lifschits E.M. Theoretical physics. V.6. Hydrodynamics. - M.: " Nauka", 1973.
- [7] Ilyushin AA Continuum Mechanics sredy. M.: MGU, 1978. Science, 1987. - 502 p.
- [8] Dzhakupov KB Correction of theoretical paradoxes of continuum mechanics of a medium, Almaty: Publishing house " Gylym Ordasy", 2015. p.376.
- [9] Iyushin AA Pobedria BE Fundamentals of the mathematical theory of thermo – viscoelasticity. M.: "Science", 1970. 547 p.
- [10] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
- [11] Eringen A.C. Mechanics of Continua. N.Y., Wiley, 1967.
- [12] Frank-Kamenetskiy D.A. Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics M.: Science, 1987. - 502 p.

К.Б. Жақып

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

СҰЙЫҚТЫҚТАР МЕН ГАЗДАРДАҒЫ ХИМИЯЛЫҚ РЕАКЦИЯЛАРЫ БАР  
ТЕРМОБАРОДИФфуЗИЯЛАРДЫ МОДЕЛДЕУ

**Аннотация.** Химиялық реакцияларда, жылдамдықтары масса мен көлемнің бірдігіне келтірілген, диффундирлаған бөлшектердің тығыздығына масса сақталу заңынан диффузияның универсал теңдеуі құрылған. Фик заңының негізінде осы теңдеу қоспаның компоненттерінің концентрациялары үшін белгіленеді. Компоненттер жылдамдықтарының тасушы ортаның жылдамдығынан салыстырмалы айырымдығына теңдеу алынған. Сығылатын және сығылмайтын орталарға сәйкес диффузия теңдеулерінің әр түрлі тұрпаттары келтірілген. Бұрыннан белгілі термобародиффузия заңдарының масса сақталу заңына сәйкестігінің жоқтығы дәлелденген. Бародиффузия мен термодиффузияның сәйкес заңдары берілген және негізделген, оларда масса сақталу заңы орындалатын. Осыларға арналған химиялық реакциялар бар сұйықтықтарда және газдарда термобародиффузияның сәйкес теңдеулері құрылған. Сығылмайтын қозғалыстағы сұйықтықтарда бародиффузия теңдеулерінің мәселелері көрсетілген.

**Түйін сөздер:** термодиффузия, бародиффузия, масса, заң, химия, реакция, қысым, теңдеулер.

**Сведения об авторе:**

Джакупов Кенес Бажкенович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН



**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 89 – 95

UDC 537.523/.527

**S.A. Orazbayev, D.B. Omirbekov,  
M.T. Gabdullin, M.K. Dosbolayev, T.S. Ramazanov**

NNLOT, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Al-Farabi avenue, 71  
e-mail: [sagi.orazbayev@gmail.com](mailto:sagi.orazbayev@gmail.com)

**THE INFLUENCE OF GAS TEMPERATURE ON SIZE  
AND STRUCTURE OF THE DUST NANOPARTICLES**

**Abstract.** In this work the influence of the gas temperature on the size and structure of the dust nanoparticles was studied. The gas temperature ranged from 100 ° C to 30 ° C. Plasma and chemical method of synthesis of nanoparticles from gas phase was used. All experiments were conducted at constant plasma parameters: gas pressure and discharge power. Dependencies of self-bias voltage and electron density on the gas temperature were obtained on the basis of mathematical calculations and graphics. Time graphs of nanoparticle nucleation dependent on the gas temperature at different plasma parameters and diameter distribution and concentrations of nanoparticles dependent on synthesis time in Ar/CH<sub>4</sub> plasma were obtained. It was determined that the time of formation and growth of the nanoparticles increases at heating of plasma forming gas and decreases with decrease in temperature.

**Keywords:** nanoparticles, dusty plasma, nanomaterials, gas discharges.

УДК 537.523/.527

**С.А. Оразбаев, Д.Б. Омирбеков,  
М.Т. Габдуллин, М.К. Досболаев, Т.С. Рамазанов**

ННЛОТ, КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, пр. аль-Фараби, 71

**ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ГАЗА НА РАЗМЕРЫ  
И СТРУКТУРЫ ПЫЛЕВЫХ НАНОЧАСТИЦ**

**Аннотация.** В данной работе было изучено влияние температуры газа на размеры и структуры пылевых наночастиц. Температура газа варьировалась в пределах от 100° C до - 30° C. В работе был использован плазмохимический метод синтеза наночастиц из газовой фазы. Все эксперименты проводились при постоянных параметрах плазмы: давлении газа и мощности разряда. На основе графических и математических расчетов были построены зависимости напряжения самосмещения и концентрации электронов от температуры газа. Также были получены графики зависимости времени зарождения наночастиц от температуры газа при разных параметрах плазмы и распределение диаметра и концентрации наночастиц от времени синтеза в плазме Ar/CH<sub>4</sub>. Было определено, что время формирования и роста наночастиц увеличивается при нагревании плазмообразующего газа, а при снижении температуры оно уменьшается.

**Ключевые слова:** наночастицы, пылевая плазма, наноматериалы, газовые разряды.

**Введение**

На сегодняшний день наночастицы и наноматериалы нашли широкое применение в человеческой деятельности, начиная от лакокрасочной продукции, заканчивая пищевой промышленностью. Наночастицы и наноструктурные материалы стали основой медицины и фармацевтики, энергетики, электроники, автомобильной промышленности и т.д. Поэтому

актуально изучается влияние параметров плазмы и газа на формирование и рост наночастиц [1-4]. И также в работах [5-9] были исследованы влияние синтеза наночастиц на интенсивность свечения плазмы. Более глубокое понимание формирования частиц может помочь нам понять основные проблемы исследуемой плазмы. С другой стороны, интересно иметь возможность контролировать производство частиц. Влияние температуры газа на формирование и рост частиц было исследовано во многих работах в плазме смеси газов аргона и силана [10-13]. Как показано экспериментально, небольшие отклонения параметров плазмы и газа (давления, мощность и концентрации электронов) могут полностью изменять закон роста кластеров, формирование частиц и их поведения [14-16].

### Экспериментальная установка

Плазма высокочастотного емкостного разряда зажигается в цилиндрической трубке (размером 130x30 мм) расположенной в вакуумной камере. Для охлаждения и нагрева газа составляющую плазму, вдоль цилиндрической трубки расположена система охлаждения и нагрева. Нагрев газа происходит за счет печки, а охлаждение за счет жидкого азота. Для контроля и управления температурой газовой среды используются специальные датчики. Схема установки для нагрева и охлаждения плазмообразующего газа показано на рисунке 1. В настоящей экспериментальной работе представлен плазмохимический метод синтеза углеродных наночастиц из газовой фазы в плазме высокочастотного емкостного (ВЧЕ) разряда [17-20].

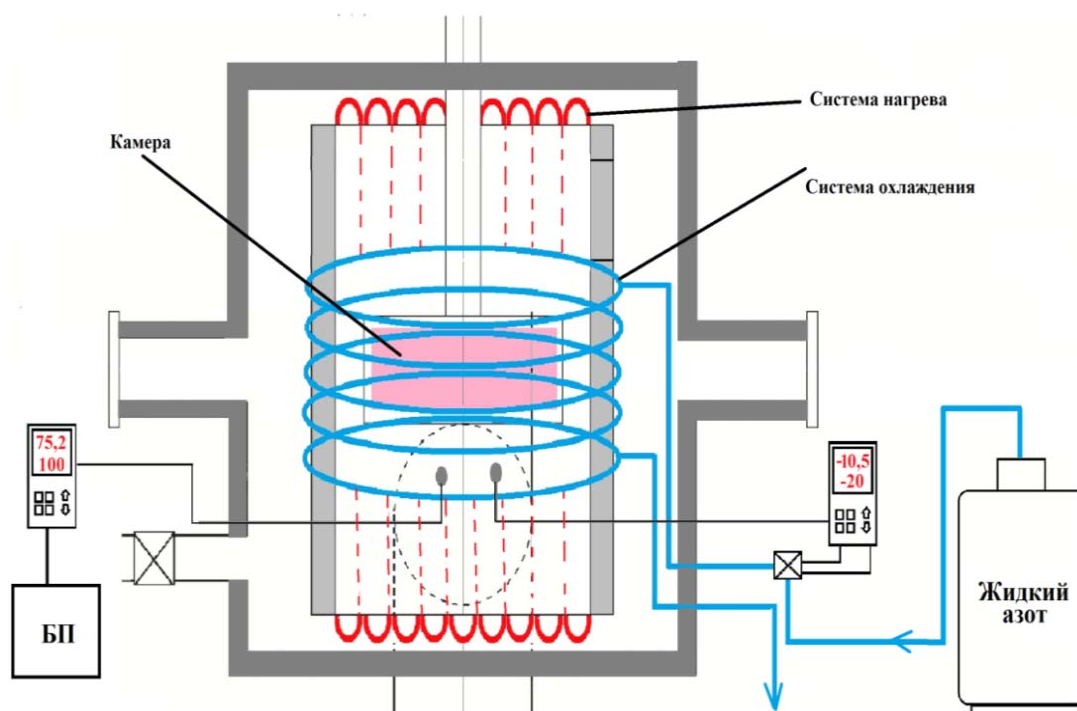


Рисунок 1 – Схема установки для нагрева и охлаждения плазмообразующего газа

### Основные результаты

На ниже представленных рисунках 2,3 показаны напряжения самосмещения и концентрации электронов от параметров плазмы, характеризующие зарождения и рост частиц. Из рисунков видно, что при уменьшении температуры газа, время кристаллизации частиц ускоряется.

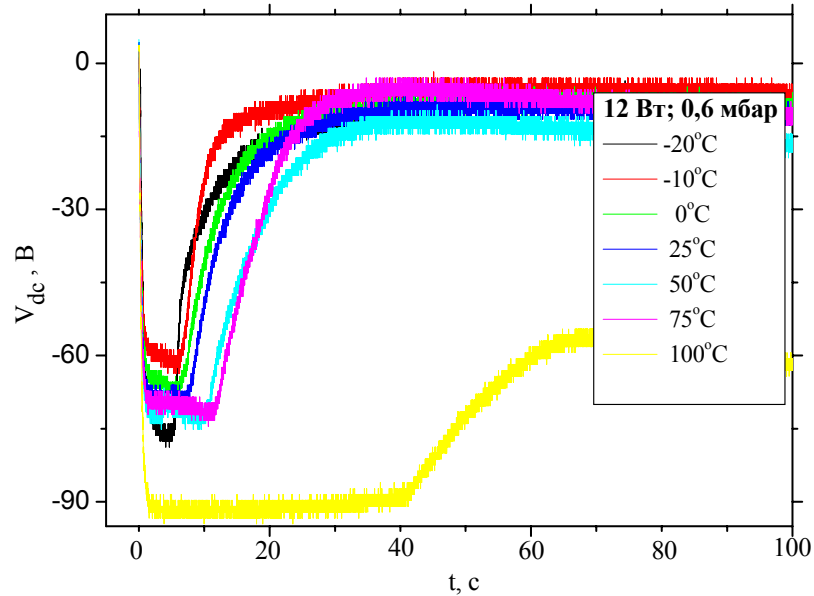


Рисунок 2 – Зависимость напряжения самосмещения от температуры газа

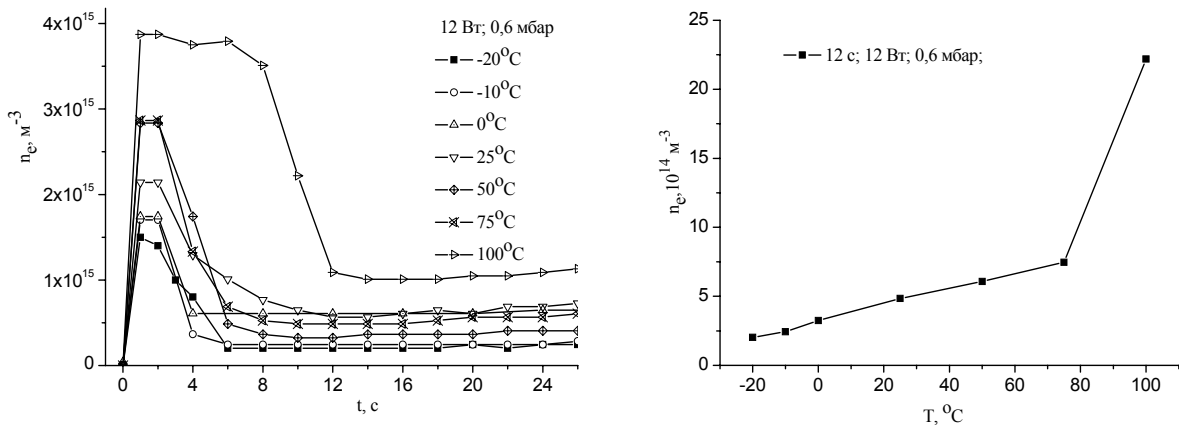


Рисунок 3 - Зависимость концентрации электронов от температуры газа

Уменьшение концентрации электронов характеризует увеличение размеров частиц, то есть чем больше размер частиц, тем больше их поверхность и большее число электронов поглощается, и таким образом, это приводит к уменьшению концентрации электронов. Полученные результаты соответствуют результатам работы [12], где представлены результаты кинетики роста частиц в плазме смеси газов аргон/силан. Этот экспериментальный факт показал, что диаметр наночастиц прямолинейно зависит от значения отношения напряжения самосмещения к концентрации электронов. Из рисунков видно, что при повышении температуры плазмообразующего газа, увеличение напряжения самосмещения и падение концентрации электронов требует больше времени, которые характеризуют параметры формирования и роста частиц.

На рисунках 4-6 представлены зависимости зарождения частиц от температуры газовой среды при различных параметрах: давления газа и мощности разряда.

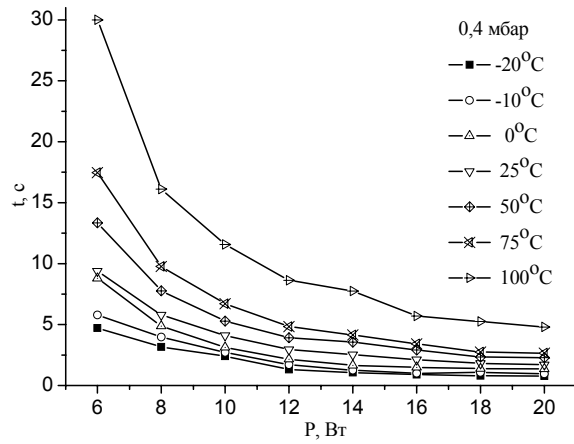


Рисунок 4 – Зависимости времени зарождения наночастиц от мощности разряда при разных температурах

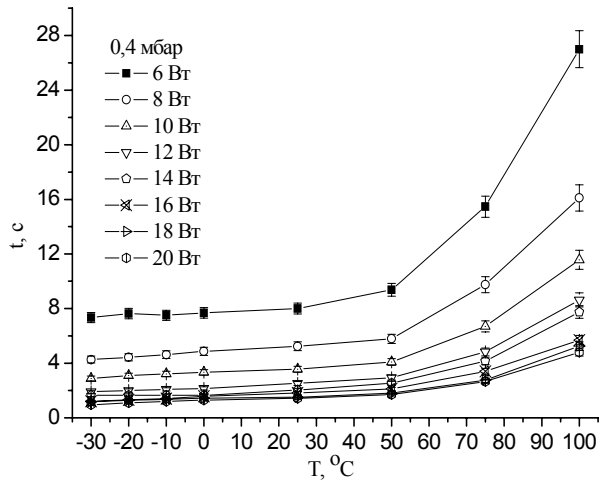


Рисунок 5 – Зависимости времени зарождения наночастиц от температуры газа при разных мощностях разряда

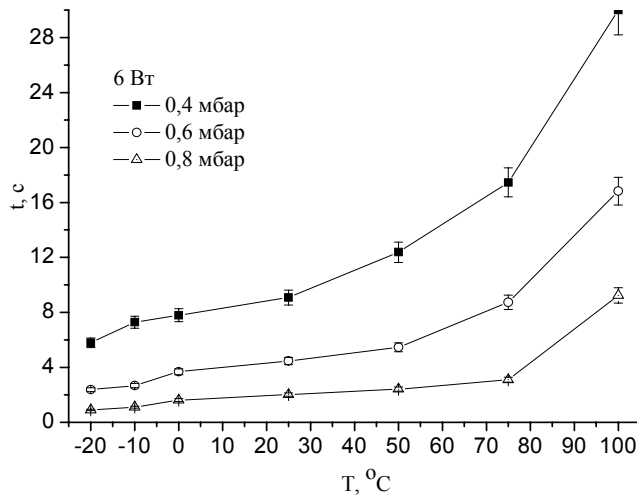


Рисунок 6 – Зависимости времени зарождения наночастиц от температуры газа при разных давлениях газа

Из рисунков видно, что при повышении температуры газа время зарождения наночастиц увеличивается. Это можно объяснить поведением отрицательно заряженных частиц при различных параметрах плазмы. Также можем заметить, время кристаллизации частиц ускоряется, что связано с увеличением давления газа и мощности разряда. При увеличении давления газа и мощности ускоряется процесс ионизации, соответственно увеличивается концентрация ионов и радикалов, а также прилипание ионов на поверхность частиц. Данный процесс воздействует на быстрый рост частиц.

С помощью выше представленных напряжений самосмещения и концентрации электронов были построены зависимости диаметра частиц и их концентрации от времени синтеза в  $Ag/CH_4$  плазме (рисунок 7,8) при разных температурах.

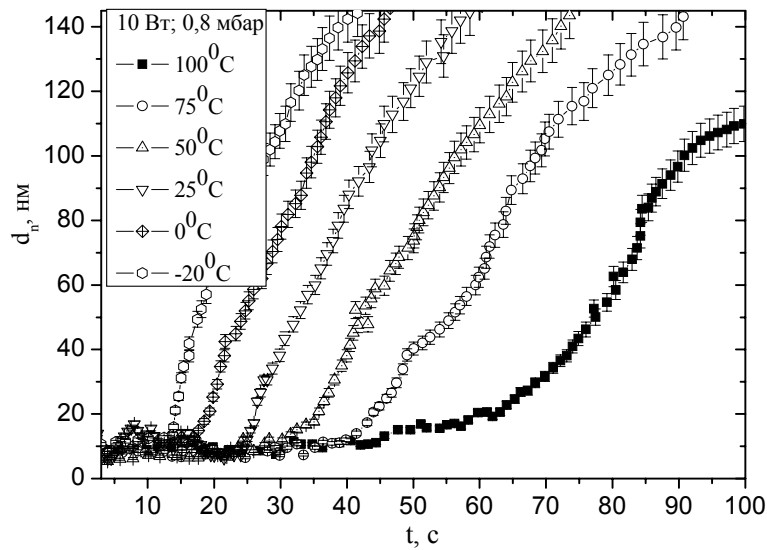


Рисунок 7 – Распределение диаметров наночастиц от времени синтеза в плазме  $Ag/CH_4$  при разных температурах газа

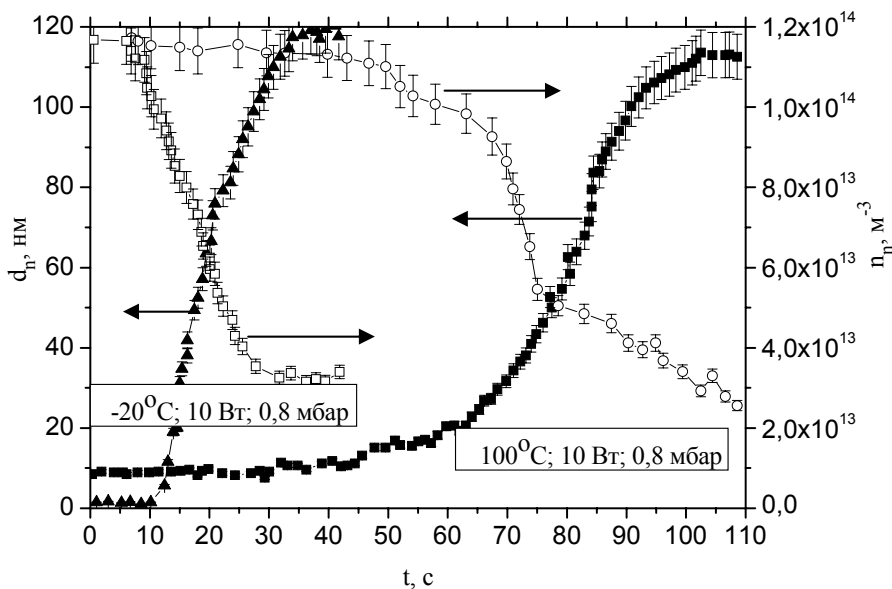


Рисунок 8 – Распределение диаметров и концентрации наночастиц от времени синтеза в плазме  $Ag/CH_4$

Выше перечисленные результаты показали, что время синтеза, формирование и рост наночастиц зависит от параметров плазмы, то есть от мощности разряда, давления газа, времени синтеза и температуры плазмообразующего газа. Было определено, что с увеличением мощности разряда и давления газа время формирования и роста наночастиц уменьшается, также, при нагревании плазмообразующего газа от 25°C (комнатной температуры) до 100°C время формирования частиц увеличивается, а при снижении температуры от комнатной 25°C до -30°C оно уменьшается.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K., Batryshev D.G. Synthesis of nano- and microparticles from gaseous phase in the RFCD plasma// Book of Abstracts of the 6th International Conference on Advanced Nanomaterials, (ANM). - Aveiro, Portugal, 2015. – P.110.

[2] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Batryshev D.G., Silamiya M. Synthesis of nanoparticles and nanofilms in dusty plasma for obtaining of composite materials // Book of Abstracts of the 7th International Conference on the Physics of Dusty Plasmas (ICPDP). - New Delhi, India, 2014. – P. 99.

[3] Gabdullin M.T., Orazbayev S.A., Slamiya M., Batryshev D.G., Dosbolayev M.K., Ramazanov T.S., Investigation of the process of synthesis of carbon nano and microparticles in RF plasma discharge // Abstracts of the III International Scientific Conference "Modern problems of condensed matter physics, nanotechnology and nanomaterials». – Almaty, Kazakhstan, 2014. – P. 121. (In Russian)

[4] Оразбаев С.А., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Батрышев Д.Г., Буфенди Л. Көміртегі нанобөлшектер синтезінің ЖЖ разряд плазмасының параметрлеріне тәуелділігін зерттеу // Журнал Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2015. - № 3. - С. 186-190.

[5] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Nurbolat K. Spectroscopic diagnostics of Ar/CH<sub>4</sub> and Ar/C<sub>2</sub>H<sub>2</sub> gas mixtures plasma// Book of Abstracts of the 15th International Conference on the Physics of Non-Ideal Plasmas, Almaty, Kazakhstan. – 2015. – С. 121.

[6] Ramazanov T.S., Jumabekov A.N., Orazbayev S.A., Dosbolayev M.K., and Jumagulov M.N., Optical and kinetic properties of the dusty plasma in radiofrequency discharge // Phys. Plasmas 19, 023706 (2012); doi: 10.1063/1.3690103

[7] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Silamiya M., Optical diagnostics of plasma in a gaseous mixture of RF discharge//Abstract Booklet of the XXII Europhysics Conference on Atomic and Molecular Physics of Ionized Gases (ESCAMPIG). - Greifswald, Germany, 2014. – P.P1-05-12.

[8] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Silamiya M., Jumagulov M.N. Spectroscopic diagnostics of plasma gas mixtures in radio frequency discharge // Book of abstracts of the 14th International Conference on the Physics of Non-Ideal Plasmas. - Rostock, Germany, 2012. – P.152.

[9] Orazbayev S.A., Dosbolayev M.K., Silamiya M., Jumagulov M.N., Ramazanov T.S. Optical properties of the dusty plasma in RF discharge//16thBook of abstracts of the International Congresses on Plasma Physics and 39thEuropean Physical Society Conference on Plasma Physics (EPS/ICPP). - Stockholm, Sweden, 2012. – P.2.130.

[10] Boufendi L. and Bouchoule A. Particle nucleation and growth in a low – pressure argon-silane discharge // Plasma Sources Sci. Technol. – 1994. – Vol. 3. – P. 262.

[11] Bouchoule A. and Boufendi L. Particulate formation and dusty plasma behaviour in argon-silane RF discharge // Plasma sources Sci. Technol. – 1993. – Vol. 2. - P. 204.

[12] Bhandarkar U., Kortshagen U. and Girshick S. L. Numerical Study of the Effect of Gas Temperature on the Time for Onset of Particle Nucleation in Argon-Silane Low Pressure Plasmas // Journal of Physics D. - 2003. -Vol. 36. - P. 1399.

[13] Cavarroc M., Jouanny M. Ch., Radouane K., Mikikian M., Boufendi L. Self-excited instabilities occurring during the nanoparticle formation in an Ar–SiH<sub>4</sub> low pressure radiofrequency plasma // J. Appl. Phys. - 2006. -Vol. 99. - P. 064301

[14] Wattieaux G., Mezeghrane A., Boufendi L. Electrical time resolved metrology of dust particles growing in low pressure cold plasmas// Physics of Plasmas.-2011.-Vol. 18.-P.093701.

[15] Orazbayev S.A., Gabdullin M.T., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Slamiya M. The method for synthesis nanoparticles from gas phase// Book of Abstracts of the 8th International conference on Plasma Physics and Plasma Technology (PPPT). - Minsk, Belarus, 2015. – P. 490

[16] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K., Slamiya M., Obtaining nanoparticles carbon plasma from a gas phase chemical method// Bulletin of the KazNTU, series of chemical and metallurgical science.. – 2015. - № 4. – P. 504-508. (In Kazakh)

[17] Wattieaux G., Mezeghrane A., Boufendi L. Electrical time resolved metrology of dust particles growing in low pressure cold plasmas// Physics of Plasmas. -2011. -Vol. 18. -P.093701.

[18] Orazbayev S.A., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K. Obtaining of nano- and microparticles in plasma by CVD method// Program and Book of Abstracts of the 32nd International Conference on Phenomena in Ionized Gases (ICPIG). - Iași, Romania, 2015. – P. P3.17

[19] Cavarroc M., Mikikian M., Perrier G., Boufendi L. Single-crystal silicon nanoparticles: An instability to check their synthesis // Applied Physics Letters – 2006. - Vol. 89. - P. 013107.

[20] Fridman A. A., Boufendi L., Hbid T., Potapkin B. V., Bouchoule A., Dusty plasma formation: Physics and critical phenomena. Theoretical approach // J. Appl. Phys. - 1996. – Vol. 79, №3.-P.1303.

**С.А. Оразбаев, Д.Б. Өмірбеков, М.Т. Габдуллин, М.Қ. Досболаев, Т.С. Рамазанов**

АТҰНЗ, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы қ.

### **ГАЗ ТЕМПЕРАТУРАСЫНЫҢ ТОЗАҢДЫ НАНОБӨЛШЕКТЕРДІҢ ӨЛШЕМІ МЕН ҚҰРЫЛЫМЫНА ӘСЕРІ**

**Аннотация.** Аталған жұмыста газ температурасының тозаңды нанобөлшектердің өлшемі мен құрылымына әсері зерттелген. Газ температурасы 100°C мен – 30°C аралығында өзгертілді. Жұмыста нанобөлшектеді газдық фазадан синтездеудің плазма химиялық әдісі қолданылды. Барлық тәжірибе плазманың тұрақты параметрлерінде жүргізілді: газ қысымы және разряд қуаты. Графикалық және математикалық есептеулер нәтижесінде өздік ығысу кернеуі мен электрондар концентрациясының температураға тәуелділігі тұрғызылды. Сонымен қатар, әртүрлі плазма параметрлерінде нанобөлшектер пайда болу уақытының газ температурасына тәуелділік графигі және нанобөлшектер диаметрі мен концентрациясының синтез уақыты бойынша таралуы алынды. Плазманы түзуші газды қыздырғанда нанобөлшектердің пайда болуы мен өсу уақыты артылатыны, ал суытқанда – азаятындығы анықталды.

**Түйін сөздер:** тозаңды плазма, нанобөлшектер, наноматериалдар, газдық разряд.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 96 – 103

**K.B.Jakupov**

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: [jakupovKB@mail.ru](mailto:jakupovKB@mail.ru)

**MODELING HOOKE'S LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY.  
UNSYMMETRICAL STRESS TENSOR**

**Annotation.** Directly from Hooke's law derived stress tensor components of deformable body. A direct link, and tangent normal stresses with Hooke's law. asymmetrical stress tensor is proved of deformable body. We derive new equations of elasticity theory. It is shown that the Lamé hypothesis is only symmetrical half incompletely the offset differential, anti-symmetric half of which is discarded, resulting in a symmetric tensor Lamé stresses. For new equations constructed explicit scheme 2nd order accuracy with which the Numbers elastic state of a flat bar with the current in the middle of the upper verge of normal and tangential stresses. The same scheme is applied to the equation Lamé tions. These pictures demonstrate displacement distribution making a difference compared systems of equations of elasticity, as well as inadequate solutions of the Lamé equations of this deformable body.

**Keywords:** tensile, shear stress, normal stress, tensor, equations.

УДК 539.2/.6

**К.Б.Джакупов**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО ЗАКОНУ ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.  
НЕСИММЕТРИЧНОСТЬ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ**

**Аннотация.** Непосредственно из закона Гука выведены компоненты тензора напряжений твердого деформируемого тела. Установлены прямые связи касательных и нормальных напряжений с законом Гука. Доказана *несимметричность* тензора напряжений твердого деформируемого тела. Выведены новые уравнения теории упругости.

Показано, что в гипотезе Ламе используется только симметричная половина неполного дифференциала смещения, антисимметричная половина которого отбрасывается, следствием чего является симметричность тензора напряжений Ламе. Для новых уравнений построена явная схема 2-го порядка точности, с применением которой рассчитано упругое состояние плоского бруска при действующих в середине верхней грани нормальном и касательном напряжениях. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также неадекватность решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела.

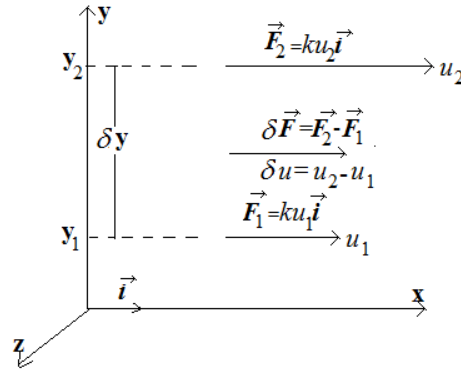
**Ключевые слова:** растяжение, касательное напряжение, нормальное напряжение, тензор, уравнения.

**Связь касательных напряжений с законом Гука**

По закону Гука «*каково натяжение таково растяжение*» силы  $\vec{F} = k\vec{u}$ , действующие параллельно плоскости  $XZ$  в положительном направлении оси  $x$ , вызывают растяжения  $u$ , где



$k > 0$  - зависящий от свойств материала коэффициент. На слое  $y_1$  сила и растяжение равны  $\vec{F}_1 = ku_1\vec{i}$ , соответственно,  $\vec{F}_2 = ku_2\vec{i}$  на слое  $y_2 = y_1 + \delta y$ ,  $\delta y > 0$ .



Приращения: сил  $\delta \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = k\delta u \vec{i}$  и растяжений  $\delta u = (u_2 - u_1) > 0$ . Пусть  $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$ , в этом случае  $\delta \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{i}$ .

Вводится линейная плотность приращения  $\delta \vec{F}$  как отношение  $\vec{f} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta y}$ ,  $\delta \vec{F} = \vec{f} \delta y$ . По определению вектор среднего касательного напряжения  $\vec{\pi}_{yxcp} = \delta \vec{F} / (\delta x \delta z)$  параллелен и одинаково направлен с силами, вызывающими данное напряжение,  $\vec{\pi}_{yxcp} \uparrow\uparrow \delta \vec{F}$ ,  $\vec{\pi}_{yxcp} \uparrow\uparrow \vec{f}$ . Через коэффициент пропорциональности образуется связь  $\vec{f} = k' \vec{\pi}_{yxcp}$ ,  $k' > 0$ ,  $\vec{\pi}_{yxcp} \uparrow\uparrow \vec{i}$ ,  $k' \vec{\pi}_{yxcp} \delta y = k \delta u \vec{i}$ . Данное выражение умножается скалярно на орт  $\vec{i}$ :  $(k' \vec{\pi}_{yxcp} \delta y, \vec{i}) = (k \delta u \vec{i}, \vec{i})$ .

В результате получаются необходимые соотношения

$$(k' \vec{\pi}_{yxcp} \delta y, \vec{i}) = k' \delta y |\vec{\pi}_{yxcp}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = k' \pi_{yxcp} \delta y, (k \delta u \vec{i}, \vec{i}) = k \delta u$$

Равенства  $k' \pi_{yxcp} \delta y = k \delta u$ ,  $\pi_{yxcp} = \frac{k \delta u}{k' \delta y}$  в пределе дают касательное напряжение

$\pi_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k \delta u}{k' \delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , где обозначено  $\mu = \frac{k}{k'}$ . Обобщения на другие направления образуют соответствующие касательные напряжения

$$\pi_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \pi_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \pi_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \pi_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \pi_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

### 1. Связь нормальных напряжений с законом Гука

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей  $\vec{\pi}_{xx}^o$  нормального напряжения  $\vec{\pi}_{xx} = \lambda \text{div} \vec{u} \vec{i} + \vec{\pi}_{xx}^o$ . Пусть силы Гука равны:  $\vec{F}_1 = ku_1\vec{i}$  в точке  $x_1$  и  $\vec{F}_2 = ku_2\vec{i}$  в точке  $x_2 = x_1 + \delta x$ ,  $\delta \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$ ,  $\delta u = (u_2 - u_1) > 0$ ,  $\delta \vec{F} = k \delta u \vec{i}$ . Имеет место параллельность  $\delta \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{i}$  для случая когда модуль верхней силы больше  $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$ .

Через линейную плотность  $\delta\vec{F} = \vec{\varphi}\delta x$ ,  $\vec{\varphi} = k''\vec{\pi}_{xxcp}^o$  образуются равенства  $\delta F = k''\vec{\pi}_{xxcp}^o\delta x$ ,  $k''\vec{\pi}_{xxcp}^o\delta x = k\delta u\vec{i}$ . Данное выражение умножается скалярно на орт  $\vec{i}$ :  $(k''\vec{\pi}_{xxcp}^o\delta x, \vec{i}) = (k\delta u\vec{i}, \vec{i})$ . По определению  $\vec{\pi}_{xxcp}^o\delta x \uparrow\uparrow \vec{i}$ . В результате получается  $k''\vec{\pi}_{xxcp}^o\delta x = k\delta u$ , откуда следует  $\vec{\pi}_{xxcp}^o = \frac{k}{k''}\frac{\delta u}{\delta x}$ . В пределе вытекают формулы составляющих нормальных напряжений  $\pi_{xx}^o = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{k}{k''}\frac{\delta u}{\delta x} = \mu\frac{\partial u}{\partial x}$ , где введено естественным образом  $\mu = \frac{k}{k''}$ .

Аналогично выводятся составляющие нормальных напряжений и по другим направлениям:

$$\pi_{ii}^o = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3; u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z.$$

Таким образом, закону Гука соответствует *несимметричный* тензор напряжений в твердом деформируемом теле:

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij}div\vec{u} + \mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \pi_{ji} \neq \pi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$  – вектор перемещения. В нормальных напряжениях член  $\lambda\delta_{ij}div\vec{u}$ , установленный Ламе, сохраняется,  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера.

### 3. Уравнения теории упругости для несимметричного тензора напряжений в твердом деформируемом теле

Уравнения упругости твердого деформируемого тела [1], [2], [3]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu)graddiv\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} \quad (3.1)$$

построены по гипотезе Ламе с *симметричным* тензором напряжений

$$\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij}div\vec{u} + \mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \pi_{ji} = \pi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad \lambda, \mu - \text{коэффициенты Ламе, } \pi_{ij} = \pi_{ji}.$$

Подстановкой компонент *несимметричного* тензора  $\pi_{ji} = \lambda\delta_{ij}div\vec{u} + \mu\varepsilon_{ji}$ ,  $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  в уравнения динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

получается соответствующее скорректированное уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda graddiv\vec{u} + \mu\Delta\vec{u}, \quad (3.3)$$

значительно отличающееся от уравнения Ламе (3.1).

Проекция данного уравнения в декартовых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

### 3. О гипотезе Ламе

Ламе, при выводе своего уравнения (3.1), исходил из гипотезы о том, что элементы  $\varepsilon_{ij}$  тензора напряжений

$$du_i = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j, \quad (4.1)$$

должны быть пропорциональны удвоенной первой половине формулы (4.1) [1] (вторая антисимметричная часть (4.1) игнорируется). Формула (4.1) искусственно образована из неполного дифференциала смещений

$$\tilde{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Вытекающие из закона Гука *несимметричные* элементы (2.1)  $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

тензора напряжений пропорциональны коэффициентам неполного дифференциала (4.2).

### 5. Явная схема уравнений теории упругости

Рассматривается задача Коши-Дирихле для новых уравнений

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ p &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

с соответствующими начальными условиями в момент времени  $t = 0$  и краевыми условиями на границе  $S$ .

В области интегрирования задается равномерная сетка

$$\bar{\Omega}_h = \left\{ \begin{array}{l} (x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), \\ i = 0, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; m = 0, \dots, N_z \end{array} \right\}$$

с внутренними узлами

$$\Omega_h = \left\{ (x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), \right. \\ \left. i = 1, \dots, N_x - 1; j = 1, \dots, N_y - 1; m = 1, \dots, N_z - 1 \right\}$$

и граничными узлами

$$S_h = \{i=0, i=N_x, j=0, N_y, m=0, N_z; j=0, j=N_y, i=0, N_x, \\ m=0, N_z; m=0, m=N_z, j=0, N_y, i=0, N_x\}, \bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h$$

Соответствующие начальные условия задаются на сетке  $\Omega_h$ , граничные условия в узлах сетки  $S_h$ .

Явная разностная схема имеет вид:

$$Q_{uijm}^n = \mu \left[ \frac{u_{i+1jm}^n - 2u_{ijm}^n + u_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1m}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{ijm+1}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{xijm},$$

$$Q_{vijm}^n = \mu \left[ \frac{v_{i+1jm}^n - 2v_{ijm}^n + v_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1m}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{v_{ijm+1}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{yijm},$$

$$Q_{wijm}^n = \mu \left[ \frac{w_{i+1jm}^n - 2w_{ijm}^n + w_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{w_{ij+1m}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{ijm+1}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ijm-1}^n}{h_z^2} \right] + \rho_0 F_{zijm},$$

$$\rho_0 \frac{u_{ijm}^{n+1} - 2u_{ijm}^n + u_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijm}^n + \lambda \frac{p_{i+1jm}^n - p_{i-1jm}^n}{2h_x},$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijm}^{n+1} - 2v_{ijm}^n + v_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijm}^n + \lambda \frac{p_{ij+1m}^n - p_{ij-1m}^n}{2h_y},$$

$$\rho_0 \frac{w_{ijm}^{n+1} - 2w_{ijm}^n + w_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{wijm}^n + \lambda \frac{p_{ijm+1}^n - p_{ijm-1}^n}{2h_z},$$

$$p_{ijm}^n = \frac{u_{i+1jm}^n - u_{i-1jm}^n}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^n - v_{ij-1m}^n}{2h_y} + \frac{w_{ijm+1}^n - w_{ijm-1}^n}{2h_z},$$

$$i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, m = 1, \dots, N_m - 1,$$

в граничных узлах  $S_h$  :

$$i = 0, p_{0jm}^n = \frac{4u_{1jm}^n - 3u_{0jm}^n - u_{2jm}^n}{2h_x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{0jm}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{0jm}^n,$$

$$i = N_x, p_{N_xjm}^n = \frac{3u_{N_xjm}^n + u_{N_x-2jm}^n - 4u_{N_x-1jm}^n}{2h_x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{N_xjm}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{N_xjm}^n,$$

$$j = 0, p_{i0m}^n = \frac{4v_{i1m}^n - 3v_{i0m}^n - v_{i2m}^n}{2h_y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i0m}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i0m}^n,$$

$$j = N_y, p_{iN_y m}^n = \frac{3v_{iN_y m}^n + v_{iN_y-2m}^n - 4v_{iN_y-1m}^n}{2h_y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{iN_y m}^n + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{iN_y m}^n,$$

$$m = 0, p_{ij0}^n = \frac{4w_{ij1}^n - 3w_{ij0}^n - w_{ij2}^n}{2h_z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij0}^n + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ij0}^n,$$

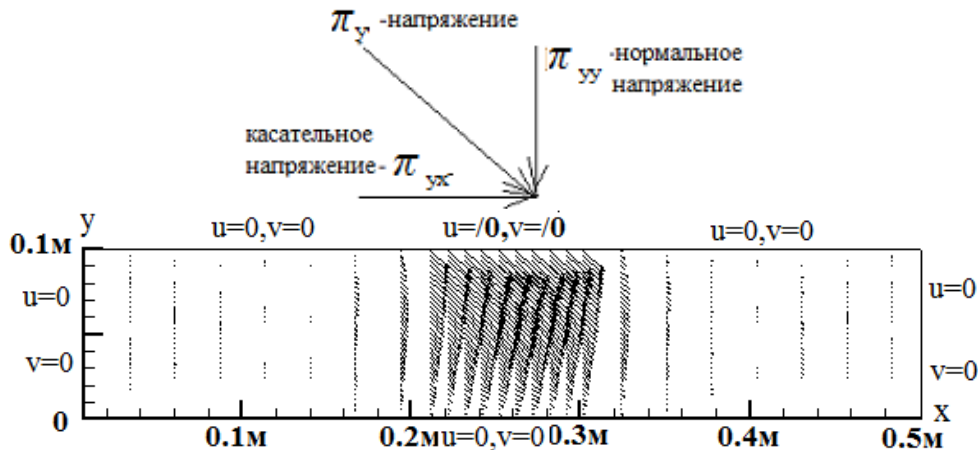
$$m = N_z, p_{ijN_z}^n = \frac{4w_{ijN_z-1}^n - 3w_{ijN_z}^n - w_{ijN_z-2}^n}{2h_z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ijN_z}^n + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ijN_z}^n,$$

Данная явная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным  $O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2)$ . Устойчивость счета по явной схеме обеспечивается выполнением условия Куранта:

$$\frac{\tau^2 \mu}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \leq 1$$

**6. Сравнение численного решения уравнений Ламе с численным решением новых уравнений**

Для сравнения решений уравнения Ламе с решением уравнения с *несимметричным* тензором напряжений (3.3) выполнен расчет перемещений в плоском деформируемом бруске размером 0.5м на 0.1м.

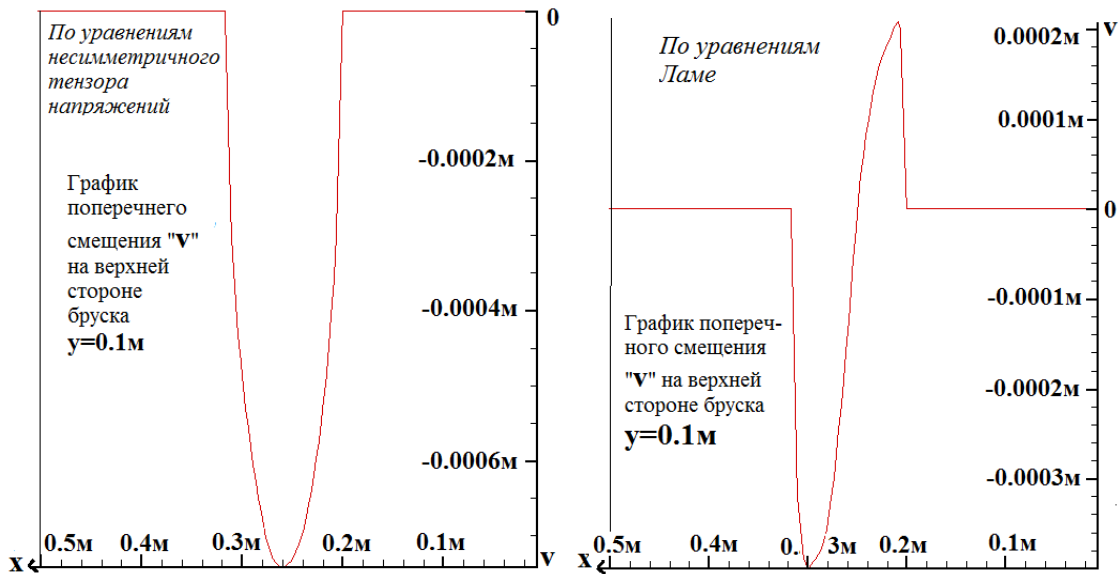
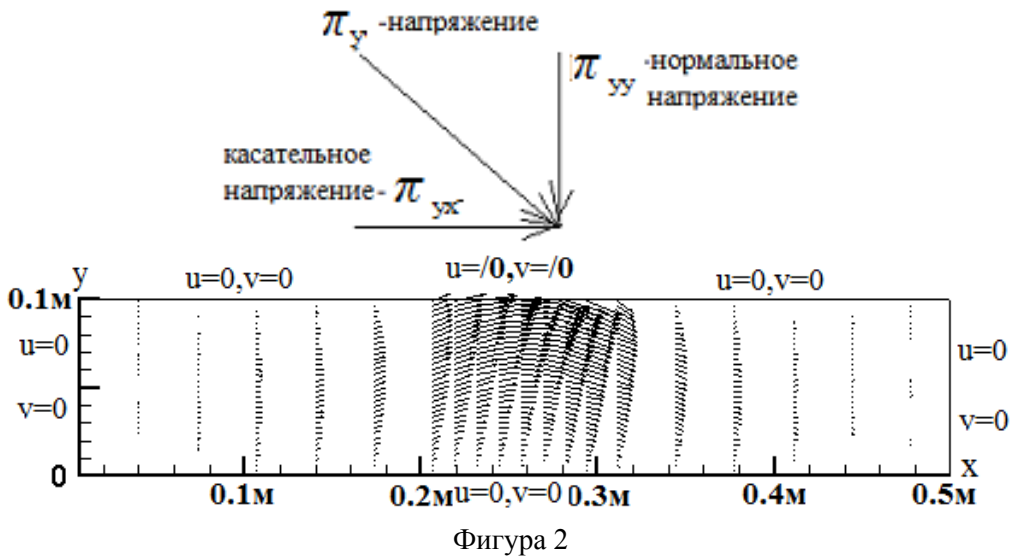


Фигура 1

Вектор внешней силы направлен перпендикулярно к плоскости бруска. На фиг. 1 и 2 представлены поля векторов перемещений  $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j}$  в плоском бруске, на фиг. 3 и 4 эпюры поперечной скорости на верхней стороне бруска, всё на момент времени  $t=121.38$  с. Плотность тела  $\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$ . На верхней стороне бруска  $y=0.1\text{м}$  от  $0.2\text{м}$  до  $0.3\text{м}$  приложено напряжение  $\vec{\pi}_y = \pi_{yx}\vec{i} + \pi_{yy}\vec{j}$ . Конкретно положено  $\pi_{yy}=-1 \text{ Н/м}^2$ ,  $\pi_{yx}=1 \text{ Н/м}^2$ . Остальные грани бруска жестко закреплены, смещения на них равны нулю.

Коэффициенты Ламе выбраны равными  $\lambda = 1 \text{ кг/(с}^2\text{м)}$ ,  $\mu = 100 \text{ кг/(с}^2\text{м)}$ .

Обе системы уравнений реализованы по явным схемам [5] на сетке  $100 \times 100$  с шагом по времени равным  $0.00051\text{с}$ . Налицо явное различие между численными решениями, в особенности фиг. 3 и 4. На фиг. 4 замечено парадоксальное перемещение вверх: на участке  $[0.2\text{м}, 0.24\text{м}]$  имеются положительные значения поперечных перемещений  $v > 0$ , тогда как на фиг. 3 на данном участке перемещения отрицательные  $v < 0$ .



Фигура 3

Фигура 4

**Выводы**

Детальный вывод из закона Гука нормальных и касательных напряжений доказывают *несимметричность* тензора напряжений в твердом деформируемом теле. Конкретный пример численного расчета состояния упругого тела при наложенных напряжениях убедительно показывают неадекватность и несостоятельность гипотезы о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды и соответственно уравнений теории упругости Ламе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974г. 318с.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: «Наука»,1973г. 315с.
- [3] Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука»,1970г. 984с.
- [4] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.М.: Изд-во МГУ, 1978г. 287с.
- [5] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - Алматы: Изд-во «Ғылым ордасы», 2015г. С.376.
- [6] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. М.: «Наука»,1970г. 547с.
- [7] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
- [8] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y. , Wiley, 1967.
- [9] Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975.
- [10] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.

#### REFERENCES

- [1] Mase G.E. Theory and Problems of Continuum Mechanics. M.: "Mir", 1974. P.318.
- [2] Sedov L.I. Continuum Mechanics , Vol.1 . M. : "Science", 1973 . P.315.
- [3] Lurie A.I. The theory of elasticity . M. : "Science" , 1970 . P.984 .
- [4] Ilyushin A.A. Continuum Mechanics sredy.M. : MGU , 1978 . P.287.
- [5] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «Ғылым ордасы», 2015г. P.376.
- [6] Ilyushin AA Pobedria BE Fundamentals of the mathematical theory of thermo – viscoelasticity. M. : "Science", 1970. 547s.
- [7] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967 .
- [8] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y. , Wiley, 1967 .
- [9] Nowacki W. Theory of Elasticity . M. : "Mir" , 1975.
- [10] Lomakin V.A .Theory of elasticity of inhomogeneous bodies . M.: MGU , 1976.

#### К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

#### ГУКТЫҢ ЗАҢЫМЕН СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА МОДЕЛДЕУ. КЕРНЕУЛЕР ТЕНЗОРЫНДА СИММЕТРИЯ ЖОҚТЫҒЫ

**Аннотация.** Тікелей Гук заңынан кернеулер тензорының компоненттері шығарылған және осыған сәйкес майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Жанама кернеулердің және тік кернеулердің Гук заңымен тура байланыстар құрылған. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Серпілімдік теориясының жаңа теңдеулері қорытылған.. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретті нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасыны жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеулерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді.

**Тірек сөздер.** созылу, жанама кернеу, тік кернеу, тензор, теңдеулер.

#### Сведения об авторе:

Джакупов Кенес Бажкенович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 104 – 108

N. Burtebayev<sup>1</sup>, D.K. Alimov<sup>1,2</sup>, D.M. Zazulin<sup>1,2</sup>, Zh.K. Kerimkulov<sup>1</sup>,  
A.V. Yushkov<sup>2</sup>, D.M. Janseitov<sup>1</sup>, Y. Mukhamejanov<sup>1,2</sup>, M. Nassurlla<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

e-mail: [Diliyo@mail.ru](mailto:Diliyo@mail.ru)

## DETERMINATION OF PARAMETERS OF PROTON <sup>14</sup>N INTERACTION POTENTIAL AT LOW ENERGIES

**Abstract.** A review and analysis of existing literature data on elastic scattering of protons by <sup>14</sup>N nuclei in the framework of optical model has been carried out. On the basis of these results and analysis of recently obtained by us experimental data on the <sup>14</sup>N(p,p)<sup>14</sup>N cross sections at low energies, the optimal parameters of the optical potential required for the calculations of the processes taking place in hybrid nuclear reactors and fusion devices have been found.

**Keywords:** elastic scattering, light charged particles, diffuseness, optical potential, FRESCO.

Н. Буртебаев<sup>1</sup>, Д. Алимов<sup>1,2</sup>, Д.М. Зазулин<sup>1,2</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1,2</sup>,  
А.В. Юшков<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>1</sup>, Е. Мухамеджанов<sup>1,2</sup>, М. Насрулла<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт Ядерной Физики, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОТОНА С <sup>14</sup>N ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

**Аннотация.** Выполнен обзор и проведен анализ имеющихся литературных данных по упругому рассеянию протонов на ядрах <sup>14</sup>N в рамках оптической модели. На основе этих результатов и анализа, недавно полученных нами экспериментальных данных по сечениям процесса <sup>14</sup>N(p,p)<sup>14</sup>N при низких энергиях найдены оптимальные параметры оптического потенциала, востребованного для расчетов процессов происходящих в гибридных ядерных реакторах и термоядерных установках.

**Ключевые слова:** упругое рассеяние, легкие заряженные частицы, диффузность, оптический потенциал, FRESCO.

**Введение.** Изучение процессов упругого рассеяния протонов на легких ядрах, в том числе на <sup>14</sup>N при низких энергиях необходимо для определения параметров потенциалов протон-ядерного взаимодействия. Эти потенциалы нужны для расчетов ядерных реакций, которые будут происходить в проектируемых гибридных ядерных реакторах и в термоядерных установках, как во время горения топлива, так и в поверхностных слоях, непосредственно соприкасающихся с плазмой конструкционных элементов.

Универсальным методом извлечения информации о потенциалах взаимодействия протонов с ядрами является феноменологический анализ экспериментальных данных по упругому рассеянию на основе оптической модели ядра, обоснование и детальная математическая формулировка которой изложены в ряде работ [1, 2]. В рамках этого подхода рассеяние на многочастичной системе ядра представляется как более простой процесс - рассеяние в поле комплексного оптического потенциала.



Экспериментальные данные по упругому рассеянию протонов на ядрах  $^{14}\text{N}$  в настоящей работе анализировались с использованием известной расчетной программы FRESKO. Параметры потенциала, отвечающие оптимальному соответствию экспериментальных и расчетных значений дифференциальных сечений, находились минимизацией величины  $\chi^2$ .

**Анализ дифференциальных сечений процесса  $^{14}\text{N}(p,p)^{14}\text{N}$ .** Для получения параметров оптического потенциала взаимодействия системы  $p\text{-}^{14}\text{N}$  на первом этапе был проведен анализ угловых распределений упругого рассеяния протонов на  $^{14}\text{N}$  в интервале энергий от 8.6 до 142 МэВ [3 - 8]. Вначале варьировались все параметры до достижения наиболее точного согласия с экспериментом (таблица 1 а)). Затем выбирались средние значения радиусов действительной, мнимой и спин-орбитальной частей и фиксировались для всех энергий. После этого проводился поиск оптимальных параметров оптического потенциала, которые приводятся в таблице 1 (вариант б).

Затем была исследована энергетическая зависимость действительной части потенциала (см. рисунок 1). Как видно из рисунка 1, аппроксимировать глубину потенциала линейной функцией не удастся во всем рассматриваемом энергетическом интервале. Линейная аппроксимация при низких энергиях также оказывается не вполне пригодной. Данные факты говорят о том, что вклад от хвостов резонансов, расположенных при низких энергиях, существенен во всем энергетическом интервале. Поэтому можно сказать, что параметры оптического потенциала в области сверхнизких энергий могут несколько отличаться от параметров, полученных в рассмотренном интервале энергий. На рисунке 2 в качестве примера приводится сравнение расчетных и экспериментальных данных при энергии протонов  $E_{p, \text{лаб.}} = 18$  МэВ [8]. Видно, что полученный потенциал хорошо описывает дифференциальные сечения упругого рассеяния во всем угловом диапазоне.

Таблица 1 а) - Параметры оптического потенциала для упругого рассеяния протонов на ядрах  $^{14}\text{N}$  (первый набор).  
Обозначения как в работах [1, 2]

$E_{p, \text{лаб.}}$ (МэВ)	$V_R$ , (МэВ)	$r_R$ , (фм)	$a_R$ , (фм)	$W_D$ , (МэВ)	$r_{WD}$ , (фм)	$a_{WD}$ , (фм)	$V_{SO}$ , (МэВ)	$r_{SO}$ , (фм)	$a_{SO}$ , (фм)
8.6	49.84	1.205	0.605	1.61	1.03	0.53	5.32	1.205	0.605
10.6	51.71	1.205	0.605	2.44	1.03	0.53	6.48	1.205	0.605
12.6	51.61	1.205	0.605	3.59	1.03	0.53	5.83	1.205	0.605
14.6	53.05	1.205	0.605	6.38	1.03	0.53	3.21	1.205	0.605
18	56.21	1.10	0.712	3.97	1.36	0.5	6.0	1.10	0.712
21	47.27	1.20	0.688	4.32	1.36	0.5	6.0	1.20	0.688
23	45.91	1.20	0.660	3.96	1.36	0.5	6.0	1.20	0.660
26	44.46	1.20	0.610	4.31	1.36	0.5	6.0	1.20	0.610
31	46.7	1.20	0.63	12.4	1.20	0.5	6.7	1.20	0.63
49.4	38.52	1.13	0.766	1.75	1.33	0.433	8.77	1.07	0.632
122	18.3	1.20	0.65	10.6	1.30	0.64	18.3	0.9	0.5

Таблица 1 б) - Параметры оптического потенциала для упругого рассеяния протонов на ядрах  $^{14}\text{N}$  (второй набор).  
Обозначения как в работах [1, 2]

$E_{p, \text{лаб.}}$ (МэВ)	$V_R$ , (МэВ)	$r_R$ , (фм)	$a_R$ , (фм)	$W_D$ , (МэВ)	$r_{WD}$ , (фм)	$a_{WD}$ , (фм)	$V_{SO}$ , (МэВ)	$r_{SO}$ , (фм)	$a_{SO}$ , (фм)
8.6	46.66	1.25	0.65	1.74	1.25	0.65	6.19	1.25	0.65
10.6	48.26	1.25	0.65	2.73	1.25	0.65	6.42	1.25	0.65
12.6	48.99	1.25	0.65	3.75	1.25	0.65	4.67	1.25	0.65
14.6	49.41	1.25	0.65	6.28	1.25	0.65	2.84	1.25	0.65
18	50.44	1.25	0.62	6.05	1.25	0.33	5.21	1.25	0.62
21	48.50	1.25	0.62	5.61	1.25	0.44	4.24	1.25	0.62
23	46.03	1.25	0.62	4.96	1.25	0.477	5.74	1.25	0.62
26	44.1	1.25	0.62	4.33	1.25	0.602	5.59	1.25	0.62
31	43.68	1.25	0.62	4.0	1.25	0.718	5.59	1.25	0.62
49.4	35.25	1.25	0.62	3.47	1.25	0.61	4.51	1.25	0.62
122	15.12	1.25	0.62	5.01	1.25	0.717	5.31	1.25	0.62
142	13.61	1.25	0.62	13.22	1.25	0.42	2.87	1.25	0.62

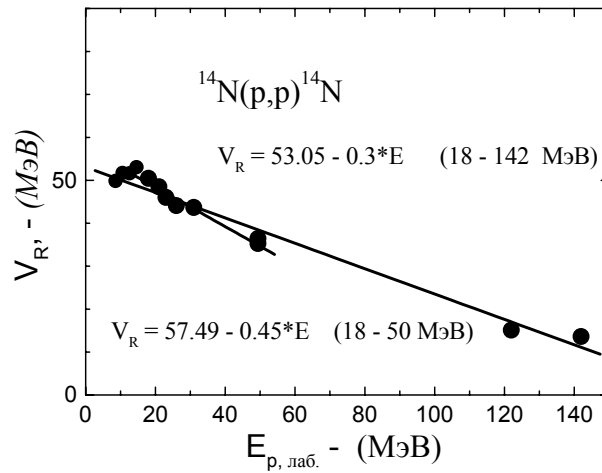


Рисунок 1. Энергетическая зависимость действительной части оптического потенциала упругого рассеяния протонов на ядрах  $^{14}\text{N}$ . Точки – результаты анализа по оптической модели. Короткая линия – результат экстраполяции для низкоэнергетического интервала. Длинная линия - результат экстраполяции для всего энергетического интервала.

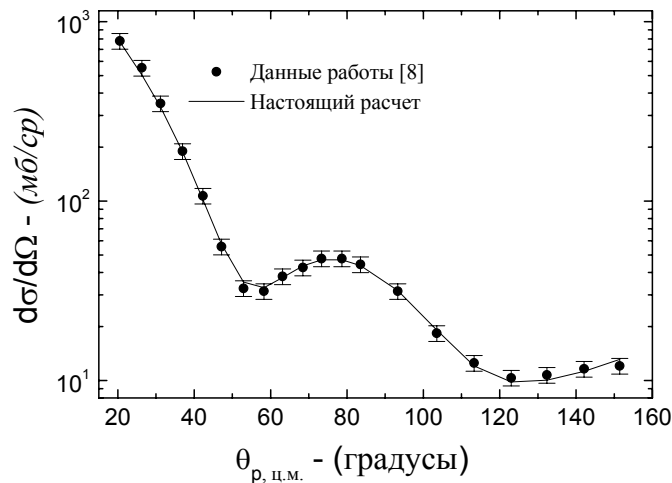


Рисунок 2 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния протонов на ядрах  $^{14}\text{N}$  при  $E_{p, \text{лаб.}} = 18$  МэВ (даны в форме углового распределения).

Таблица 2 – Параметры оптического потенциала, полученные в результате анализа наших экспериментальных данных по упругому рассеянию  $^{14}\text{N}(p,p)^{14}\text{N}$ . Обозначения как в работах [1, 2]

Энергия протонов, кэВ	$V_0$ , (MeV)	$r_0$ , (fm)	$a_0$ , (fm)	$W_0$ , (MeV)	$r_w$ , (fm)	$a_w$ , (fm)
700	40	1.09	0.6	2.0	0.95	0.6
800	40	1.09	0.6	2.0	0.95	0.6
900	40	1.094	0.6	2.0	0.95	0.6
1000	35	1.2	0.6	2.0	0.95	0.6
1100	35	1.188	0.6	2.0	0.95	0.6

На втором этапе параметры потенциала, которые хорошо описали дифференциальные сечения при энергии  $E_{p, \text{лаб.}} = 18$  МэВ были взяты в качестве стартовых для определения параметров для энергий  $E_{p, \text{лаб.}} = 700 - 1100$  кэВ. В результате нами получены оптимальные параметры также и для  $E_{p, \text{лаб.}} = 700, 800, 900, 1000$  и  $1100$  кэВ, которые приведены в таблице 2. На рисунке 3 представлено

описание дифференциальных сечений процесса  $^{14}\text{N}(p,p)^{14}\text{N}$  при низких энергиях по оптической модели с параметрами потенциала, взятыми из таблицы 2. Из рисунка видно хорошее согласие эксперимента с расчетом.

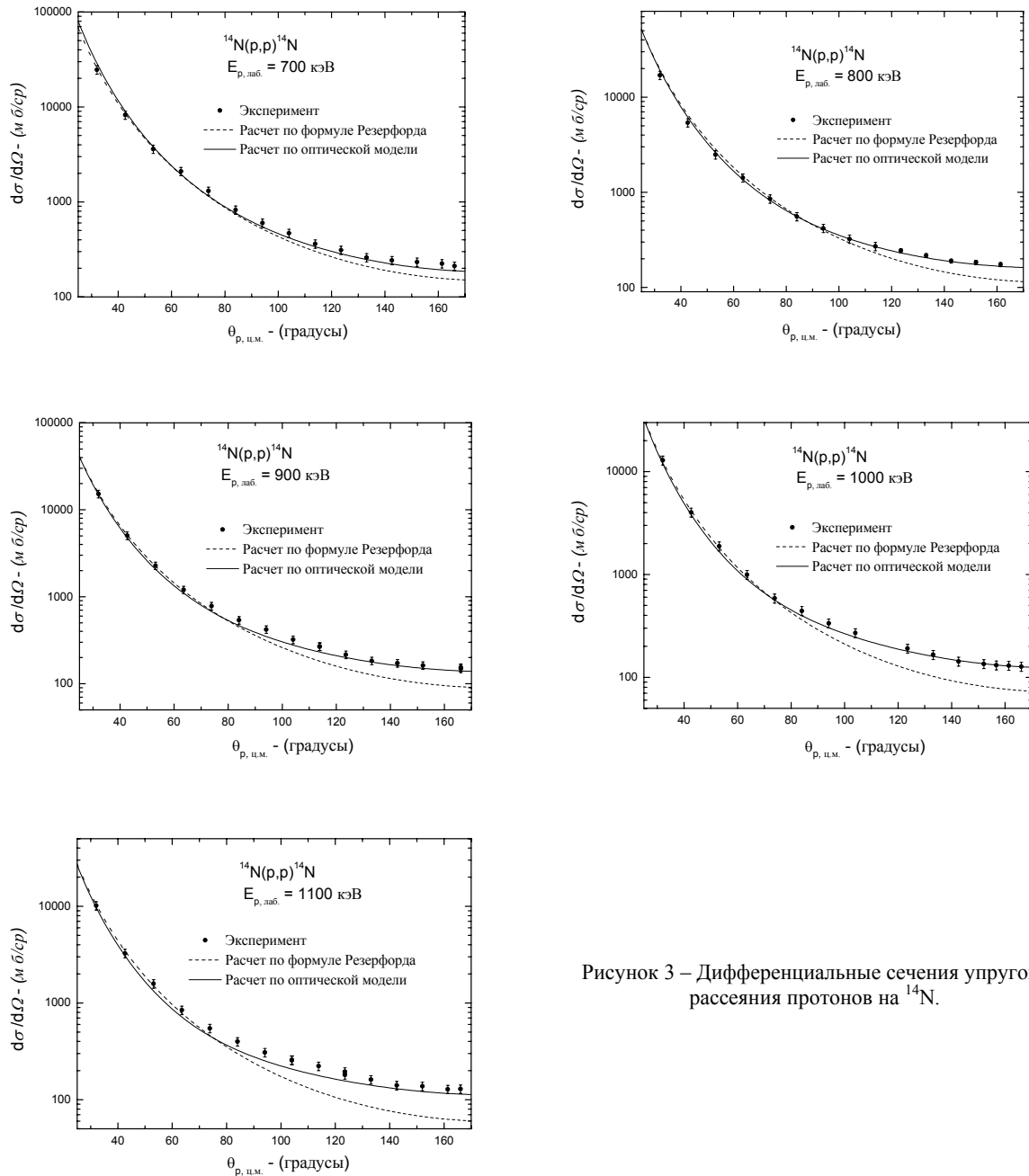


Рисунок 3 – Дифференциальные сечения упругого рассеяния протонов на  $^{14}\text{N}$ .

**Заключение.** В энергетическом диапазоне  $E_{p, \text{лаб.}} = 0.7 - 142$  МэВ получены оптимальные параметры оптического потенциала для системы  $p - ^{14}\text{N}$ . При изучении энергетической зависимости глубины реальной части оптического потенциала  $p - ^{14}\text{N}$  взаимодействия установлено, что линейная аппроксимация этой зависимости для диапазона  $0 - 20$  МэВ оказывается невозможной. Возможно, этот факт связан с существенным вкладом в  $p - ^{14}\text{N}$  рассеяние хвостов резонансов, расположенных в низкоэнергетической области. Этим, так же объясняется то, что параметры оптического потенциала в области сверхнизких энергий отличаются от параметров, полученных для интервала энергий налетающих протонов от 8.6 до 142 МэВ.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке программы развития атомной энергетики в Республике Казахстан по теме: получение экспериментальных и расчетных сечений ядерных реакций, выходов осколков деления на ускорительном комплексе ИЯФ МЭ РК.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] G.R. Satchler. Direct Nuclear Reactions. // New York-Oxford. - 1983.-177P.
- [2] П.Е. Ходгсон. Оптическая модель упругого рассеяния // М. Атомиздат. - 1966. - 232С.
- [3] F.D. Becchetti, Jr. and G.W. Greenlees. // Phys. Rev. – 1969. - Vol.182. - P.1190-1209.
- [4] E. Fabrici, et al. // Phys. Rev. C. – 1980. - Vol.21. - P.830-843.
- [5] L.F. Hansen, et al. // Phys. Rev. C. – 1973. - Vol.8. - P.2072-2088.
- [6] H.F. Lutz, D.W. Heikkinen and W. Bartolini. // Nucl. Phys. A. – 1972. - Vol.198. - P.257-267.
- [7] C.C. Kim, et al. // Nucl. Phys. – 1964. – Vol.58. - P.32-48.
- [8] P.F. Bertone, et al. // Phys. Rev. C. – 2002. - Vol.66. – 055804, P.1-7.

#### REFERENCES

- [1] G.R. Satchler. Direct Nuclear Reactions. // New York-Oxford. - 1983.-177P.
- [2] P.E. Hodgson. Opticheskaya model uprugogo rasseyaniya // M. Atomizdat. - 1966. – 232 S.
- [3] F.D. Becchetti, Jr. and G.W. Greenlees. // Phys. Rev. – 1969. - Vol.182. - P.1190-1209.
- [4] E. Fabrici, et al. // Phys. Rev. C. – 1980. - Vol.21. - P.830-843.
- [5] L.F. Hansen, et al. // Phys. Rev. C. – 1973. - Vol.8. - P.2072-2088.
- [6] H.F. Lutz, D.W. Heikkinen and W. Bartolini. // Nucl. Phys. A. – 1972. - Vol.198. - P.257-267.
- [7] C.C. Kim, et al. // Nucl. Phys. – 1964. – Vol.58. - P.32-48.
- [8] P.F. Bertone, et al. // Phys. Rev. C. – 2002. - Vol.66. – 055804, P.1-7.

**Н. Буртебаев<sup>1,2</sup>, Д. Алимов<sup>1,2</sup>, Д.М. Зазулин<sup>1,2</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1,2</sup>, А.В. Юшков<sup>2</sup>,  
Д.М. Джансейтов<sup>1</sup>, Е. Мухамеджанов<sup>1,2</sup>, М. Насрулла<sup>1,2</sup>.**

<sup>1</sup>Ядерной физика институты, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан

#### **ТӨМЕНГІ ЭНЕРГИЯЛЫ ПРОТОНДАРДЫҢ <sup>14</sup>N ЯДРОСЫМЕН ӘСЕРЛЕСУ ПОТЕНЦИАЛ ПАРАМЕТРЛЕРІН АНЫҚТАУ**

**Аннотация.** Протондардың <sup>14</sup>N ядросынан серпімді шашырауы бойынша әдебиеттік мәліметтерге шолу жасалында және мәліметтер оптикалық үлгі төңірегінде талданды. Осы нәтижелер мен талдаулар негізінде, төменгі энергиялардағы <sup>14</sup>N(p,p)<sup>14</sup>N процессі бойынша алынған эксперименттік кималар үшін оптикалық потенциалдардың оптималды параметрлері табылды. Табылған параметрлер гибридті ядролық реакторларда және термоядролық қондырғыларда жүретін процестерді есептеуде үлкен құндылыққа ие болып табылады.

**Тірек сөздер:** серпімді шашырау, зарядталған жеңіл бөлшектер, диффузность, оптикалық потенциал, FRESKO.

#### **Данные авторов:**

Буртебаев Насрулла - профессор, д.ф.м.н., зам. директора института ядерной физики, Алматы, Казахстан, e-mail: [nburtebayev@yandex.ru](mailto:nburtebayev@yandex.ru)

Алимов Дилшод – e-mail: [diliyo@mail.ru](mailto:diliyo@mail.ru), моб. тел: +77073006494

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 109 – 114

N. Burtebayev<sup>1</sup>, Zh.K. Kerimkulov<sup>1,3</sup>, N. Amangeldi<sup>3</sup>, D.K. Alimov<sup>1,2</sup>,  
Y.S. Mukhamejanov<sup>2</sup>, D.M. Janseitov<sup>3</sup>, B. Mauey<sup>3</sup>, A. Aymaganbetov<sup>3</sup>,  
A. Kurakhmedov<sup>3</sup>, S.M. Bekbaev<sup>4</sup>, A.Zh. Madiyarova<sup>4</sup>

<sup>1</sup>INP, Almaty, Kazakhstan; <sup>2</sup>KazNU, Almaty, Kazakhstan; <sup>3</sup>ENU, Astana, Kazakhstan;

<sup>4</sup>IKTY, Turkestan, Kazakhstan

e-mail: [Diliyo@mail.ru](mailto:Diliyo@mail.ru)

## STUDY OF ELASTIC SCATTERING OF $^{14}\text{N}$ IONS FROM $^{16}\text{O}$ AT ENERGIES 17,5 AND 41 MeV

**Abstract.** Differential cross sections of elastic scattering of  $^{14}\text{N}$  ions from  $^{16}\text{O}$  nuclei at an energy of 17.5 MeV in the angular range from  $10^\circ$  to  $160^\circ$  in center of mass system were measured at the DC-60 accelerator. The total error of experimental data does not exceed 10%. Insignificant oscillations of cross sections are observed at medium and large angles. Analysis of the obtained and literature data (at energy 41 MeV) was made with in the optical model and folding model. The optimal values of the optical interaction potential and normalization coefficients for the studied systems were determined. It is shown that the cross sections calculated within both approaches correlate and provide a good description of the experiment in the full angular range.

**Keywords:** elastic scattering, light charged particles, diffuseness, optical potential, FRESCO, folding potential, cluster transfer.

УДК 539.171.016

Н. Буртебаев<sup>1</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1,3</sup>, Н.Амангелді<sup>3</sup>, Д.К. Алимов<sup>1,2</sup>,  
Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>3</sup>, Б. Мауей<sup>3</sup>, А. Аймаганбетов<sup>3</sup>,  
А.Е. Курахмедов<sup>3</sup>, С.М. Бекбаев<sup>4</sup>, А.Ж. Мадиярова<sup>4</sup>

<sup>1</sup>ИЯФ, Алматы, Казахстан; <sup>2</sup>КазНУ, Алматы, Казахстан; <sup>3</sup>ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, МКТУ  
им. А.Ясави, Туркестан, Казахстан

## ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ИОНОВ $^{14}\text{N}$ НА ЯДРАХ $^{16}\text{O}$ ПРИ ЭНЕРГИЯХ 17,5 И 41 МэВ

**Аннотация.** На ускорителе ДЦ-60 измерены дифференциальные сечения упругого рассеяния ионов  $^{14}\text{N}$  на ядрах  $^{16}\text{O}$  при энергии 17,5 МэВ в угловом диапазоне от  $20^\circ$  до  $160^\circ$  в системе центра масс. Полная погрешность экспериментальных данных не превышает 10%. В области средних и больших углов наблюдаются незначительные осцилляции сечений. Проведен анализ полученных и литературных данных (при энергии 41 МэВ) в рамках оптической модели ядра и фолдинг модели. Найдены оптимальные, физически разумные значения параметров оптического потенциала взаимодействия и нормировочных коэффициентов для исследованных систем. Показано, что сечения вычисленные в рамках обоих подходов коррелируют между собой и дают хорошее описание эксперимента в полном угловом диапазоне.

**Ключевые слова:** упругое рассеяние, легкие заряженные частицы, диффузность, оптический потенциал, FRESCO, фолдинг потенциал, передача кластера.

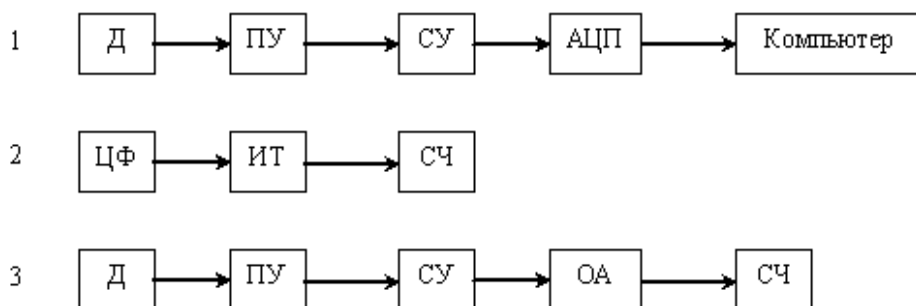
**Введение.** Актуальным направлением исследований ядерной астрофизики продолжают оставаться исследования взаимодействия ядер  $1p$ -оболочки, входящих в состав ядерных реакций

CNO-цикла в звездах. Одной из основных проблем современной ядерной физики является определение характеристик ядерно-ядерного взаимодействия. Знание природы формирования и параметров межъядерного потенциала взаимодействия необходимы для расчета сечений всевозможных ядерных реакций и структурных характеристик сталкивающихся ядерных систем. При энергии в диапазоне 0,4-1,75 МэВ/нуклон взаимодействие сравнительно легких ядер, таких как азот и бор, будет происходить вблизи или ниже кулоновского барьера. Кулоновское отталкивание препятствует глубокому перекрыванию сталкивающихся ядер и взаимодействие носит, в основном, поверхностный характер и определяется поведением межъядерного потенциала на расстояниях порядка суммы радиусов сталкивающихся систем. В этих условиях помимо упругого рассеяния доминируют квазиупругие процессы, приводящие к состояниям сравнительно простой структуры без глубокой перестройки ядерных систем. Это могут быть как вращательные и колебательные состояния, возбуждающиеся в неупругом рассеянии, так одночастичные и кластерные состояния, заселяемые в реакциях передачи нуклонов или кластеров.

Таким образом, к настоящему моменту, механизмы формирования сечений упругого рассеяния тяжелых ионов на легких ядрах остаются не полными, противоречивыми и требуют более детальных исследований.

**Экспериментальная методика и результаты измерений.** На ускорителе ДЦ-60 РГП ИЯФ РК (г. Астана) измерены дифференциальные сечения упругого рассеяния ионов  $^{14}\text{N}$  на ядрах  $^{11}\text{B}$  при энергии 17,5 МэВ в интервале углов  $20^\circ$ - $160^\circ$  в системе центра масс.

В эксперименте в качестве мишеней использовались тонкие самоподдерживающиеся пленки  $^{11}\text{B}$  толщиной 30-100 мкг/см<sup>2</sup>, изготовленные вакуумным электронно-лучевым напылением. Частицы регистрировались кремниевым поверхностно-барьерным детектором толщиной 200 мкм. Ток пучка варьировался в пределах 1 – 100 нА, в зависимости от угла рассеяния и загрузки электронной аппаратуры. Спектры набирались до тех пор, пока статистическая ошибка в пиках становилась меньше 2-3%. Коэффициент просчета, обусловленный мертвым временем электронной аппаратуры, не превышал 1%. Показания монитора показали, что толщина мишени не менялась и углеродный нагар не увеличивался. Энергия пучка была стабильна и разброс ее не превышал 0,2 кэВ. Все измерения проводились на измерительно-вычислительном комплексе лаборатории ядерной физики Астанинского филиала ИЯФ, основой которого служит система многомерного анализа процессов на базе электронных блоков ORTEC и PC/AT [1]. На рисунке 1 представлена блок-схема электронной аппаратуры, использованной в эксперименте. Она включает в себя три измерительных линейки из которых первая предназначена для измерения рассеянных ионов, вторая – для измерения полного количества ионов прошедших через мишень и третья (монитор) – для контроля изменения толщины мишени.



Д – детекторы (ORTEC и Дубна), ПУ – предварительные усилители (ORTEC), СУ – спектрометрические усилители (ORTEC 571 и ORTEC 471), АЦП – амплитудно-цифровые преобразователи (ORTEC), ЦФ – цилиндр Фарадея, СЧ – счетчики (CANBERA и ORTEC), ИТ – интегратор тока (ORTEC), ОА - одноканальный анализатор  
Рисунок 1 – Блок-схема электроники, использовавшейся в эксперименте

На рисунке 2 представлен спектр рассеяния ионов  $^{14}\text{N}$  на ядрах  $^{11}\text{B}$  при угле 30 градусов.

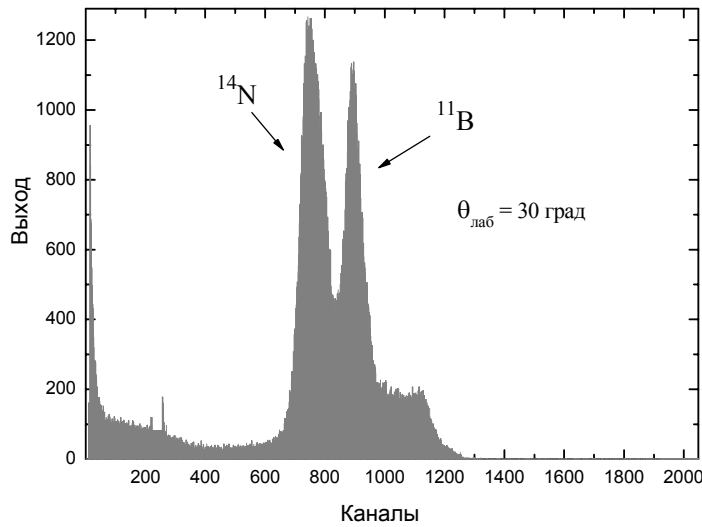


Рисунок 2 – Спектр упругого рассеяния ионов  $^{14}\text{N}$  на ядрах  $^{11}\text{B}$  при угле 30 градусов

#### Анализ и обсуждение результатов.

Одним из наиболее распространенных методов получения информации о взаимодействии сталкивающихся ядер является оптическая модель [2]. Несмотря на неоднозначность выбора набора параметров ядерного потенциала модель достаточно хорошо описывает экспериментальные данные угловых распределений.

В основе оптической модели лежит уравнение Шредингера для частицы, движущейся в поле  $U(\mathbf{r})$ :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

где  $\mu = \frac{A_p A_t}{A_p + A_t}$  – приведенная масса.  $A_t$  и  $A_p$  – массовые числа ядра-мишени и ядра-снаряда

соответственно.  $E$  – энергия относительного движения в системе центра масс. Асимптотическое поведение решения данного уравнения  $\psi(\mathbf{r})$  с соответствующими граничными условиями описывает упругое рассеяние частиц. Для простоты расчетов зависимость от спинов частиц не учитывается. Предполагается, что взаимодействующие ядра остаются в основных состояниях.

Как правило, ограничиваются рассмотрением сферически симметричных потенциалов. Обычно действительная часть потенциала выражается или через потенциалы свертки, или в форме Вудса-Саксона со свободными параметрами. Результат феноменологического анализа в большей степени предопределен выбором радиальной зависимости потенциала:

$$U(r) = V_C(r) - Vf_V(r) - iWf_W(r) + i4W_d \frac{d}{dx_d} f_d(r) \quad (2)$$

Кулоновская компонента потенциала  $V_C(r)$  определяется как взаимодействие точечного заряда  $Z_p e$  с однородно заряженной сферой, имеющей заряд  $Z_t e$  и радиус  $R_C$ , и берется в виде:

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Z_p Z_t e^2}{2R_C} (3 - r^2 / R_C^2) & \text{для } r \leq R_C \\ \frac{Z_p Z_t e^2}{r} & \text{для } r \geq R_C \end{cases} \quad (3)$$

где  $Z_p$  и  $Z_t$  – зарядовые числа ядра-снаряда и ядра-мишени соответственно. Кулоновский радиус определяется среднеквадратичными зарядовыми радиусами ядра-снаряда  $\langle r^2 \rangle_p$  и ядра-мишени  $\langle r^2 \rangle_t$ :

$$R_c \approx \left[ \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle_p \right]^{1/2} + \left[ \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle_t \right]^{1/2} \quad (4)$$

Следующие три слагаемых в выражении (2) определяют ядерный потенциал:  $V$ ,  $W$ ,  $W_d$  – глубины действительной и мнимых частей соответственно ядерного потенциала типа Вудса-Саксона.  $W$  – мнимая часть потенциала, определяющая объемное поглощение,  $W_d$  – мнимая часть потенциала, описывающая поверхностное поглощение. Геометрический фактор ядерного потенциала –  $f_{V,W,d}(r) = (1 + e^{-a_{V,W,d}(r-R_{V,W,d})})^{-1}$ .  $a_{V,W,d}$  – параметры диффузности, характеризующие размытость потенциала.  $R_{V,W,d}$  – радиусы действительной и мнимых частей потенциала, выражающиеся через приведенные радиусы  $r_{V,W,d}$  и массы сталкивающихся ядер  $A_p^{1/3}$  и  $A_t^{1/3}$ :

$$R_{V,W,d} = r_{V,W,d} (A_p^{1/3} + A_t^{1/3}) \quad (5)$$

В данной работе используется ядерный потенциал только с объемным поглощением.

В анализ включены экспериментальные данные полученные в настоящей работе и данные из работы [3] при энергии  $E_{14N} = 41$  МэВ. Теоретические расчеты выполнялись по программе SPI-GENOA [4]. Параметры ОП подбирались таким образом, чтобы достичь наилучшего согласия между теоретическими и экспериментальными угловыми распределениями. Автоматический поиск оптимальных параметров ОП производился путем минимизации величины  $\chi^2/N$  методом наименьших квадратов. В качестве исходных, были взяты параметры потенциала, предложенные в работе [5]. Для уменьшения неоднозначности мы старались не уходить далеко от рекомендованных значений геометрических параметров ( $r_V$ ,  $a_V$ ) реального потенциала. Для лучшего согласия с экспериментальными данными глубина мнимой части ( $W_D$ ) лишь незначительно уменьшалась. Окончательные параметры потенциалов приведены в таблице 1.

Феноменологический подход обладает несомненно простотой, наглядностью, удобством применения. Но хорошо известно, что однозначно выбрать параметры оптического потенциала, которые успешно описывают экспериментальные данные в широкой энергетической области различных сталкивающихся ядер – достаточно сложная задача. Поэтому возникают неопределенности (линейная и дискретная неоднозначности) в выборе параметров потенциала взаимодействия.

Для ограничения неоднозначностей оптического потенциала дополнительно был проведен анализ в рамках фолдинг модели. Потенциал двойной свертки (фолдинг потенциал) рассчитывается с учетом распределения ядерной материи как налетающего ядра, так и ядра мишени с использованием эффективного потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия ( $v_{NN}$ ). Таким образом, фолдинг потенциал представляется в виде:

$$V_{DF}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \rho_p(\mathbf{r}_1) \rho_t(\mathbf{r}_2) v_{NN}(\mathbf{r}_{12}) \quad (6)$$

где  $\rho_p(\mathbf{r}_1)$  и  $\rho_t(\mathbf{r}_2)$  – плотности ядерной материи налетающего ядра и ядра мишени, соответственно. Гауссово распределение плотности для обоих ядер определяется как

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-\beta r^2) \quad (7)$$

где  $\beta$  корректируется таким образом, чтобы воспроизвести экспериментальное значение для среднеквадратичного радиуса ядер  $^{14}\text{N} = 2,58$  фм и  $^{11}\text{B} = 2,42$  фм [6]. Значения  $\rho_0$  могут быть получены из нижеследующего условия нормировки

$$\int \rho(r) r^2 dr = \frac{A}{4\pi} \quad (8)$$

где  $A$  массовое число. В расчетах эффективное нуклон-нуклонное ( $v_{NN}$ ) взаимодействие бралось в форме МЗУ-взаимодействия, заданным как

$$v_{NN}(r) = 7999 \frac{\exp(-4r)}{4r} - 2134 \frac{\exp(-2.5r)}{2.5r} + J_{00}(E) \delta(r) \text{ МэВ} \quad (9)$$

где

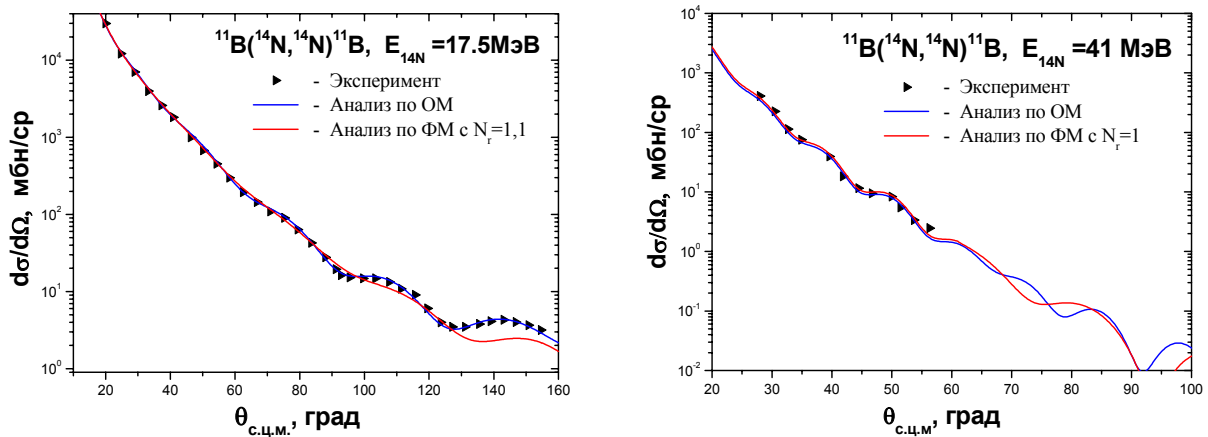


$$J_{00}(E) = 276[1 - 0.005E_{Lab} / A_p] MЭВФм^3 \tag{10}$$

Таблица 1 – Параметры оптического (ОП) и фолдинг потенциала (ФП) для упругого рассеяния ионов <sup>14</sup>N на ядрах <sup>11</sup>B

E, МэВ	Модель	V, МэВ	Γ <sub>v</sub> , фм	a <sub>v</sub> , фм	W <sub>D</sub> , МэВ	Γ <sub>w</sub> , фм	a <sub>w</sub> , фм	J <sub>v</sub> , МэВ фм <sup>3</sup>	J <sub>w</sub> , МэВ фм <sup>3</sup>
17,5	ОП	98,3	1,195	0,59	6	1,195	0,8	494,4	33,5
	ФП								
41	ОП	90,3	1,195	0.72	15,5	1,195	0,8	486,7	86,3
	ФП								

Как видно из таблицы 1, объемные интегралы реальной части (J<sub>v</sub>) найденные нами, находятся в пределах 400 - 500 МэВ фм<sup>3</sup>. На рисунке 3 представлено сравнение экспериментальных данных с теоретически рассчитанными сечениями.



Треугольники – экспериментальные данные, синяя кривая – сечения, вычисленные по оптической модели (ОМ), красная кривая – сечения, рассчитанные по фолдинг модели (ФМ)

Рисунок 3 – Угловые распределения упругого рассеяния <sup>14</sup>N на ядрах <sup>11</sup>B при энергиях 17,5 и 41 МэВ.

Оптимальное согласие теории с экспериментом достигалось варьированием нормировочного коэффициента *N* вещественной части и параметров мнимой части, найденных из анализа в рамках оптической модели (таблица 1). Отличие *N* от единицы может свидетельствовать о вкладе членов второго порядка по эффективным силам в реальную часть оптического потенциала. Анализ проводился с использованием программы FRESKO [7]. Найденные параметры фолдинг потенциала и значения *N* представлены в таблице-1.

**Заключение.** Проведены эксперименты по упругому рассеянию ионов азота на ядрах <sup>11</sup>B при энергии E<sub>14N</sub> = 17,5 МэВ в диапазоне углов от 20 до 160 градусов в системе центра масс. Погрешность полученных данных не превышала 10 процентов. Дифференциальные сечения в диапазоне углов до 90 градусов плавно спадают. В области больших углов наблюдаются незначительные осцилляции сечений.

Из анализа экспериментальных данных в рамках оптической модели ядра и фолдинг модели найдены оптимальные, физически-разумные параметры оптического потенциала и фолдинг потенциала взаимодействия. Показано что сечения, вычисленные в рамках этих двух подходов коррелируют между собой и дают хорошее описание эксперимента в полном угловом диапазоне без включения в анализ обменных механизмов. Это указывает на то, что сечения здесь формирует чисто потенциальное рассеяние.

Полученные экспериментальные и теоретические данные найдут применение при исследовании процессов, протекающих в звездах, при разработке новых теоретических моделей в ядерной

физике, а также будут полезны для характеристики процессов происходящих в высокотемпературной плазме термоядерных реакторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буртебаев Н.Т., Виноградов А.А., Вонгай А.Д., Дуйсебаев А.Д., Курашов А.А., Мазуров И.Б., Парамонов В.В., Прокофьев С.И., Сакута С.Б., Санычев В.И., Сытин Н.П., Чесалов А.А., Чуев В.И. Система многомерного анализа для исследования ядерных реакций на циклотроне ИЯФ АН КазССР // Известия АН КазССР, Серия физико-математическая. – 1975. – №2. – С. 65-68.
- [2] Hodgson P.E. The nuclear optical model // Report of Progress in Physics. – 1971. – V.34. – P.765-819.
- [3] Lui M., Von Oertzen W., Jacmart J.C., Pougheon F., Riou M., Roynette J.C., Stephan C. Investigation of one-nucleon transfer reactions between complex nuclei at incident energies between 3 MeV/nucleon and 8 MeV/nucleon // Nucl. Phys. A. – 1971. – Vol.165. –P.118-128.
- [4] Nilsson B.S. SPI-GENUA an Optical Model Search code. – Niels Bohr Institute Computer Program Library. – 1975. – 112 p.
- [5] Satchler G.R., Love W.G. Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering // Physics Reports. – 1979, - Vol. 55, - Issue 3, - P. 183-254.
- [6] De Vries H., De Jager C.W., De Vries C. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // Atomic Data and Nuclear Data Tables. – 1987, – Vol. 36, - Issue 3, - P. 495-53.
- [7] Thompson Ian J. Coupled reaction channels calculations in nuclear physics // Comput. Phys. Rep. – 1988. – Vol. 7. – P. 167-212.

#### REFERENCES

- [1] Burtebayev N.T., Vinogradov A.A., Vongay A.D., Duisebayev A.D., Kurashov A.A., Mazurov I.B., Paramanov V.V., Prokovev S.I., Sakuta S.B., Sanichev V.I., Sytin N.P., Chesalov A.A., Chuev V.I. Sistema mnogomernogo analiza dlya issledovaniya yadernih reaktsiy na siklotrone INP ANH KazSSR // Izvestiya AN KazSSR, Seriya fiziko-matematicheskaya. 1975. – №2. – S.65-68.
- [2] Hodgson P.E. The nuclear optical model // Report of Progress in Physics. 1971. V.34. P.765-819.
- [3] Lui M., Von Oertzen W., Jacmart J.C., Pougheon F., Riou M., Roynette J.C., Stephan C. Investigation of one-nucleon transfer reactions between complex nuclei at incident energies between 3 MeV/nucleon and 8 MeV/nucleon // Nucl. Phys. A. 1971. Vol.165. P.118-128.
- [4] Nilsson B.S. SPI-GENUA an Optical Model Search code. – Niels Bohr Institute Computer Program Library. 1975. 112 p.
- [5] Satchler G.R., Love W.G. Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering // Physics Reports. 1979, Vol. 55, Issue 3, P. 183-254.
- [6] De Vries H., De Jager C.W., De Vries C. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1987, Vol. 36, Issue 3, P. 495-53.
- [7] Thompson Ian J. Coupled reaction channels calculations in nuclear physics // Comput. Phys. Rep. 1988, Vol. 7, P. 167-212.

**Н. Буртебаев<sup>1,3</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1,3</sup>, Н.Амангелді<sup>3</sup>, Д.К. Алимов<sup>1,2</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>3</sup>,  
Б. Мауей<sup>3</sup>, А. Аймаганбетов<sup>3</sup>, А.Е. Курахмедов<sup>3</sup>, С.М. Бекбаев<sup>4</sup>, А.Ж. Мадиярова<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>ЯФИ, Алматы, Қазақстан, <sup>2</sup>эл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан, <sup>3</sup>Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан, <sup>4</sup>А.Ясави атындағы ХҚТУ, Түркістан, Қазақстан

#### 17,5 ЖӘНЕ 41 МэВ ЭНЕРГИЯЛАРДА <sup>11</sup>В ЯДРОЛАРЫНАН <sup>14</sup>N ИОНДАРЫНЫҢ СЕРПІМДІ ШАШЫРАУЫН ЗЕРТТЕУ

**Аннотация.** Массалар центрі жүйесінде 20° – 160° бұрыштық диапазондарда 17,5 МэВ энергиялы <sup>14</sup>N иондарының <sup>11</sup>В ядроларынан серпімді шашырауының дифференциалдық кимасы ДЦ-60 үдеткішінде өлшенді. Өлшемдемдер 10%-дан аспайтындай қателіктен өлшенді. Орташа және үлкен бұрыштарда кима осцилляциясы байқалады. Ядроның фолдинг және оптикалық үлгі төңірегінде әдебиеттік (41 МэВ) және алынған мәліметтерге талдау жасалынды. Зерттелген жүйелер үшін нормалау коэффициенті және оптика-лық әсерлесу потенциал параметрлерінің оптималды физикалық мәндері анықталды. Екі үлгі бойынша жасалынған есептеулер толық бұрыштық диапозондарда эксперименттік мәліметтерді жақсы сипаттайды.

**Тірек сөздер:** серпімді шашырау, зарядталған жеңіл бөлшектер, диффузность, оптикалық потенциал, FRESKO, фолдинг потенциал, кластерлік алмасу.

#### Сведения об авторах:

Буртебаев Нассурлла - профессор, д.ф.м.н., зам. директора института ядерной физики, Алматы, Казахстан, e-mail: [nburtebayev@yandex.ru](mailto:nburtebayev@yandex.ru);

Алимов Дилшод – e-mail: [diliyo@mail.ru](mailto:diliyo@mail.ru), моб. тел: +77073006494

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 115 – 120

UDC 517.956.29

**U.A. Iskakova, B.T. Torebek**Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan  
torebek@math.kz**CERTAIN METHOD OF SOLVING ILL-POSED CAUCHY-ROBIN  
PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR**

**Abstract.** In this paper we consider the Robin-Cauchy problem for Laplace equations in a cylindrical domain. The method of spectral expansion in eigenfunctions of the Robin-Cauchy problem for equations with deviating argument establishes a criterion of the strong solvability of the considered Robin-Cauchy problem. It is shown that the ill-posedness Robin-Cauchy problem is equivalent to the existence of an isolated point of the continuous spectrum for a self-adjoint operator with deviating argument.

**Key words:** Laplace equation, Robin-Cauchy problem, self-adjoint operator, ill-posedness.

УДК 517.956.29

**У.А. Искакова, Б.Т. Торбек**

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Республика Казахстан

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ  
ЗАДАЧИ РОБЕНА-КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА**

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается задача Робена-Коши для уравнения Лапласа в цилиндрической области. Методом спектрального разложения по собственным функциям задачи Робена-Коши для уравнения с отклоняющимся аргументом, установлен критерий сильной разрешимости рассматриваемой задачи Робена-Коши. Показывается, что некорректность задачи Робена-Коши оказывается эквивалентной существованию изолированной точки непрерывного спектра для самосопряженного оператора с отклоняющимся аргументом.

**Ключевые слова:** уравнение Лапласа, задача Робена-Коши, самосопряженный оператор, некорректность.

**1. Введение и основной результат.**

Как известно, Ж. Адамаром [1] был построен пример, показывающий неустойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа. В [2], [3] и других, эта задача Коши сведена к интегральным уравнениям первого рода, и даны различные методы регуляризации задачи и установлена ее условная корректность.

В отличие от приведенных результатов, в настоящей работе обосновывается новый критерий корректности (некорректности) начально-краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в трехмерном цилиндре. Принципиальное отличие нашей работы от работ других авторов заключается в применении спектральных задач для уравнений с отклоняющимся аргументом при исследовании некорректных краевых задач. Данный метод впервые применялась в [4] к решению задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа.

Пусть  $D = (0,1) \times \Omega$  - цилиндр,  $\Omega \subset R^n, n > 1$  - ограниченная область с границей  $S$ .

В  $D$  рассмотрим смешанную задачу Коши для эллиптического уравнения

$$Lu \equiv u_{xx}(x,t) + \Delta u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in D, \quad (1)$$

с условиями Робена 
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \alpha u(x, t) = 0, x \in S, t \in [0, 1], \quad (2)$$

( $\nu$  – вектор внешней нормали к  $S$ ) и Коши

$$u(0, x) = u_t(0, x) = 0, x \in \Omega \cup S. \quad (3)$$

Здесь  $\alpha \geq 0$  – действительное число.

**Определение.** Функцию  $u \in L_2(D)$  назовем сильным решением смешанной задачи Робена-Коши (1)-(3), если существует такая последовательность функций  $u_n \in C^2(\bar{D})$ , удовлетворяющих условиям (2) и (3), и таких, что  $u_n$  и  $Lu_n$  сходятся в норме  $L_2(D)$  соответственно к  $u(x, t)$  и  $f(x, t)$ .

В дальнейшем важную роль будет играть следующая задача на собственные значения для эллиптического уравнения с отклоняющимся аргументом.

Найти числовые значения  $\lambda$  (собственные значения), при которых задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) + \Delta u(x, t) = \lambda u(x, 1-t), (x, t) \in D, \quad (4)$$

имеет ненулевые решения (собственные функции), удовлетворяющие условиям (2) и (3).

Очевидно, что эквивалентная запись уравнения (4) имеет вид  $LPu = \lambda u, (t, x) \in D$ , где  $Pu(x, t) = u(x, 1-t)$  – унитарный оператор.

Рассмотрим следующую спектральную задачу Робена для оператора Лапласа

$$-\Delta u_k(x) = \mu_k u_k(x), x \in \Omega, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x) + \alpha u_k(x) = 0, x \in S. \quad (6)$$

Известно, что задача (5)-(6) является самосопряженным, неотрицательно определенным оператором в  $L_2(\Omega)$ . Все собственные значения задачи (5)-(6) неотрицательны и дискретны, а система всех собственных функций образуют полную ортонормированную систему в  $L_2(\Omega)$ . Пусть  $\mu_k$  – все собственные значения (занумерованные в порядке неубывания), а  $u_k(x), k \in N$  – полная система всех ортонормированных собственных функций спектральной задачи (5)-(6).

**Теорема 1.1** Спектральная задача Коши (4), (3) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов

$$u_{km}(x, t) = u_k(x) \cdot v_{km}(t), \quad (7)$$

где  $k, m \in N$ ,  $v_{km}(t)$  – ненулевые решения задачи

$$v_{km}''(t) - \mu_k v_{km}(t) = \lambda_{km} v_{km}(1-t), 0 < t < 1, v_{km}(0) = v_{km}'(0) = 0, \quad (8)$$

а  $\lambda_{km}$  – собственные значения задачи (4), (3). При этом для больших  $k$  наименьшее собственное значение  $\lambda_{k1}$  имеет асимптотику

$$\lambda_{k1} = 4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}} (1 + o(1)). \quad (9)$$

**Теорема 1.2** Сильное решение смешанной задачи Коши (1) – (3) существует тогда и только тогда, когда  $f(x, t)$  удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} \right|^2 < \infty, \quad (10)$$

где  $\tilde{f}_{km} = (f(x, 1-t), u_{km}(x, t))$ .

Если выполняется условия (10), то решение задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x, t). \quad (11)$$

Обозначим через  $\tilde{L}_2(D)$  подпространство  $L_2(D)$ , натянутое на собственные вектора  $\{u_{k1}(x, t)\}_{k=p+1}^{\infty}$ ,  $p \in N$  а через  $\tilde{E}_2(D)$  – его ортогональное дополнение  $L_2(D) = \tilde{L}_2(D) \oplus \tilde{E}_2(D)$ .

**Теорема 1.3.** Для любого  $f \in \mathcal{E}_2(D)$  решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит  $\mathcal{E}_2(D)$ . Это решение устойчиво и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^p \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x,t). \tag{12}$$

**3. Some auxiliary statements**

В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения для доказательства основных результатов.

**Лемма 1.1** При каждом фиксированном значении индекса  $k$  спектральная задача (8) имеет полную ортонормированную в  $L_2(0,1)$  систему собственных векторов  $v_{km}(t)$ ,  $m=1,2,\dots$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_{km}$ . Эти собственные значения  $\lambda_{km}$  являются корнями уравнения

$$\sqrt{\mu_k - \lambda} ch \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} ch \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} - \sqrt{\mu_k + \lambda} sh \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} sh \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} = 0. \tag{13}$$

**Доказательство.** Действительно, применяя к задаче Коши (8) обратный оператор  $L_C^{-1}$  приходим к операторному уравнению

$$v_{km}(t) = \lambda L_C^{-1} P v_{km}(t),$$

где  $Pf(t) = f(1-t)$ , а функция  $\phi(t) = L_C^{-1} f(t)$  является решением задачи Коши

$$\phi''(t) - \mu_k \phi(t) = f(t), \phi(0) = \phi'(0) = 0, \forall f(t) \in L_2(0,1).$$

Тогда для оператора  $L_C^{-1}$  имеем представление

$$L_C^{-1} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \int_0^t f(\xi) sh \sqrt{\mu_k} (t - \xi) d\xi, \forall f(t) \in L_2(0,1). \tag{14}$$

Следовательно, сопряженный оператор имеет вид

$$(L_C^{-1})^* f(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \int_t^1 f(\xi) sh \sqrt{\mu_k} (\xi - t) d\xi, \forall f(t) \in L_2(0,1). \tag{15}$$

Учитывая представления (14) и (15), нетрудно убедиться, что  $L_C^{-1} P f = P (L_C^{-1})^* f$ .

Тогда цепочка равенств  $L_C^{-1} P f = P (L_C^{-1})^* f = P^* (L_C^{-1})^* f = (L_C^{-1} P)^* f, \forall f(t) \in L_2(0,1)$ , позволяет заключить, что оператор  $L_C^{-1} P$  является вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта-Шмидта [5]. Следовательно при каждом  $k=1,2,\dots$ , спектральная задача (8)-(6) имеет полную ортонормированную систему функций  $v_{km}(t)$ ,  $m=1,2,\dots$  в  $L_2(0,1)$ .

Собственные функции задачи (4), (3) ищем методом разделения переменных в виде

$$u_k(x,t) = u_k(x)v(t),$$

где  $k \in N$ . Тогда для определения неизвестной функции  $v(t)$  имеем спектральную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом (8).

Нетрудно показать, что общее решение уравнения из (8) имеет вид

$$v(t) = c_1 ch \sqrt{\mu_k + \lambda} \left( t - \frac{1}{2} \right) + c_2 sh \sqrt{\mu_k - \lambda} \left( t - \frac{1}{2} \right),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые постоянные.

Используя начальные условия в (8), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно этих постоянных. Как известно, чтобы эта система имела нетривиальное решение, выражение (13) должен равняться нулю. Таким образом, для определения параметра  $\lambda$  имеем (13).

Лемма 1.1 доказана полностью.

Пусть

$$\varpi_k(\lambda) = \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} \right) + \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\mu_k + \lambda}{\mu_k - \lambda} \right) = 0. \quad (16)$$

**Лемма 1.2** Существует число  $\lambda_0$  такое, что при всех

$$0 < \lambda < \lambda_0 < \frac{\mu_k}{4\mu_k + \theta}, k \geq 1, \theta \in (0, 1),$$

справедливы следующие утверждения:

- 1) функция  $\varpi'_k(\lambda)$  сохраняет постоянный знак;
- 2) для функции  $\varpi''_k(\lambda)$  выполняется неравенство  $|\lambda \mu_k \varpi''_k(\lambda)| < 1, k > 1$ .

Доказательство. В силу леммы 1.1 имеем вещественность собственных значений задачи (8) - (6), то есть вещественность корней  $\lambda_{km}$  уравнения (13).

При этом легко проверить, что  $\lambda_{km} > 0$ . Действительно, выпишем асимптотику наименьших собственных значений  $\lambda_{km}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

После нетривиальных преобразований уравнения (13), имеем

$$\frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{\sqrt{\mu_k - \lambda}} = \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2}. \quad (17)$$

Считая  $|\lambda| < 1$  и логарифмируя обе части равенства (17), получаем (16). Вычислив здесь производную, получаем  $\varpi'_k(0) = -\frac{1}{\mu_k}$ . Тогда искомую границу монотонности функции  $\varpi_k(\lambda)$

можно определить из соотношения  $\varpi'_k(\lambda_0) = \varpi'_k(0) + \varpi''_k(\theta \lambda_0) \lambda_0 < 0$ . Здесь  $0 < \lambda_0 < 1$  а  $\theta \in (0, 1)$  - произвольное число. Таким образом, для определения  $\lambda_0$  имеем условие

$$\lambda_0 \mu_k \varpi''_k(\theta \lambda_0) < 1. \quad (18)$$

Распишем явно вторую производную функций  $\varpi_k(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \varpi''_k(\lambda) &= \frac{ch\sqrt{\mu_k + \lambda}}{4(\mu_k + \lambda)sh^2\sqrt{\mu_k + \lambda}} + \frac{ch\sqrt{\mu_k - \lambda}}{4(\mu_k - \lambda)sh^2\sqrt{\mu_k - \lambda}} + \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{(\mu_k + \lambda)^3}sh\sqrt{\mu_k + \lambda}} + \frac{1}{4\sqrt{(\mu_k - \lambda)^3}sh\sqrt{\mu_k - \lambda}} - \frac{2\lambda\mu_k}{(\mu_k^2 - \lambda^2)^2}. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{2\lambda_0\theta\mu_k}{(\mu_k^2 - (\lambda_0\theta)^2)^2} \geq -\frac{1}{(\mu_k + \lambda_0\theta)^2}$  и  $\frac{ch\sqrt{\mu_k \pm \lambda_0\theta}}{sh^2\sqrt{\mu_k \pm \lambda_0\theta}} \leq \frac{1}{ch\sqrt{\mu_k \pm \lambda_0\theta} - 1}$ .

Тогда верно неравенство  $\varpi''_k(\lambda_0\theta) \leq \frac{1}{(\mu_k - \lambda_0\theta)} \frac{2 + (1 - e^{-\sqrt{\mu_k - \lambda_0\theta}})^2}{(1 - e^{-\sqrt{\mu_k - \lambda_0\theta}})^2}$ .

Значит

$$\varpi''_k(\lambda_0\theta) < \frac{1}{(\mu_k - \lambda_0\theta)} \frac{3 - 2e^{-\sqrt{\mu_k - \lambda_0\theta}} + e^{-2\sqrt{\mu_k - \lambda_0\theta}}}{(1 - e^{-\sqrt{\mu_k - \lambda_0\theta}})^2} \quad (19)$$

Далее, при больших значениях  $k$  из (19) получаем справедливость неравенства

$$\varpi''_k(\lambda_0\theta) \leq \frac{4}{\mu_k - \lambda_0\theta}.$$

К последнему применяя условие (18), получим требуемую границу для  $\lambda_0$ :  $\lambda_0 < \frac{\mu_k}{4\mu_k + \theta}, \mu_k > 1, 0 < \theta < 1$ . Лемма 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотике собственных значений задачи (8) при больших  $k$ .

**Лемма 1.3** Асимптотика собственных значений задачи (8), не превосходящих  $\lambda_0$ , при больших  $k$  имеет следующий вид (9).

**Доказательство.** Согласно лемме 1.2, монотонная функция  $f_k(\lambda)$  на интервале  $(0, \lambda_0)$  может иметь только один нуль. По формуле Тейлора имеем

$$\varpi_k(\lambda) = \varpi_k(0) + \frac{\varpi_k'(0)}{1!} \lambda + \frac{\varpi_k''(\theta\lambda)}{2!} \lambda^2 < 0, 0 < \theta < 1.$$

Подставляя вычисленные значения функций и ее производной, получаем

$$\varpi_k(\lambda) = 2 \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\mu_k}}{2} \right) - \frac{\lambda}{\mu_k} + \varpi_k''(\theta\lambda) \frac{\lambda^2}{2}.$$

Тогда нулем линейной части функции  $\mu_k \varpi_k(\lambda) = 2\mu_k \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\sqrt{\mu_k}}{2} \right) - \lambda + \frac{\mu_k \lambda^2}{2} \varpi_k''(\theta\lambda)$  будет  $\lambda_{k1} = 2\mu_k \ln \left( \frac{1+e^{-\sqrt{\mu_k}}}{1-e^{-\sqrt{\mu_k}}} \right)$ . При достаточно больших значениях  $k \in N$ , учитывая асимптотические формулы последнее можно записать в виде  $\lambda_{k1} = 4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}} (1+o(1))$ .

Учитывая результат леммы 1.2, на окружности  $|\lambda| = 4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}} (1+\varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  - сколь угодно малое положительное число, для достаточно больших  $k \geq k_0(\varepsilon)$  легко проверить справедливость неравенства

$$\left| \varpi_k''(\theta\lambda) \mu_k \lambda^2 \right|_{|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}} (1+\varepsilon)} \leq C \left| 2\mu_k \ln \left( \frac{1+e^{-\sqrt{\mu_k}}}{1-e^{-\sqrt{\mu_k}}} \right) - \lambda \right|_{|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}} (1+\varepsilon)}.$$

Тогда по теореме Руше [7] имеем, что количество нулей функции  $\mu_k \varpi_k(\lambda)$  и ее линейной части совпадают и лежат внутри круга  $|\lambda| = 4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}} (1+\varepsilon)$ . Следовательно, функция  $\mu_k \varpi_k(\lambda)$  при  $0 < \lambda < \lambda_0$  имеет один нуль, асимптотика которого задается формулой (9). Лемма 1.3 доказана.

**4. Proof of the main results**

**Доказательство теоремы 1.1.** Через  $u_k(x), k \in N$  мы обозначили полную систему ортонормированных собственных функций задачи (5) в  $L_2(\Omega)$ . В силу леммы 1.1 при каждом фиксированном значении индекса  $k$  спектральная задача (8) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов  $v_{km}(t), m=1,2,\dots$  в  $L_2(0,1)$ . Тогда система (7) образует полную ортогональную систему в  $L_2(D)$ . Следовательно, других собственных значений и собственных функций задача (4), (3) не имеет. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 1.2.** Пусть  $u(x,t) \in C^2(D)$  - решение задачи (1) - (3). Тогда, в силу полноты и ортонормированности собственных функций  $u_{km}(x,t)$  задачи (4), (3), функцию  $u(x,t)$  в пространстве  $L_2(D)$  можно разложить в ряд [6]

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} u_{km}(x,t), \tag{20}$$

где  $a_{km}$  - коэффициенты Фурье по системе  $u_{km}(x,t)$ . Переписав уравнение (1) в виде

$$LPu = P(u_{tt}(x,t) - L_x u(x,t)) = Pf(x,t), \tag{21}$$

и подставив решение вида (20) в равенство (21), с учетом соотношения

$$P \left( \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial t^2}(x,t) - L_x u_{km}(x,t) \right) = \lambda_{km} u_{km}(x,t),$$

имеем  $a_{km} = \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}$ , где  $\tilde{f}_{km} = (f(x,1-t), u_{km}(x,t))$ .

Таким образом, для решения  $u(x, t)$  получим следующее явное представление

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x, t). \quad (22)$$

Отметим, что представление (22) остается справедливым для любого сильного решения задачи (1) - (3). Это представление нами получено в предположении, что решение задачи Коши (1) - (3) существует.

Естественно возникает вопрос, для какого подмножества функций  $f \in L_2(D)$  существует сильное решение? Для ответа на этот вопрос представим формулу (22) в виде (11) из которого, в силу равенства Парсеваля, следует

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left| \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} \right|^2. \quad (23)$$

В силу леммы 1.3 имеем  $\lambda_{km} \geq \frac{1}{4}, m > 1$ . Поэтому правая часть равенства (23) ограничена только для тех  $f(x, t)$ , для которых ограничена весовая норма (10).

Тем самым доказана теорема 1.2.

**Доказательство теоремы 1.3.** Очевидно, что оператор  $L$  является инвариантным в  $\hat{L}_2(D)$ . В силу теоремы 1.2 для любой  $f \in \hat{L}_2(D)$  существует единственное решение задачи (1)-(3) и его можно представить в виде (12).

Таким образом определенное бесконечномерное пространство  $\hat{L}_2(D)$  является пространством корректности задачи Коши (1)-(3). Теорема 1.3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК по проекту № 0820/ГФ4.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hadamard J., Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.
- [2] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. Сер. мат. 1956. Т.20, №6. С.819-842.
- [3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 142 с.
- [4] Кальменов Т.Ш., Исакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады РАН. 2007. Т. 414, № 2. С.168-171.
- [5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [6] Naimark M.A., Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York, 1968.
- [7] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.

#### REFERENCES

- [1] Hadamard J. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.
- [2] Lavrentev M.M. On a Cauchy Problem for the Poisson Equation, //Izvestiya AS USSR, ser. Math., 1955. V.20, №6. P.819-842.
- [3] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solving ill-posed problems. M.: Nauka, 1979. 142 p.
- [4] Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation //Doklady Mathematics. 2007. V.75. №3. P.370-373.
- [5] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1972.
- [6] Naimark M. A.: Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York, 1968.
- [7] Titchmarsh E. The theory of functions. M.: Nauka, 1980.

У.А. Исакова, Б.Т.Төрбек

#### ЛАПЛАС ОПЕРАТОРЫ ҮШІН РОБЕН-КОШИ ҚИСЫНСЫЗ ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ БІР ӘДІСІ ТУРАЛЫ

**Аннотация.** Бұл жұмыста цилиндрлік облыста Лаплас операторы үшін Робен-Коши есебі қарастырылады. Ауытқулы аргументті теңдеу үшін Робен-Коши есебінің меншікті функциялары бойынша спектралды жіктеу әдісі арқылы, қарастырылған Робен-Коши есебінің әлді шешілімділігінің критеріі алынған. Робен-Коши есебінің қисынсыздығы ауытқулы аргументті өз-өзіне түйіндес оператордың үзіліссіз спектрінің оқшауланған нүктелерінің бар болуына пара-пар екендігі көрсетілген.

**Тірек сөздер:** Лаплас теңдеуі, Робен-Коши есебі, өз-өзіне түйіндес оператор, қисынсыздық.



## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 121 – 125

UDC 629.195+531.1

M.D. Shinibaev<sup>1</sup>, A.A. Bekov<sup>1</sup>, S.S. Dairbekov<sup>2</sup>, S.A. Zholdasov<sup>2</sup>,  
G.E. Myrzakasova<sup>2</sup>, D.R. Aliaskarov<sup>2</sup>, S.A. Shekerbekova<sup>2</sup>, A.G. Sadybek<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup> University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan;

E-mail: [shinibaev\\_maxsut@mail.ru](mailto:shinibaev_maxsut@mail.ru)

## A NEW VERSION OF THE PROBLEM OF TWO FIXED CENTERS

**Abstract.** When analyzing the motion of spacecraft we have to build adequate mathematical model of the true nature of the movement [1].

In the case study of a space object movement in near-Earth space is necessary to build a model of the gravitational field of the Earth and the nearest planets.

An attempt in this direction was made in R. Newton [2] who proposed to approximate the field spheroidal planet gravitational force function of the problem of two fixed centers.

Further studies related to the problem of two fixed centers can be found in numerous works of V.G. Demin, V.G. Degtyarev, E.P. Aksenov, E.A. Grebenikov, V.M. Alexeyev and up.

As [3, C.112] it noted, that the approximation of the Earth's potential power function of the problem of two fixed centers is acceptable only for sufficiently distant satellites.

But it seems to us that the power function of the problem of two fixed centers can be approximated by the gravitational field of the Earth and in the case of close associates.

To confirm your ideas, we propose a new version of the problem of two fixed centers.

**Key words:** earth satellite, binomial series, the problem of two fixed centers, the gravitational field, test body, the motion test body.

УДК 629.195+531.1

М.Д. Шинибаев<sup>1</sup>, А.А. Беков<sup>1</sup>, С.С. Даирбеков<sup>2</sup>, С.А. Жолдасов<sup>2</sup>,  
Г.Е. Мырзакасова<sup>2</sup>, Д.Р. Алиаскаров<sup>2</sup>, С.А. Шекербекова<sup>2</sup>, А.Ж. Садыбек<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Национальный центр космических исследований и технологии, г. Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup>Университет Сыр-Дария, г. Джетысай, Казахстан;

## О НОВОЙ ВЕРСИИ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

**Аннотация.** При анализе движения космических аппаратов приходится строить математическую модель, адекватную их истинной природе движения [1].

В случае изучения движения космического объекта в околоземном пространстве необходимо построить модель поля тяготения Земли и ближайших планет.

Попытка в этом направлении была сделана в работе Р. Ньютона [2], который предложил аппроксимировать поле тяготения сферoidalной планеты силовой функцией задачи двух неподвижных центров.

Дальнейшие исследования, связанные с задачей двух неподвижных центров, можно найти в многочисленных работах В.Г. Демина, В.Г. Дегтярева, Е.П. Аксенова, Е.А. Гребеникова, В.М. Алексеева и др.

В [3, с.112] отмечено, что аппроксимация потенциала Земли силовой функцией задачи двух неподвижных центров приемлема только для достаточно далеких спутников Земли. Но нам кажется, что силовой функцией задачи двух неподвижных центров можно аппроксимировать поле тяготения Земли и в случае близких спутников.

Для подтверждения нашей идеи мы предлагаем новую версию задачи двух неподвижных центров.

**Ключевые слова:** спутник Земли, биномиальный ряд, задача двух неподвижных центров, гравитационное поле, пробное тело, движение пробного тела.

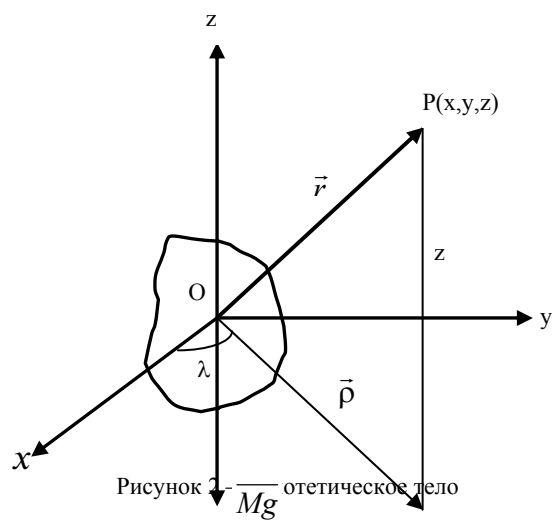
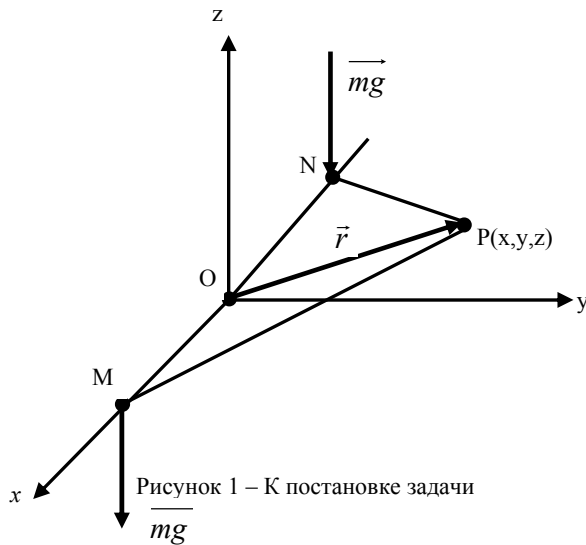
Рассмотрим движение пробного тела Р в поле притяжения двух неподвижных центров М и N равных масс  $m$ , которые расположены симметрично относительно начала координат на оси  $Ox$  (рис. 1).

На рис. 1:

$$m_N = m, m_M = m, \overline{OP} = \bar{r}, \bar{G} = \overline{m_N g} = \overline{m_M g} = \overline{mg},$$

$$MN = 2a, MO = ON = a, m_P = m_0.$$

Допустим, что центры М и N соединены невесомым стержнем MN длины  $2a$ . Таким образом, мы получили абсолютно твердое тело «гантель». Теперь пользуясь леммой о параллельном переносе сил, приведем  $\overline{m_N g}$  и  $\overline{m_M g}$  к центру О (рис. 2). Мы получили «гипотетическое тело», центр масс которого совмещен с началом координат О и имеет массу, равную  $M = 2m$ , так как его сила тяжести  $\overline{Mg}$  направлена по вертикали вниз и  $\overline{Mg} = 2\overline{mg}$ .



На рис. 2 введена цилиндрическая система координат, которая связана с прямоугольными координатами:

$$x = \rho \cos \lambda, y = \rho \sin \lambda, z = z,$$

где  $\rho$  – полярный радиус,  $\lambda$  – полярный угол,  $z$  – аппликата пробного тела Р.

Пусть «гипотетическое тело» представляет собой сжатый сфероид

$$A = B = nC, n > 0,$$

где  $A, B, C$  – главные центральные моменты инерции сфероида,  $n$  – постоянный коэффициент.

Далее предположим, что

1. «Гипотетическое тело» обладает осью динамической симметрии, т.е.  $A = B = nC$ .

2. Тело вращается вокруг оси, совпадающей с наименьшей осью центрального эллипсоида инерции. Тогда силовая функция задачи имеет вид

$$U = \frac{fM}{r} - \frac{f(A-C)}{2r^s} (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (1)$$

или в цилиндрической системе координат (при малом наклоне орбиты к основной плоскости

$s = \frac{z}{\rho}, s^2 \neq 0, s^4 \approx 0$ ) имеем

$$U = \frac{L}{\rho} + \frac{\chi}{\rho^3} - \frac{D}{\rho^3} z^2 - \frac{E}{\rho^5} z^2, \quad (2)$$

где  $L = fM$ ,  $\chi = \frac{1}{2}Cf(1-n)$ ,  $D = \frac{1}{2}L$ ,  $E = \frac{9}{2}\chi$

Дифференциальные уравнения пробного тела в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\lambda}^2 = U'_\rho, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\lambda}) = U'_\lambda, \quad \ddot{z} = U'_z, \quad (3)$$

где:  $U'_\rho = -\frac{L}{\rho^2} - \frac{3\chi}{\rho^4} + \frac{3D}{\rho^4}z^2 + \frac{5E}{\rho^6}z^2$ ,  $U'_\lambda = 0$ ,  $\rho^2\dot{\lambda} = \alpha_2 = \text{const}$ ,  $U'_z = -\frac{2D}{\rho^3}z - \frac{2E}{\rho^5}z$ .

Из структуры правых частей (3) видно, что (3) не интегрируется в конечном виде, поэтому используем метод Гамильтона-Якоби. Кинетическая энергия орбитального движения пробного тела

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2), \quad (4)$$

здесь кинетическая энергия отнесена к массе  $m_0$ .

Используя (4), найдем выражения для импульсов

$$P_\rho = \dot{\rho}, \quad P_\lambda = \rho^2\dot{\lambda} = \alpha_2, \quad P_z = \dot{z}. \quad (5)$$

Функция Гамильтона

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}P_\lambda^2 + P_z^2\right) - \frac{L}{\rho} - \frac{\chi}{\rho^3} + \frac{D}{\rho^3}z^2 + \frac{E}{\rho^5}z^2. \quad (6)$$

Следует отметить, что  $H$  не зависит явно от времени  $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ , отсюда

$$\frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}P_\lambda^2 + P_z^2\right) - \frac{L}{\rho} - \frac{\chi}{\rho^3} + \frac{D}{\rho^3}z^2 + \frac{E}{\rho^5}z^2 = h_1, \quad (7)$$

где  $h_1$  – постоянная интеграла энергии.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\rho, \lambda, z, \frac{\partial V}{\partial \rho}, \frac{\partial V}{\partial \lambda}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0, \quad (8)$$

где  $V$  – производящая функция.

У нас  $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ , поэтому [3, С.38] имеем

$$V = -h_1t + W(\rho, \lambda, z), \quad (9)$$

где  $W(\rho, \lambda, z)$  удовлетворяет (8).

Принимая во внимание (7) и (6), имеем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 - \frac{2L}{\rho} - \frac{2\chi}{\rho^3} + \frac{2D}{\rho^3}z^2 + \frac{2E}{\rho^5}z^2 = 2h_1. \quad (10)$$

Пусть

$$W = W_1(\rho) + W_2(\lambda) + W_3(z), \quad (11)$$

тогда (10) имеет вид

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial z}\right)^2 - \frac{2L}{\rho} - \frac{2\chi}{\rho^3} + \frac{2D}{\rho^3}z^2 + \frac{2E}{\rho^5}z^2 = 2h_1. \quad (12)$$

Умножим обе части (12) на  $\rho^2$

$$\left(\rho \frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\rho \frac{\partial W_3}{\partial z}\right)^2 - 2L\rho - \frac{2\chi}{\rho} + \frac{2D}{\rho} z^2 + \frac{2E}{\rho^3} z^2 = 2h_1\rho^2. \quad (13)$$

Потребуем следующее соответствие:

$$\frac{dW_2}{d\lambda} = \alpha_2 = h_2, \quad \rho^2 \left(\frac{dW_3}{dz}\right)^2 + \frac{2D}{\rho} z^2 + \frac{2E}{\rho^3} z^2 = h_3^2,$$

$$\rho^2 \left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2L\rho - \frac{2\chi}{\rho} = 2h_1\rho^2.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= h_2\lambda, \\ W_1 &= \int \sqrt{2h_1 + \frac{2\chi}{\rho^3} + \frac{2L}{\rho} + \frac{(h_2^2 + h_3^2)}{\rho^2}} d\rho, \\ W_3 &= \int \sqrt{\frac{h_3^2}{\rho^2} - \frac{2D}{\rho^3} z^2 - \frac{2E}{\rho^5} z^2} dz. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В последнем выражении

$$2D \frac{z^2}{\rho^3} = 2D \frac{s^2}{\rho} = O(s^3) \approx 0, \quad 2E \frac{z^2}{\rho^5} = 2E \frac{s^3}{\rho^3} = O(s^4) \approx 0,$$

поэтому

$$W_3 = \int \frac{1}{\rho} h_3 dz = h_3 \int \frac{dz}{\rho}. \quad (15)$$

Подставив (14) и (15) в (11), найдем

$$W = h_2\lambda + h_3 \int \frac{dz}{\rho} + \int \sqrt{[2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + 2\chi]} \cdot \frac{1}{\rho^3} d\rho. \quad (16)$$

В соответствии с общей теории решение канонических уравнений Гамильтона имеет вид [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h_1} &= t + \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial h_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial h_3} = \beta_3, \\ \frac{\partial W}{\partial \rho} &= P_\rho, \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = P_\lambda, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = P_z, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – постоянные интегрирования.

Перепишем (17) в явном виде

$$t + \beta_1 = \int \frac{\rho^{9/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + 2\chi}} d\rho, \quad (18)$$

$$\beta_2 = \lambda + \int h_2 \frac{\rho^{5/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + 2\chi}} d\rho, \quad (19)$$

$$\beta_3 = \int \frac{dz}{\rho} + \int \frac{\rho^{5/2} h_3}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + 2\chi}} d\rho. \quad (20)$$

$$P_\rho = -h_3 \int \frac{dz}{\rho^2} + \frac{3}{2} \int \frac{\rho^{1/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + \chi}} d\rho + \\ + \int \frac{3h_1\rho^{7/2} + 2L\rho^{5/2} + \frac{1}{2}(h_2^2 + h_3^2)\rho^{3/2}}{\sqrt{2h_1\rho^3 + 2L\rho^2 + (h_2^2 + h_3^2)\rho + 2\chi]^3}} d\rho, \quad (21)$$

$$P_\lambda = h_2, \quad (22)$$

$$P_z = h_3 \int \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) dz. \quad (23)$$

Из (18) можно определить  $\rho(t)$ , из (19) можно найти  $\lambda(t)$ .

Умножим (19) на  $h_3$ , а (20) на  $h_2$ , затем взяв дифференциалы из полученных выражений, составим их разность и тогда найдем

$$z(t) = \frac{h_3}{h_2} \int \rho d\lambda = h_3 \int \frac{dt}{\rho(t)}, \quad (24)$$

где  $\rho(t)$  определена ранее из (18).

Таким образом, разработана новая версия задачи двух неподвижных центров, которая пригодна для исследования движения близких спутников Земли.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шинибаев М.Д., Беков А.А. и др. Об орбитальном движении неуправляемого космического объекта в поле тяготения центрального и внешнего тела // Доклады НАН РК.- 2014, №3.- С.21-26.  
 [2] Newton R. Motion of a satellite around an unsymmetrical central body. Journ. Appl. phys., vol. 30, №2, 1959.  
 [3] Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения.- М.: Наука, 1968.- 352 с.

#### REFERENCES

- [1] Shinibaev M.D., Bekov A.A. et al. On the orbital motion of uncontrolled space object in the gravitational field of the central and outer body. Reports of NAS RK.- 2014, №3.- p. 21-26 (in Russ).  
 [2] Newton R. Motion of a satellite around an unsymmetrical central body. Journ. Appl. phys., vol. 30, №2, 1959.  
 [3] Demin V.G. Dvigenie iskusstvennogo sputnik v nezentralnom pole tyagotenia.-M: Nauka, 1968.- 352 s. (in Russ).

**М.Д. Шинибаев<sup>1</sup>, А.А. Беков<sup>1</sup>, С.С. Даирбеков<sup>2</sup>, С.А. Жолдасов<sup>2</sup>,  
Г.Е. Мырзакасова<sup>2</sup>, Д.Р. Алиаскаров<sup>2</sup>, С.А. Шекербекова<sup>2</sup>, А.Ж. Садыбек<sup>2</sup>**

Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы, Алматы, Қазақстан;  
Сыр-Дария университеті, Жетысай, Қазақстан;

#### ЕКІ ЖЫЛЖЫМАЙТЫН НҮКТЕ ПРОБЛЕМАСЫНЫҢ ЖАҢА НҮСҚАСЫ

**Аннотация:** Ғарыштық аппараттардың қозғалыстарын зерттегенде, олардың математикалық моделін құрастыру қажет болады, және ол шын қозғалысқа адекваттық қалыпта болуы қажет [1].

Егер Жер маңындағы қозғалыс қарастырылса, онда Жер және жақын орналасқан планеталардың өрісінің моделін соғуға тура келеді. Осы бағытта Р.Ньютон [2] бастама жасаған еді, ол сфероид тәрізді планетаның өрісін екі жылжымайтын нүкте есебінің өрісімен аппроксимацияланады.

Бұл бағыт В.Г. Демин, В.Г.Дегтярев, Е.П. Аксенов, Е.А.Гребеников, В.М. Алексеевтардың және басқалардың көптеген зерттеулерінде орын табады.

Мұндай мүмкіншілік тек алыс орналасқан Жер серіктеріне ғана тиесілі деп жазылған [3, б. 112].

Бірақ біздің зерттеулеріміз бойынша бұл идея жақын орналасқан Жер серіктерінің қозғалыстарын зерттеуге де қолдануға болады. Дәлел ретінде біз жаңа версия енгіздік.

**Тірек сөздер:** Жер серігі, бином қатары, екі жылжымайтын нүкте проблемасы, гравитациялық күш өрісі, сынақтық дене, сынақтық дене қозғалысы.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 126 – 132

**Kh.A. Sarsenbayev<sup>1</sup>, B.S. Khamzina<sup>2</sup>, G.A. Koldassova<sup>2</sup>, G.B. Issayeva<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>South-Kazakhstan State University named after M. Auezov, Shymkent, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [sarsenbayev80@mail.ru](mailto:sarsenbayev80@mail.ru), [kuzyamake@mail.ru](mailto:kuzyamake@mail.ru)

**RESEARCH OF MODIFIED REAGENT  
ALS LIGNOSULFONATE (NPP «AZIMUT»)**

**Abstract.** To study the existing member modifying ALS clay lignosulfonates (St.f. = 10% by weight) and weighed ( $\rho = 1900 \text{ kg / m}^3$ ) in the Nadym-Pur-Taz region, Valanginian and ACIM well story fracturing fluids used in GPP complexing retende modified.

Increasing the viscosity of drilling fluids significantly reduces quality parameters of the drilling process, reduces the life of the process equipment, increasing the power consumption. Increased viscosity due to operating time of the solids in the drilling process and its subsequent dispersion, exposure to high downhole temperatures, the coagulating action of electrolytes.

In addition, after drilling out cement grout glass entering the cement stone and the particles in the washing liquid adversely affect its processing characteristics. In this regard, relevant is the use of high viscosity reducers reagents, the use of which allows you to adjust and stabilize the technological properties of drilling fluids.

Currently, the most popular and widely used viscosity reducers are agents based on lignosulfonates, which are offered by the Russian and foreign companies. However, under the influence of high temperatures downhole efficiency lignosulfonate reagents significantly reduced, impairing the parameters of drilling fluids. Increasing thermostability of drilling fluids can be achieved by treating them with reagents acrylic series, but they are characterized by a low stability to salts of polyvalent metals. Improvement and stabilization of the technological parameters of drilling fluids through the development and use of complex action of the reagent based on lignosulfonates and acrylates. Solving these problems is possible by drilling fluids used in highly complex viscosity reducers reagents action, which are composed of acrylic and components.

ALS complex of experimental studies conducted to compare the efficacy of specific conditions (a) Taking into account by modeling the plant stand. It is used for the following functions: OFITE testing conductivity of the pore channels 35 microns ( $80^\circ \text{C}$ ,  $P = 5 \text{ MPa}$ ); Roller oven is OFITE ( $130^\circ \text{C}$ , 5 hours); Dynamic block ( $75^\circ \text{C}$ ,  $AR = 5 \text{ MPa}$ ).

**Key words:** oil, surfactant, deposit, an aqueous solution, study, formation water, the core.

УДК 622.276.4

**Х.А. Сарсенбаев<sup>1</sup>, Б.С. Хамзина<sup>2</sup>, Г.А. Колдасова<sup>2</sup>, Г.Б.Исаева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан;

<sup>2</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН АЛС ЛИГНОСУЛЬФОНАТТЫ  
РЕАГЕНТІН (НПП «АЗИМУТ») ЗЕРТТЕУ**

**Аннотация.** Модификацияланған лигносульфонат АЛС құрамында саз аз болып келетін (Ст.ф. = 10 % салм.) және ауырлатылған ( $\rho = 1900 \text{ кг/м}^3$ ) Надым-Пур – Таз ауданында валанжиндік және ачим ұңғымаларын қабатты гидравликалық жару үшін қолданылып жүрген қабатты гидравликалық жару ерітінділерін өңдеуге арналған кешенді реагент ретінде модификацияланды. Бұрғылау ерітінділерін тұтқырлығы арттыру айтарлықтай, бұрғылау процесінің сапасын параметрлерін азайтады технологиялық жабдықты өмірін қысқартады, қуатты тұтынуды арттыру. салдарынан бұрғылау процесінде қатты және оның кейіннен дисперсия, жоғары

ұңғымалық температураның әсерінен, электролиттердің коагуляциялаушы іс-қимыл операциялық уақытына тұтқырлығы өсті. Сонымен қатар, сұйықтарды цемент тасын және бөлшектерін енгізу цемент ерітінді шыны бұрғылау кейін жағымсыз өңдеу сипаттамалары әсер етеді. Осыған байланысты, тиісті сіз бұрғылау ерітінділерін технологиялық қасиеттерін реттеу және тұрақтандыру мүмкіндік береді пайдалану оның жоғары тұтқырлығы редуكتورы реагенттер, пайдалану болып табылады.

Қазіргі уақытта, ең танымал және кең пайдаланылатын тұтқырлығы өткелдер ресейлік және шетелдік компаниялар ұсынылады, негізінде агенттері болып табылады. Алайда, жоғары температура ұңғымалық тиімділігі lignosulfonate реагенттер әсерінен айтарлықтай бұрғылау ерітінділерін параметрлерін нұқсан қысқарды. бұрғылау ерітінділерін арттыру ыстыққа реагенттер акрил сериясы оларды емдеу арқылы қол жеткізуге болады, бірақ олар поливалентті металдар тұздары төмен тұрақтылық сипатталады. lignosulfonates мен акрилаттар негізделген реагент кешенді іс-қимыл дамыту және пайдалану арқылы бұрғылау ерітінділерін технологиялық параметрлерін жетілдіру және тұрақтандыру.

Бұл мәселелерді шешу акрил және компоненттері болып табылатын бөлігі ретінде, кешенді іс-қимыл тиімділігі жоғары тұтқырлығы өткелдер реагент жылы бұрғылау ерітінділерін пайдалану арқылы мүмкін болады.

АЛС тиімділігін салыстыру мақсатында жүргізілген тәжірибелік зерттеулер кешені нақты термобаралық шарттарды (ұңғымалық) ескере отырып стендтік қондырғыда модельдеу арқылы жүргізілді. Ол үшін келесілер қолданылды: өткізгіштік тесттері OFITE, кеуекті каналдарымен 35 мкм (80°C, P = 5 МПа); роликті термостаттаушы қондырғы - OFITE пеші (130°C, 5 сағат); динамикалық сүзілгіштік қондырғысы (75°C, AP = 5 МПа).

**Тірек сөздер:** мұнай, БАЗ, кенорны, сулы ерітінді, зерттеулер, қабаттық су, керн.

Модификацияланған лигносульфонат АЛС құрамында саз аз болып келетін (Ст.ф. = 10 % салм.) және ауырлатылған ( $\rho = 1900 \text{ кг/м}^3$ ) Надым-Пур – Таз ауданында валанжиндік және ачим ұңғымаларын қабатты гидравликалық жару үшін қолданылып жүрген қабатты гидравликалық жару ерітінділерін өңдеуге арналған кешенді реагент ретінде модификацияланды [1].

АЛС тиімділігін салыстыру мақсатында жүргізілген тәжірибелік зерттеулер кешені нақты термобаралық шарттарды (ұңғымалық) ескере отырып стендтік қондырғыда модельдеу арқылы жүргізілді. Ол үшін келесілер қолданылды: өткізгіштік тесттері OFITE, кеуекті каналдарымен 35 мкм (80°C, P=5 МПа); роликті термостаттаушы қондырғы – OFITE пеші (130°C, 5 сағат); динамикалық сүзілгіштік қондырғысы (75°C, AP = 5 МПа).

Ұңғыма діңі шарттарында кеуектік кеңістікте сүзілгіштік процестердің төмендеуін қамтамасыз ететін АЛС тиімділігі анықталды (1-кесте).

1-кесте – Лигносульфонаттардың кеуектік кеңістіктегі сүзілгіштік процестеріне әсері

Модельдік қабатты гидравликалық жару ерітіндісінің сипаттамалары	Динамикалық сүзілгіштік, см <sup>3</sup>	Кеуектік сүзілгіштік, см <sup>3</sup>
1	2	3
1 АЛС үстемесі 0,5% мөлшерде қосылған аз сазды ерітінді	22	17
2 ФХЛС үстемесі 0,5% мөлшерде қосылған аз сазды ерітінді	27	20
3 Borre-Thin F үстемесі 0,5% мөлшерде қосылған аз сазды ерітінді	30	19

- Аз сазды ерітінді (-10 % салмағы), тығыздығы  $1068 \text{ кг/м}^3$ ;
- Сүзілгіштік динамикалық шарттарда 75-80°C температура және P=5 МПа анықталды;
- Динамикалық сүзілгіштік УИВ – 2 приборының көмегімен кеуектік сүзілгіштік бойынша OFITE тесттерде анықталды.

Тәжірибелік мәліметтер АЛС реагенті осы жоғарыда аталған шарттарда қабатты гидравликалық жару ерітіндісінің сұйық фазаның өнімділікті қабатқа берілуіне кедергі жасай алатындығын көрсетті [2]. АЛС реагенті үшін полимерсазды қабықша арқылы ерітіндінің динамикалық сүзілуі ФХЛС және Borre-Thin F реагентімен салыстырғанда, сәйкесінше 1,23 – 1,36 есе аз мәнге ие. Мұнда атап отырған АЛС реагенті қосылған ерітіндіде, кеуекті каналдарға ерітіндінің сүзілу жылдамдығы (35 мкм каналда) өзінің аналогтарымен салыстырғанда 12 – 17%-ға төмен екендігін көрсетеді (1-кесте).

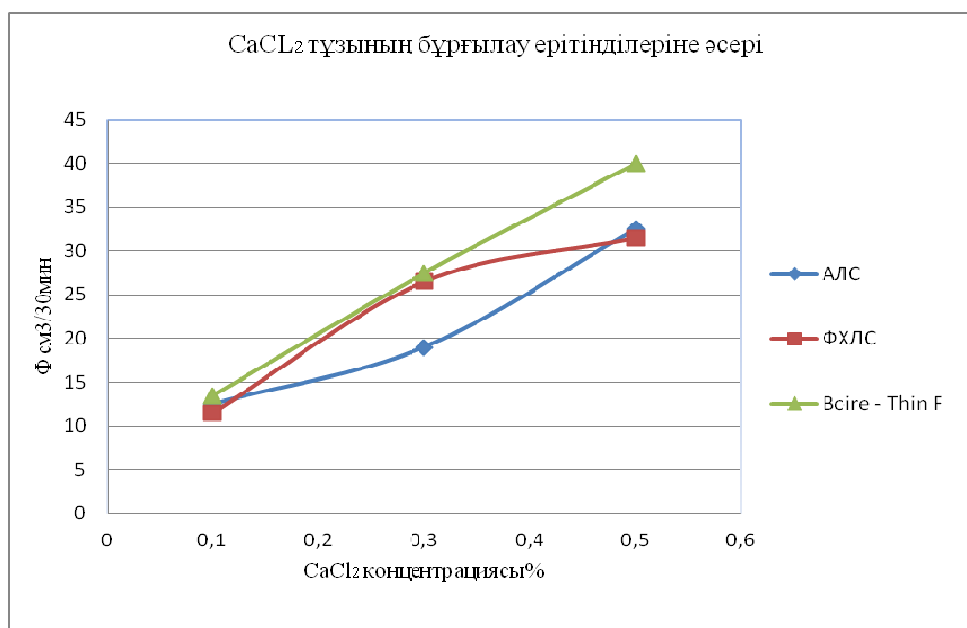
АЛС және оның негізіндегі аналогтардың құрамында саз аз болып келетін суспензияның технологиялық қасиеттеріне (құрылымды-механикалық, реологиялық, сүзілгіштік) стандартты жағдайларда, сонымен қатар 130°C температурада және тұзды агрессия (NaCl, CaCl<sub>2</sub>) шарттарындағы зерттеу нәтижелері келтірілген.

Тәжірибелі түрде мұнда АЛС реагенті сазды қабатты гидравликалық жару ерітіндісінің шартты тұтқырлықты тиімді азайтатындығы және жылжудың статикалық кернеуін төмендететіндігі көрсетілді (2 кесте).

2-кесте – Лигносальфонаттардың сұйылтушы қабілетінің салыстырмалы бағалануы

Модельдік ерітінді құрамы	Сазды ерітіндінің технологиялық параметрлері			
	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	T, °C	CHCl <sub>2</sub> /i <sub>0</sub> , дПа	МПа
1 К – сазды суспензия	1068	60	150/235	167,6
2 К + 0,5% АЛС	1065	24	10/67	35,9
3 К + 0,5% ФХЛС	1067	29	95/124	105,4
4 К + 0,5% Borre-Thin F	1068	28	91/151	81,4

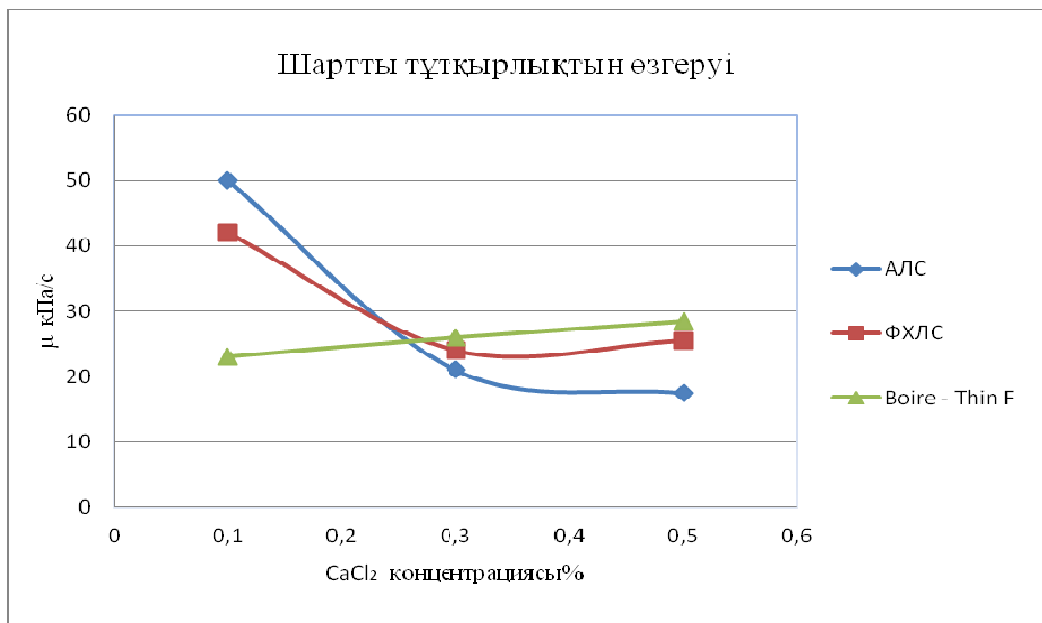
АЛС өзінің аналогтарымен бірдей мөлшерде жұмсалған кезде сазды суспензияның динамикалық жылжу кернеуі шамасын 167,6-дан 35,9 МПа дейін (яғни, 4,7 есе) төмендететінін көрсетті. Салыстыру үшін келтіретін болсақ, осы шарттарда ФХЛС динамикалық жылжу кернеуін 1,6 есе, ал реагент Borre-Thin F 2,1 есе төмендетеді (2-кесте). Мұнда АЛС реагенті үшін көбік түзу белгілері байқалады, ол негізінен суспензия тығыздығының төмендеуіне байланысты орын алады [3].



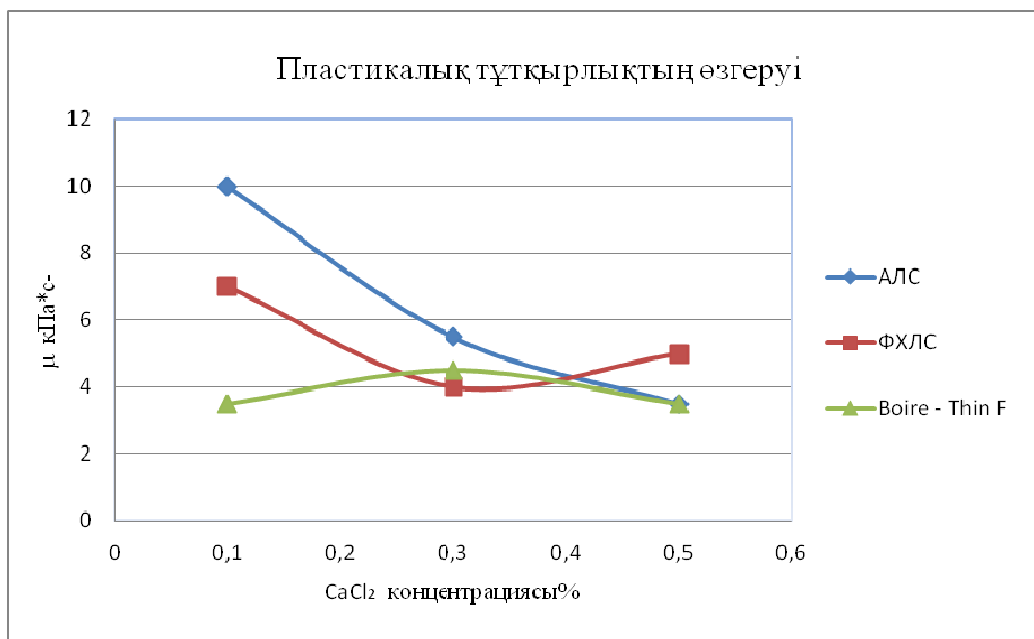
1-сурет – Лигносальфонаттар қосылған сазды суспензияның сүзілгіштік көрсеткіштеріне CaCl<sub>2</sub> әсері



Құрамына 0,5 % АЛС және тағы басқа реагенттер қосылған сазды суспензияның хлор-кальцийлі агрессия кезіндегі сапасының өзгеруі ( $\text{CaCl}_2$  концентрациясының 0,1-ден 0,5 % масс. дейінгі диапазонында) төмендегі 1 – 2-суреттерде келтірілген [4]. Құрамында АЛС реагенті қосылған сазды ерітіндіге 0,1 – 0,5 % мөлшерде кальций хлориді қосылған кезде оның сүзілгіштігінің өсетіндігі, бірақ сол реагенттің аналогтарымен салыстырғанда салыстырмалы төмен дәрежеде өсетіндігі анықталды. АЛС реагенті қосылған сазды ерітіндінің шартты тұтқырлығының аналогтары қосылған. Ерітінділермен салыстырғанда бірқалыпты өзгеретіні белгілі болды. АЛС реагенті қосылған ерітінділердің пластикалық тұтқырлығы кальций хлоридінің мөлшері 0,1% болғанда едәуір мөлшерде өзгеретіндігі және тұздар мөлшері 0,3 – 0,5 % аралығында болғанда бұл көрсеткіш тұрақтандырылатындығы анықталған [5].



2 сурет – Лигносульфонаттар қосылған сазды суспензияның шартты тұтқырлығына  $\text{CaCl}_2$  әсері



3-сурет – Лигносульфонаттар қосылған сазды суспензияның пластикалық тұтқырлығына  $\text{CaCl}_2$  әсері

Шартты тұтқырлыққа негізінен NaCl 0,1 % мөлшері жоғары дәрежеде әсер етеді, мұнда негізінен ерітіндінің тұтқырлығы Borre-Thin F реагентін қосқан кезде интенсивті өседі, одан кейінгі орынға АЛС реагенті қосылған ерітінді ие, ал шартты тұтқырлықтың анағұрлым бірқалыпты өсуі ФХЛС қосылған ерітіндіде байқалады. Осыған кері тәуелділік ерітіндінің сүзілгіштік қасиетіне әсерінде байқалады. Ерітінділер сүзілгіштігіне АЛС және Borre-Thin F (іс жүзінде бірдей шамада) реагенттері қосылған кезде елеусіз әсер етеді. Ал ФХЛС қосылған ерітінді үшін сүзілгіштікке әсері жоғары, әсіресе ол тұздар концентрациясы 5 %-ға дейін өскен кезде байқалады [6].

Сазды жыныстарға қатысты ерітінділердің ингибирлеуші қабілетіне реагенттер әсерінің шығымы 2,4 м/т болатын Тюмень облысының солтүстігіндегі кен орындарының сазды жыныстарына жақын болып келетін минералогиялық құрам саздарының ісінуін бағалау арқылы анықтадық. 170 сағат көлемінде саздың ісіну кинетикасының қисықтары 1-суретте келтірілген, мұнда АЛС реагентінің әсері Borre-Thin F реагентімен салыстырғанда біршама төмен, бірақ ФХЛС қосылған ерітіндімен салыстырғанда жоғары болатындығы көрсетілді [7].

Тәжірибелік мәліметтерді талдау сазды ерітінділердің гидратациясы дистилденген сумен салыстырғандағы әсері реагенттерде сәйкесінше келесідей мәнге ие: Borre - Thin F – 18,6%; АЛС – 10,6% және ФХЛС – 6,4%.

АЛС және оның аналогтарын сазы аз суспензия құрамындағы термотөзімділігі нәтижелері келесі 3-кестеде келтірілген.

3-кесте – Термостатталу қабілеті бойынша лигносульфонаттарды салыстырмалы бағалау

Реагент	Сазы аз ерітіндінің термостаттауға дейін және одан кейінгі параметрлері			
	T, с	Ф, см <sup>3</sup>	T, МПа-с	To, дПа
АЛС	24/26	9/11	10/14	36/33
ФХЛС	29/80	10/12	6/10	105/167
BORRE-THIN F	28/37	8/11	8/15	81/81
Ескерту:	1. Лигносульфонаттар концентрациясы – 0,5 % масс.; 2. Термостаттау 130°C температурада 5 сағат көлемінде роликті пеште жүргізілді (герметикалы, айналмалы контейнер)			

Жоғары температуралар әсерінде (130°C) АЛС және оның аналогтары сүзілу көрсеткішінің өзгеруіне бірдей дәрежеде әсер ететіндігі тәжірибелі түрде анықталды (сүзілгіштіктің өсуі 2-3 см<sup>3</sup>). АЛС айрықшалаушы ерекшелігі болып, бұл реагенттің қабатты гидравликалық жару ерітіндісінің тұтқырлықты қасиеттерін анағұрлым жоғары дәрежеде тұрақтандыратындығы есептеледі, яғни бұл көрсеткіш бойынша АЛС өзінің аналогы болып саналатын ФХЛС және Borre-Thin F қарағанда жоғары әсерге ие (3-кесте). Мысалы, егер термостаттаудан кейін ерітіндінің шартты тұтқырлығы АЛС қосылған жағдайда 24-тен 26-ға өссе (яғни 8 %-ға өседі), ал ФХЛС үшін бұл 17,6 %, ал Borre-Thin F үшін бұл 32 % құрайды [8].

Осыған ұқсас зерттеу нәтижелері АЛС реагентін ауырлатылған қабатты гидравликалық жару ерітіндісінің құрамында сынау барысында алынды, ол ерітіндінің тығыздығы шамамен 1900 кг/м<sup>3</sup> (4-кесте) [9-10].

Ауырлатылған 1900 кг/м<sup>3</sup> құрайтын қабатты гидравликалық жару ерітіндісінде АЛС реагентін сынау барысында ерітіндінің шартты тұтқырлығының төмендеуі (20 с) анықталды, және ол шама термостаттаудан кейін 15 %-ға жоғарылайтындығын байқауға болады. Салыстыру үшін жүргізілген зерттеулерде, яғни ерітіндіге КЛСП және Унифлок әсерін зерттеу ерітіндінің шартты тұтқырлығының 32-ден 62 секундқа дейін өсетіндігін, яғни екі есе шамасында өсетіндігін көрсетті, және мұнда сүзілгіштік көрсеткіші және сүзу қабықшасының қалыңдығы жеткілікті жоғары болып қала берді, ол бұл ерітіндінің сапасын арнайы реагенттермен өңдеу арқылы жоғарылату қажеттігін көрсетті.

4-кесте – Ауырлатылған қабатты гидравликалық жару ерітіндісінің құрамында АЛС реагентінің термостатталу қабілетіне сынау нәтижелері

Ерітінді құрамы	Тығыздығы, кг/см <sup>3</sup>	Зерттеу температурасы, °С	ЖСК10 мин, дПа	Ф, см <sup>3</sup> /30мин	К, мм	Лпл, МПа-с	То, дПа
1 К + 0,5% АЛС	1038	17,0	2,4	12,4	1,0	5,5	2,4
2 К + 0,5 % АЛС + ауырлатылған гемат	1900	20,0	2,4	17,7	5,0	24,0	2,4
3 Ерітінді № 2 термостаттаудан кейін, 110°С, 1 сағ	1955	23,0	2,4	16,0	4,5	23,5	14,4
4 КСІ 0,3 % Унифлок + 0,4 % КЛСП	1037	30,0	4,8	6,0	1,0	17,0	62,3
5. К + 0,3 % Унифлок + 0,4% КЛСП + ауырлатылған гемат	1880	32,0	5,7	4,8	2,0	52,0	100,6
6. Ерітінді № 5 термостаттаудан кейін, 110°С, 1 сағ	1890	62,0	2,4	5,0	2,2	70,0	105,4
Ескерту: К – шығымы 9,2 м <sup>3</sup> /т болатын сазды ұнтақтан дайындалған суспензия							

Тәжірибелік мәліметтерді талдау АЛС реагентінің сазды жоғары коллЖБЕты қабаттарды қабатты гидравликалық жаруда ингибирлеуші және сұйылтушы үстеме ретінде қолданыла алатындығын, соның ішінде Юралық (газды) ұңғымаларды қабатты гидравликалық жаруда пайдалануға арналған ұңғымаларды жүргізу үшін қолданыла алатындығын көрсетті. Кеуекті коллекторлардың сүзілгіштік ластануын төмендету, соның ішінде валажиндік кен орындарында мұнайгаз ұңғымаларын жүргізу үшін АЛС реагентінің қолдану болашағының жарқын екендігі тәжірибелі дәлелденді.

#### ӘДЕБИЕТ

[1] Нифонтов В.И., Швец Л.В., Кашанов М.А. Разработка композиционного материала ингибирующей жидкости при бурении на депрессии в неустойчивых горных породах. Геология, бурение и разработка газовых и газоконденсатных месторождений и ПХГ: Сб. научн. трудов СевкавНИПИгаза. – Ставрополь: вып. Гос 37, 2002. – 400 с.

[2] Крылов Г.В. Совершенствование методов геологического изучения, анализа и проектирования разработки газовых месторождений севера Западной Сибири / Г.В. Крылов, А.Н. Лапердин, В.Н. Маслов; отв. редактор О.Н. Ермилов // – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2005. – 392 с.

[3] Ахметов А. А. Капитальный ремонт скважин на Уренгойском месторождении. – Уфа: УГНТУ, 2000. – 220 с. 7.

[4] Технологическое руководство по буровым растворам для бурения горизонтальных скважин и скважин с большим углом отклонения. Компания М - I Дрилинг Флюиде The definitive Technological Guide to drilling fluids for high - duple wells horizontal wells, M-I drilling Fluids Co. p – 96. – 2001.

[5] Андерсон Б.А., Бочкарев Г. П., Гилязов Р.М. Буровые растворы для бурения дополнительных стволов скважин. Сборник научн. тр. Баш НИИ по переработке нефти, № 103, 2000. – С.142-148.

[6] Крецул В.В. Крылов В.И. Особенности технологии промывки горизонтальных скважин. Нефтяное хозяйство, № 6, 2001. – С. 36-40.

[7] Анализ эффективности использования смазочных эмульсий при горизонтальном бурении Petran Iasenka, Coriva Maziva, № 1, 2000. – С. 354.

[8] Рябченко В.И. Особенности процесса выноса шлама из горизонтальных и наклонных участков скважин. Строительство нефте-газовых скважин на суше и на море, № 3, 2002, - С. 10-12.

[9] Рябченко В.И. К вопросу о контроле буровых растворов для горизонтального и наклонного бурения. Строительство нефте-газовых скважин на суше и на море, № 3, 2002. – С. 19-21.

REFERENCES

- [1] Nifontov V.I., Shvec L.V., Kashanov M.A. Razrabotka kompozicionnogo materiala ingibirujushhej zhidkosti pri burenii na depressii v neustojchivyh gornyh porodah. Geologija, burenie i razrabotka gazovyh i gazokondensatnyh mestorozhdenij i PHG: *Sb. nauchn. trudov SevkavNIPigaza*. – Stavropol': vyp. Gos 37, 2002. – 400 s.
- [2] Krylov G.V. Sovershenstvovanie metodov geologicheskogo izucheniya, analiza i proektirovaniya razrabotki gazovyh mestorozhdenij severa Zapadnoj Sibiri / G.V. Krylov, A.N. Laperdin, V.N. Maslov; otv. redaktor O.N. Ermilov // . – Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, 2005. – 392 s.
- [3] Ahmetov A. A. Kapital'nyj remont skvazhin na Urengoj'skom mestorozhdenii. – Ufa: UGNTU, 2000. – 220 s. 7.
- [4] Tehnologicheskoe rukovodstvo po burovym rastvoram dlja burenija gorizonta'nyh skvazhin i skvazhin s bol'shim uglom otklonenija. Kompanija M - I Drilling Fljuid. *The definitive Technological Guide to drilling fluids for high - duple wells horizontal wells, M-I drilling Fluids Co.* p – 96. – 2001.
- [5] Anderson B.A., Bochkarev G. P., Giljazov P.M. Burovye rastvory dlja burenija dopolnitel'nyh stvolov skvazhin. *Sbornik nauchn. tr. Bash NII po pererabotke nefii*, № 103, 2000. – S.142-148.
- [6] Krecul V.V. Krylov V.I. Osobennosti tehnologii promyvki gorizonta'nyh skvazhin. *Neftjanoe hozjajstvo*, № 6, 2001. – S. 36-40.
- [7] Analiz jeffektivnosti ispol'zovaniya smazochnyh jemul'sij pri gorizonta'nom burenii Petran Iasenka, Coriva Maziva, № 1, 2000. – S. 354.
- [8] Rjabchenko V.I. Osobennosti processa vynosa shlama iz gorizonta'nyh i naklonnyh uchastkov skvazhin. *Stroitel'stvo nefte-gazovyh skvazhin na sushe i na more*, № 3, 2002, - S. 10-12.
- [9] Rjabchenko V.I. K voprosu o kontrole burovnyh rastvorov dlja gorizonta'nogo i naklonnogo burenija. *Stroitel'stvo nefte-gazovyh skvazhin na sushe i na more*, № 3, 2002. – S. 19-21.

Х.А. Сарсенбаев<sup>1</sup>, Б.С. Хамзина<sup>2</sup>, Г.А. Колдасова<sup>2</sup>, Г.Б.Исаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан,

<sup>2</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО РЕАГЕНТА АЛС ЛИГНОСУЛЬФОНАТНАЯ (НПП «АЗИМУТ»)

**Ключевые слова:** нефть, ПВА, месторождение, водный раствор, исследовании, вода пластовая, керн.

**Аннотация:** Для исследования существующие модифицированные ALS глины лигносульфонатов (St.f. = 10% вес) и взвешивают ( $\rho = 1900$  кг/м) Надым-Пур-Тазовского региона валанжине и АСИМ хорошо двухэтажная история гидро-разрыва жидкостей, используемых в ГРП комплексообразователей модифицированный.

Увеличение вязкости промысловых жидкостей значительно снижает качественные показатели процесса бурения, сокращает срок службы технологического оборудования, повышает энергозатраты. Увеличение вязкости обусловлено наработкой твердой фазы в процессе бурения и последующим ее диспергированием, воздействием высоких забойных температур, коагулирующим действием электролитов. Кроме того, после разбухания цементного стакана попадание цементного раствора и частиц цементного камня в промысловую жидкость негативно влияет на ее технологические свойства. В этой связи актуальным является использование высокоэффективных реагентов-понижителей вязкости, применение которых позволяет регулировать и стабилизировать технологические свойства промысловых жидкостей.

В настоящее время наиболее востребованными и широко применяемыми понизителями вязкости являются реагенты на основе лигносульфонатов, которые предлагаются российскими и зарубежными фирмами. Однако, под влиянием высоких забойных температур эффективность лигносульфонатных реагентов существенно снижается, ухудшая параметры промысловых жидкостей. Повышение термостойкости промысловых жидкостей может быть достигнуто путем их обработки реагентами акрилового ряда, но для них характерна низкая устойчивость к солям поливалентных металлов. Улучшение и стабилизация технологических параметров промысловых жидкостей путем разработки и использования реагента комплексного действия на основе лигносульфонатов и акрилатов.

Решение указанных задач возможно путем применения в промысловых жидкостях высокоэффективных реагентов понизителей вязкости комплексного действия, в составе которых находятся акриловые и лигаосульфонатные составляющие.

АЛС комплекс экспериментальных исследований, проведенных с целью сравнения эффективности специфических условий (а) Принимая во внимание через моделирование стенда завода. Он используется для следующих функций: OFITE испытаний проводимости поровых каналов 35 микрон (80°C, P = 5 МПа); роликовый печь OFITE составляет (130°C, 5 часов); Динамический блок (75°C, AR = 5 МПа).

## МАЗМҰНЫ

<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов А.В., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Ақауы аз кремний матрицаларындағы атомдардың орнын басу әдісімен алынған эпитаксиалды SiC кабыршақтарын рентгендік талдау.....	5
<i>Батрышев Д.Ф., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланұлы Е.</i> Жоғары жиілікті сыйымдылық разрядында газдық фазадан плазмохимиялық әдісімен көміртек нанотүтікшелерін синтездеу.....	10
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> <sup>13</sup> C ядросының экзотикалық күйлерінің радиустары.....	17
<i>Сарсенгельдин М.М., Слямхан М.М., Бижигитова Н.Т.</i> Қозғалмалы шекарасы бар оське тимейтін жылуөткізгіштік тендеуінің жылу көпмүшелері арқылы аналитикалық шешімі.....	21
<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов А.В., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Ақауы аз кремний матрицаларындағы атомдардың орнын басу әдісімен алынған эпитаксиалды SiC кабыршақтарын рентгендік талдау.....	25
<i>Диханбаев К.К., Мусабек Г.К., Сиваков В.А., Ермухамед Д., Мейрам А.Т.</i> Кремний наноталшықтарының микрофотолюминесценциясы.....	32
<i>Батрышев Д.Ф., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланұлы Е.</i> Жоғары жиілікті сыйымдылық разрядында газдық фазадан плазмохимиялық әдісімен көміртек нанотүтікшелерін синтездеу.....	38
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> <sup>13</sup> C ядросының экзотикалық күйлерінің радиустары.....	45
<i>Сергеев Д.М., Шұңқеев Қ.Ш.</i> «Ниобий – көміртекті нанотүтікше (5,5) – ниобий» нанотүйіспесінің транспорттық сипаттамаларының компьютерлік модельдеуі.....	49
<i>Досболаев М.К., Утегенов А.У., Тажен А.Б., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т.</i> Импульстік плазмалық ағынның динамикалық қасиеттері мен импульсті плазмалық деткіштегі тозанның пайда болуы.....	59
<i>Минглибаев М.Ж., Жұмабек Т.М.</i> Тенбүйірлі шектелген үш дене мәселесі .....	67
<i>Оразбаев С.А., Өмірбеков Д.Б., Досболаев М.Қ., Габдуллин М.Т., Рамазанов Т.С.</i> Сынақта тозаңды-плазмалы шамның жарық беру қасиетін зерттеу.....	74
<i>Жақып К.Б.</i> Сұйықтықтар мен газдардағы химиялық реакциялары бар термобародиффузияларды моделдеу.....	80
<i>Оразбаев С.А., Өмірбеков Д.Б., Габдуллин М.Т., Досболаев М.Қ., Рамазанов Т.С.</i> Газ температурасының тозаңды нанобөлшектердің өлшемі мен құрылымына әсері.....	89
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Гуктың заңымен серпілімдік теориясында моделдеу. Кернеулер тензорында симметрия жоқтығы.....	96
<i>Буртебаев Н., Алимов Д., Зазулин Д.М., Керимкулов Ж.К., Юшков А.В., Джансейтов Д.М., Мухамеджанов Е., Насрулла М.</i> Төменгі энергиялы протондардың <sup>14</sup> N ядросымен әсерлесу потенциал параметрлерін анықтау.....	104
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Амангелді Н., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Мауей Б., Аймаганбетов А., Қурахмедов А.Е., Бекбаев С.М., Мадиярова А.Ж.</i> 17,5 және 41 МэВ энергияларда <sup>11</sup> B ядроларынан <sup>14</sup> N иондарының серпімді шашырауын зерттеу.....	109
<i>Искакова У.А., Төрбек Б.Т.</i> Лаплас операторы үшін робен-коши қисынсыз есебін шешудің бір әдісі туралы.....	115
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Мырзақасова Г.Е., Алиаскаров Д.Р., Шекербекова С.А., Садыбек А.Ж.</i> Екі жылжымайтын нүкте проблемасының жаңа нұсқасы.....	121
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Модификацияланған алс лигносульфонатты реагентін (НПП «Азимут») зерттеу.....	126

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов, А.В. Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Рентгеновский анализ эпитаксиальных пленок SiC, выращенных методом замещения атомов на подложках низкодефектного кремния.....	5
<i>Батрышев Д.Г., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланулы Е.</i> Синтез углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде.....	10
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> Экзотические состояния ядра <sup>13</sup> C с аномальными радиусами.....	17
<i>Сарсенгельдин М.М., Слямхан М.М., Бижигитова Н.Т.</i> Аналитическое решение уравнения теплопроводности с движущимися границами не касающимися оси тепловыми полиномами.....	21
<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов А.В., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Рентгеновский анализ эпитаксиальных пленок SiC, выращенных методом замещения атомов на подложках низкодефектного кремния.....	25
<i>Диханбаев К.К., Мусабек Г.К., Сиваков В.А., Ермухамед Д., Мейрам А.Т.</i> Фотолюминесценция кремниевых нанонитей.....	32
<i>Батрышев Д.Г., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланулы Е.</i> Синтез углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде.....	38
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> Экзотические состояния ядра <sup>13</sup> C с аномальными радиусами.....	45
<i>Сергеев Д.М., Шункеев К.Ш.</i> Компьютерное моделирование транспортных характеристик наноконтакта «Ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий».....	49
<i>Досболаев М.К., Утегенов А.У., Тажен А.Б., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т.</i> Динамические свойства импульсного плазменного потока и пылеобразование в ИПУ.....	59
<i>Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.</i> К равнобедренной ограниченной задаче трех тел.....	67
<i>Оразбаев С.А., Омирбеков Д.Б., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Рамазанов Т.С.</i> Экспериментальное исследование свойства светоотдачи плазменно-пылевой лампы.....	74
<i>Джакупов К.Б.</i> Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах.....	80
<i>Оразбаев С.А., Омирбеков Д.Б., Габдуллин М.Т., Досболаев М.К., Рамазанов Т.С.</i> Влияние температуры газа на размеры и структуры пылевых наночастиц.....	89
<i>Джакупов К.Б.</i> Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений.....	96
<i>Буртебаев Н., Алимов Д., Зазулин Д.М., Керимкулов Ж.К., Юшков А.В., Джансейтов Д.М., Мухамеджанов Е., Насрулла М.</i> Определение параметров потенциала взаимодействия протона с <sup>14</sup> N при низких энергиях.....	104
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Амангелді Н., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Мауей Б., Аймаганбетов А., Курахмедов А.Е., Бекбаев С.М., Мадиярова А.Ж.</i> Исследование упругого рассеяния ионов <sup>14</sup> N на ядрах <sup>11</sup> B при энергиях 17,5 и 41 МэВ.....	109
<i>Искакова У.А., Торекбек Б.Т.</i> Об одном методе решения некорректной задачи робена-коши для оператора лапласа... ..	115
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Мырзакасова Г.Е., Алиаскаров Д.Р., Шекербекова С.А., Садыбек А.Ж.</i> О новой версии задачи двух неподвижных центров.....	121
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Исследование модифицированного реагента АЛС лигносульфонатная (НПП «Азимут»).....	126

## CONTENTS

<i>Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Beisembetov I.K., Osipov A.V., Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Kenzhaliev B.K., Seitov B.Zh.</i> X-Ray analysis of SiC epitaxial films grown by method of atom replacement on low dislocation silicon substrate.....	5
<i>Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Yerlanuly Ye.</i> Synthesis of carbon nanotubes by plasma chemical deposition method from vapour-phase in radio-frequency capacitive discharge.....	10
<i>Demyanova A.S., Danilov A.N., Burtebayev N., Janseitov D.M., Kerimkulov Zh., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S.</i> Exotic states of $^{13}\text{C}$ nuclei with abnormal radii.....	17
<i>Sarsengeldin M.M., Slyamkhan M.M., Bizhigitova N.T.</i> Analytical solution of heat equation with moving boundary not tangent to axis by heat polynomials.....	21
<i>Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Beisembetov I.K., Osipov A.V., Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Kenzhaliev B.K., Seitov B.Zh.</i> X-ray analysis of SiC epitaxial films grown by method of atom replacement on low dislocation silicon Substrate.....	25
<i>Dikhanbayev K.K., Mussabek G.K., Sivakov V.A., Yermukhamed D., Meiram A.T.</i> Micro-photoluminescence in silicon nano-wires.....	32
<i>Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Yerlanuly Ye.</i> Synthesis of carbon nanotubes by plasma chemical deposition method from vapour-phase in radio-frequency capacitive discharge.....	38
<i>Demyanova A.S., Danilov A.N., Burtebayev N., Janseitov D.M., Kerimkulov Zh., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S.</i> Exotic states of $^{13}\text{C}$ nuclei with abnormal radii.....	45
<i>Sergeyev D.M., Shunkeyev K.Sh.</i> Computer simulation of transport properties of nanocontact "Niobium – carbon nanotubes (5.5) – niobium".....	49
<i>Dosbolayev M.K., Utegenov A.U., Tazhen A.B., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T.</i> Dynamic properties of pulse plasma flow and dust formation in the pulsed plasma accelerator.....	59
<i>Minglibayev M.Zh., Zhumabek T.M.</i> On the isosceles restricted three-body problem.....	67
<i>Orazbayev S.A., Omirbekov D.B., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Ramazanov T.S.</i> Experimental research of luminous efficiency of dusty plasma lamp.....	74
<i>Zhakupov K.B.</i> Modeling thermal barodiffusion with chemical reactions in liquids and gases.....	80
<i>Orazbayev S.A., Omirbekov D.B., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K., Ramazanov T.S.</i> The influence of gas temperature on size and structure of the dust nanoparticles.....	89
<i>Jakupov K.B.</i> Modeling Hooke's law in the theory of elasticity. Unsymmetrical stress tensor.....	96
<i>Burtebayev N., Alimov D.K., Zazulin D.M., Kerimkulov Zh.K., Yushkov A.V., Janseitov D.M., Mukhamejanov Y., Nassurulla M.</i> Determination of parameters of proton $^{14}\text{N}$ interaction potential at low energies.....	104
<i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Amangeldi N., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M., Mauey B., Aymaganbetov A., Kurakhmedov A., Bekbaev S.M., Madiyarova A.Zh.</i> Study of elastic scattering of $^{14}\text{N}$ ions from $^{16}\text{O}$ at energies 17,5 and 41 MeV.....	109
<i>Iskakova U.A., Torebek B.T.</i> Certain method of solving ill-posed cauchy-robin problem for the laplace operator.....	115
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Myrzakasova G.E., Aliaskarov D.R., Shekerbekova S.A., Sadybek A.G.</i> A new version of the problem of two fixed centers.....	121
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Research of modified reagent ALS lignosulfonate (NPP «Azimut»).....	126

## **Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редактор *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 2016.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
4 п.л. Тираж 300. Заказ 6.