

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**5 (315)**

**ҚЫРКУЙЕК – ҚАЗАН 2017 Ж.  
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2017 Г.  
SEPTEMBER – OCTOBER 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** чл.-корр. (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** corr. member. (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 5 – 12

A.A. Kulzhumiyeva<sup>1</sup>, Zh.A. Sartabanov<sup>2</sup><sup>1</sup>M. Utemisov West-Kazakhstan State University, Uralsk, Kazakhstan;<sup>2</sup>K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, KazakhstanE-mail: [aiman-80@mail.ru](mailto:aiman-80@mail.ru), [sartabanov42@mail.ru](mailto:sartabanov42@mail.ru)REDUCTION OF LINEAR HOMOGENEOUS  $D_e$ -SYSTEMS  
TO THE JORDAN CANONICAL FORM

**Abstract.** In this note we prove a theorem about reducibility to the canonical form of a linear homogeneous system with differentiation operator on diagonal and multiperiodic matrix constant on the diagonal. On the basis of the results obtained, it is possible to find out the structure of the solutions and investigate the conditions of the existence and uniqueness of the  $(\theta, \omega, \omega)$  - periodic solution of the linear  $D_e$ -system of equations. When investigating periodic solutions of linear systems of first order partial differential equations, it becomes necessary to reduce matrices with variable elements to convenient form. In this connection, we note the results of [1-2] and commentaries on them in monographs [3-5]. It is known that the study of the problems of multiperiodic solutions of systems of first order partial  $D_e$  -equations with the same principal part originates in works [6-7]. On their basis, further qualitative studies have been continued in [8-11].

**Key words:** linear homogeneous system, differentiation operator, Jordan canonical form, multiperiodic matrix, main diagonal, vector-period.

The article is devoted investigation of reduction of a linear  $D_e$ -system of the form

$$D_e x = A(\sigma)x \quad (1)$$

with the differential operator  $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$  to the canonical form

$$D_e x = J(\sigma)x, \quad (1^*)$$

where  $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$ ,  $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$  is a vector

operator,  $e = (1, \dots, 1)$  –  $m$ -vector,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the scalar product,  $\sigma = t - e\tau$ ,  $A(\sigma)$  an  $n \times n$ -matrix, which satisfies condition

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m \quad (2)$$

with multiple vector-periods  $k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ ,  $k = (k_1, \dots, k_m)$

from the set of integer vectors  $Z^m$ .  $J(\sigma)$  an  $n \times n$ -matrix of the Jordan form possessing the properties of multiperiodicity with the same  $\omega$  period and smoothness  $e$  in  $\sigma \in R^m$ :

$$J(\sigma + k\omega) = J(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m. \quad (2^*)$$

Variable matrices  $A(\sigma)$  and  $J(\sigma)$  are called constants on the diagonal  $t = e\tau$ .

Let  $\lambda_j(\sigma)$  be eigenvalues of the matrix  $A(\sigma)$  of multiplicity  $k_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , possessing the following properties.

1<sup>0</sup>. Continuous differentiability:  $\lambda_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

2<sup>0</sup>. Periodicity with period  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ :  $\lambda_j(\sigma + k\omega) = \lambda_j(\sigma)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\sigma \in R^m$ ,  $k \in Z^m$ .

3<sup>0</sup>. Property of having fixed sign  $\lambda_j(\sigma)$  for each  $j = \overline{1, n}$ :

a)  $\lambda_j(\sigma) < 0$ ,  $\forall \sigma \in R^m$  or

b)  $\lambda_j(\sigma) = 0$ ,  $\forall \sigma \in R^m$  or

c)  $\lambda_j(\sigma) > 0$ ,  $\forall \sigma \in R^m$ .

4<sup>0</sup>. Separation of eigenvalues:

a) for  $j \neq l$   $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_l(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in R^m$  or

b) for  $j \neq l$   $\lambda_j(\sigma) = \lambda_l(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in R^m$ ,

i.e. for each value  $j$  the eigenvalue  $\lambda_j(\sigma)$  has constant multiplicity  $k_j = const$  for all  $\sigma \in R^m$ .

5<sup>0</sup>. Each of the sets  $Re\{\lambda_j(\sigma)\}$  and  $Im\{\lambda_j(\sigma)\}$  has properties 1<sup>0</sup>-4<sup>0</sup>.

The properties 1<sup>0</sup>-5<sup>0</sup> are briefly called  $\Lambda$ -properties of the matrix  $A(\sigma)$ .

It is obvious that characteristic matrix  $\lambda E - A(\sigma) = H(\lambda, \sigma)$  has for all  $\sigma \in R^m$  constant rank  $n$  and its invariant  $\lambda$ -polynomials  $i_1(\lambda, \sigma), \dots, i_n(\lambda, \sigma)$  such that, starting with the second, they are a divisor of the previous one,  $i_1(\lambda, \sigma), \dots, i_r(\lambda, \sigma)$  are polynomials of degree greater than zero with respect to  $\lambda$  and

$$i_{r+1}(\lambda, \sigma) = \dots = i_n(\lambda, \sigma) = 1.$$

Then the characteristic matrix  $H(\lambda, \sigma)$  is represented by relations

$$H(\lambda, \sigma) = P(\lambda, \sigma) \text{diag}[i_1(\lambda, \sigma), \dots, i_r(\lambda, \sigma), 1, \dots, 1] Q(\lambda, \sigma), \quad (3)$$

where  $P(\lambda, \sigma)$  and  $Q(\lambda, \sigma)$  are non-singular  $n \times n$ -matrices that  $\lambda$ -polynomials are with independent of  $\lambda$  determinants  $\det P(\lambda, \sigma) = p(\sigma) \neq 0$  and  $\det Q(\lambda, \sigma) = q(\sigma) \neq 0$ .

Companion matrices of invariant polynomials

$$i_j(\lambda, \sigma) = \lambda^{n_j} - \alpha_{j1}(\sigma)\lambda^{n_j-1} - \dots - \alpha_{jn_j}(\sigma), \quad j = \overline{1, r}, \quad n_1 + \dots + n_r = n$$

denote by

$$A_j^*(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_{jn_j}(\sigma) & \alpha_{jn_j-1}(\sigma) & \alpha_{jn_j-2}(\sigma) & \dots & \alpha_{j1}(\sigma) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (4)$$

It is obvious that the representation (3) can be obtained on the basis of elementary transformations known from theory of  $\lambda$ -matrices [12] under which properties of multiperiodicity and continuous

differentiability in  $\sigma$  for matrices participating in relation (3) are preserved. Consequently, these properties also hold for the matrices (4).

In [13], the condition of equivalence of matrix  $\lambda E - A(\sigma)$  to the matrix with one invariant  $\lambda$ -polynomials are established and theorem of reducibility of the matrix  $A(\sigma)$  to the Jordan normal form by multiperiodic continuously differentiable non-singular transformation matrix is proved.

Moreover, system (1) was equivalent to one equation with higher order  $D_e$  operator with companion matrix of the form (4).

In this article we raise the question about investigating the reducibility of system (1) to the  $D_e$ -system with the matrix of Jordan normal form, when the matrix (2) with several invariant polynomials satisfies the conditions 1<sup>0</sup>-5<sup>0</sup>.

In other words, in [13] we consider  $D_e$ -system, which is equivalent to one  $D_e$ -equation of order  $n$ , and in this case, by (3), our system (1) breaks up into  $r$  linear  $D_e$ -equations of orders  $n_1, \dots, n_r$  ( $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ ). The essence of the problem is to reduce this general  $D_e$ -system (1) to  $D_e$ -system with matrix  $J(\sigma)$  of the Jordan canonical normal form, where  $\Lambda$ -properties of matrix  $A(\sigma)$  are essential value.

When raising the question, it is obvious that this study is adjacent to the studies [14-19].

To solve the problem posed, we use the true normal form  $A^*(\sigma)$  of matrix  $A(\sigma)$ , which are related by a similarity relation

$$A^*(\sigma) = L^{-1}(\sigma)A(\sigma)L(\sigma). \quad (5)$$

The relation (5) to be a result of the representation (3), where

$$A^*(\sigma) = \text{diag}[A_1^*(\sigma), \dots, A_r^*(\sigma)]$$

with diagonal elements of the form (4),  $L(\sigma)$  is a non-singular continuously differentiable  $\omega$ -periodic matrix:

$$L(\sigma + k\omega) = L(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m. \quad (6)$$

Relations (5)-(6), as well as (3)-(4) are obtained on the basis of methods of the theory of equivalent transformations of polynomial matrices for which smoothness and multiperiodicity of the matrices are saved.

Further, in view of (5), (6) and the change

$$x = L(\sigma)z, \quad \det L(\sigma) \neq 0, \quad L(\sigma + k\omega) = L(\sigma), \quad k \in Z^m \quad (7)$$

system (1) is reducible to the system

$$D_e z = A^*(\sigma)z, \quad (8)$$

which is equivalent to the system of subsystems

$$D_e z_j = A_j^*(\sigma)z_j, \quad (8_j)$$

where  $A_j^*(\sigma)$  has the form (4),  $j = \overline{1, r}$ ,  $z = (z_1, \dots, z_r)$ .

In the case of the known elementary divisors of matrix  $A(\sigma)$  the system (1), and, consequently, the system (8) can be reduced to an even simpler form.

Indeed, in view of (2) and  $\Lambda$ -properties of the matrix  $A(\sigma)$ , we have full information about its eigenvalues. Hence, it exists a non-singular, really smooth  $\omega$ -periodic matrix of the transformation  $\tilde{L}(\sigma)$  such that

$$\tilde{A}(\sigma) = \tilde{L}^{-1}(\sigma)A(\sigma)\tilde{L}(\sigma), \quad (\tilde{5})$$

where  $\tilde{A}(\sigma) = \text{diag}[\tilde{A}_1(\sigma), \dots, \tilde{A}_l(\sigma)]$  is the second true form of matrix  $A(\sigma)$ ,  $\tilde{A}(\sigma)$  have the form (4), in which the coefficients of the degree are non-zero elements of the last row

$$(\lambda - \lambda_j(\sigma))^{n_j} = \lambda^n + \beta_{j1}(\sigma)\lambda^{n-1} + \beta_{j2}(\sigma)\lambda^{n-2} + \dots + \beta_{jn_j}(\sigma),$$

which are an elementary divisor of the characteristic matrix (3). We write the properties of matrix  $\tilde{L}(\sigma)$  in the form

$$\tilde{L}(\sigma + k\omega) = \tilde{L}(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), k \in Z^m, \tilde{L}(\sigma) \neq 0. \quad (\tilde{6})$$

Here, the eigenvalues  $\lambda_j(\sigma)$ ,  $j = \overline{1, n}$  are assumed to be real-valued.

Then, by the relations  $(\tilde{5})$ ,  $(\tilde{6})$  and the change

$$x = \tilde{L}(\sigma)\tilde{z} \quad (\tilde{7})$$

system (1) can be represented in the form

$$D_e \tilde{z} = \tilde{A}(\sigma)\tilde{z}, \quad (\tilde{8})$$

which consists from  $l$  subsystems

$$D_e \tilde{z}_\rho = \tilde{A}_\rho(\sigma)\tilde{z}_\rho, \quad (\tilde{8}_\rho)$$

where  $\rho = \overline{1, l}$ ,  $\tilde{z}_\rho = (\tilde{z}_{\rho 1}, \dots, \tilde{z}_{\rho n_\rho})$ ,  $n_1 + \dots + n_l = n$ ,  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l)$ .

Next, we should consider the reduction of system (1) to system with Jordan canonical form.

In the case of simple roots of matrices  $A_j^*(\sigma)$ :

$$\lambda_{ji}(\sigma) \neq \lambda_{jk}(\sigma), \quad \sigma \in R^m, \quad (i \neq k)$$

of the characteristic equation

$$\det[\lambda E - A_j(\sigma)] = 0, \quad i, k \in \overline{1, n_j}, \quad j = \overline{1, r}, \quad n_1 + \dots + n_r = n$$

it is not difficult to verify that the Vandermonde matrix of the form

$$B_j(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{j1}(\sigma) & \lambda_{j2}(\sigma) & \dots & \lambda_{jn_j}(\sigma) \\ \lambda_{j1}^2(\sigma) & \lambda_{j2}^2(\sigma) & \dots & \lambda_{jn_j}^2(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{j1}^{n_j-1}(\sigma) & \lambda_{j2}^{n_j-1}(\sigma) & \dots & \lambda_{jn_j}^{n_j-1}(\sigma) \end{pmatrix}$$

satisfies the matrix equation

$$A_j(\sigma)B_j(\sigma) = B_j(\sigma)J_j(\sigma),$$

where  $J_j(\sigma) = \text{diag}[\lambda_{j1}(\sigma), \dots, \lambda_{jn_j}(\sigma)]$  and also

$$\det B_j(\sigma) = \prod_{n_j \geq i > k \geq 1} (\lambda_{ji}(\sigma) - \lambda_{jk}(\sigma)) \neq 0.$$

Consequently, in this case the system (8<sub>i</sub>) under conditions (2) and  $1^0-5^0$  is reducible to the Jordan canonical form

$$D_e y_j = J_j(\sigma)y_j \quad (9_j)$$

by non-singular linear transformation

$$z_j = B_j(\sigma)y_j, \quad \det B_j(\sigma) \neq 0, \quad B_j(\sigma + k\omega) = B_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m, \quad (8_j^*)$$



where  $j = \overline{1, r}$ ,  $\sigma \in R^m$ .

Then for  $\sigma \in R^m$  the transformation

$$z = B(\sigma)y, \det B(\sigma) \neq 0, B(\sigma + k\omega) = B(\sigma) \in C_{\sigma}^{(e)}(R^m), k \in Z^m, (\mathfrak{B}^*)$$

leads system (8) to the  $D_e$ -system of Jordan canonical form

$$D_e y = J(\sigma)y, (9)$$

where  $B(\sigma) = \text{diag}[B_1(\sigma), \dots, B_r(\sigma)]$ ,  $J(\sigma) = \text{diag}[J_1(\sigma), \dots, J_r(\sigma)]$ ,  $y = (y_1, \dots, y_r)$ .

In the case of multiple elementary divisors of matrix  $A(\sigma)$  will be necessary to use its second normal form  $\tilde{A}(\sigma)$  from system  $(\tilde{\mathfrak{B}})$  and its subsystems  $(\tilde{\mathfrak{B}}_{\rho})$  with matrices  $\tilde{A}_{\rho}(\sigma)$ .

To reduce the matrix  $\tilde{A}_{\rho}(\sigma)$  to the Jordan normal form  $J_{\rho} = \lambda_{\rho}E_{\rho} + I_{\rho}$  with identity matrix  $E_{\rho}$  and first off-diagonal oblique range  $I_{\rho}$  it is necessary to construct matrix  $T_{\rho}(\sigma)$  with elements

$$t_{ij}^{(\rho)}(\sigma) = \begin{cases} \sum_{k=1}^j C_{i-1}^{j-1} \lambda_{\rho}^{i-k}(\sigma), & j \leq i, \\ \sum_{k=1}^i C_{i-1}^{j-1} \lambda_{\rho}^{i-k}(\sigma) = b_{ii}, & j > i, \end{cases}$$

where  $C_i^j$  is total number of combinations of  $i$  in a total of  $j$ .

The reader will have no difficulty in verifying that [20]

$$A_{\rho}(\sigma)T_{\rho}(\sigma) = T_{\rho}(\sigma)J_{\rho}(\sigma)$$

and also  $\det T_{\rho}(\sigma) = 1$ .

Then the change

$$\tilde{z}_{\rho} = T_{\rho}(\sigma)\tilde{y}_{\rho}$$

leads the system  $(\tilde{\mathfrak{B}}_{\rho})$  to the system

$$D_e \tilde{y}_{\rho} = J_{\rho}(\sigma)\tilde{y}_{\rho}$$

with a Jordan cage  $J_{\rho} = \lambda_{\rho}E_{\rho} + I_{\rho}$ .

Consequently, the change

$$\tilde{z} = T(\sigma)y \quad (\tilde{\mathfrak{B}}^*)$$

system (8) leads to the system (9) of the Jordan normal form, where  $T(\sigma) = \text{diag}[T_1(\sigma), \dots, T_l(\sigma)]$  is non-singular  $\omega$ -periodic, smooth transformation matrix.

In the case of complex eigenvalues, as can be seen from structures of matrices  $T_{\rho}(\sigma)$  and  $J_{\rho}(\sigma)$ , matrices  $T(\sigma)$  and  $J(\sigma)$  are complex-valued. In view the condition 5<sup>0</sup> its real and imaginary parts are distinguished without any special difficulties for all  $\sigma \in R^m$ .

Thus, by transformations (6)-(6<sup>\*</sup>), (7)-(7<sup>\*</sup>) and (8<sup>\*</sup>)-(8<sup>\*</sup>) non-singular linear change

$$x = L^*(\sigma)y \quad (1^*)$$

leads the  $D_e$ -system (1) to the  $D_e$ -system (9) with Jordan matrix  $J(\sigma)$ . The matrix  $L^*(\sigma)$  is transformation matrix  $L^*(\sigma) = L(\sigma)B(\sigma)$  and it has properties

$$\det L^*(\sigma) \neq 0, L^*(\sigma + k\omega) = L^*(\sigma), k \in Z^m. (1^{**})$$

We call system (9) the Jordan canonical  $D_e$ -system of system (1).

We formulate the main result in the form of the following theorem.

**Theorem.** Let the matrix  $A(\sigma)$  possessing the property (2) has eigenvalues  $\lambda_j(\sigma)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , satisfying the conditions 1<sup>0</sup>-5<sup>0</sup>. Then the system (1) can be reduced to the Jordan canonical  $D_e$ -system (9) by linear transformation  $(1^*)$ -(1<sup>\*\*</sup>).

As an application of the theorem proved, we consider  $D_e$ -system of triangular type

$$\begin{cases} D_e x = A_{11}(\sigma)x, \\ D_e y = A_{21}(\sigma)x + A_{22}(\sigma)y, \end{cases} \quad (10)$$

where  $x$  is  $n_1$ -vector-function,  $y$  is  $n_2$ -vector-function,  $A_{11}(\sigma)$ ,  $A_{21}(\sigma)$  and  $A_{22}(\sigma)$  are multiperiodic with  $\omega$ -vector-period, smooth in  $\sigma \in R^m$  matrices of order  $n_1 \times n_1$ ,  $n_2 \times n_2$ ,  $n_{21} = n_2 \times n_1$ .

We suppose that the block matrix

$$A(\sigma) = \begin{pmatrix} A_{11}(\sigma) & O \\ A_{21}(\sigma) & A_{22}(\sigma) \end{pmatrix} \quad (11)$$

satisfies the condition

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), k \in Z^m (11^*)$$

where  $O$  is zero block. The diagonal blocks  $A_{11}(\sigma)$  and  $A_{22}(\sigma)$  have  $\Lambda$ -properties, therefore, these blocks have Jordan forms

$$J_j(\sigma) = L_j^{-1}(\sigma)A_{jj}(\sigma)L_j(\sigma), j = 1, 2 (12^*)$$

with non-singular  $\omega$ -periodic and smooth matrices

$$L_j(\sigma + k\omega) = L_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \det L_j(\sigma) \neq 0, k \in Z^m, j = 1, 2. (12^{**})$$

Then by theorem linear non-singular  $\omega$ -periodic, smooth in  $\sigma \in R^m$  transformation of form

$$\begin{cases} x = L_1(\sigma)u, \\ y = L_2(\sigma)v \end{cases} \quad (12)$$

leads system (10) to a linear system

$$\begin{cases} D_e u = J_1(\sigma)u, \\ D_e v = B(\sigma)u + J_2(\sigma)v \end{cases} \quad (13)$$

with diagonal blocks  $J_1(\sigma)$  and  $J_2(\sigma)$  of the Jordan canonical form, where

$$B(\sigma) = L_2^{-1}(\sigma)A_{21}(\sigma)L_1(\sigma)$$

is smooth,  $\omega$ -periodic in  $\sigma \in R^m$   $n_2 \times n_1$ -matrix.

It is obvious that the system (13) has more convenient form in comparison with the system (10) for integration and qualitative investigation.

The system of form (13) can be called the semi-canonical form of the triangular system (10).

Thus, we can give the following corollary to theorem proved.

**Corollary.** Let triangular matrix (11) satisfying the condition  $(11^*)$  has  $\Lambda$ -properties. Then the system (10) by transformation (12)-  $(12^*)$ - $(12^{**})$  is reduced to the semi-canonical  $D_e$ -system (13).

In conclusion, we note that the problem posed of studies we have used the methods of [20].

#### REFERENCES

- [1] Sibuya Y. (1965) Some Global Properties of Matrices of Functions of One Variable // Math. Annal. № 161. P.67-77.
- [2] Sibuya Y. (1962) Formal Solutions of a Linear Ordinary Differential Equation of the  $n$ -th Order at a Turning Point // Funkcial. Ekvac. № 4. P.115-139.
- [3] Vazov V. (1968) Asymptotic decomposition of solutions of ordinary differential equations. M.: Mir. (in Russ.)
- [4] Samoilenko A.M. (1987) The elements of mathematical theory of multifrequency oscillations. Invariant tors. M.: Nauka. (in Russ.)
- [5] Lappo-Danilevskiy I.A. (1957) Using functions from matrix to the theory of linear systems of ordinary differential equations. M.: GITTL. (in Russ.)
- [6] Kharasahal V.H. (1970) Almost periodic solutions of ordinary differential equations. Alma-Ata: Nauka. (in Russ.)
- [7] Umbetzhano D.U. (1979) Almost multiperiodic solutions of partial differential equations. Alma-Ata: Nauka. (in Russ.)
- [8] Sartabanov Zh.A. (1989) About single method of studying periodic solutions of equations in partial derivatives of special form // News. Physico-mathematical series. № 1. P.42-48. (in Russ.)
- [9] Sartabanov Zh.A. (2004) The condition of periodicity solutions of differential systems with multivariate time // News. Physico-mathematical series. № 5. P.44-48. (in Russ.)
- [10] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) Periodic in multivariate time of solutions of system equations with differential operator according to the direction of vector field // Eurasian Mathem. Journal. № 1. - P. 62-72. (in Russ.)
- [11] Kulzhumiyeva A.A. (2008) Research of periodic solutions lead to canonic form of systems with linear differential operator in multivariate time // Eurasian Mathem. Journal. № 2. - P. 69-73. (in Russ.)
- [12] Gantmaher F.R. (1966) Matrix theory. M.: Nauka. (in Russ.)
- [13] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2016) On reducibility of linear  $D_e$ -system with constant coefficients on the diagonal to  $D_e$ -system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. №4(84). P. 88-93. (in Russ.)
- [14] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) Periodic with variable period solutions of system of differential equations of multivariate time // Mathematical journal. t.7. № 2(24). - P.52-57. (in Russ.)
- [15] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) To the question of periodic solutions in multivariate time of system  $D_\alpha$  equations // Bulletin of the Orenburg university. № 3. - P.155-157. (in Russ.)
- [16] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) Periodic with multivariate time solutions of system of the quasi-linear differential equations in partial derivative // International Conference «Analysis and Singularities», dedicated to 70th anniversary of V.I. Arnold. Moscow. P.156-158.
- [17] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2009) Oscillations in quasi-linear system with operator of the differentiation on diagonals of multivariate time // International Conference «Modern problems of mathematics, mechanics and their applications» dedicated to the 70-th anniversary of rector of MSU academic V.A. Sadovnichy. Moscow. P.203.
- [18] Muhambetova B.Zh., Sartabanov Zh.A., Kulzhumiyeva A.A. (2015) Multiperiodic solutions of systems of equations with one quasi-linear differential operator in partial derivatives of the first order // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. № 2(78). P. 112-117. (in Russ.)
- [19] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2017) On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. № 1. v. 8. P. 67-75.
- [20] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2013). Periodic solutions of system of differential equations with multivariate time. Uralsk: RIC WKSU. (in Russ.)

**А.А. Кульжумиева<sup>1</sup>, Ж.А. Сартабанов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>М. Өтемісов атындағы Батыс-Қазақстан мемлекеттік университеті, Орал, Қазақстан

<sup>2</sup>Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

#### СЫЗЫҚТЫ БІРТЕКТІ $D_e$ -ЖҮЙЕЛЕРДІ ЖОРДАНДЫҚ КАНОНДЫҚ ТҮРГЕ КЕЛТІРУ

**Аннотация.** Мақалада көп периодты тұрақты матрицамен және диагональ бойынша дифференциалдау операторымен сызықты біртекті жүйенің канондық түрге келтірілуі жөнінде теорема дәлелденген. Алынған нәтижелер негізінде  $D_e$ -сызықты теңдеулер жүйесінің  $(\theta, \omega, \omega)$ -периодты шешімінің бар және жалғыз болуының шартын зертеп және шешімінің құрылымын анықтауға болады. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулердің сызықты жүйелерінің периодты шешімдерін зерттеу кезінде айнымалы элементті матрица-

ларды ыңғайлы түрге келтірілу қажеттілігі туындайды. Осы байланыста [1-2] жұмыстарының нәтижелерін және [3-5] монографияларында оларға түсіндірмелерді ескереміз. Негізгі бөлімі бірдей бірінші ретті дербес туындылы  $D_e$ -теңдеулер жүйесінің көп периодты шешімдерінің сұрақтарын зерттеу [6-7] еңбектерінен бастау алатыны белгілі. Олардың негізінде кейбір әрі қарай сапалы зерттеулері [8-11] жұмыстарында жалғастырған.

**Кілт сөздер:** сызықты біртекті жүйе, дифференциалдық оператор, жордандық канондық түрі, көп периодты матрица, негізгі диагональ, вектор-период.

УДК 35В10

А.А. Кульжумиева<sup>1</sup>, Ж.А. Сартабанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, Уральск, Казахстан;

<sup>2</sup>Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актюбе, Казахстан

### ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ $D_e$ -СИСТЕМ К ЖОРДАНОВОМУ КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

**Аннотация.** В заметке доказана теорема о приводимости к каноническому виду линейной однородной системы с оператором дифференцирования по диагонали и многопериодической матрицей постоянной на диагонали. На основе полученных результатов можно выяснить структуры решений и исследовать условия существования и единственности  $(\theta, \omega, \omega)$ -периодического решения линейной  $D_e$ -системы уравнений. При исследовании периодических решений линейных систем уравнений в частных производных первого порядка возникает необходимость приведения матриц с переменными элементами к удобному виду. В этой связи отметим результаты работ [1-2] и комментарии к ним в монографиях [3-5]. Известно, что исследование вопросов многопериодических решений систем  $D_e$ -уравнений в частных производных первого порядка с одинаковой главной частью берет свое начало в трудах [6-7]. На их основе дальнейшие некоторые качественные исследования продолжены в работах [8-11].

**Ключевые слова:** линейная однородная система, дифференциальный оператор, жордановый канонический вид, многопериодическая матрица, главная диагональ, вектор-период.

#### Сведения об авторах:

Кульжумиева Айман Амангельдиевна - кандидат физико-математических наук, Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, aiman-80@mail.ru;

Сартабанов Жайшылык Алмаганбетович - доктор физико-математических наук, профессор, Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, sartabanov42@mail.ru

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 13 – 21

UDC 53, 532.133, 621.3.018.72.025.1

**N.S. Saidullayeva, K.A Kabyzbekov,  
Kh.A. Ashirbaev, A.O. Kalikulova, D.T. Pazylova**

South Kazakhstan State University named after M. Auezov, Shymkent

**ORGANIZATION OF COMPUTER LAB WORK  
"CALCULATION AND VISUALIZATION OF FORCED OSCILLATIONS  
IN THE PRESENCE OF AN EXTERNAL FORCE" WITH THE USE  
OF THE SOFTWARE PACKAGE MATLAB**

**Abstract.** The organization of computer lab work "Calculation and visualization of forced oscillations in the presence of an external force" is proposed with the use of the Matlab software package: a) external force - constant; b) external force -  $F = F_0 e$ ; c) external force -  $F = F_0 e \cos \beta t$ ; d)  $F = 0$  for  $t < 0$ ;  $F = F_0 t / T$  for  $0 < t < T$ ;  $F = F_0$  for  $t > T$ . For each of these cases, solutions, calculation programs and visualizations are presented. The results are presented in the form of graphs of the dependence of the acting external force on time and the displacement of the particle from the equilibrium position from time.

**Key words:** external force, damped oscillation, calculation, visualization, graph.

The capabilities of the Matlab system are huge, and in terms of the speed of tasks, it is ahead of many other similar systems. All these features make the MATLAB system very attractive for use in the educational process in higher education institutions [1].

One of the difficult tasks of introducing the results of the use of information technologies in educational institutions is the insufficient practical ability of teachers to use computer models of physical phenomena to organize computer lab work.

Revitalization, motivation and, ultimately, the effectiveness of training largely depend on the organization of computer laboratory works. We have previously written about the creation and use of models of the organization for the performance of computer laboratory work on the study of various physical phenomena in the educational process [2-20].

This article gives an example of the use of the Matlab system in organizing the computer lab work "Calculation and visualization of forced oscillations in the presence of an external force" for the performance by the students.

**Theme of laboratory work No. 1: Calculation and visualization of forced oscillations in the presence of an external force:** Determine the forced oscillations of the system under the influence of the external force  $F(t)$ , if at the initial instant  $t = 0$  the system is at rest in the equilibrium position ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) For the following cases:

a)  $F = \text{const} = F_0$ . The system oscillates according to the law

$$x = \frac{a}{m\omega^2}(\omega t - \sin \omega t).$$

Calculation and visualization program

```
>> w=1;
>> a=2;
>> m=0.1;
>> t=0:0.1:30;
```

```
>> x=a./(m*w.^2).*(w.*t-sin(w.*t));
>> plot(t,x,'k-')
>> grid on
```

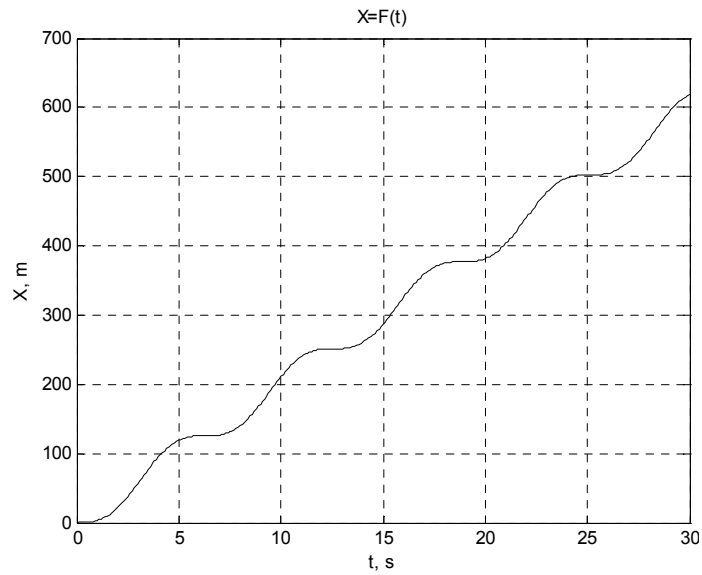


Fig.1. The oscillation of the system under the influence of a constant force

The action of a constant force leads to a shift in the equilibrium position around which oscillations occur.

b)  $F=F_0 e^{-at}$  .

The system oscillates according to the law

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + a^2)} \left( e^{-at} - \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right)$$

Calculation and visualization program

```
>> f0=2; w0=1;
>> m=0.1;
>>f0=2; w0=1;
>>m=0.1;
>> t=0:0.1:4;
```

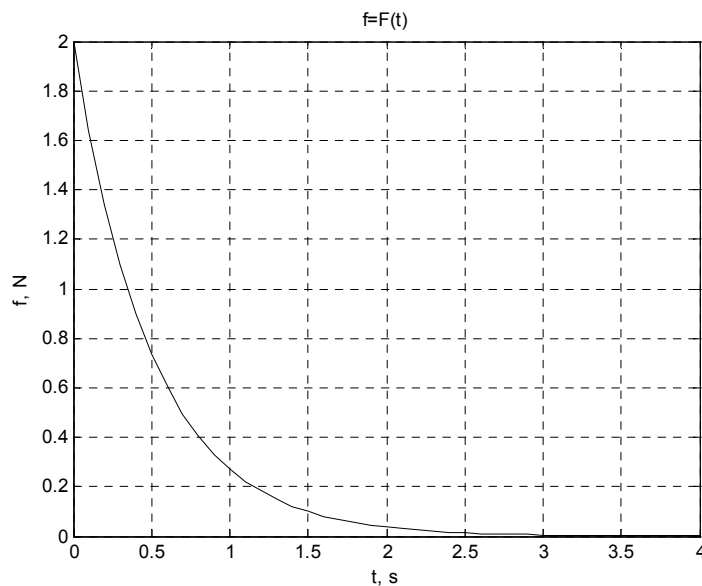


Fig.2. The force acting on the system

```

>> t=0:0.1:30;
>> a=2;
>> x=(f0./(m*(w0.^2+a.^2)).*(exp(-a.*t)-cos(w.*t)+a.*sin(w.*t)./w);
>> plot(t,x,'k-')
>> grid on
>> xlabel('t, s')
>> ylabel('X, m')
>> title('X=F(t)')

```

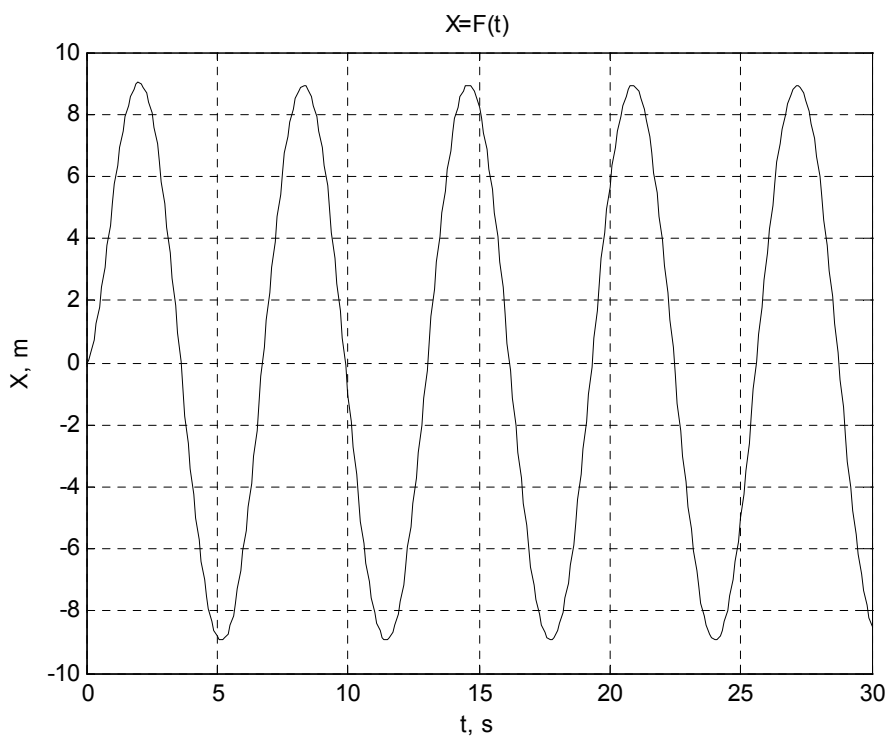


Fig. 3. Oscillation of the system under the influence of the force  $F = F_0 e^{-at}$ .

c)  $F = F_0 e^{-at} \cos \beta t$ . The oscillation of the system under the action of such a force occurs according to the law

$$\begin{aligned}
 x = & \frac{F_0}{m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha\beta^2]} \left\{ -(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \omega t + \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha}{\omega} (\omega + \alpha^2 + \beta^2) \sin \omega t + e^{-at} [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t] \right\}
 \end{aligned}$$

Calculation and visualization program

```

>> f0=2; w0=1;
>> m=0.1;
>> t=0:0.1:4;
>> a=2;
>> b=0.1;
>> f=f0.*exp(-a.*t).*cos(b.*t);
>> plot(t,f,'k-')
>> grid

```

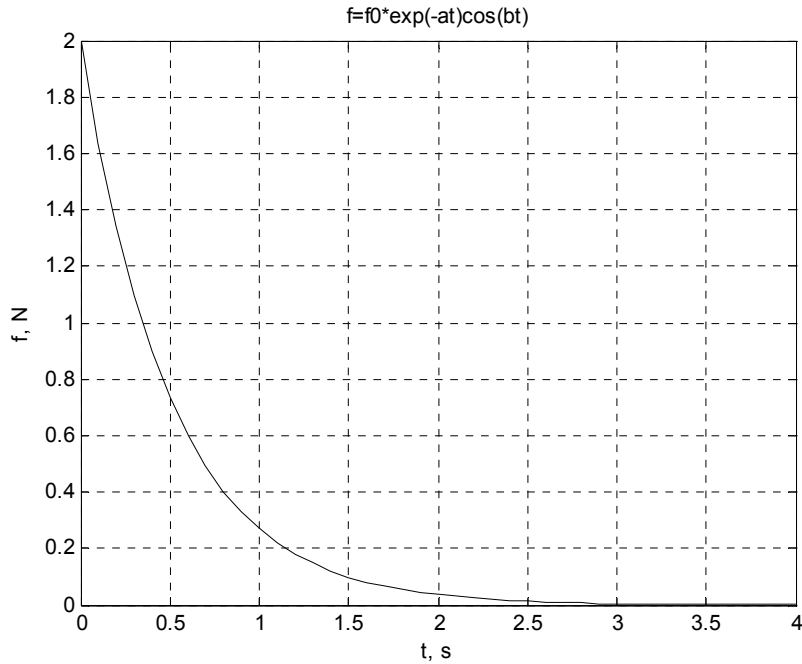


Fig.4. The force acting on the system is  $F = F_0 e^{-at} \cos bt$ .

```
>> t=0:0.1:30;
>> a=2;
>> b=0.1;
>> A=f0/(m.*((w.^2+a.^2-b.^2).^2+4.*a.*b));
>> B=(w.^2+a.^2-b.^2).^2;
>> C=a.*(w.^2+a.^2-b.^2).^2;
>> x=A.*(-B).*cos(w.*t)+C./w.*(sin(w.*t)+exp(-a.*t)).*(B.*cos(w.*t)-2.*b.*a.*sin(w.*t));
>> plot(t,x,'k-')
>> grid on
```

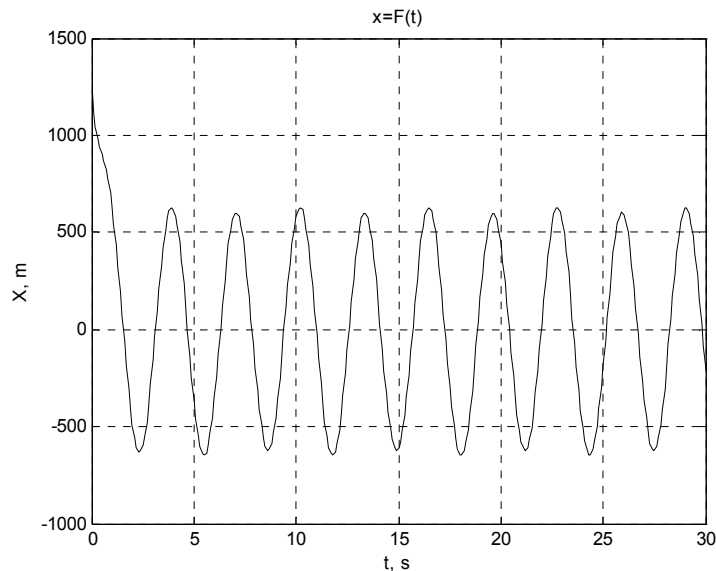


Fig.5. The oscillation of the system under the influence of force  $F = F_0 e^{-at} \cos bt$ .

d) Determine the oscillation of the system after the action of an external force varying according to the law  $F = 0$  for  $t < 0$ ,  $F = F_0 t / T$  for  $0 < t < T$ ,  $F = F_0$  for  $t > T$  (Fig. 6); Up to the instant  $t = 0$  the system is at rest in the equilibrium position.



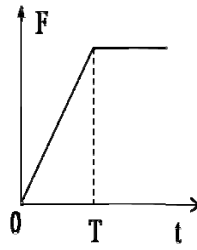


Fig. 6. The force acting on the system

Solution: for  $0 < t < T$

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$$

For  $t < T$ , we seek the solution in the form

$$x = c_1 \cos \omega(t - T) + c_2 \sin \omega(t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

For  $t = T$ , from the continuity of  $x$  and  $x'$  we find:

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \sin \omega T, c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3} (1 - \cos \omega T).$$

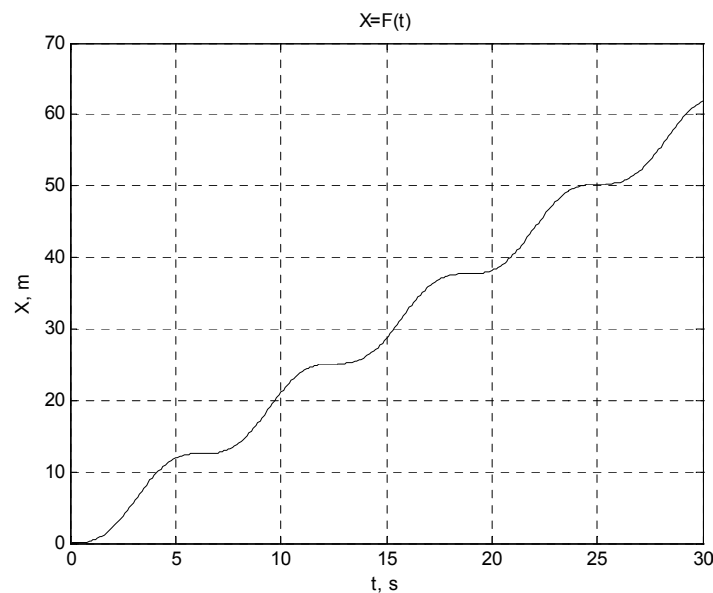
The amplitude of the oscillations

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

Note that the smaller the slower the "power"  $F_0$  is turned on (ie, the larger  $T$ ).

Calculation and visualization program

```
>> w=1;
>> T=10;
>> t=0:0.1:30;
>> f0=2; m=0.1;
>> x1=f0./(m.*T.*w.^3);
>> x=x1.*(w.*t-sin(w.*t));
>> plot(t,x,'k-')
>> grid on
```

Fig.7. The oscillation of the system under the influence of force at  $t > T$ ,  $F = F_0$

```

>> w=1;
>> T=10;
>> t=0:0.1:30;
>> f0=2; m=0.1;
>> x1=f0./(m.*T.*w.^3);
>> x=x1.*(w.*t-sin(w.*t));
>> plot(t,x,'k-')
>> grid on
>> c1=-x1.*sin(w.*T);
>> c2=x1.*(1-cos(w.*t));
>> X=c1.*cos(w.*(t-T))+c2.*sin(w.*(t-T))+f0./(m.*w.^2);
>> plot(t,X,'k-')
>> grid on

```

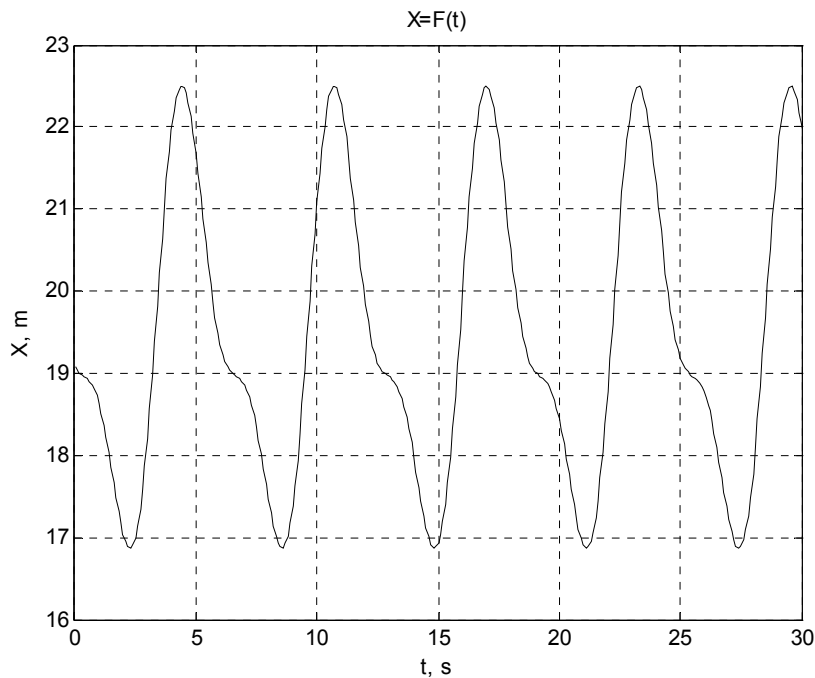


Fig.8. The oscillation of the system under the influence of force at  $0 < t < T$

e) Find the trajectory of the motion of the particle in the central field  $U = k r^2 / 2$ , the so-called spatial oscillator. The calculated formulas  $w = \sqrt{k / m}$  is the eigenvector frequency,  $x = a \cos (wt + \alpha)$ ,  $y = b \cos (wt + \beta)$  - where a is the amplitude of the oscillation.

Calculation and visualization program

```

>> a=1; b=2; w=1;
>> t=0:0.1:30;
>> alfa=pi./3; beta=pi./6;
>> fi=w.*t-alfa; delta=beta-alfa;
>> x=a.*cos(fi);
>> y=b.*cos(delta).*cos(fi)-b.*sin(delta).*sin(fi);
>> plot(x,y,'k-')
>> grid on
>> xlabel('X')
>> ylabel('Y')
>> title('Y=F(X)')

```

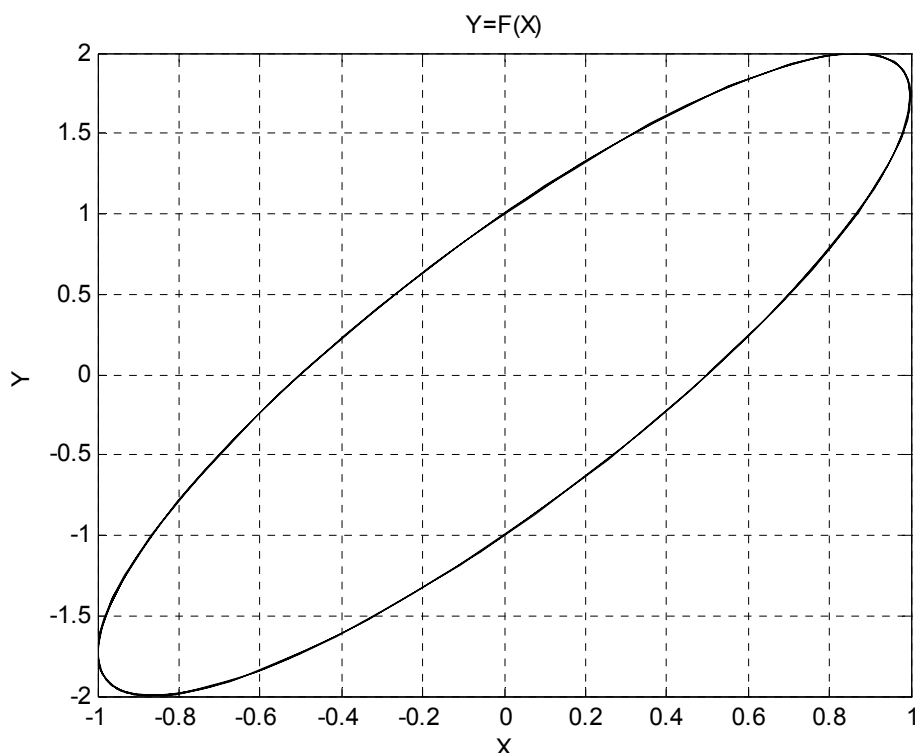


Fig.9. Trajectory of the motion of a particle

Presented laboratory works were performed by third-year students of our university, who are studying in the specialty 5B060400-physics, while conducting laboratory classes on the discipline "Computer simulation of physical phenomena." Especially I want to note that visualization of calculations in the form of graphs allows you to better understand the essence of physical processes and students with great desire perform this part of the task.

#### REFERENCES

- [1] V. P. Dyakonov. *MATLAB training course*. - SPb.: Peter, **2001**. –P533. (in Russ.).
- [2] K.A. Kabyzbekov, Bayzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. *Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation*. Tomsk **2011**.,P210-215. (in Russ.).
- [3] K. A. Kabyzbekov, P.A. Saidakhmetov, A.S. Arysbaeva. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. *News of NAS of RK, series physical-math.*, Almaty, **2013**, №6, P82-89. (in Russ.).
- [4] K.A. Kabyzbekov, P.A. Saidahmetov, L.E. Baydullaeva, R.A. Abduraimov . Procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. *News NAS of RK, series physical-math.*, Almaty, **2013**. №6, P114-121. (in Russ.).
- [5] K.A. Kabyzbekov, N.S. Saidullayeva, P.A. Saidakhmetov. Multimedia demonstration models of electromagnetic phenomena and their use in the educational process. *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Chemistry in Building Materials and Materials Science in the XX Century"* **2008**,p. 139-144. (in Russ.).
- [6] K.A., Kabyzbekov, N.S. Saidullayeva, R.S. Spabekova. Experience of work of the Department of Physics on the creation and expansion of information resources on the discipline "Physics" for tehn. special use and their use in the educational process to improve the quality of educational services. *Collected works of conference. Actual problems of education, science and production*. 2 vol. SKSU named after M.Auezov , Shymkent. **2008** (in Russ.).
- [7] K.A. Kabyzbekov, N.S. Saidullayeva., P.A. Saidakhmetov, T.A. Turmambekov, Omasheva G.Sh. Computer model of laboratory work "Verification of the Kirchhoff rules" program for computers. Certificate of the State registration of the intellectual property object, №. 319. 22. 04. **2009** (in Russ.).
- [8] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Saikdahmetov P.A., Baigulova Z.A., Baidullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. *News NAS of RK, series physical-math/*, Almaty, №1 (299), **2015**, P14-20. (in Russ.).

[9] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalakhova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. *News of NAS of RK, series physical-math.*, № 3 (301), Almaty, **2015**, P131-136(in Russ.).

[10] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalakhova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. *News NAS of RK, series physical-math.*, № 3 (301) Almaty, **2015**, P155-160. (in Russ.).

[11] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. **2015**, 284 p. (in Russ.).

[12] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. *Modern high technologies.* №4, Moscow, 2015. P40-43. (in Russ.).

[13] Kabyzbekov K. A., Saidakhmetov P.A., Ashirbaev H. A., Omashova G. Sh., Berdalieva J. Model of the form organization of computer laboratory works on research of electromagnetic oscillations. *News NAS of RK, series physical-math.*, №1(305), **2016**, P111-116. (in Russ.).

[14] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P.A., Omashova G. Sh., Berdalieva J., Dzhumagalieva A. I Model of the form of the organization of computer laboratory study of the interaction between two infinitely long parallel conductors with currents. *News NAS of RK, series physical-math.*, №1(305), **2016**, P 135-140. (in Russ.).

[15] Kabyzbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. *News NAS of RK, series physical-math.*, № 2, **2016**, P92-97. (in Russ.).

[16] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidakhmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organization of computer computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. *News NAS of RK, series physical-math.*, № 2, **2016**, P98-103. (in Russ.).

[17] Kabyzbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Ashirbaev H.A., Abdubaeva Ph.I., Doskanova A.E. Examination of operation gaz on computer model. *The bulletin of NAS of RK*, №2 **2016**. P83-88. (in Russ.).

[18] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P.A., Omashova G.Sh., Serikbaeva G.S., Sujerkulova Zh. N. *News NAS of RK, series physical-math.*, № 2, **2016**, P84-91. (in Russ.).

[19] Kabyzbekov K.A., Madjarov N.T., Saidakhmetov P.A. An Independent design research assignments, computer laboratory work on thermodynamics. Proceedings of the IX International scientific-methodical conference. Teaching natural Sciences (biology, physics, chemistry) mathematics and computer science. Tomsk-**2016**, P 93-99. (in Russ.).

[20] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P.A., Omashova G.Sh. Organization computer laboratory work on the study of reactance inductor in an ac circuit. *The bulletin of NAS of RK*, №1, **2017**. P 77-82. (in Russ.).

[21] Kabyzbekov K. A., Saidakhmetov P. A., Omashova G.Sh., Ashirbaev H.A., Abekova J.A. Organization of computer laboratory works on the study of the isotherms of a real gas. *News NAS of RK, series physical-math.*, №1, **2017**, P 77-83. (in Russ.).

УДК 53, 532.133, 621.3.018.72.025.1

**Н.С. Сайдуллаева, К.А. Кабылбеков, Х.А. Аширбаев, А.О. Каликулова, Д.Т. Пазылова**

М.О.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік университеті, Шымкент қаласы

**МАТЛАВ БАҒДАРЛАМАЛАР ПАКЕТІН ҚОЛДАНЫП  
«СЫРТҚЫ КҮШ ӘСЕР ЕТКЕНДЕ МӘЖБҮРЛІ ТЕРБЕЛІСТЕРДІ ЕСЕПТЕУ  
ЖӘНЕ ВИЗУАЛИЗАЦИЯЛАУ» КОМПЬЮТЕРЛІК  
ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ ОРЫНДАУДЫ ҰЙЫМДАСТЫРУ**

**Аннотация.** Matlab бағдарламалар пакетін қолданып «Сыртқы күш әсер еткенде мәжбүрлі тербелістерді есептеу және визуализациялау» компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастыру ұсынылады:

а) сыртқы күш – тұрақты; в) сыртқы күш -  $F=F_0 e^{-at}$  ;

с) сыртқы күш -  $F=F_0 e^{-at} \cos \beta t$ ; д)  $t < 0$  кезінде  $F = 0$ ;  $0 < t < T$  кезінде

$F = F_0 t/T$ ;  $t > T$  кезінде  $F = F_0$ . Осы әр жағдай үшін шешу жолдары, есептеу және визуализация бағдарламалары келтірілген. Нәтижелер уақыттан әсер етуші сыртқы күштің және уақыттан тепе-теңдік қалпынан бөлшектің ығысуының тәуелділік графиктері түрінде келтірілген.

**Тірек сөздер:** сыртқы күш, өшетін тербеліс, есептеу, визуализация, график.

**Н.С. Сайдуллаева, К.А. Кабылбеков,  
Х.А. Аширбаев, А.О. Каликулова, Д.Т. Пазылова**

Южно-Казахстанский Государственный Университет имени М.О.Ауэзова, г.Шымкент

**ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ  
«РАСЧЕТ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕЙ  
СИЛЫ» С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАКЕТА ПРОГРАММ MATLAB**

**Аннотация.** Предлагается организация компьютерной лабораторной работы «Расчет и визуализация вынужденных колебаний при наличии внешней силы» с применением пакета программ Matlab: а) внешняя сила – постоянная; в) внешняя сила -  $F=F_0 e^{-at}$ ;

с) внешняя сила -  $F=F_0 e^{-at} \cos \beta t$ ; д)  $F = 0$  при  $t < 0$ ;  $F = F_0 t/T$  при  $0 < t < T$ ;  $F = F_0$  при  $t > T$ . Для каждого из этих случаев приведены решения, программы расчетов и визуализации. Результаты представлены в виде графиков зависимостей действующей внешней силы от времени и смещения частицы от положения равновесия от времени.

**Ключевые слова:** внешняя сила, затухающее колебание, расчет, визуализация, график.

**Сведения об авторах:**

Сайдуллаева Нурила Сайдуллаевна – к. ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой «Физика для технических специальностей» ЮКГУ им.М.Ауэзова, 87073735675, nurila-60@mail.ru;

Кабылбеков Кенжехан Арыстанбекович - к.ф.-м.н., доцент кафедры «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им.М.Ауэзова., 87022011512, kenkab@mail.ru;

Аширбаев Хасымхан Аширбаевич- к.т.н. доцент кафедры «Математика для технических специальностей» ЮКГУ им.М.Ауэзова., 87013430169, Ashirdaev54@mail.ru;

Каликулова Ахмарал Омиралиевна -магистр, старший преподаватель кафедры иностранных языков для гуманитарных специальностей ЮКГУ им.М.Ауэзова, 8 7052256595, mara.81-15@mail.ru;

Пазылова Дана Темирбековна– магистр, старший преподаватель кафедры «Физика для технических специальностей» ЮКГУ им.М.Ауэзова, 87478989526, danapazyl. @mail.ru

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 22 – 25

UDK 539.4: 620.19

**N.S. Saidullayeva, N.S. Tagaev, D.T. Pazylova, A.O. Kalikulova**

South-Kazakhstan State University after M.O.Auezov, Shymkent  
nurila-60@mail.ru

**EFFECT OF SINGLE OVERLOAD  
ON THE DEVELOPMENT OF A FATIGUE CRACK**

**Abstract.** In this paper we present the results of studies on the effect of a single overload on the kinetics of fatigue crack growth rate (FCGR), and the reasons leading to the delay of fatigue crack growth in flat steel specimens with an edge notch. It is known that the presence of stress concentration, and defects in cases of fatigue cracks may occur in the early stages of operation, which lowers the fatigue resistance characteristics of the structure. In these cases, to solve the problems of strength and its increase is necessary to study the kinetics of fatigue crack growth methods applied fracture mechanics. To do this, in this paper are tested and characterized based cyclic crack flat specimens with a cross section 10x60 mm with a notched edge on a universal electrohydraulic machine with servo control of the company «Instron» (England). Changing the FCGR in the impact zone overload evidence of the heterogeneity of plastic deformation zone caused by overload. Slowing and acceleration of crack growth can be affected by the ratio skazat sizes of plastic zones formed before and after the overload and stress distribution in these areas, which leads to the closure of fatigue cracks. For an explanation of these factors during the test were measured closing fatigue cracks to determine the effective scope of the stress intensity factor  $\Delta K_{eff}$ . Effect of single overload the delay in development of fatigue cracks is dependent on the degree of overload  $R_q$ . Based on this study researches developed methods to assess and reasonably extend the survivability of parts, thus enhancing the reliability of the machines.

**Keywords:** stress, defect, fatigue crack growth rate of a fatigue crack, the stress intensity factor, overload, endurance and reliability.

**1. Introduction**

Operational reliability and durability of many structures associated with the cyclic strength of their elements, such as, in particular, the operation of the hydraulic turbine impeller blades is on the railway wagon is the half-rails, crankshafts in the engine are exposed to variable loads.

If there is a concentration of stresses and defects in cases of fatigue cracks may occur in the early stages of operation, which reduces the reliability of the structure.

In these cases, to solve the problems of strength and its increase is necessary to study the kinetics of fatigue crack growth (RTH). When operating the machine parts on the kinetics of RTA affect single or multiple overload. They can lead to a delay in the development of a fatigue crack. This phenomenon is of great practical importance for the development of methods to assess the survivability of machine parts.

In this paper we present the results of studies on the nature of the effect of a single overload on the kinetics of fatigue crack growth rate, and the reasons leading to the delay of fatigue crack growth in flat steel specimens with an edge notch.

**2. Materials and methods**

The starting material for the manufacture of the samples were platen 200 mm thick, the last full-time modes of heat treatment. Samples of cut rolled steel in the rolling direction.

Tests for studies of fatigue crack propagation after a single overload was conducted on flat specimens with a cross section 10h60 mm with one edge notch on the universal machine with servo elektrogidravlicheskey company «Instron» (England).

As is known, the test to determine the properties of materials under cyclic loading are made in a consistent measurement for the given parameters load cycle of length  $l$  of a growing fatigue crack and the number of loading cycles  $N$ , and on the basis of these data is determined by the rate of fatigue crack growth:  $V = dl / dN$  as average increase its length of one cycle at specified test conditions [1].

After that, find the relationship between the FCGR  $dl / dN$  on the scope of the stress intensity factor -  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ , ie builds a so-called kinetic diagram of fatigue failure (KDUR). KDUR are S-shaped curve that has three distinct areas: the near-threshold (I), middle (II) and third (III). Our research is mainly quoted at the junction of I and II sites.

Initsiryuschy cut edge for initial cultivation of a fatigue crack was performed using a fine mill (thickness = 1 mm) to a depth of 2 mm, then the method elektroerozivnym adjusted length cut to 4 mm. The result is a cut corner radius of about 0.15 mm. It is possible to reduce the load and reduce the time to the initial nucleation of fatigue cracks.

Test samples were carried out at room temperature under a sinusoidal loading frequency of 50 Hz. After the achievement of the fatigue crack length  $l = 6\text{mm}$  once handled the sample with an equal degree of overload:

$$R_q = \frac{K_{max}^{i\ddot{a}\delta}}{K_{max}} = 1,5$$

Where  $K_{max}^{i\ddot{a}\delta}$  the overload load. After this test continued with the former regime. Results of the study RTH shown in Figure 1.

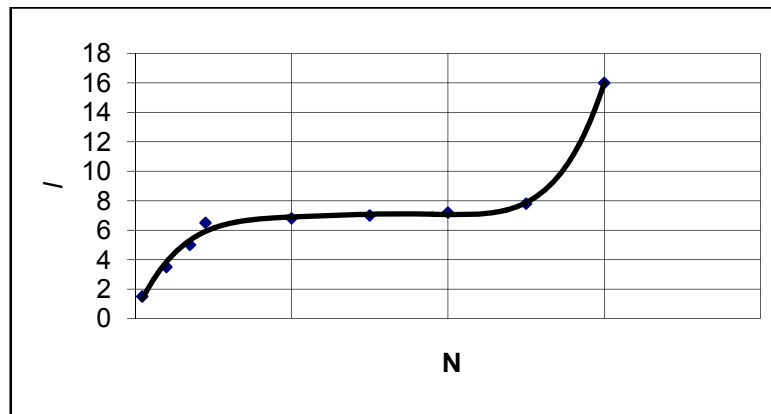


Figure 1

As seen in Figure 1 after the overload crack growth ceases to certain loading cycles.

Why stops the growth of cracks and what happens when you overload a single?

Results and discussion. Overload leads to a significant disclosure to the crack tip blunting and vetvlienyu Usti cracks in the vicinity of which is highly developed plastic zone (Figure 2).



a) before the overload b) after overload

Figure 2: The top of the fatigue crack

In this case, after removal of the load can be seen the residual crack opening. Cyclic loading after an overload leads to the formation of a new crack one of the branches of the crack (Figure 3).



Figure 3. Formation of a new fatigue crack one of the branches

Crack after a certain load is distributed in the zone of plastic deformation created by the overload. In connection with this change the kinetics of the crack. Speed as you move a crack at some distances after application of overload begins abruptly падат, then after reaching the minimum value begins to increase. Before the fall of the FCGR after the overload at first she really "accelerated." This is apparently associated with a break overload load loosened, damaged zone ahead of the initial crack formed by cyclic loading, and closing with the lack of new cracks. FCGR corresponds to a significant slowdown began closing the crack tip, which is observed only after a certain part of the zone of plastic deformation caused by overload [2, 3]. After passing a zone of influence overload FCGR reaches a new steady level will.

**3. Results and discussion.** Change the CPT in the impact zone overload evidence of the heterogeneity of plastic deformation zone caused by overload. Slowing and acceleration of crack growth can be affected by the ratio skazat sizes of plastic zones formed before and after the overload and stress distribution in these areas, which leads to the closure of fatigue cracks.

Conclusions. For an explanation of these factors during the test were measured closing fatigue cracks to determine the effective scope of the stress intensity factor  $\Delta K_{eff}$  [4].

Effect of single overload the delay in development of fatigue cracks is dependent on the degree of overload  $R_q$

On the basis of these studies, methods have been developed to assess and renew the vitality of the details that tend to increase the reliability of the machines.

#### REFERENCES

[1] Mamaev E.I. Methods and the means of tests for cyclic resistance to cracks. Machine building. Encyclopedia in forty volumes / physical-mechanical properties. Testings of metallic materials. No. II-1 / hearth is general. ed. E.I. Mamaevoy. M.: Machine building. **2010**. p. 548-555. (in Russ.).

[2] Influence of the loading conditions on the cyclic resistance to cracks. Machine building. Encyclopedia in forty volumes / physical-mechanical properties. Testings of metallic materials. No. II-1 / hearth is general. ed. E.I. Mamaevoy. M.: Machine building. **2010**. p. 559-569. (in Russ.).

[3] Suresh S. Micromechanisms of fatigue crack growth retardation following overloads // Eng. Fract. Mech. – **1983**. – 18. No.3. P. 577-593. (in Eng.).

[4] Tagaev N.S. Methods of determining the threshold value of the coefficient of intensity stress and the estimation of the effect Elber. Transactions of international scientific and technical conference "The actual problems of mechanics and machine building". city. Almaty, KazNTU named after . K. Satbaev, 17-18 June **2009**. P.195-198 . (in Russ.).

**Н.С. Сайдуллаева, Н.С. Тагаев, Д.Т. Пазылова, А.О.Каликулова**

М.О.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан Мемлекеттік университеті, Шымкент қаласы

#### **БІРРЕТТІ АРТЫҚ ЖҮКТЕМЕНІҢ ШАРШАУ СЫЗАТТЫҢ ДАМУЫНА ӘСЕРІ**

**Аннотация.** Бұл мақалада бірреті артық жүктеменің шаршау сызатының өсу жылдамдығы кинетикасына әсері (ШСЖ) және шеттік ойығы бар жазық болат үлгілерде шаршау сызаттарының өсуін тежейтін себептерді зерттеу нәтижелері келтірілген.



Қолданудың алғашқы кезеңдерінде кернеу мен ақаулардың концентрациясы орын алғанда шаршау сызаттары туындауы мүмкін екені белгілі. Бұл өз кезегінде конструкция элементтерінің шаршауға кедергі сипаттамаларын төмендетеді.

Мұндай жағдайларда, беріктілік мәселелерін шешу және оны арттыру үшін бұзылудың қолданбалы механика әдістерін қолданып, шаршау сызатының өсу кинетикасын зерттеу қажет. Осы мақсатта «Instron» фирмасының (Англия) сервобасқаруы бар әмбебап электрогидравликалық машинада бір шеттік ойығы бар қимасы 10x60 мм жазық үлгілердің циклдік сызатқа төзімділік сипаттамалары сыналып алынды. Жүктеменің әсер ету аумағында ШСЖ өзгерісі артық жүктеме пайда еткен пластикалық деформация аймағының бертекті еместігін көрсетеді. Сызаттардың өсуінің тежелуі және жеделдетуіне артық жүктемелерден дейін және кейін пайда болған пластикалық деформация аймақтары мөлшерінің қатынасы мен осы аймақтарда кернеулердің таралуы әсерін тигізеді. Осы факторларды түсіндіру үшін сынақ кезінде  $\Delta K_{\text{eff}}$  кернеулер интенсивтілік коэффициентінің эффективті қарқындығын анықтау үшін шаршау сызаттарының жабылуы өлшенді. Бірретті артық жүктеменің шаршау сызатының дамуын тежейтін әсері  $R_q$  артық жүктеме дәрежесіне тәуелді.

Осы зерттеулердің негізінде машиналар сенімділігін арттыруға әсерін тигізетін, бөлшектердің өміршеңдігін бағалап, ұзартуға мүмкіндік беретін әдістер әзірленді.

**Тірек сөздер:** кернеу, ақау, шаршау, сызат, шаршау сызатының өсу жылдамдығы, кернеулердің интенсивтілік дәрежесі, артық жүктеме, өміршеңдік, сенімділік.

УДК 539.4: 620.19

Н.С. Сайдуллаева, Н.С. Тагаев, Д.Т. Пазылова, А.О. Каликулова

Южно-Казахстанский Государственный Университет имени М.О.Ауэзова, г.Шымкент

### ВЛИЯНИЕ ОДНОКРАТНОЙ ПЕРЕГРУЗКИ НА РАЗВИТИЕ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

**Аннотация.** В этой работе приведены результаты исследований по изучению влияния однократной перегрузки на кинетику скорости роста усталостной трещины (СРТ), и причины приводящих к задержке роста усталостных трещин на плоских стальных образцах с краевым надрезом.

Как известно, что при наличии концентрации напряжений и дефектов в таких случаях могут возникнуть усталостные трещины на ранних стадиях эксплуатации, что снижает характеристики сопротивления усталости элементов конструкции.

В этих случаях, для решения проблем прочности и ее повышение необходимо изучить кинетику роста усталостной трещины методами прикладной механики разрушения. Для этого в этой работе испытаны и получены характеристики циклической трещиностойкости плоских образцах с сечением 10x60 мм с одним краевым надрезом на универсальной электрогидравлической машине с сервоуправлением фирмы «Instron» (Англия). Изменение СРТ в зоне воздействия перегрузки свидетельствует о неоднородности зоны пластической деформации, вызванной перегрузкой. На замедление и ускорение роста трещины, можно сказать влияет соотношение размеров зон пластической деформации, образованных до и после перегрузок, и распределение напряжений в этих зонах, что обуславливает закрытие усталостной трещины. Для объяснения этих факторов во время испытаний измерялись закрытия усталостных трещин для определения эффективного размаха коэффициента интенсивности напряжений  $\Delta K_{\text{eff}}$ . Влияние однократных перегрузок на задержку в развитии усталостной трещины зависит от степени перегрузки  $R_q$ .

На основании этих исследований разработаны методы позволяющие оценить и обоснованно продлить живучесть деталей, тем самым повысить надежность машин.

**Ключевые слова:** напряжение, дефект, усталость, трещина, скорость роста усталостной трещины, коэффициент интенсивности напряжений, перегрузка, живучесть, надежность.

#### Сведения об авторах:

Сайдуллаева Нурила Сайдуллаевна – к. ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой «Физика для технических специальностей» ЮКГУ им.М.Ауэзова, 87073735675, nurila-60@mail.ru;

Тагаев Нурлыбек Сайдуллаевич- к.т.н. доцент кафедры «Транспорт, транспортная техника и организация перевозок» ЮКГУ им.М.Ауэзова., 87013430169, pureke\_55@mail.ru;

Пазылова Дана Темирбековна– магистр, старший преподаватель кафедры «Физика для технических специальностей» ЮКГУ им.М.Ауэзова, 87478989526, danapazyl@mail.ru;

Каликулова Ахмарал Омиевевна -магистр, старший преподаватель кафедры иностранных языков для гуманитарных специальностей ЮКГУ им.М.Ауэзова, 8 7052256595, mara.81-15@mail.ru

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 26 – 34

UDC: 550.3; 550.36; 551.24

**Zh.Sh. Zhantaev<sup>1</sup>, A.V. Vilyayev<sup>1</sup>, E.B. Serikbaeva<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>National Center of Space Research and Technology, Institute  
of Ionosphere, Republic of Kazakhstan, Almaty, Kamenskoe Plateau  
[vilyayev@gmail.com](mailto:vilyayev@gmail.com)

**THE APPLICATION OF GEOTHERMAL MODELING  
IN THE ASSESSMENT OF THE FEATURES  
OF THE SEISMIC REGIME OF THE NORTHERN TIEN SHAN**

**Abstract.** The effect of temperature distribution of the earth's crust on the formation of seismic activity on the example of the Northern Tien Shan is considered. Data on the parameters of the heat flow are generalized and systematized. The experimental material on the physical properties of rocks, direct determinations of the heat flow at the surface, and correlation relationships of geothermal parameters with seismic velocities were used. The distribution of heat-generating elements with depth is considered. Compiled 3D geothermal models. A comparative analysis of the model with manifestations of seismic activity was performed.

The three-dimensional equation of conductive heat transfer with initial and boundary conditions and with additional sources of radiogenic heat is solved by numerical methods.

Under the mountain structures of the Northern Tien Shan at depths of 35-60 km, areas of partial melting with rock temperatures at 100 ÷ 250 °C above the solidus are identified. The field of thermoelastic deformations, reaching from 20 to 40% of the total lithostatic pressure, is calculated. Areas of the earth's crust are identified in which rocks are under conditions of thermal stresses exceeding their critical strength. A comparative analysis with manifestations of seismic activity of the territory was carried out. According to the morphology of the regions of anomalous temperatures and thermal stresses, the criteria controlling the distribution of hypocenters of earthquakes are determined. The strongest catastrophic earthquakes of the last century (Vernenskoye M = 7.1, Keminskoye M = 8.0) occurred in the regions of maximum influx of mantle heat.

A conclusion is made about the prevailing influence of temperature conditions on the development of the seismic process.

**Key words:** temperature, heat flow, thermal stress, earth crust, seismicity, mathematical modeling.

УДК: 550.3; 550.36; 551.24

**Ж.Ш. Жантаев<sup>1</sup>, А.В. Виляев<sup>1</sup>, Э.Б. Серикбаева<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Национальный центр космических исследований и технологий,  
Институт ионосферы, Республика Казахстан, Алматы, Каменское плато

**Применение геотермического моделирования  
в оценке особенностей сейсмического режима  
Северного Тянь-Шаня**

**Аннотация.** Рассматривается воздействие неравномерного распределения температуры земных недр на формирование сейсмической активности на примере территории Северного Тянь-Шаня. Обобщены и систематизированы данные о параметрах теплового потока земной коры. Выявлены закономерности распре-

деления теплогенерирующих элементов с глубиной, составлены объемные 3D геотермические модели. Выполнен сравнительный анализ геотермической модели с проявлениями сейсмической активности.

Численными методами решено трехмерное уравнение кондуктивного теплопереноса с начальными и граничными условиями и с учетом дополнительных источников радиогенного тепла. Тепловой поток на поверхности определен по данным наземных измерений в скважинах. Привлечена информация о распределении в разрезе скорости продольных волн, зависимости коэффициента теплопроводности от петрологического состава горных пород, температуры и давления.

Под горными сооружениями Северного Тянь-Шаня на глубинах 35-60 км выделены области частичного плавления с температурами пород на 100÷250 °С выше солидуса. По изотерме аномальных температур в 230 °С и изобаре термоупругих напряжений интенсивностью 0.35 GPa оконтурена область температурных нагрузок, превышающих критическую прочность горных пород. Максимальные значения термонапряжений в аномальной области достигают 0.48 GPa, что составляет 25÷30% от литостатического давления. Наиболее сильные катастрофические землетрясения прошлого века (Верненское  $M=7.1$ , Кеминское  $M=8.0$ ) произошли в областях максимального привноса мантийного тепла.

Делается вывод о преобладающем влиянии температурных условий на формирование сейсмического процесса.

**Ключевые слова:** температура, тепловой поток, термонапряжение, земная кора, сейсмичность, математическое моделирование.

### Введение

Температурное поле в большой степени определяет физическое состояние материала литосферы Земли. Изучение теплового состояния земных недр особенно актуально для районов, где происходят интенсивные тектонические движения, сопровождаемые сильными и катастрофическими землетрясениями [1]. К таким районам относится Северный Тянь-Шань. Об этом свидетельствуют происшедшие здесь землетрясения: Верненское ( $M_s=7.1$ , 1887г.), Чиликское ( $M_s=8.1$ , 1889г.), Кеминское ( $M_s=8.0$ , 1911г.), Жаланашское ( $M_s=6.8$ , 1978г.), Байсорунское ( $M_s=5.9$ , 1990г.) и др. Цель работы заключалась в изучении распределения глубинного теплового поля земной коры Северного Тянь-Шаня для оценки сейсмической активности территории.

### Метод и материалы исследований

Метод исследований состоял в численном моделировании температур земной коры на основе решения уравнений теплопередачи с привлечением экспериментальных теплофизических параметров – теплового потока, коэффициента теплопроводности, радиогенной теплогенерации. Выполнен сравнительный анализ параметров расчетной геотермической модели с распределением землетрясений территории.

*Математическая модель.* Основное уравнение стационарного кондуктивного переноса тепла для долговременных геологических процессов в гетерогенной анизотропной упругой среде записывается в виде [2]:

$$\nabla k \nabla T + k \nabla^2 T + A(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

где  $k$  – теплопроводность горных пород в точке с координатами  $(x, y, z)$ ,  $T$  – температура,  $A(x, y, z)$  – радиоактивная генерация тепла в единичном объеме. Символом  $\nabla$  обозначен дифференциальный оператор Лапласа в трехмерном пространстве

$$\nabla = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \quad (2)$$

Коэффициент теплопроводности в точке  $(x, y, z)$  с учетом зависимости от температуры рассчитан нами для региона Северного Тянь-Шаня, как:

$$k = 0.01157V_p^3 * (-0.9 + 0.00246T + 343T^{-1})^{-1} \quad (3)$$

где:  $V_p$  – скорость сейсмических волн (км/с),  $T$  – начальная температура в К°.

Радиогенное тепловыделение в земной коре за счет распада радиоактивных элементов  $^{40}\text{K}$ ,  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$  вычислено по эмпирическому соотношению между теплогенерацией  $A$  (мкВт/м<sup>3</sup>) и скоростью  $V_p$  (км/с) для земной коры Северного Тянь-Шаня:

$$A = 0.3125 * (10^{-5}) * \exp(1.61 * V_p) \quad (4)$$

Уравнение (1) с учетом (3,4) решено численным методом конечных разностей на сетке  $41 \times 31 \times 20$  по схеме переменных направлений [3].

В качестве граничного условия теплообмена на поверхности задавался тепловой поток по измерениям в скважинах; среднегодовая температура земной поверхности  $10^\circ\text{C}$  на глубине 1 м по метеоданным. Начальное распределение температуры соответствовало линейному геотермическому градиенту. Боковые граничные условия состояли в равенстве нулю теплового потока через вертикальные границы модели. На нижней границе моделируемой области задавалась мантийная составляющая теплового потока, определяемая как разность потока на поверхности и радиогенной составляющей от распада U, Th, K-содержащих пород, а также постоянная температура, в предположении о наличии на глубине 120 км области горных пород, разогретых до температуры солидуса ( $1370^\circ\text{C}$ ).

Для расчета действующих термонапряжений в земной коре применена рабочая формула [5]

$$\tau_{zz} = \rho g z + 3\beta K (T - T_0) \quad (5)$$

где  $3\beta$  - объемный коэффициент термического расширения пород,  $K$  - модуль объемной упругости,  $\rho$  - плотность,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $(T - T_0)$  - температурное отклонение от начального линейного распределения. Произведение  $3\beta K (T - T_0)$  обозначает термонапряжения, вызванные сочетанием нелинейного изменения температуры. Модуль объемной упругости  $K$  рассчитан по отношению скоростей продольных и поперечных волн в условиях естественного залегания горных пород:

$$K = \rho(V_p^2 - 4/3 V_s^2) \quad (6)$$

где для горных пород Северного Тянь-Шаня  $V_p/V_s = 2.04$ .

Плотность горных пород определена в каждом узле сеточной модели по закону линейной аппроксимации:

$$\rho = (0.315V_p + 0.74) \cdot 10^3 \quad (7)$$

С учетом сферичности поверхности и значительных пространственных размеров модели уравнение (1) решалось в сферических координатах относительно центра Земли:

$$\nabla T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \quad (8)$$

### 3. Обсуждение результатов

*Теплофизическая модель.* В геологическом отношении регион входит в альпийский неотектонический пояс и включает вытянутые в широтном направлении горные хребты Кунгей и Заилийский Ала-Тау разделенные межгорными впадинами [4]. С востока район ограничен отрогами горных хребтов Джунгарского Ала-Тау, с запада - восточным окончанием Чу-Илийских гор. В земной коре по геофизическим данным выделяются осадочный, гранитный (верхний и нижний) и базальтовый слои. Мощность земной коры изменяется от 42 км до 55-60 км, увеличиваясь в юго-восточном направлении в сторону горных сооружений Тянь-Шаня и Джунгарии.

*Структура поля сейсмических скоростей.* Исходной экспериментальной базой глубинного строения земной коры послужили данные о скорости продольных волн до глубины 100 км в пределах территории с координатами  $42^\circ - 45^\circ\text{N}$  и  $75^\circ - 80^\circ\text{E}$  по данным методов ГСЗ, ГСЗ-МОВЗ [6-8] (рис. 1).

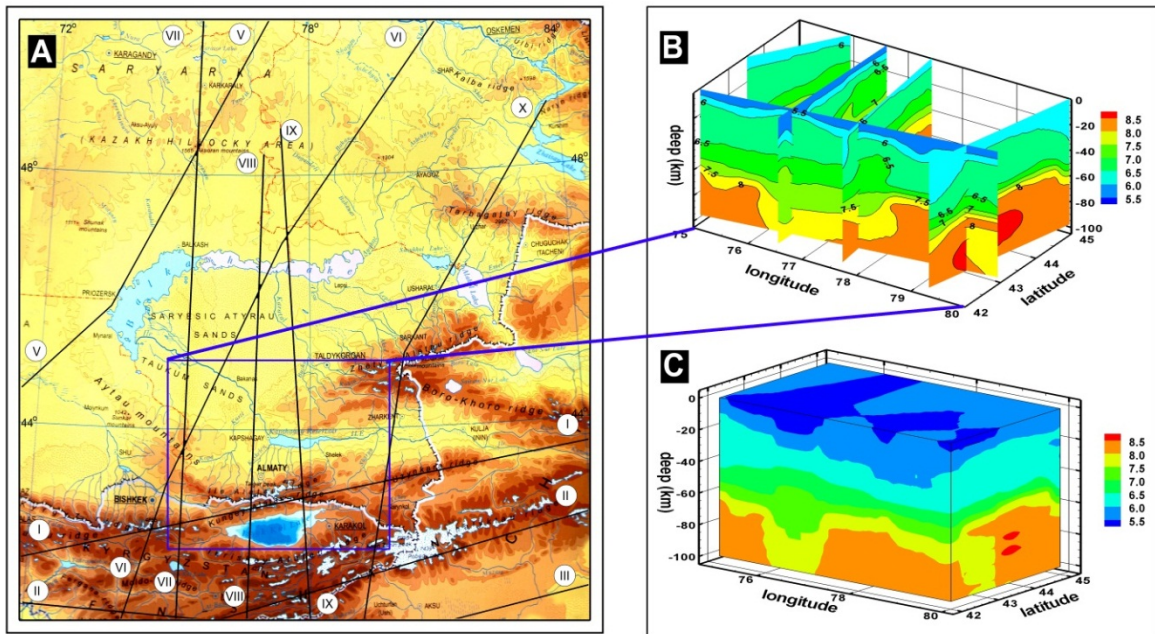


Рисунок 1 – Система геотраверсов Р-скоростного моделирования литосферы: А – плановое положение геотраверсов, В – 2D модели по профилям, С - 3D скоростная модель строения земной коры

*Теплопроводность.* Средние значения коэффициента теплопроводности осадочного слоя определены в диапазоне 1.5 ÷ 1.7 Вт/м·К, гранитного – около 2.6, диоритового – 2.2 ÷ 2.3 Вт/м·К, базальтового – 3 ÷ 3.1 Вт/м·К. Для верхней мантии коэффициент теплопроводности соответствует 3.2 Вт/м·К.

*Радиогенная теплогенерация.* Сопоставление оценок величин теплогенерации разных слоев земной коры по данным [9-11] и формуле (4) показало удовлетворительную сходимость. Магматические образования, развитые в Северо-Тянь-Шаньском и Джунгарском блоках, характеризуются более высоким уровнем теплогенерации. Наибольшая концентрация радиоактивных элементов наблюдается в верхней части гранитного слоя на глубинах от 5 км до 30 км.

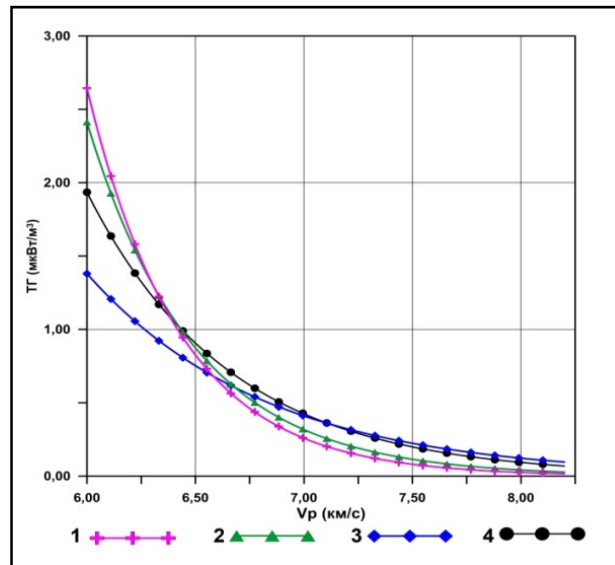


Рисунок 2 – Зависимость интенсивности радиогенного тепловыделения в породах земной коры от скорости упругих волн: 1 – [9], 2 – [10], 3 – [11], 4 – формула (4)

Теплогенерация гранитного слоя составляет от 1.0 до 2.0 мкВт/м<sup>3</sup>, осадочного – от 0.2 мкВт/м<sup>3</sup> до 1.0 мкВт/м<sup>3</sup>. С глубиной радиоактивное тепловыделение уменьшается неравномерно. Нижняя часть гранитного слоя горных областей характеризуется интенсивностью 0.6÷1.1 мкВт/м<sup>3</sup>, платформенной части - 0.5÷1.0 мкВт/м<sup>3</sup>. Теплогенерация базальтового слоя равна 0.5 мкВт/м<sup>3</sup>.

*Тепловой поток.* Карта теплового потока (ТП) на поверхности составлена по данным [12,13]. Кроме того учтены 249 скважинных измерений, выполненных авторами. Средняя плотность пунктов определений теплового потока составляет 1 измерение на 18 км<sup>2</sup>

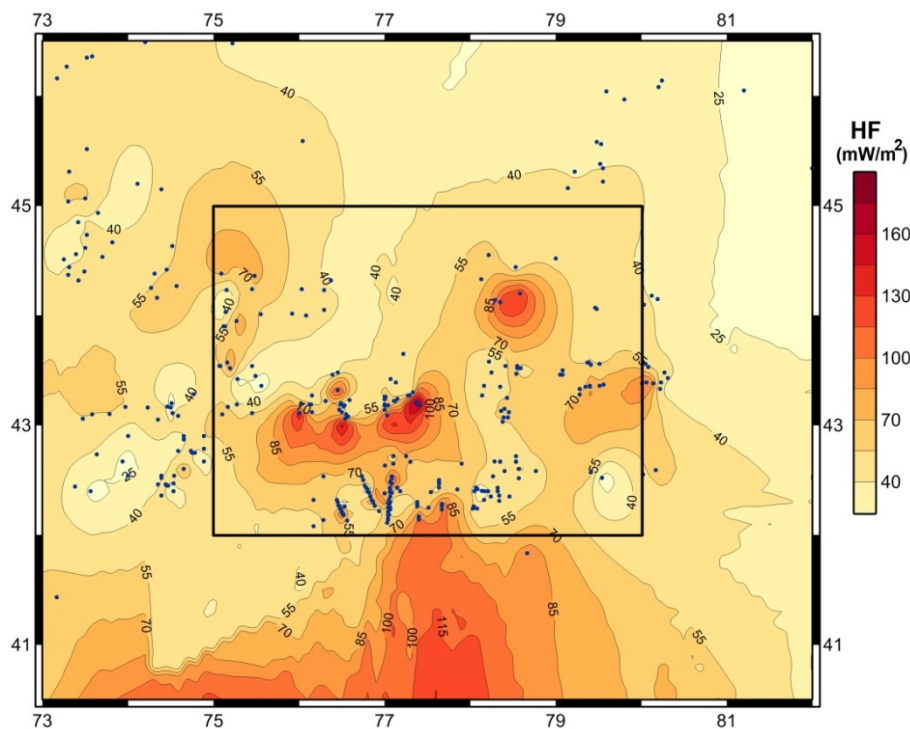


Рисунок 3 – Тепловой поток Северного Тянь-Шаня (мВт/м<sup>2</sup>), о – пункты определений в скважинах

Распределение ТП региона соответствует данным для районов кайнозойской тектонической активности. Выделены три области с различным режимом теплового потока: - высокогорные районы, платформенная часть и современные межгорные впадины. Высокогорные районы характеризуются повышенным уровнем теплового потока от 54 мВт/м<sup>2</sup> до 266 мВт/м<sup>2</sup> при среднем значении 63 мВт/м<sup>2</sup>. Плотность теплового потока в межгорных впадинах меняется от 31 мВт/м<sup>2</sup> до 119 мВт/м<sup>2</sup> при среднем значении 54 мВт/м<sup>2</sup>. Тепловой поток платформенной части территории составляет 40÷45 мВт/м<sup>2</sup>. Вклад радиогенной компоненты теплового потока в общий ТП составляет от 60% до 90%.

*Геотермическая модель.* По распределению теплового потока, коэффициента теплопроводности пород, радиогенной теплогенерации рассчитано поле глубинных температур земной коры Северного Тянь-Шаня (рис.4). Структура теплового поля изучалась разделением расчетных температур на стационарную (линейную) и аномальную части. Аномальные (избыточные) температуры определены вычитанием из расчетного поля стационарной составляющей, соответствующей линейному геотермическому градиенту 12 °С/км.

Отмечается линейное понижение температур с юга на север от горных сооружений к платформенной части территории. Горизонтальные градиенты изменения температур уменьшаются от 1.5 °С/км для горных хребтов до 0.5 °С/км в этом направлении. Абсолютная температура составляет 600÷800 °С на глубине 40 км, 850÷1050 °С – на глубине 80 км и 1200 °С – на глубине 100 км. В интервале глубин от 20 км до 45 км определена температурная аномалия с повышенными значениями избыточных температур до 250 °С относительно линейного распределения. В плане аномалия вытянута в субширотном направлении непосредственно над границей М.

*Термоупругие напряжения.* Действующее давление рассчитано как сумма литостатического давления, обусловленного массой вышележащих горных пород, и термоупругих напряжений, вследствие неравномерного нагрева и неоднородности физико-механических свойств (уравнение 5).

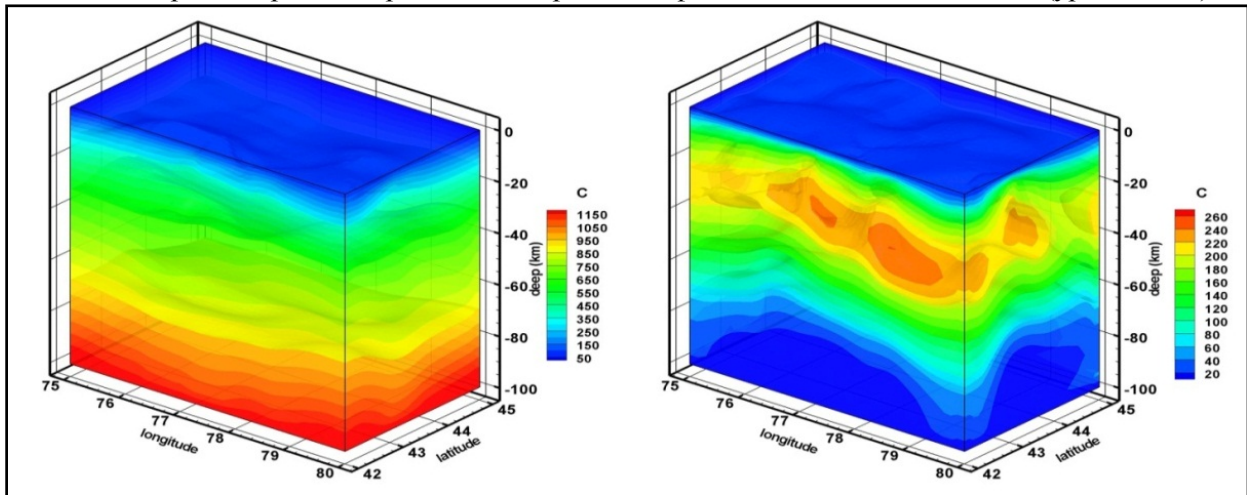


Рисунок 4 – Распределение температур в земной коре Северного Тянь-Шаня по данным моделирования. слева – суммарное поле температур (°C), справа – аномальные (избыточные) температур (°C)

На глубинах от 30÷50 км вклад температурных напряжений составляет 12%÷27% от литостатического давления и достигает 0.45 ГПа (рис. 5). Коэффициент отношения полного давления (с учетом термобарического) к литостатическому в области аномальных температур равен 1.3-1.4.

Расчеты находятся в интервале величин экспериментальных данных по минеральным равновесиям, показывающих, что тектоническое давление может достигать до 100% от литостатического и величин первых гигапаскалей [14].

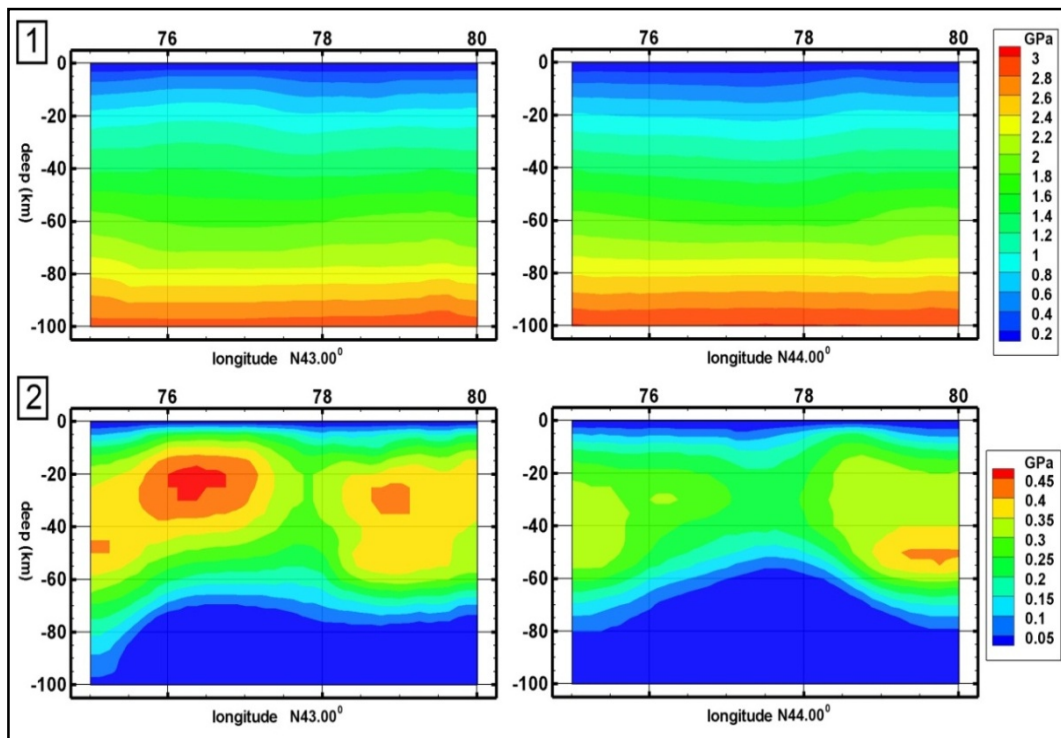


Рисунок 5 – Распределение термонапряжений с глубиной на широте N43° и N44°  
1 – суммарное литостатическое давление и термонапряжения; 2 – термонапряжения

Сопоставление геотермических построений с сейсмическим режимом. Сейсмогенная зона Северного Тянь-Шаня характеризуется сейсмоактивным слоем мощностью до 35 км [6,19,15] Нижняя часть коры практически не содержит очагов землетрясений. Морфология изотермы избыточных температур 230 °С в области аномального разогрева горных пород и изобарическая поверхность термоупругих напряжений интенсивностью 0.35GPa могут быть отнесены к критериям контролирующим распределение гипоцентров землетрясений в объеме земной коры (рис. 5)

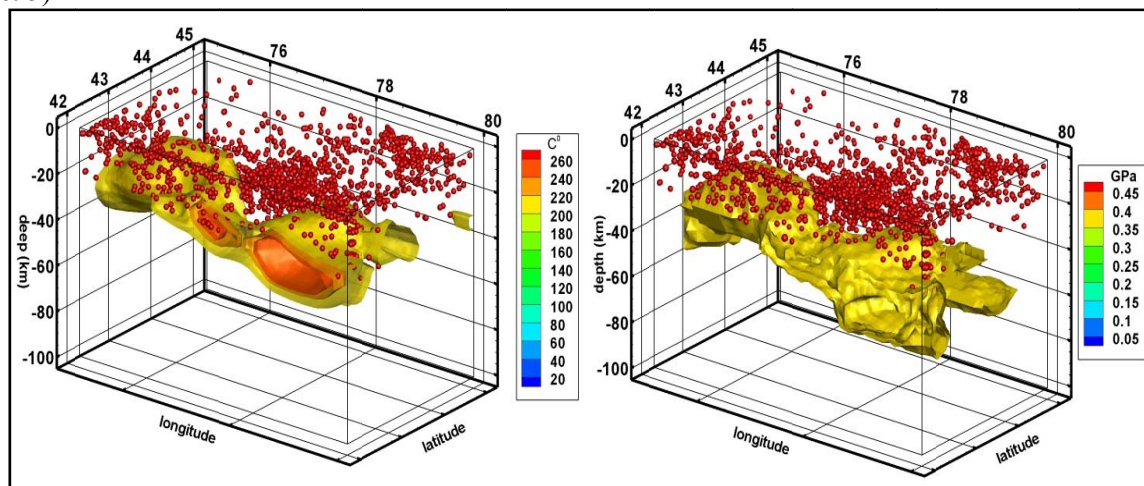


Рисунок 6 – Изотермическая поверхность аномальных температур 230 °С (слева) и изобарическая поверхность термонапряжений 0.35 GPa (справа), контролирующие распределения гипоцентров землетрясений в земной коре Северного Тянь-Шаня

Сопоставление распределения теплового потока и землетрясений среднего энергетического класса (9.0÷10.5) в плане показывает приуроченность эпицентров к областям пониженных значений ТП (рис. 6). Повышенная плотность эпицентров здесь возможно обусловлена пониженными вязкостными свойствами земной коры и повышенной хрупкостью горных пород. Можно предположить хрупкий механизм формирования землетрясений за счет снижения предела пластичности материала коры [16-18] Вопрос требует дополнительного изучения.

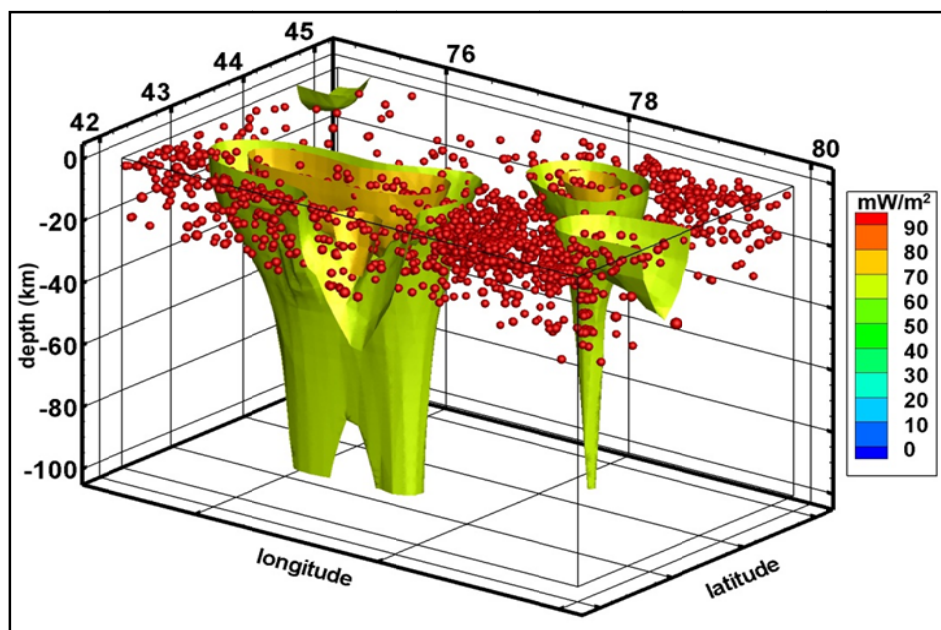


Рисунок 7 – Модель теплового потока Северного Тянь-Шаня с гипоцентрами землетрясений



Однако, катастрофические землетрясения прошлого века (Верненское,  $M_s=7.1$ , 1887г.; Чиликское,  $M_s=8.1$ , 1889г.; Кеминское,  $M_s=8.0$ , 1911г.) произошли в областях с повышенными значения теплового потока. Авторы предполагают в этих областях наличие фазовых превращений эцлогит-базальт под воздействием высокотемпературных флюидов (более  $650\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Указанные температуры достигаются на глубинах 35-60 км. В областях плавления увеличивается объем пород и уменьшается их плотность и, как следствие, над зоной плавления активизируются вертикальные движения в пределах земной коры. Происходит рост гор вверх за счет увеличения объема и рост "корней" гор вниз за счет выплавления базальтов [19,20] Формируются условия для катастрофических землетрясений.

### Заключение.

Геотермическое моделирование позволяет сделать вывод о преобладающем влиянии температурных условий на развитие сейсмического процесса в континентальных условиях. Определяющим является наличие высокотемпературных областей с избыточными температурами на  $100\div 250\text{ }^{\circ}\text{C}$  выше солидуса, что может привести к частичному плавлению горных пород.

Накопление термоупругих напряжений в земной коре может рассматриваться в качестве одного из критериев наблюдаемой в Северном Тянь-Шане сейсмической активности. Распределение гипоцентров землетрясений среднего энергетического класса контролируется областью избыточных температур до  $230\text{ }^{\circ}\text{C}$  и изобарой термонапряжений менее 0.35 ГПа

Сочетание численного моделирования температурного режима земной коры Северного Тянь-Шаня и сейсмических данных дает дополнительную информацию для прогнозных заключений о возможных механизмах и физических параметрах сейсмоактивной среды региона.

Работа выполнена в рамках проекта «Математическое моделирование воздействия термоупругих деформаций земной коры Северного Тянь-Шаня на формирование сейсмической активности с использованием геоинформационных спутниковых технологий» по бюджетной программе 055 «Научная и (или) научно-техническая деятельность», подпрограмма 101 «Грантовое финансирование научных исследований»

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жантаев Ж.Ш., Мусабаев Т.А., Бибосинов А.Ж. Наземно-космические технологии изучения динамики земной коры и развитие методов прогноза землетрясений. – Алматы: Lambert Academic Publishing, 2013. – 348 с.
- [2] Vincenzo P., Massimo V., Paolo Ch. Geothermics. Heat Flow in the Lithosphere // University of Genova, Springer, 2014, 127p.
- [3] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432 с.
- [4] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепломассобмена. - М.: Наука, 1984. -288 с.
- [5] J.C. Jaeger, N.G.W. Cook, and R.W. Zimmerman Fundamentals of rock mechanics–4th ed, 2007. – 475 p.
- [6] Тимуш А.В. Сейсмоструктура литосферы Казахстана – Алматы, 2011, 590с.
- [7] Сейсмическое районирование Республики Казахстан. - Алматы: Эверо, 2000
- [8] Шацков В.И., Сайипбекова А.В. Профильная томография литосферы Тянь-Шаня по материалам региональной сейсмологии // Доклады НАН РК. – 1994. – № 6. –С.47-52.
- [9] Rybach L., Bantebarth G. Relationships between the petrophysical properties, density, seismic velocity, heat generation and mineral logical constitution. // Earth and Planet Sciens letters. –1982. –Vol. 57. –P.367-376.
- [10] Смыслов А.А., Моисеенко У.И., Чадович Т.З. Тепловой режим и радиоактивность Земли. - Л.: Недра, –1979. – 190с.
- [11] Гордиенко В.В., Завгородняя О.В., Якоби Н.М. Тепловой поток континентов. - Киев: Наукова думка, 1982. –184с.
- [12] Davies J.H. Global map of solid Earth surface heat flow// Geochemistry, Geophysics, Geosystems, –2013.–P.14, doi:10.1002/ggge.20271.
- [13] Gosnold W.D., Panda B. The Global Heat Flow Database of The International Heat Flow Commission. –2002. <http://www.und.edu/org/ihfc/index2.html>.
- [14] Pleuger, J., and Y. Y. Podladchikov, A purely structural restoration of the NFP20-East cross section and potential tectonic overpressure in the Adula nappe (central Alps), Tectonics, 33, 656–685, doi:10.1002/2013TC003409.
- [15] Садыкова А.Б. Сейсмическая опасность территории Казахстана. –Алматы. 2012, –267 с.
- [16] Burov E. Thermo-Mechanical Models for Coupled Lithosphere-Surface //Processes: Applications to Continental Convergence and Mountain Building Processes New Frontiers in Integrated Solid Earth Sciences / Editors: S. Cloetingh, J. Negendank, Springer Science+Business, Media, 2010. – 424 p.
- [17] Alfonso J.A., Ranalli G., Fernandez M. Thermal expansivity and elastic properties of the lithospheric mantle: Results from mineral physics of composites// Physics of the Earth Planetary Interiors –2005.–Vol. 149. –P. 279-306.

[18] Zang A., Stephansson O. Stress Field of the Earth's Crust // Springer Science, Business Media B.V. –2010. – 322p

[19] А.К. Курскеев «Землетрясения и сейсмическая безопасность Казахстана». Алматы, 2004 «Эверо», 504 с.

[20] Курскеев А.К. Геотермическая модель и современное корообразование в Тянь-Шаньском сегменте // В кн.: Результаты комплексных исследований в сейсмоактивных районах Казахстана. – Алма-Ата: Наука, 1984. – С.27-40.

**Ж.Ш. Жантаев<sup>1</sup>, А.В. Виляев<sup>1</sup>, Э.Б. Серикбаева<sup>1</sup>**

Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы,  
Ионосфера институты, Қазақстан Республикасы, Алматы, Каменское плато

### **СОЛТҮСТІК ТЯНЬ-ШАНЬНІҢ СЕЙСМИКАЛЫҚ ТӘРТІП ЕРЕКШЕЛІГІН БАҒАЛАУДА ГЕОТЕРМИЯЛЫҚ ҮЛГІЛЕУДІ ҚОЛДАНУ**

**Андатпа.** Солтүстік Тянь-Шань аймағының мысалында сейсмикалық белсенділіктің қалыптасуына себебін тигізетін жер қойнауындағы температураның біртексіз таралуының әсері қарастырылған. Жер қыртысының жылулық өріс параметрлері жайындағы мәліметтер жүйелендірілген және жалпыландырылған. Тереңдеген сайын жылуды түрлендіретін элементтердің таралу заңдылығы анықталып, 3D көлемдік геотермиялық үлгілері тұрғызылды. Сейсмикалық белсенділігі байқалған геотермиялық үлгінің салыстырмалы талдауы орындалды.

Радиогендік жылудың қосымша көздерін ескере отырып сонымен қатар бастапқы және шектес жағдайларымен кондуктивтік жылу тасымалдаудың үшөлшемді тендеуі сандық әдіспен шешілді. Беттегі жылулық өріс ұңғымада өлшенген жергілікті мәліметтер бойынша анықталды. Тау жыныстарының петрологиялық құрамына, температурасына қысымына және жылулық өткізгіш коэффициентіне байланысты, кимадағы кума толқынның таралу жылдамдығының таралу ақпараты ескерілген.

Солтүстік Тянь-Шань тауларының 35-60 км тереңдігінде солидустан жоғары 100÷250 °С температурада тау жыныстарының кейбір бөліктерінің балқуы ерекшеленген.

Тау жыныстарының критикалық тұтқырлығы шыдамайтын, изотерма бойынша аномалдық температурасы 230 °С болатын және изобарада термикалық-кернеулік қарқындылығы 0.35 GPa болатын температурасы жоғары аймақ қоршалды. Аномалды аймақта термикалық кернеуліктің максималдық мәні 0.48 GPa тең, ол литостатикалық қысымның 25÷30% құрайды. Өткен ғасырдың апаттық жерсілкіністері (Верненское M=7.1, Кеминское M=8.0) мантиялық жылудың максималды таралу аумағында орын алды.

Сейсмикалық үдерістің қалыптасуы үшін температуралық жағдайдың әсерінің басымдылығына қорытынды жасалды.

**Түйін сөздер:** температура, жылулық өріс, термикалық кернеулік, жер қыртысы, сейсмикалық, математикалық үлгілеу.

#### **Сведения об авторах:**

Жантаев Ж.Ш. - д.ф.м.н., член-корр. НАН РК, ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато, Служ. тел. 380-30-54;

Виляев А.В. - к.г.м.н., ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато, Служ. тел. 385-09-68; e-mail: [vilayev@gmail.com](mailto:vilayev@gmail.com)

Серикбаева Э.Б. - научный сотрудник, ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато, Служ. тел. 385-09-68; e-mail: [elya\\_sb@inbox.ru](mailto:elya_sb@inbox.ru)

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 35 – 43

**G.I. Gordienko, A.F. Yakovets, Yu.G. Litvinov**

«Institute of Ionosphere» JSC «National Center of Space Research and Technology»  
[ggordiyenko@mail.ru](mailto:ggordiyenko@mail.ru)

**COMPARISON OF THE METHODS FOR ESTIMATING THE HEIGHT  
OF THE MAXIMUM OF THE  $F$  REGION OF THE IONOSPHERE**

**Abstract.** The diurnal distribution of hourly values of height of  $F2$  layer maximum ( $hmF2$ ) calculated by three different methods was analyzed: the Titherage's method, giving the most accurate altitude values, and two other methods using empirically selected expressions connecting  $hmF2$  with ionogram parameters (critical frequencies  $foF2$ ,  $foE$  and virtual altitudes

$h'(f)$ ). It is shown that an approximate method for determining the height of the electron concentration maximum in the ionosphere, based on the calculation of the maximum usable frequency, makes it possible to display all the morphological features of the diurnal variation for winter and equinoctial conditions. In the summer season, there is a wide variation in the heights of the maximum of the layer, caused by the complexity of the ionograms caused by the appearance of sporadic layers. It is shown that the empirical formula connecting  $hmF2$  with the effective altitude at the frequency  $0.83foF2$  allows displaying all morphological features of the diurnal variation in the height of the electron concentration maximum in the ionosphere for all seasons.

**Key words:** ionosphere, vertical sounding, altitudes of the  $F$  region maximum.

УДК 550.383

**Г.И. Гордиенко, А.Ф. Яковец, Ю.Г. Литвинов**

ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы

**Сравнение методов оценки высоты максимума  
 $F$ -области ионосферы**

**Аннотация.** Проведен анализ суточного распределения часовых значений высоты  $h_mF2$ , рассчитанных тремя разными методами: методом Титериджа, дающим наиболее точные значения высот, и двумя другими методами, использующими эмпирически подобранные выражения, связывающие  $hmF2$  с параметрами ионограмм (критическими частотами  $foF2$ ,  $foE$  и действующими высотами  $h'(f)$ ). Показано, что приближенный метод определения высоты максимума электронной концентрации в ионосфере, основанный на расчете максимально применимой частоты, позволяет отображать все морфологические особенности суточного хода для зимних и равноденственных условий. В летний сезон наблюдается большой разброс значений высот максимума слоя, вызванный усложненностью ионограмм, обусловленным появлением спорадических слоёв. Показано, что эмпирическая формула, связывающая  $hmF2$  с действующей высотой на частоте  $0.83 foF2$ , позволяет отображать все морфологические особенности суточного хода высоты максимума электронной концентрации в ионосфере для всех сезонов.

**Ключевые слова:** ионосфера, вертикальное зондирование, высота максимума  $F$ -области.

**Введение.** Наряду с критической частотой ( $foF2$ ), одним из основных параметров ионосферы является высота максимума электронной концентрации слоя  $F2$  ( $hmF2$ ). Важность этих параметров определяется их использованием в многочисленных приложениях. За счет отражения радиоволн от  $F2$ -слоя в первую очередь осуществляется коротковолновая радиосвязь на больших расстояниях.

При этом высота максимума электронной концентрации слоя  $F2$  является одним из наиболее важных параметров, необходимых для выбора радиочастот связи. Регулярное изменение солнечной радиации с солнечным зенитным углом вызывает временные и пространственные изменения  $hmF2$ . В зависимости от солнечной активности, времени суток и сезона  $hmF2$  может изменяться от 250 до 450 км на средних широтах. Кроме того, существует сильная зависимость  $hmF2$  от динамических сил, таких как электрические поля и термосферные ветры, вызывающих вертикальный дрейф ионосферной плазмы. Из-за регулярных и нерегулярных вариаций плотности нижней части плазмы, тесно связанных с изменениями  $foF2$  и  $hmF2$ , передача наземного сигнала может быть прервана или даже потеряна. Кроме того, данные о величинах  $hmF2$  и  $foF2$  важны при осуществлении трансионосферной связи Земля-Космос. Например, точность позиционирования с помощью GNSS (глобальной навигационной спутниковой системы) может быть улучшено путем учета таких эффектов распространения сигналов через ионосферу, как ошибки, вызванные изгибом траектории луча, на основе использования данных о значениях  $foF2$  и  $hmF2$  [1, 2]. Кроме того, поскольку пик  $F2$ -слоя является ключевой точкой привязки для построения профилей электронной концентрации, электронная концентрация в максимуме слоя ( $NmF2$ ), связанная с критической частотой согласно формуле  $NmF2 = 1.24 \cdot 10^4 \cdot foF2^2$ , эл/см<sup>3</sup> и соответствующая  $hmF2$  являются наиболее важными параметрами в эмпирическом ионосферном моделировании. Точность высоты пика имеет решающее значение и в некоторых других приложениях, таких как определения скорости [3] и амплитуды осцилляций термосферного ветра [4]. Существуют три метода расчета  $hmF2$  из ионограмм вертикального зондирования. Сравнению точности этих методов и посвящена данная работа.

**Описание методов расчета  $hmF2$  и анализ результатов наблюдений.** Наблюдения ионосферы проводятся в Институте ионосферы (Алматы, 76°55' E, 43°15' N) на цифровом ионозонде "ПАРУС", сопряженном с компьютером, предназначенным для сбора, хранения и обработки ионограмм в цифровом виде. Информация, необходимая для расчетов разнообразных параметров ионосферы, считывается с ионограмм полуавтоматическим методом с участием опытного оператора. В работе [5] показано, что подобный метод обладает большей, по сравнению с автоматическим методом, точностью считывания ионосферных параметров с ионограмм и большим статистическим выходом ионограмм, пригодных к обработке. С ионограмм считываются значения действующих высот отражения  $h'(f)$  радиосигнала на ряде фиксированных рабочих частот зондирования и значение критической частоты  $foF2$ , представляющих основу для получения высотных распределений электронной концентрации ( $N(h)$ -профилей) методом POLAN [6]. Считается, что  $N(h)$ -профили дают наиболее точные значения  $hmF2$ .

При расчете  $hmF2$  вторым методом используется параметр  $M(3000)F2$ , представляющий отношение максимально применимой радиочастоты (МПЧ(3000)) при односкачковом распространении на трассе протяженностью 3000 км к критической частоте  $F2$ -слоя ( $M(3000)F2 = \text{МПЧ}(3000)/foF2$ ) [7, 8]. Высота рассчитывается по формуле

$$h_mF2 = 1490/[M(3000)F2 + c_1(foF2/foE - c_2) + c_3] - 176 \quad (1)$$

где  $foE$  – критическая частота  $E$ -слоя, а  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  представляют коэффициенты, зависящие от широты местоположения ионозонда и уровня солнечной активности. Способ расчета параметра  $M(3000)F2$  из ионограмм был предложен в работе [9].

При расчете  $hmF2$  третьим методом [10] используется кажущаяся высота  $h'(f)$  отражения сигнала на частоте равной  $0.83foF2$ :

$$hmF2 = h'(0.83foF2) \quad (2)$$

Заметим, что  $h'(0.83foF2)$  непосредственно считывается с ионограмм, поэтому это самый простой метод, не требующий довольно сложного программного обеспечения для инверсии ионограмм в высотный профиль электронной концентрации в первом методе или расчета  $M(3000)F2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  во втором методе.

Для выполнения данного исследования, используя данные ВЗ ионозонда Института ионосферы в качестве базовых данных, методом Титериджа [6] были получены массивы часовых

значений  $hmF2$  для января, июля, марта и сентября месяцев 2008-2010 гг, представляющих соответственно зимний, летний и равноденственные сезоны для условий аномально низкого уровня солнечной активности. Поскольку считается, что точность расчета высот максимума слоя  $F2$  максимальна, если они получены из  $N(h)$  - профилей, то они служили в качестве реперных значений для оценки точности двух других методов расчета высот. Нами был проведен сравнительный анализ данных  $hmF2$ , полученных из  $N(h)$  - профилей, с данными  $hmF2_{(1)}$  и  $hmF2_{(2)}$ , рассчитанными по алгоритмам (1) и (2), и проведена оценка степени их соответствия.

Использование алгоритма (1). Примеры суточного распределения часовых значений высоты  $hmF2$ , рассчитанных методом Титериджа [6] и обозначенных на рисунках как  $hmF2_{obs}$ , их медианных значений  $hmF2_{med}$  для рассматриваемых сезонов 2008-2010 гг. приведены на рис. 1-3. Поскольку алгоритм (1) выведен эмпирически и предполагает некоторое сглаживание результатов расчёта, то значения  $hmF2_{(1)}$  в этом случае были рассчитаны с учётом медианных значений входящих в (1) параметров  $foE$ ,  $foF2$  и  $M3000F2$ .

Рисунки 1-3 демонстрируют, что рассчитанные по эмпирической зависимости (1) значения  $hmF2$  отражают все морфологические особенности суточного хода максимума электронной концентрации в ионосфере для рассматриваемых условий, обнаруживая значительное расхождение с медианами в дневное время летнего сезона, когда наблюдается большой разброс значений  $hmF2_{obs}$ , обычно вследствие усложнённости ионограмм, вызванной наличием спорадических слоёв. Рисунок 4 представляет корреляционные зависимости  $hmF2_{med}$  и  $hmF2_{(1)}$ , которые показывают, что за исключением летнего сезона их соответствие выполняется не менее чем в 90% случаев, что соответствует коэффициенту корреляции  $r \approx 0.95$ . Попытка использования медианных значений рассматриваемых параметров, рассчитанных для каждого сезона по всему массиву данных, за 2008-2010 гг., привела к незначительному улучшению результатов,  $R^2 \approx 0.93$  ( $r \approx 0.96$ ), рис. 5.

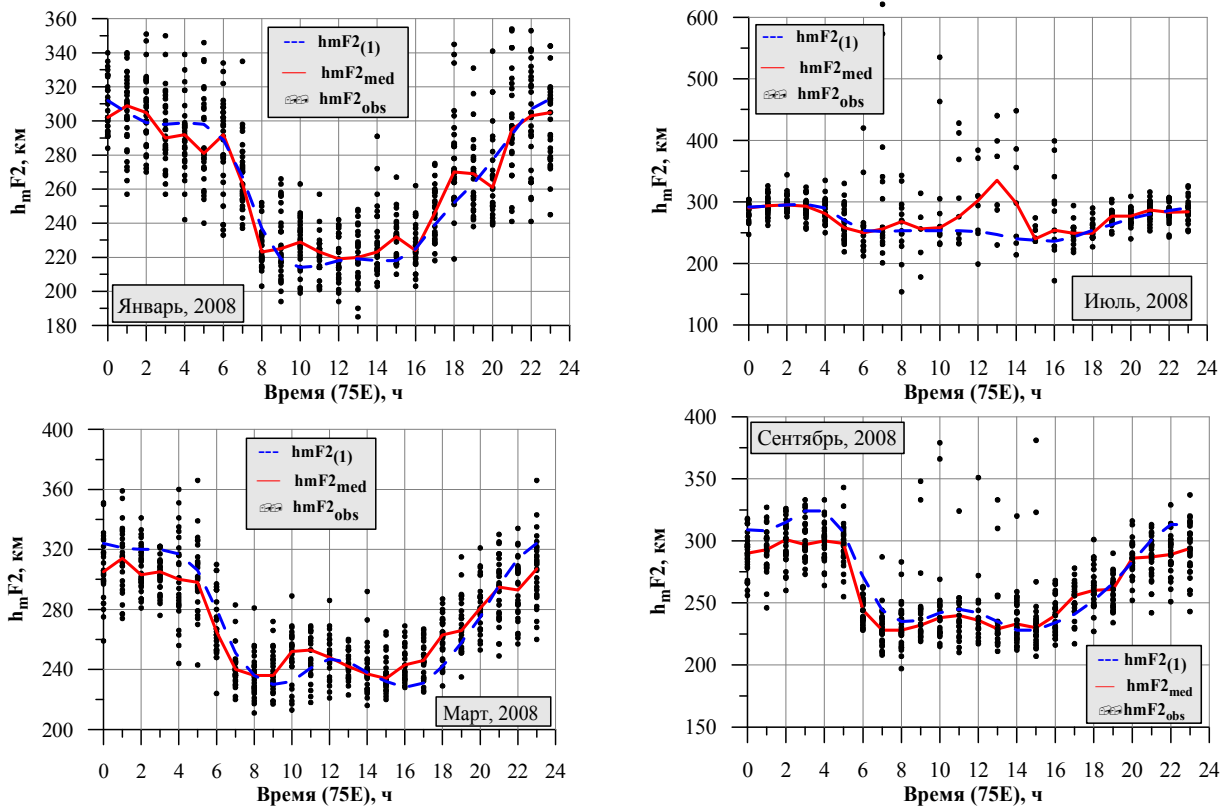


Рисунок 1 - Примеры суточного распределения часовых значений высоты  $hmF2_{obs}$  (символ  $\bullet$ ) для зимних, летних и равноденственных сезонов 2008 г.;  $hmF2_{med}$  – медианные значения  $hmF2_{obs}$ ;  $hmF2_{(1)}$  – значения  $hmF2$ , рассчитанные по алгоритму (1)

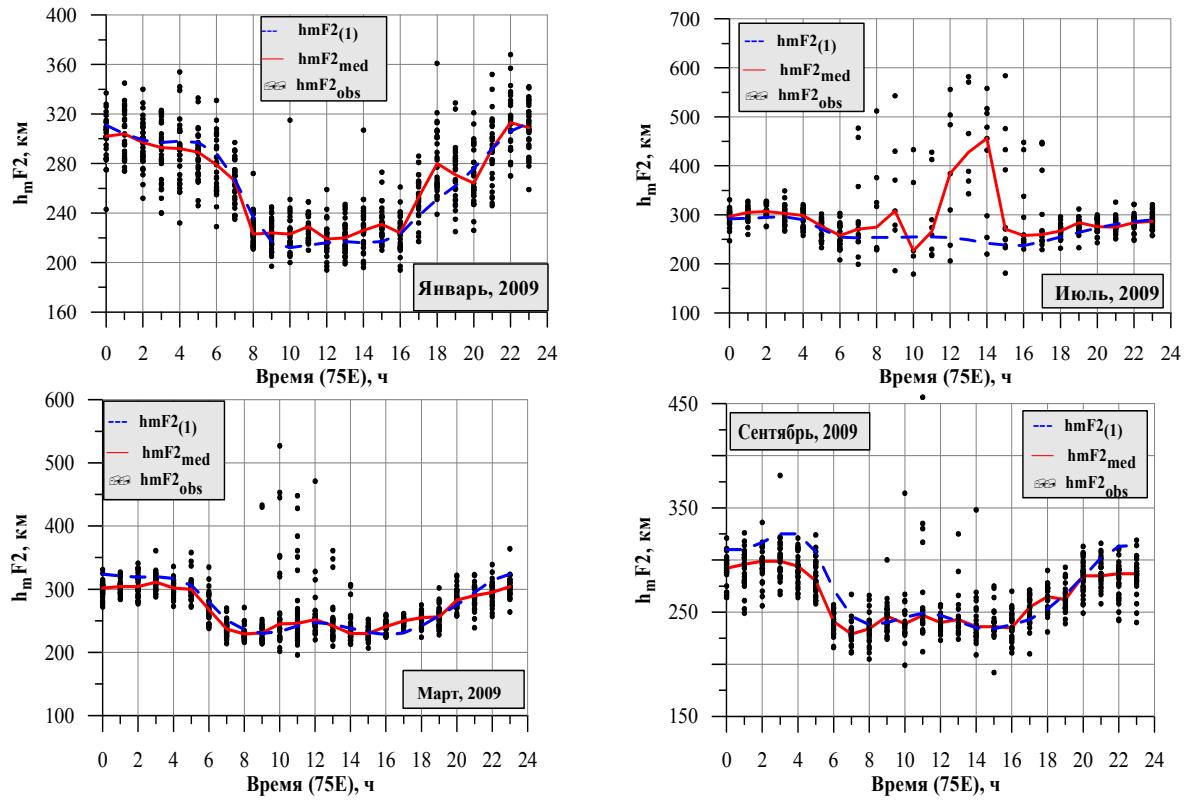


Рисунок 2 - Примеры суточного распределения часовых значений высоты  $h_m F_2_{obs}$  (символ ●) для зимних, летних и равноденственных сезонов 2009 г.;  $h_m F_2_{med}$  – медианные значения  $h_m F_2_{obs}$ ;  $h_m F_2(1)$  – значения  $h_m F_2$ , рассчитанные по алгоритму (1)

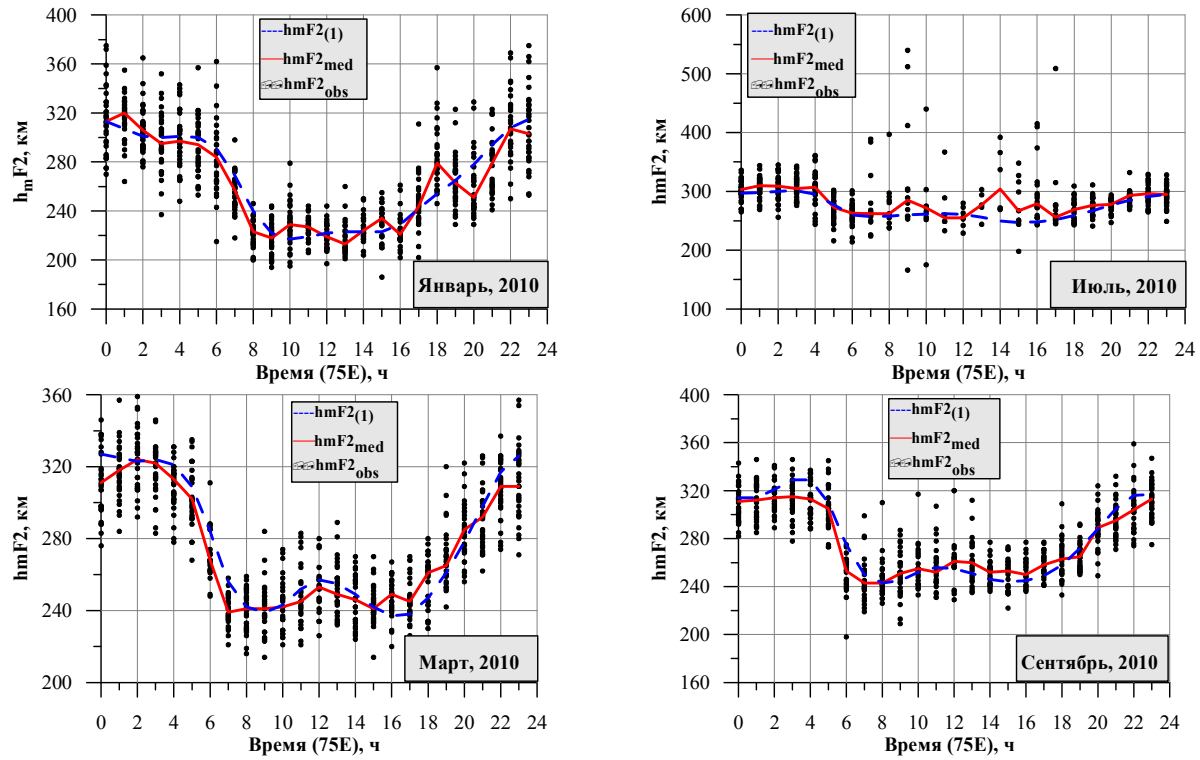


Рисунок 3 - Примеры суточного распределения часовых значений высоты  $h_m F_2_{obs}$  для зимних, летних и равноденственных сезонов 2010 г.;  $h_m F_2_{med}$  – медианные значения  $h_m F_2_{obs}$ ;  $h_m F_2(1)$  – значения  $h_m F_2$ , рассчитанные по алгоритму (1).

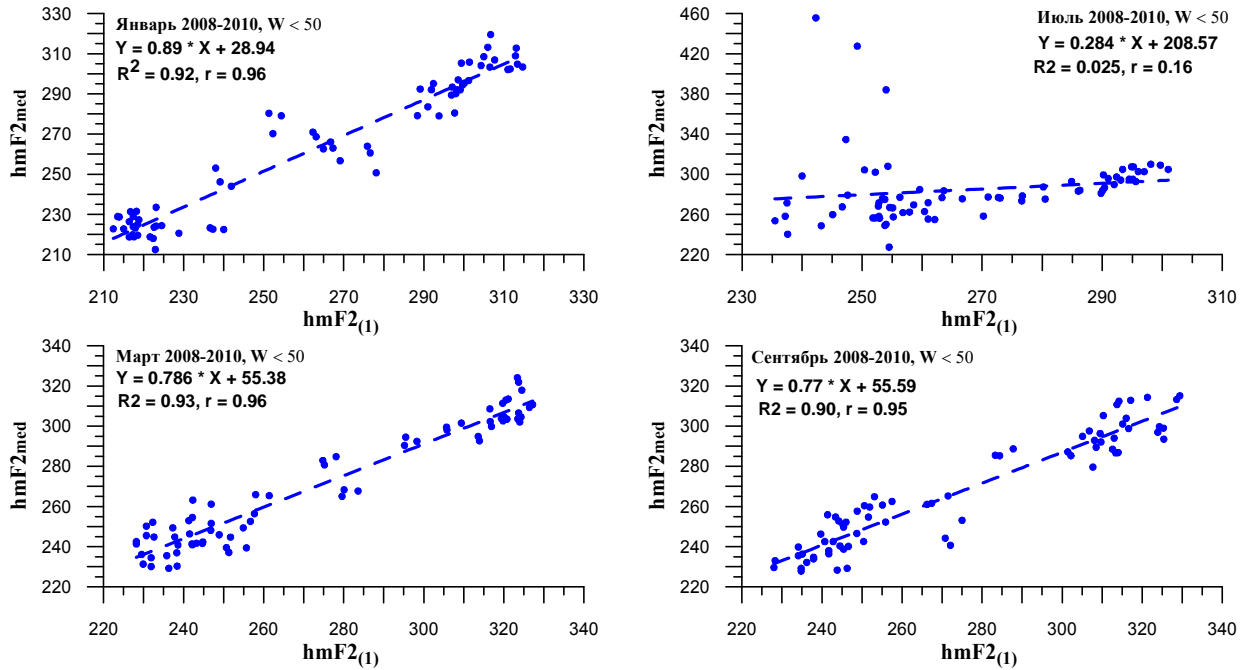


Рисунок 4 - Корреляционные зависимости медианных значений  $hmF 2_{med}$ ,  $hmF 2_{(1)}$  рассчитанных по всему массиву данных для зимних, летних и равноденственных условий

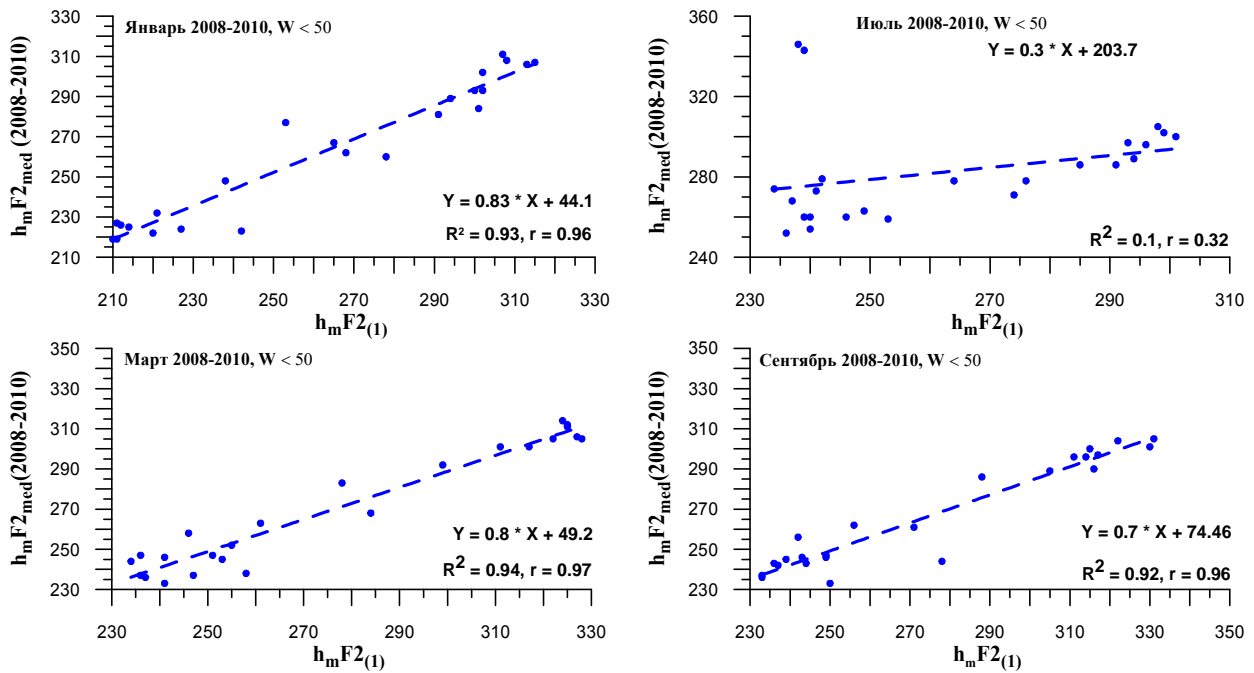


Рисунок 5 - Корреляционные зависимости медианных значений  $h_m F2_{med}$  и рассчитанных  $h_m F2_{(1)}$  по алгоритму (1) для зимних, летних и равноденственных условий 2008-2010 гг.

Статистика ошибок расчёта  $hmF 2_{(1)}$  относительно  $hmF 2_{med}$  приведена на рис. 6, где видно, что в большинстве случаев ошибки распределены в пределах  $\pm 20$ км.

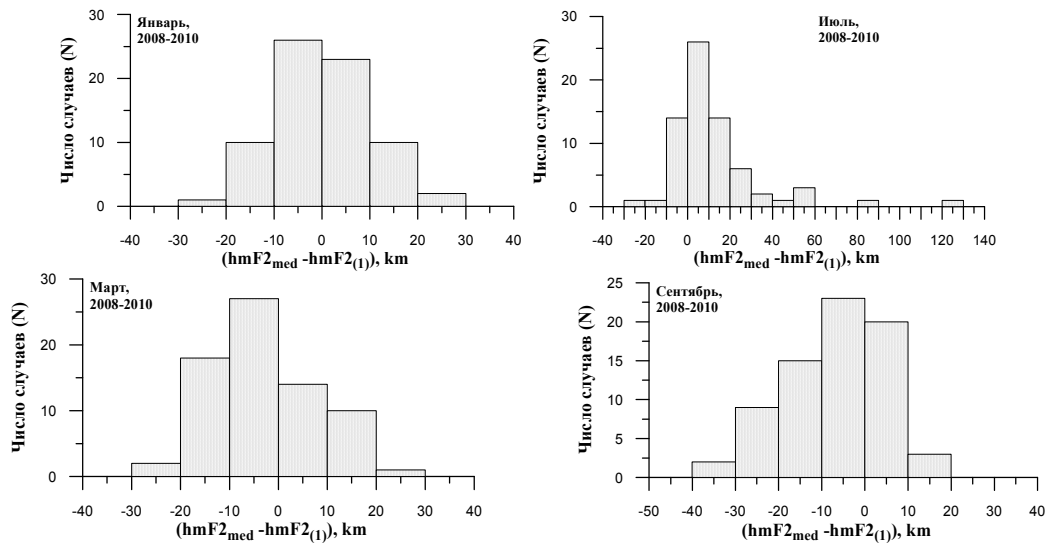


Рисунок 6 - Статистика ошибок определения значений  $hmF2(1)$ , относительно  $hmF2_{med}$ , рассчитанных методом Титериджа [6]

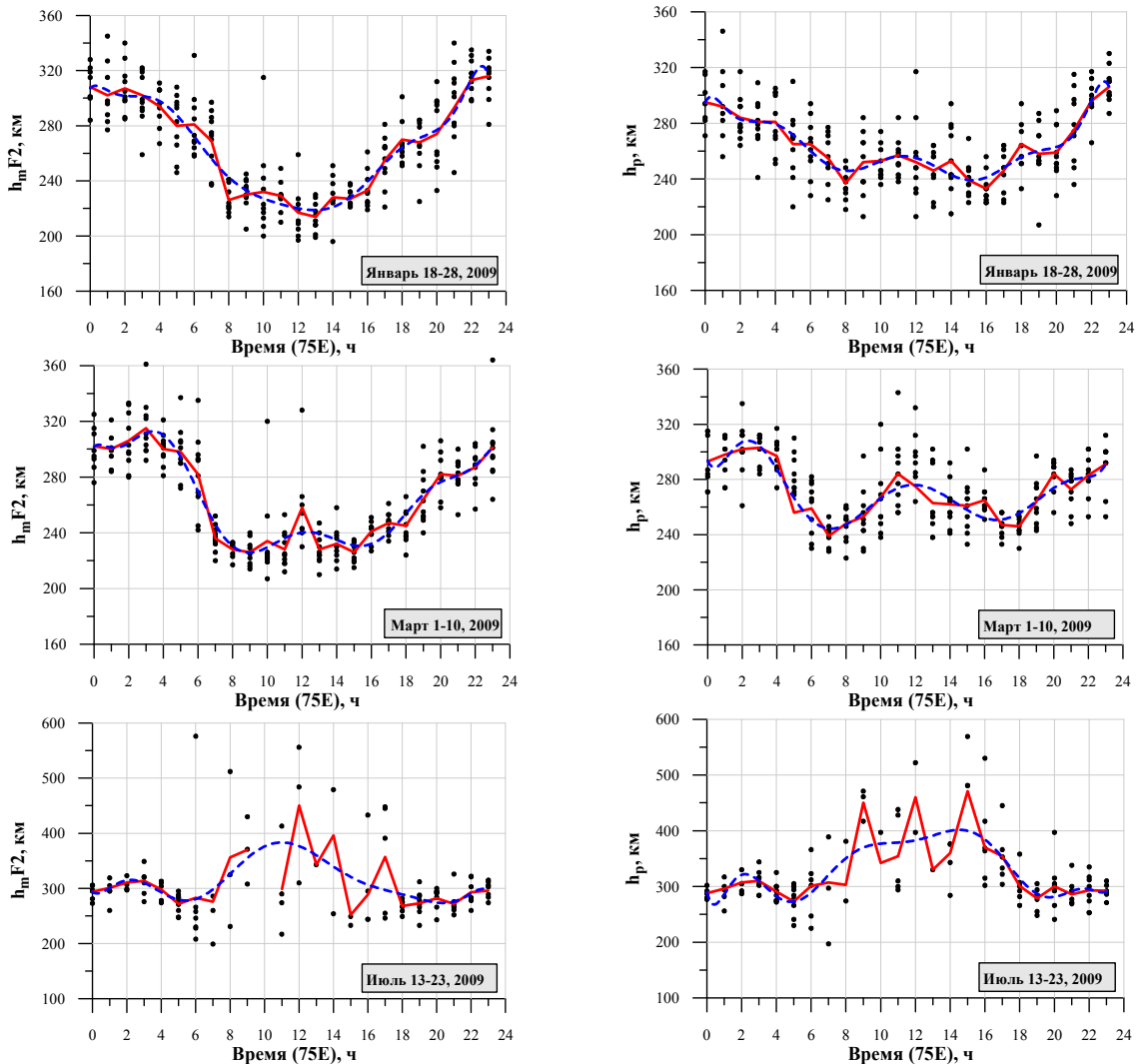


Рисунок 7а - Примеры суточного распределения полученных значений  $hmF2$  и  $h_p$  для различных сезонов. Символ • соответствует часовым значениям, сплошная линия — средним значениям, штриховая линия - представление полиномом 10-й степени.



Таким образом, получено, что алгоритм (1) определения положения максимума электронной концентрации в ионосфере позволяет с коэффициентом корреляции, равным порядка 0.96, отображать все морфологические особенности фонового суточного хода для зимних и равноденственных условий. Исключение составляет летний сезон, когда наблюдается большой разброс значений  $hmF2_{obs}$ , обычно по причине усложнённости ионограмм из-за наличия спорадических слоёв.

Использование алгоритма (2). Степень применимости алгоритма (2) для оценки положения максимума электронной концентрации в ионосфере была исследована также на примерах зимнего, летнего и равноденственного сезонов при условии низкой солнечной активности. Были выполнены расчёты часовых значений  $h_p$  для января, марта и июля месяцев 2009 г. за десять дней каждого месяца при условии отсутствия возмущающих факторов, влияющих на качество ионограмм. Результаты сопоставления суточного распределения полученных значений  $hmF2$  и  $hmF2_{(2)}$  (на рисунках  $hmF2_{(2)}$  обозначены символом  $h_p$ ) приведены на рис. 7 и 8. Рисунок 7а представляет примеры по всем рассматриваемым массивам данных, 7б – их корреляционную связь, рис. 8 – примеры сопоставления для конкретных дней зимнего сезона.

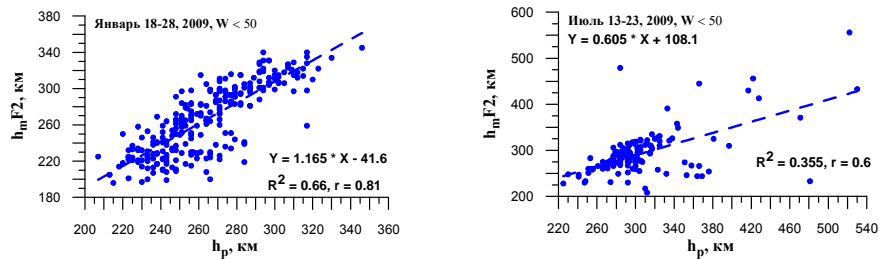


Рисунок 7б - Примеры корреляционной связи между  $hmF2$  и  $h_p$ , рассчитанных для конкретных условий (18-28 января 2009 г.) зимнего сезона низкой солнечной активности.

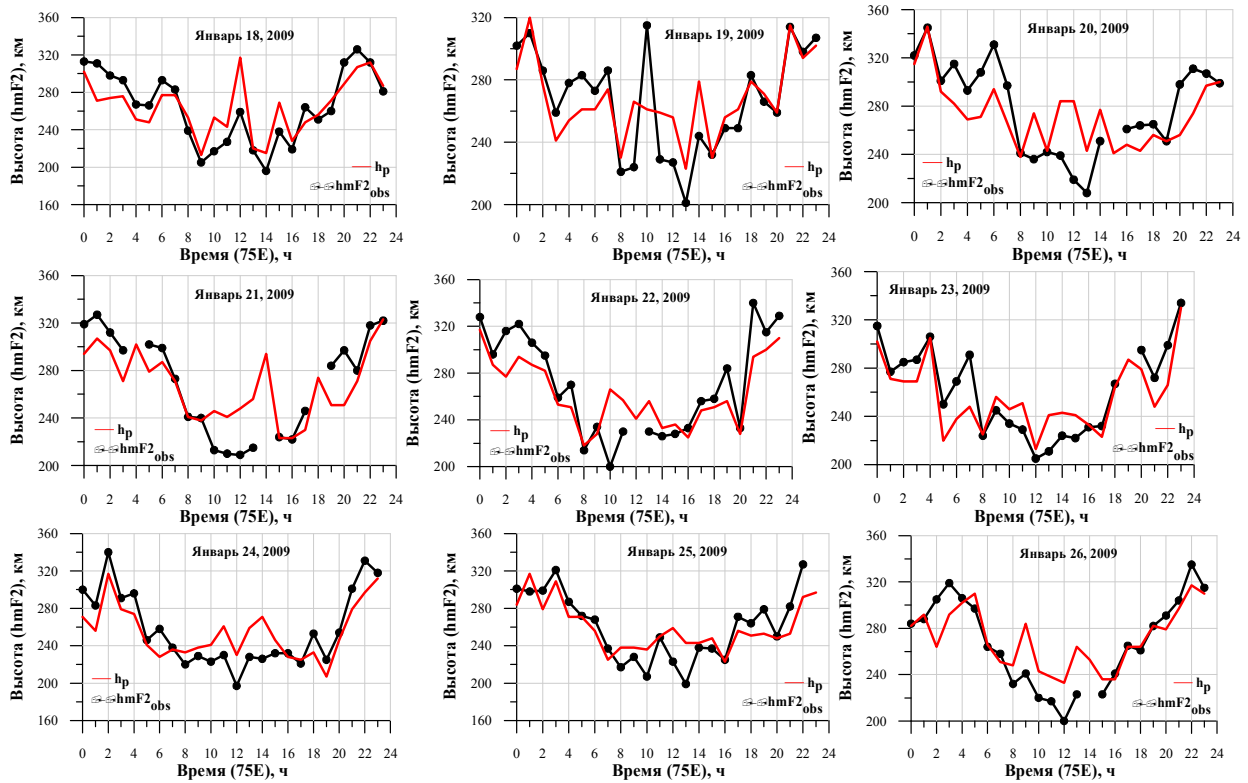


Рисунок 8 - Примеры сопоставления суточных распределений  $hmF2$  и  $h_p$  для конкретных дней зимнего сезона

В результате можно сделать выводы, что алгоритм (2) позволяет отображать все морфологические особенности суточного хода высоты максимума электронной концентрации в ионосфере для всех сезонов, при этом коэффициент корреляции значений  $hmF2$  и  $h_p$  в зависимости от сезона составляет порядка  $r = 0.6 \div 0.8$ .

#### Выводы.

Проведен анализ суточного распределения часовых значений высоты  $hmF2$ , рассчитанных тремя разными методами: методом Титериджа, дающим наиболее точные значения высот, и двумя другими методами, использующими эмпирически подобранные выражения, связывающие  $hmF2$  с параметрами ионограмм (критическими частотами  $foF2$ ,  $foE$  и действующими высотами  $h'(f)$ ). Показано, что формула (1) определения высоты максимума электронной концентрации в ионосфере позволяет с коэффициентом корреляции, равным порядка 0.96, отображать все морфологические особенности фонового суточного хода для зимних и равноденственных условий. Исключение составляет летний сезон, когда наблюдается большой разброс значений  $hmF2_{obs}$ , вызванном усложненностью ионограмм, обусловленным появлением спорадических слоёв. Показано, что формула (2) позволяет отображать все морфологические особенности суточного хода высоты максимума электронной концентрации в ионосфере для всех сезонов, при этом коэффициент корреляции значений  $hmF2$  и  $h_p$  в зависимости от сезона составляет порядка  $r = 0.6 \div 0.8$ .

Работа выполнена по РБП-076 “Развитие методов мониторинга и исследований космического пространства на базе современных информационных технологий” в рамках темы “Изучить структуру и динамику потока космических лучей, геомагнитного поля, ионосферы и атмосферы с целью диагностики и прогноза состояния ближнего космоса”, Регистрационный номер (РН) 0115РК01275.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hoque, M. M. and Jakowski, N.: Estimate of higher order ionospheric errors in GNSS positioning, Radio Sci., 43, RS5008, doi:10.1029/2007RS003817, 2008.
- [2] Hoque, M. M. and Jakowski, N.: Ionospheric bending correction for GNSS radio occultation signals, Radio Sci., 46, RS0D06, doi:10.1029/2010RS004583, 2011a.
- [3] Zhang, S.-R., Oliver, W. L., Holt, J. M., and Fukao, S.: Ionospheric data assimilation: comparison of extracted parameters using full density profiles and key parameters, J. Geophys. Res., 108, 1131, doi:10.1029/2002JA009521, 2003.
- [4] Яковец А.Ф., Водяников В. В., Гордиенко Г.И., Литвинов Ю. Г. Осцилляции термосферного ветра при прохождении крупномасштабных перемещающихся ионосферных возмущений// Геомагнетизм и аэрономия. Т. 54. № 4. С. 520-527. 2014.
- [5] Stankov S.M., Jodogne J.(C.), Kutiev I., Stegen K., Warnant R. Evaluation of automatic ionogram scaling for use in real time ionospheric density profile specification: Dourbes DGS256/ARTIST-4 performance // Ann. Geophys. V. 55. № 2. P. 283–291. doi:10.4401/ag4976. 2012.
- [6] Titheridge J.E. Ionogram analysis with the generalized program Polan // National Geophys. Data Center. –Boulder. CO USA, 1985. – 189 p.
- [7] Bilitza, D., Sheikh, N.M., and Eyfrig, R., A global model for the height of the F2-peak using M3000 values from the CCIR numerical map, Telecommun. J., 1979, vol. 46, no. 9, pp. 549–553.
- [8] Dudeney, J.R., The accuracy of simple methods for determining the height of the maximum electron concentration of the F2-layer from scaled ionospheric characteristics, J. Atmos. Terr. Phys., 1983, vol. 45, nos. 8–9, pp. 629–640.
- [9] Piggott, W. R. and Rawer, K.: U.R.S.I. Handbook of Ionogram Interpretation and Reduction, second ed., World Data Center A for Solar-Terrestrial Physics, Report UAG-23A, 1978.
- [10] Wright, J. W., Knecht R. W., and Davies K. Manual on Ionospheric Vertical Soundings for the International Geophysical Year (in Russian), edited by N. V. Mednikova and B. S. Shapiro. – Moscow: Nauka, 1957. – P.224.

#### REFERENCES

- [1] Hoque, M. M. and Jakowski, N.: Estimate of higher order ionospheric errors in GNSS positioning, Radio Sci., 43, RS5008, doi:10.1029/2007RS003817, 2008.
- [2] Hoque, M. M. and Jakowski, N.: Ionospheric bending correction for GNSS radio occultation signals, Radio Sci., 46, RS0D06, doi:10.1029/2010RS004583, 2011a.
- [3] Zhang, S.-R., Oliver, W. L., Holt, J. M., and Fukao, S.: Ionospheric data assimilation: comparison of extracted parameters using full density profiles and key parameters, J. Geophys. Res., 108, 1131, doi:10.1029/2002JA009521, 2003.

[4] Yakovets A. F., Vodyannikov V. V., Gordienko G. I., and Litvinov Yu. G.. Thermospheric Wind Oscillations during the Propagation of Large-Scale Traveling Ionospheric Disturbances. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2014, Vol. 54, No. 4, pp. 480–487.

[5] Stankov S.M., Jodogne J.(C., Kutiev I., Stegen K., Warnant R. Evaluation of automatic ionogram scaling for use in real time ionospheric density profile specification: Dourbes DGS256/ARTIST-4 performance // *Ann. Geophys.* V. 55. № 2. P. 283–291. doi:10.4401/ag4976. 2012.

[6] Titheridge J.E. Ionogram analysis with the generalized program Polan // *National Geophys. Data Center.* –Boulder. CO USA, 1985. – 189 p.

[7] Bilitza, D., Sheikh, N.M., and Eyfrig, R., A global model for the height of the F2-peak using M3000 values from the CCIR numerical map, *Telecommun. J.*, 1979, vol. 46, no. 9, pp. 549–553.

[8] Dudeney, J.R., The accuracy of simple methods for determining the height of the maximum electron concentration of the F2-layer from scaled ionospheric characteristics, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1983, vol. 45, nos. 8–9, pp. 629–640.

[9] Piggott, W. R. and Rawer, K.: U.R.S.I. Handbook of Ionogram Interpretation and Reduction, second ed., World Data Center A for Solar-Terrestrial Physics, Report UAG-23A, 1978.

[10] Wright, J. W., Knecht R. W., and Davies K. Manual on Ionospheric Vertical Soundings for the International Geophysical Year (in Russian), edited by N. V. Mednikova and B. S. Shapiro. – Moscow: Nauka, 1957. – P.224.

**Сведения об авторах:**

Гордиенко Галина Ивановна, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, ggordienko@mail.ru;

Яковец Артур Федорович, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, artyak40@mail.ru;

Литвинов Юрий Георгиевич, канд. ф.-мат. наук, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, yurii-litvinov@mail.ru.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 44 – 49

**A.F. Yakovets, G.I. Gordienko, S.V. Kryukov, B.T. Zhumabayev, Yu.G. Litvinov**

«Institute of Ionosphere» JSC «National Center of Space Research and Technology», Almaty  
[artyak40@mail.ru](mailto:artyak40@mail.ru)

## DAY-TO-DAY VARIABILITY OF ELECTRON CONCENTRATION IN THE IONOSPHERIC F2 LAYER MAXIMUM

**Abstract.** The analysis of the day-to-day variations in the electron concentration at the maximum of the F2 layer was carried out on the basis of measurements of the critical frequency of the ionospheric F2 layer ( $f_oF2$ ) over Almaty in 1999 (high solar activity), 2008 (low activity), 2011 and 2012 (average activity). Autocorrelation functions and spectra of variations were calculated, which showed the existence of two types of day-by-day variations in the electron concentration at the maximum of the F2 layer. To the first type, representing the stochastic day from the day of variation, 56% of all the cases considered were attributed. To the second type, which represents a superposition of stochastic and quasiperiodic variations of  $f_oF2$ , 44% of all cases considered were attributed. An analysis of all the spectra obtained showed that the periods of quasiperiodic variations of  $f_oF2$  are distributed in the interval of 2-16 days. This interval corresponds to the range of planetary waves generated in the lower layers of the atmosphere, and penetrating to the heights of the thermosphere. It is shown that: a) the values of the relative mean-square deviations are minimal in the daytime and they do not depend on the level of solar activity, b) the night values of the root-mean-square deviations significantly exceed the daytime deviations, with the maximum deviation occurring at the after-midnight hours.

**Key words:** ionosphere, vertical sounding, electron concentration in the F2 layer maximum.

УДК 550.383

**А.Ф. Яковец, Г.И. Гордиенко, С.В. Крюков, Б.Т. Жумабаев, Ю.Г. Литвинов**

ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы,

## ДЕНЬ ОТО ДНЯ ВАРИАЦИИ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В МАКСИМУМЕ F2-СЛОЯ ИОНОСФЕРЫ

**Аннотация.** Проведен анализ день ото дня вариаций электронной концентрации в максимуме F2- слоя на основе данных измерений критической частоты F2-слоя ионосферы ( $f_oF2$ ) над Алматы за 1999 г. (высокая солнечная активность), 2008 г. (низкая активность), 2011 г. и 2012 г. (средняя активность). Рассчитаны автокорреляционные функции и спектры вариаций, показавшие существование двух типов день ото дня вариаций электронной концентрации в максимуме F2-слоя. К первому типу, представляющему стохастические день ото дня вариации, было отнесено 56% от всех рассмотренных случаев. Ко второму типу, представляющему суперпозицию стохастических и квазипериодических вариаций  $f_oF2$ , было отнесено 44% от всех рассмотренных случаев. Анализ всех полученных спектров показал, что периоды квазипериодических вариаций  $f_oF2$  распределены в интервале 2 – 16 дней. Этот интервал соответствует диапазону планетарных волн, генерируемых в нижних слоях атмосферы, и проникающих на высоты термосферы. Показано, что: а) значения относительных среднеквадратичных отклонений минимальны в дневное время и они не зависят от уровня солнечной активности, б) ночные значения среднеквадратичных отклонений заметно превышают дневные, при этом максимум отклонений приходится на послеполуночные часы.

**Ключевые слова:** ионосфера, вертикальное зондирование, день ото дня вариации электронной концентрации.

**Введение.** Эмпирические модели ионосферы играют важную роль в исследовании солнечно-земных связей. Признанная международным сообществом международная модель ионосферы IRI (International Reference Ionosphere), созданная на основе надёжных экспериментальных данных зондирования ионосферы, позволяет получать усредненные за месяц данные об электронной плотности и температуре, ионной температуре и составе в высотном интервале 60 – 1500 км. Изменчивость характеристик  $F2$ -слоя ионосферы, представляющая разброс данных, полученных на основе их одноразовых измерений, вокруг их среднемесячных значений является общепризнанным фактом, который следует принимать во внимание при практическом использовании ионосферных моделей [1, 2]. В работах [3, 4] было замечено, что день ото дня изменения электронного содержания максимума  $F2$ -слоя были обусловлены в основном стохастическими механизмами. В работе [5] было получено, что день ото дня изменчивость электронного содержания превышает час от часу изменчивость. Исследование изменчивости значительно увеличивает практическую пользу ионосферных моделей, поэтому целью настоящей работы является изучение изменчивости электронного содержания максимума  $F2$ -слоя над Алматы для разного времени суток при различных величинах солнечной активности.

**Результаты исследований.** Наблюдения ионосферы проводятся в Институте ионосферы на цифровом ионозонде, сопряженном с компьютером, который предназначен для сбора, хранения и обработки ионограмм в цифровом виде. Информация считывается с ионограмм полуавтоматическим методом. Зондирование ионосферы осуществлялось в 15 – минутном режиме. Первичная обработка ионограмм включала считывание значений критической частоты слоя  $F2$  ( $f_oF2$ ) с точностью считывания  $\sim 0.05$  МГц. Критическая частота слоя связана с электронной концентрацией в максимуме слоя ( $NmF2$ ), выражаемой количеством электронов в кубическом сантиметре, соотношением  $NmF2 = 1.24 \cdot 10^4 f_oF2^2$ . Для исследования поведения статистических параметров день ото дня вариаций электронной концентрации в максимуме  $F2$ -слоя использованы данные измерений критической частоты  $F2$ -слоя ионосферы ( $f_oF2$ ) над Алматы за 1999 г. (высокая солнечная активность), 2008 г. (низкая активность), 2011 г. и 2012 г. (средняя активность).

Для визуального контроля суточного хода и день ото дня изменчивости  $f_oF2$  и электронной концентрации в максимуме слоя значения критических частот, полученные в течение конкретного месяца, представлялись в графическом виде (рис. 1). На рисунке значения  $NmF2$  отображены в виде отдельных точек. Линия представляет суточное поведение медианного значения  $NmF2$ .

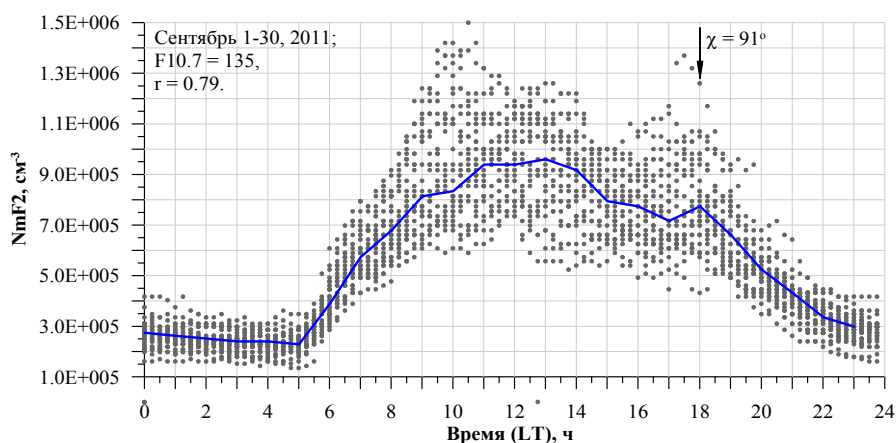


Рисунок 1 - Суточное поведение электронной концентрации в максимуме  $F2$ -слоя ионосферы над Алматы в сентябре 2011 г.

Значительный день ото дня разброс значений электронной концентрации в максимуме  $F2$ -слоя ионосферы требует проведения анализа статистических параметров и, в частности, автокорреляционных функций  $f_oF2$ . Рассчитанные автокорреляционные функции рядов, представляющих отсчеты значений  $f_oF2$  для конкретного времени суток в последовательные дни, показали существование различного типа день ото дня вариаций электронной концентрации в максимуме

*F2*-слоя. К первому типу, представляющему стохастические день ото дня вариации (примеры автокорреляционных функций приведены на двух верхних панелях рис.2), было отнесено 56% от всех рассмотренных случаев. Ко второму типу, представляющему суперпозицию стохастических и квазипериодических вариаций *foF2*, было отнесено 44% от всех рассмотренных случаев (примеры автокорреляционных функций приведены на двух нижних панелях).

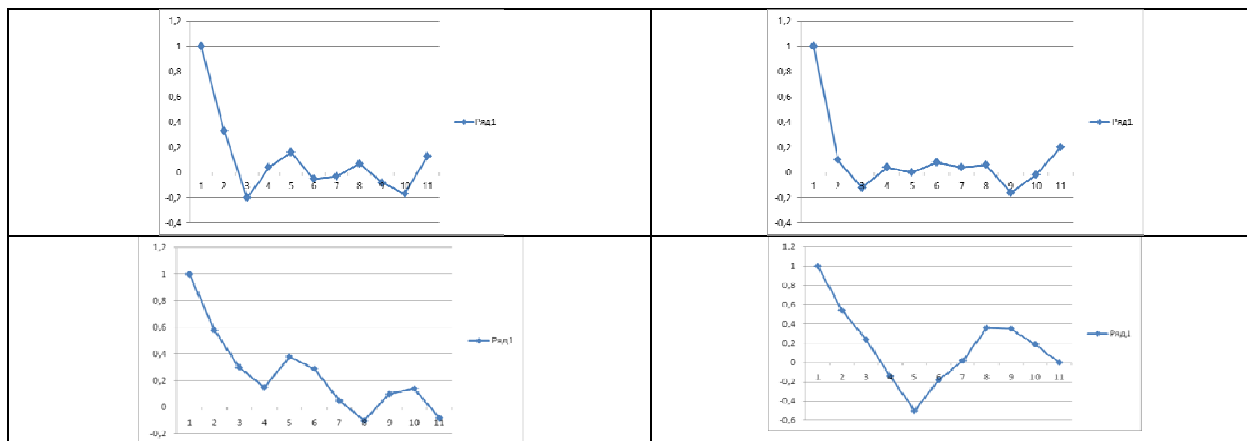


Рисунок 2 - Автокорреляционные функции вариаций *foF2* разного типа

Спектральный анализ рядов, представляющих значения *foF2* для конкретного времени суток в последовательные дни проведен методом Блекмана-Тьюки. Верхние две панели показывают примеры существования периодических компонент в день ото дня вариациях *foF2*. Анализ всех полученных спектров показал, что периоды квазипериодических вариаций *foF2* распределены в интервале 2 – 16 дней. Этот интервал соответствует диапазону планетарных волн, генерируемых в нижних слоях атмосферы, и проникающих на высоты термосферы. Нижние две панели представляют примеры спектров стохастических вариаций *foF2*.

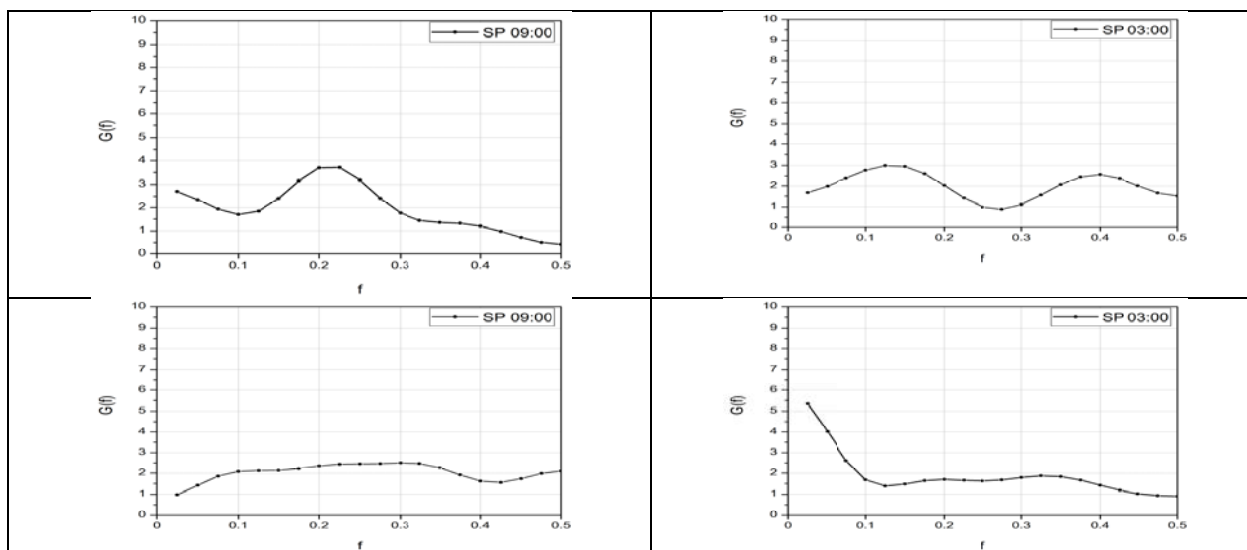


Рисунок 3 - Разные типы спектров вариаций *foF2*

Стохастические вариации электронной концентрации в *F2*-слое (высота более 150 км), по-видимому, говорят о его турбулентной структуре. Известно, что образование турбулентности выше турбопаузы (~ 100км) затруднено, что обусловлено ростом молекулярной вязкости с высотой. Теплопроводность и вязкость стремятся сгладить любые мелкомасштабные градиенты

температурного и ветрового поля. Однако в верхней атмосфере источником турбулентности может быть разрушение идущих из нижней атмосферы внутренних волн, в результате нелинейного взаимодействия планетарных волн и приливов. Диссипация энергии турбулентных движений может оказывать влияние на стохастические вариации электронной концентрации в F2-слое ионосферы.

Физические механизмы, определяющие разброс критических частот или электронной концентрации в максимуме F2-слоя, довольно многочисленны. Существует много факторов, таких как солнечная радиация, геомагнитная активность, внутренние атмосферные волны различных периодов и пространственных масштабов, которые могут приводить ко дню ото дня вариациям электронного содержания в F2-слоя ионосферы в фиксированное местное время. В работе [6] рассмотрели почти все возможные механизмы вариативности F2-слоя ионосферы и пришли к заключению, что их можно разделить на четыре класса: вариации 1) солнечного ионизирующего излучения, 2) солнечного ветра и геомагнитной активности, 3) метеорологических источников в нижней атмосфере и 4) электродинамических источников. Считается, что метеорологические источники по степени воздействия на F2-слой сравнимы с геомагнитными источниками и значительно больше солнечной компоненты.

Вариативность от различных источников имеет различные масштабы корреляции в пространстве. Это обусловлено тем, что некоторые источники глобальны, например, солнечная радиация, а некоторые локальны, например, метеорологические источники. Большая вариативность F2-слоя ночью по сравнению с днем обусловлена тем, что ночью возрастает энергия, поступающая в авроральный овал [6] из магнитосферы. Существенными источниками случайных флуктуаций  $NmF2$  являются нерегулярные высыпания энергичных частиц из магнитосферы в авроральную зону, а также электрические поля и соответствующие токи магнитосферного происхождения. Приток энергии происходит в области авроральных овалов, при этом в ночном полушарии он больше, чем в дневном полушарии.

Крупномасштабные перемещающиеся ионосферные возмущения (КМ ПИВ) вызываются атмосферными гравитационными волнами (АГВ), генерируемыми в авроральной зоне во время геомагнитных возмущений [7], когда быстрое усиление авроральных электроджетов приводит к нагреву атмосферы. Процесс быстрого расширения и последующего сжатия атмосферы генерирует АГВ, распространяющуюся к экватору и вызывающую появление КМ ПИВ на пути ее распространения. Распространение АГВ в нейтральной атмосфере и их ионосферное проявление изучалось как экспериментально, так и теоретически в течение ряда лет. В работе [8] на основе анализа данных GPS приемников показано, что существует заметная вероятность (28% от полного числа) наблюдения КМ ПИВ и при спокойных магнитных условиях ( $Kp \leq 3$ ). Типичные параметры КМ ПИВ в F-области ионосферы представляют следующие величины: периоды занимают диапазон 40 мин – 6 ч; горизонтальные длины волн – 1000–3000 км; фазовые скорости – 400–1000 м/с. При спокойных геомагнитных условиях вариативность вариативности F2-слоя обусловлена, в основном, метеорологическими источниками [9], к которым относятся проникающие снизу на ионосферные высоты внутренние волны. Эти волны в нейтральной атмосфере переносят значительное количество кинетической энергии из тропосферы вверх. В зависимости от пространственных и временных масштабов их разделяют на: 1) приливные колебания, 2) гравитационные и 3) планетарные волны. Спектральный анализ суточного хода параметров атмосферы, испытывающих приливные колебания, свидетельствует о том, что в верхней атмосфере отчетливо выражены главным образом полусуточные и суточные колебания. Внутренние гравитационные волны, периоды которых лежат в интервале от нескольких минут до ~ 6 часов, распространяются до ионосферных высот. Выполнено большое количество теоретических расчетов “отклика” ионосферы на прохождение внутренних гравитационных волн, экспериментально подтверждена их роль в динамике термосферы. Планетарные волны, периоды которых меняются в пределах 1-15 суток, относятся к классу длинных крупномасштабных волн в атмосфере, являющихся проявлением инерционных сил. Системы сильных зональных ветров в стратосфере препятствуют просачиванию планетарных волн из тропосферы в термосферу, но, тем не менее, часть их энергии достигает верхней атмосферы - об этом свидетельствуют спектры вариаций  $foF2$ .

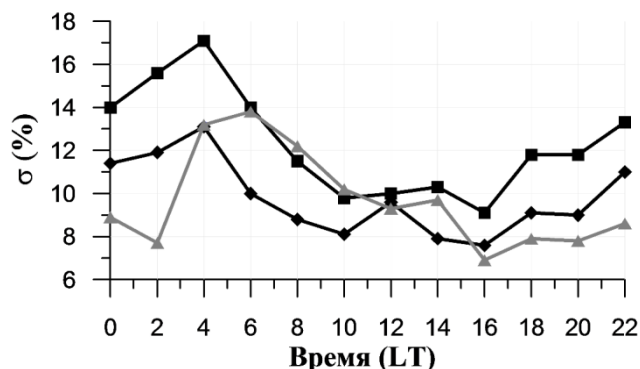


Рисунок 4- Суточные зависимости относительных среднеквадратичных отклонений значений критических частот для июня-июля при трех уровнях солнечной активности  $F_{10.7} = 65.8$  (ромбы),  $F_{10.7} = 128.0$  (квадраты) и  $F_{10.7} = 168$  (треугольники)

Нами также рассчитаны суточные зависимости относительных среднеквадратичных отклонений значений критических частот (рис. 4) для июня-июля при трех уровнях солнечной активности  $F_{10.7} = 65.8$  (ромбы),  $F_{10.7} = 128.0$  (квадраты) и  $F_{10.7} = 168$  (треугольники).

Относительные среднеквадратичные отклонения представляют отношение среднеквадратичного отклонения  $foF2$  к среднемесячному значению, умноженное на 100%.

Зависимости показали, что: а) значения относительных среднеквадратичных отклонений минимальны в дневное время и они не зависят от уровня солнечной активности, б) ночные значения среднеквадратичных отклонений заметно превышают дневные, при этом максимум отклонений приходится на послеполуночные часы. Большая вариативность  $F2$ -слоя ночью по сравнению с днем обусловлена, по-видимому, тем, что ночью возрастает энергия, поступающая в авроральный овал из магнитосферы в ночном полушарии. Существенными источниками случайных флуктуаций  $NmF2$  являются нерегулярные высыпания энергичных частиц из магнитосферы в авроральную зону, а также электрические поля и соответствующие токи магнитосферного происхождения, вызывающие генерацию ионосферных возмущений, перемещающихся на средние широты.

**Заключение.** Доказано существование двух типов день ото дня вариаций электронной концентрации в максимуме  $F2$ -слоя. К первому типу, представляющему стохастические день ото дня вариации, было отнесено 56% от всех рассмотренных случаев. Ко второму типу, представляющему суперпозицию стохастических и квазипериодических вариаций  $foF2$ , было отнесено 44% от всех рассмотренных случаев.

Анализ всех полученных спектров показал, что периоды квазипериодических вариаций  $foF2$  распределены в интервале 2 – 16 дней. Этот интервал соответствует диапазону планетарных волн, генерируемых в нижних слоях атмосферы, и проникающих на высоты термосферы.

3. Показано, что: а) значения относительных среднеквадратичных отклонений минимальны в дневное время и они не зависят от уровня солнечной активности, б) ночные значения среднеквадратичных отклонений заметно превышают дневные, при этом максимум отклонений приходится на послеполуночные часы.

Работа выполнена по РБП-076 “Развитие методов мониторинга и исследований космического пространства на базе современных информационных технологий” в рамках темы “Изучить структуру и динамику потока космических лучей, геомагнитного поля, ионосферы и атмосферы с целью диагностики и прогноза состояния ближнего космоса”, Регистрационный номер (РН) 0115PK01275.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rishbeth, H., Mendillo, M., 2001. Patterns of  $F2$ -layer variability. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* 63, 1661–1680.  
 [2] Bilitza, D., 2000. Report from 33rd COSPAR Scientific Assembly. Warsaw, Poland. 16–23 July 2000. *IRI News Letters*, vol. 7 (no. 3/4). pp. 1–4.



- [3] Somoye, E.O., 2009. Comparison of NmF2 variability at Ibadan, Singapore and Slough during different epochs of solar cycle. *Asian J. Sci. Res.* 2 (3), 155–160.
- [4] Somoye, E.O., Akala, A.O., 2010. NmF2 variability at equatorial and low latitude stations: a review. *Res. J. Phys.* 4 (2), 50–55.
- [5] Kouris, S.S., Fotiadis, D.N., 2002. Ionospheric variability a comparative statistical study. *Adv. Space Res.* 29 (6), 977–985.
- [6] Rishbeth, H. and Mendillo, M.: Patterns of F2-layer variability, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 63, 1661–1680, 2001.
- [7] Hunsucker R.D. Atmospheric gravity waves generated in the high-latitude ionosphere: A review // *Rev. Geophys.* V. 20. P. 293–315. 1982.
- [8] Tsugawa T., Saito A., Otsuka Y. A statistical study of large-scale traveling ionospheric disturbances using the GPS network in Japan // *J. Geophys. Res.* V. 109. A06302, doi:10.1029/2003JA010302. 2004.
- [9] Forbes, J. M., Palo, S. E., and Zhang, X. L.: Variability of the ionosphere, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 62, 685–693, 2000.

#### REFERENCES

- [1] Rishbeth, H., Mendillo, M., 2001. Patterns of F2-layer variability. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* 63, 1661–1680.
- [2] Bilitza, D., 2000. Report from 33rd COSPAR Scientific Assembly. Warsaw, Poland. 16–23 July 2000. *IRI News Letters*, vol. 7 (no. 3/4), pp. 1–4.
- [3] Somoye, E.O., 2009. Comparison of NmF2 variability at Ibadan, Singapore and Slough during different epochs of solar cycle. *Asian J. Sci. Res.* 2 (3), 155–160.
- [4] Somoye, E.O., Akala, A.O., 2010. NmF2 variability at equatorial and low latitude stations: a review. *Res. J. Phys.* 4 (2), 50–55.
- [5] Kouris, S.S., Fotiadis, D.N., 2002. Ionospheric variability a comparative statistical study. *Adv. Space Res.* 29 (6), 977–985.
- [6] Rishbeth, H. and Mendillo, M.: Patterns of F2-layer variability, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 63, 1661–1680, 2001.
- [7] Hunsucker R.D. Atmospheric gravity waves generated in the high-latitude ionosphere: A review // *Rev. Geophys.* V. 20. P. 293–315. 1982.
- [8] Tsugawa T., Saito A., Otsuka Y. A statistical study of large-scale traveling ionospheric disturbances using the GPS network in Japan // *J. Geophys. Res.* V. 109. A06302, doi:10.1029/2003JA010302. 2004.
- [9] Forbes, J. M., Palo, S. E., and Zhang, X. L.: Variability of the ionosphere, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 62, 685–693, 2000.

#### Сведения об авторах:

Яковец Артур Федорович, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, [artyak40@mail.ru](mailto:artyak40@mail.ru);

Гордиенко Галина Ивановна, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, [ggordienko@mail.ru](mailto:ggordienko@mail.ru);

Крюков Сергей Викторович, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, [cosmoserg@mail.ru](mailto:cosmoserg@mail.ru);

Жумабаев Бейбит Тенелович, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, [beibit.zhu@mail.ru](mailto:beibit.zhu@mail.ru);

Литвинов Юрий Георгиевич, канд. ф.-мат. наук, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, [yurii-litvinov@mail.ru](mailto:yurii-litvinov@mail.ru).

**А.Ф. Яковец, Г.И. Гордиенко, С.В. Крюков, Б.Т. Жумабаев, Ю.Г. Литвинов**

«Ионосфера институты» ДТОО «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы,

#### ЭЛЕКТРОНДЫҚ КОНЦЕНТРАЦИЯНЫҢ ИОНОСФЕРАНЫҢ F2-ҚАБАТЫНЫҢ МАКСИМАЛЫНДАҒЫ КҮНДЕЛІКТІ ӨЗГЕРУІ

**Аннотация.** Алматы үшін 1999 (жоғары күн белсенділігі), 2008 (төмен белсенділік), 2011 және 2012 (орташа белсенділігі) аралығында F2 қабатының максимумында электрон концентрациясының күнделікті өзгерулерін талдау нәтижесінде ионосфераның F2 қабатының сындық жиілігін өлшеу негізінде ( $f_oF2$ ) Автокорреляциялық функциялар мен вариация спектрлері есептелді, бұл F2 қабатының максимумында электрондық концентрациядағы күнделікті өзгерістердің екі түрінің бар екенін көрсетеді. Вариация күнінен бастап стохастикалық күнді білдіретін бірінші типтегі қаралған барлық жағдайлардың 56%-ы анықталды.  $f_oF2$ -ның стохастикалық және квазипериодтық ауытқуларының суперпозицияларын білдіретін екінші типтегі қарастырылған барлық жағдайлардың 44% -на жатқызылады. Алынған барлық спектрлерді талдау  $f_oF2$  квазипериодтық өзгеру кезеңдері 2-16 күн аралығында бөлінгенін көрсетті. Бұл интервал атмосфераның төменгі қабаттарында пайда болатын планеталық толқындардың диапазонына сәйкес келеді және термосфераның биіктігіне енеді. а) Күндізгі орташа ауытқулардың шамасы шамалы және олар күн белсенділігінің деңгейіне байланысты емес, б) Орташа-квадраттық ауытқулардың түнгі мәні жарты түнгі сағаты ең көп ауытқу бар кезінде күндізгіден айтарлықтай асып түсетінін көрсетеді.

**Тірек сөздер:** ионосфера, тік барлау, электрондық концентрацияның күнделікті өзгеруі.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 50 – 54

A.F. Yakovets<sup>1</sup>, G.I. Gordienko<sup>1</sup>, B.T. Zhumabayev<sup>1</sup>, Yu.G. Litvinov<sup>1</sup>, N. Abdrakhmanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>«Institute of Ionosphere» JSC «National Center of Space Research and Technology», Almaty;

<sup>2</sup>Korkyt ata's Kysylorda State University, Kysylorda  
[artyak40@mail.ru](mailto:artyak40@mail.ru)

## FINE STRUCTURE OF NIGHTTIME ENHANCEMENTS OF THE ELECTRON CONCENTRATION IN THE $F2$ LAYER MAXIMUM

**Abstract.** The analysis of the fine structure of the night enhancements of the electron density at the maximum  $F2$ - layer is carried out. In a specific example of behavior of the  $F2$ -layer parameters, we consider the mechanism of the enhancements formation, which consists of several steps. These steps are consistent increase of the velocity of the meridional directed to the equator thermospheric wind, lifting  $F2$ -layer. This step greatly reduces the rate of recombination, so beginning an enhancement in the electron density in the layer. Increasing the electron concentration leads to a decrease in the electron temperature in the  $F2$ -layer and the further enhancement of the plasma flow speed directed down. Increased downward plasma speed provides additional flow in the  $F2$ -layer, resulting in electron enhancement, and so forth. This self-sustaining avalanche process produces peak  $N_mF2$ . The process stops when the thermospheric wind begins to decrease with a corresponding reduction in the height of the  $F2$ - layer. The layer goes back to the heights with the high rate of recombination, and  $N_mF2$  begins to decrease.

**Key words:** ionosphere, vertical sounding, nighttime enhancements in the electron concentration of the  $F2$ -layer maximum

УДК 550.383

А.Ф. Яковец<sup>1</sup>, Г.И. Гордиенко<sup>1</sup>, Б.Т. Жумабаев<sup>1</sup>, Ю.Г. Литвинов<sup>1</sup>, Н. Абдрахманов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы;

<sup>2</sup>Кызылординский государственный университет им. Коркыт ата, Кызылорда.

## ТОНКАЯ СТРУКТУРА НОЧНЫХ УВЕЛИЧЕНИЙ В МАКСИМУМЕ $F2$ -СЛОЯ

**Аннотация.** Проведен анализ тонкой структуры ночных увеличений электронной концентрации в максимуме  $F2$ - слоя. На конкретном примере поведения параметров  $F2$ -слоя, рассмотрен механизм образования увеличений, состоящий из ряда этапов. Эти этапы представляют последовательное увеличение скорости меридионального направленного к экватору термосферного ветра, поднимающего  $F2$ -слой, что сильно уменьшает скорость рекомбинации, поэтому начинается увеличение электронной концентрации в слое. Увеличение электронной концентрации приводит к уменьшению электронной температуры в  $F2$ -слое и дальнейшему усилению скорости плазменного потока вниз. Увеличение направленной вниз скорости плазмы обеспечивает дополнительное поступление плазмы в  $F2$ -слой, приводя к увеличению электронной плотности и так далее. Этот самоподдерживающийся лавинообразный процесс формирует пик в  $NmF2$ . Процесс останавливается, когда термосферный ветер начинает уменьшаться с соответствующим понижением высоты слоя  $h_mF$ . Слой возвращается назад на высоты, где высока рекомбинация,  $N_mF2$  начинает уменьшаться и описываемый процесс обращается.

**Ключевые слова:** ионосфера, вертикальное зондирование, ночные увеличения электронной концентрации.

**Введение.** Если не брать в расчет процессы переноса ионосферной плазмы, электронная концентрация среднеширотного  $F2$ - слоя ионосферы, когда ночью выключен солнечный источник

фотоионизации, должна плавно уменьшаться благодаря рекомбинации электронов с отрицательными ионами. Однако ночью часто происходит увеличение электронной концентрации. Экспериментальные и теоретические исследования ночных увеличений электронной концентрации в максимуме  $F2$ -слоя ионосферы ( $N_mF2$ ) проводятся продолжительное время. В работах [1-5] рассматриваются механизмы формирования ночных увеличений, включающие направленный вверх дрейф плазмы, обусловленный направленным к экватору меридиональным нейтральным ветром, и усиление направленного вниз потока плазмы из протоносферы из-за дополнительного нагрева плазмы протоносферы. В работе [3] дан физический механизм явления, включающий последовательность этапов, рассмотрение которых позволяет экспериментально проследить тонкую структуру увеличений, отражающуюся во временном поведении параметров  $F2$ -слоя. Поэтому целью настоящей работы явился анализ поведения параметров  $F2$ -слоя в периоды ночных увеличений электронной концентрации по данным вертикального зондирования ионосферы на ст. Алматы ( $76^{\circ}55'E$ ,  $43^{\circ}15'N$ ).

**Описание аппаратуры и анализ результатов наблюдений.** Ночные наблюдения ионосферы проводятся в Институте ионосферы (ст. Алматы) на цифровом ионозонде, сопряженном с компьютером, который предназначен для сбора, хранения и обработки ионограмм в цифровом виде. Информация считывается с ионограмм полуавтоматическим методом. Длительность сеансов наблюдения, осуществляемых в 5 – минутном режиме, в зависимости от сезона составляла 10-14 часов, 10-15 ночей каждый месяц. Учащенное зондирование ионосферы дает возможность четко фиксировать увеличения  $N_mF2$  с малой длительностью и амплитудой. Вертикальное зондирование ионосферы проводилось на цифровом ионозонде “Парус”. Ионозод обеспечивает точность считывания действующих высот отражения радиосигнала ( $h'(f)$ )  $\sim 2.5$  км и рабочих частот зондирования ( $f_o$ )  $\sim 0.05$  МГц. Информация, необходимая для расчетов разнообразных параметров  $F2$ -слоя, считывалась с ионограмм полуавтоматическим методом с участием опытного оператора. В работе [6] показано, что подобный способ обработки ионограмм обладает большей, по сравнению с автоматическим методом, точностью считывания ионосферных параметров и большим статистическим выходом ионограмм, пригодных к обработке. С ионограмм считывались значения действующих высот отражения ( $h'(f)$ ) радиосигнала на ряде рабочих частот и значения критических частот ( $f_{o,x}F2$ ). Дальнейшая обработка данных представляла расчет высотного распределения электронной плотности ( $N(h)$ -профиля) методом POLAN [7] и получение из последовательности профилей временных вариаций ряда параметров  $F2$ -слоя (электронной плотности на фиксированных высотах ( $N_h(t)$ ), плотности в максимуме слоя ( $N_mF2$ ), истинных высот максимума ( $h_mF$ ) и основания ( $h_{bot}F$ ) слоя и его полутолщины ( $\Delta h = h_mF - h_{bot}F$ ). За высоту основания  $F2$ -слоя выбиралась высота, которой соответствовало значение электронной плотности  $0.3 \times N_mF2$ . Коэффициент 0.3 был подобран эмпирически из соображения наибольшего приближения этой высоты к высоте, на которой на экспериментальном  $N(h)$ -профиле проявлялся значительный высотный градиент электронной плотности.

На рисунке 1 представлен пример поведения параметров  $F2$ -слоя, которое представляет последовательность увеличений: первого ( $t \sim 20.40 - 22.25$ ), второго ( $t \sim 23.10 - 02.00$ ) и третьего ( $t \sim 03.15 - 04.15$ ). Жирной линией на рисунке показано поведение критической частоты ( $f_oF2$ )  $F2$ -слоя для обыкновенной компоненты отраженного сигнала. Критическая частота слоя (в МГц) связана с электронной концентрацией в максимуме слоя ( $N_mF2$ ), выражаемой количеством электронов в кубическом сантиметре, соотношением  $N_mF2 = 1.24 \cdot 10^4 (f_oF2)^2$ . Падение критической частоты в начале сеанса измерения обусловлено выключением ионизирующего излучения Солнца после его захода и химическими потерями, связанными с рекомбинацией плазмы. Быстрое увеличение электронной концентрации после 06.00 обусловлено восходом Солнца. Рассмотрим поведение всех параметров слоя для первого по порядку увеличения ионизации с пиком  $N_mF2$  в  $t \sim 22.25$ , принимая во внимание последовательность этапов, рассмотренных в работе [3], в которой используется разработанный авторами самосогласованный метод получения термосферных параметров из данных радара некогерентного рассеяния. Основная идея метода представляет подгонку теоретического  $N(h)$  - профиля к наблюдаемому профилю и таким образом получение самосогласованного набора главных аэрономических параметров: нейтрального состава,

температуры нейтралов ( $T_n(h)$ ), вертикального дрейфа плазмы ( $W$ ), и наблюдаемые высотные профили электронной и ионной температур ( $T_e(h)$ ),  $T_i(h)$ ). Не смотря на разнообразие возможностей реализации увеличений  $N_m F2$ , авторы установили главный механизм образования пика.

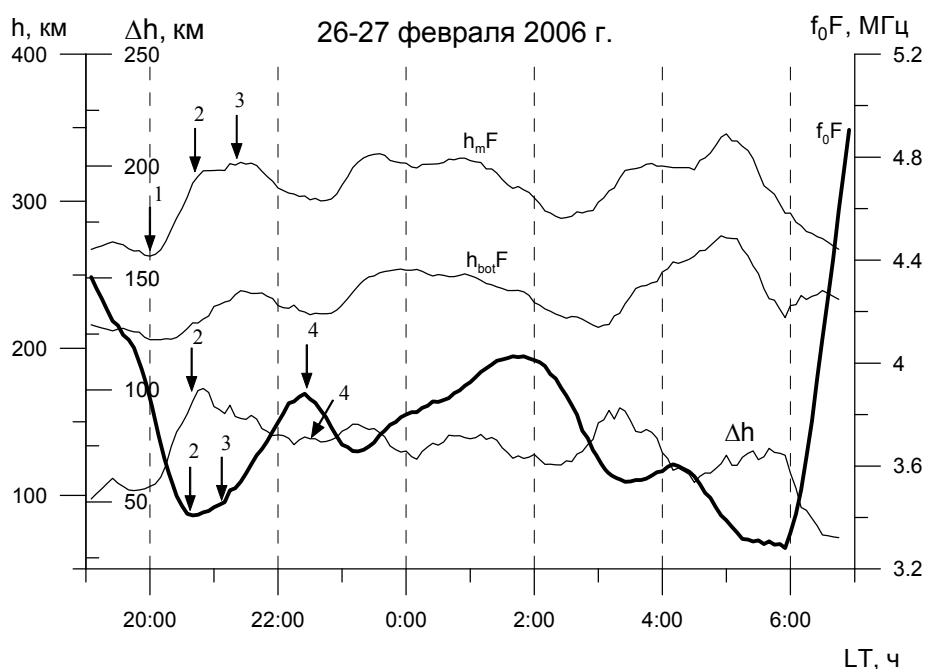


Рисунок 1 – Поведение параметров  $F2$ -слоя при формировании ночных увеличений электронной концентрации

Ночью всегда существует направленный вниз из плазмасферы поток ионов  $O^+$  в  $F2$ - слой благодаря рекомбинации плазмы. Вертикальная скорость плазмы определяется высотными градиентами электронной плотности, ионной и электронной температур, а также гравитационным членом и скоростью дрейфа, определяемой термосферным ветром. Начальная стадия процесса представляет увеличение скорости меридионального направленного к экватору термосферного ветра, поднимающего  $F2$ -слой и, таким образом, приводящим к увеличению  $h_m F2$ . На рисунке 1 это начало соответствует времени  $t \sim 20.00$  (1). На рисунке стрелки, сопровождаемые цифрами, обозначают моменты начала последовательных стадий формирования ночных увеличений. Подъем  $F2$ -слоя сильно уменьшает скорость рекомбинации, и соответствующий коэффициент плазменных потерь становится малым. При этом даже умеренный плазмасферный поток оказывается достаточным, чтобы начать увеличение электронной концентрации в  $F2$ -слое ( $t \sim 20.40$  (2)), сначала медленное до  $t \sim 21.10$  (3), а затем все более быстрое.

Увеличение электронной концентрации приводит к уменьшению электронной температуры в  $F2$ -слое. Механизм, ответственный за обратную связь электронной концентрации и температуры, представлен в работе [8]. Электронная температура уменьшается с ростом электронной концентрации, из-за увеличения удельной теплоемкости электронного газа и усиления передачи энергии относительно холодным ионам. Электронная температура определяет шкалу высот ионосферной плазмы ( $H_p$ ). С увеличением температуры шкала высот возрастает, а уменьшение температуры приводит к уменьшению шкалы высот. В работе [9] показано, что хотя  $H_p$  напрямую не связана с  $N(h)$ -профилем, однако полученные регрессионные зависимости говорят о сильной корреляционной связи между этими величинами. Поэтому вариации полутолщины ( $\Delta h$ ) слоя, можно использовать для качественного описания поведения электронной температуры.

Уменьшение электронной температуры приводит к уменьшению приведенной высоты (полутолщины ( $\Delta h$ )), и быстрому и дальнейшему усилению скорости потока вниз. Увеличение направленной вниз скорости плазмы обеспечивает дополнительное поступление плазмы в  $F2$ -слой, приводя к увеличению электронной плотности и так далее. Этот самоподдерживающийся лавинообразный процесс формирует пик в  $N_m F2$  в  $t \sim 22.25$  (4). Процесс останавливается, когда

термосферный ветер начинает уменьшаться с соответствующим понижением высоты слоя  $h_mF$ . Слой возвращается назад на высоты, где высока рекомбинация,  $N_mF2$  начинает уменьшаться и описываемый процесс обращается. Максимальный поток строго соответствует времени пика в вариациях  $N_mF2$ , так как он пропорционален произведению скорости на  $N_e$ , а они максимальны около этого времени. Согласно этому механизму, всегда должна быть задержка пика в вариациях  $N_mF2$  (4) относительно пика в  $h_mF2$  (3). Пик в  $N_mF2$  должен формироваться на участке понижения  $h_mF2$ .

Второе и третье увеличения электронной концентрации с пиком  $N_mF2$  в  $t \sim 01.50$  и  $t \sim 04.20$  имеют те же особенности, что и первое увеличение. Кроме того, эти особенности сохраняются и во время формирования увеличений в другие даты, приходящиеся на разные сезоны и года с разным уровнем солнечной активности.

**Выводы.** Выполнен анализ поведения параметров  $F2$ -слоя в периоды ночных увеличений электронной концентрации по данным вертикального зондирования ионосферы. На конкретном примере поведения параметров  $F2$ -слоя, рассмотрена тонкая структура увеличений электронной концентрации на основе механизма их образования, описанного в литературе и представляющего последовательность ряда этапов. Эти этапы представляют последовательное увеличение скорости меридионального направленного к экватору термосферного ветра, поднимающего  $F2$ -слой и, таким образом, приводящим к увеличению высоты слоя. Подъем  $F2$ -слоя сильно уменьшает скорость рекомбинации, поэтому начинается увеличение электронной концентрации в слое. Увеличение электронной концентрации приводит к уменьшению электронной температуры в  $F2$ -слое. Уменьшение электронной температуры приводит к уменьшению приведенной высоты (полутолщины ( $\Delta h$ )), и быстрому и дальнейшему усилению скорости потока вниз. Увеличение направленной вниз скорости плазмы обеспечивает дополнительное поступление плазмы в  $F2$ -слой, приводя к увеличению электронной плотности и так далее. Этот самоподдерживающийся лавинообразный процесс формирует пик в  $N_mF2$ . Процесс останавливается, когда термосферный ветер начинает уменьшаться с соответствующим понижением высоты слоя  $h_mF$ . Слой возвращается назад на высоты, где высока скорость рекомбинации,  $N_mF2$  начинает уменьшаться и описываемый процесс обращается. Максимальный поток строго соответствует времени пика в вариациях  $N_mF2$ , так как он пропорционален произведению скорости на  $N_e$ , а они максимальны около этого времени. Согласно этому механизму, всегда должна быть задержка пика в вариациях  $N_mF2$  относительно пика в  $h_mF2$ .

Работа выполнена по РБП-076 “Развитие методов мониторинга и исследований космического пространства на базе современных информационных технологий” в рамках темы “Изучить структуру и динамику потока космических лучей, геомагнитного поля, ионосферы и атмосферы с целью диагностики и прогноза состояния ближнего космоса”, Регистрационный номер (РН) 0115PK01275.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bailey G.J., Sellek R., Balan N. The effect of interhemispheric coupling on nighttime enhancement in ionospheric total electron content during winter at solar minimum. *Ann. Geophys.* 1991, V. 9, № 11, P. 738-747.
- [2] Mikhailov A.V., Leschinskaya T.Yu., Förster M. Morphology of NmF2 nighttime increases in the Eurasian sector. *Ann. Geophysicae.* 2000, V. 18, № 6, P. 618-628.
- [3] Mikhailov A.V., Forster M., Leschinskaya T.Y. On the mechanism of the post-midnight winter NmF2 enhancements: dependence on solar activity. *Ann. Geophys.* 2000, V. 18, № 11, P. 1422-1434.
- [4] Pavlov A.V., Pavlova N.M. Mechanism of the post-midnight winter night-time enhancement in the NmF2 over Millstone Hill during 14-17 January 1986. *J. Atm. Solar-Terr. Phys.* 2005, V. 67, № 4, P. 381-395.
- [5] Pavlov A.V., Pavlova N.M. Causes of the mid-latitude NmF2 winter anomaly at solar maximum. *J. Atm. Solar-Terr. Phys.* 2005, V. 67, № 10, P. 862-877.
- [6] Stankov S., Jodogne J.(C., Kutiev I., Stegen K., Warnant R., Evaluation of automatic ionogram scaling for use in real-time ionospheric density profile specification: Dourbes DGS256/ARTIST4 performance // *Ann. Geophysics.* V. 55. № 2. P. 283–291. doi:10.4401/ag4976. 2012.
- [7] Titheridge J.E. Ionogram analysis with the generalized program Polan. Boulder. CO USA: National Data Center. 189 p. 1985.

- [8] R. W. Schunk, A.F. Nagy. Ionospheres: Physics, Plasma Physics, and Chemistry. Cambridge University Press, 2004. P. 554.  
[9] Liu, L., H. Le, W. Wan, M. P. Sulzer, J. Lei, and M.-L. Zhang (2007), An analysis of the scale heights in the lower topside ionosphere based on the Arecibo incoherent scatter radar measurements, *J. Geophys. Res.*, 112, A06307, doi:10.1029/2007JA012250.

#### REFERENCES

- [1] Bailey G.J., Sellek R., Balan N. The effect of interhemispheric coupling on nighttime enhancement in ionospheric total electron content during winter at solar minimum. *Ann. Geophys.* **1991**, V. 9, № 11, P. 738-747.  
[2] Mikhailov A.V., Leschinskaya T.Yu., Förster M. Morphology of NmF2 nighttime increases in the Eurasian sector. *Ann. Geophysicae.* **2000**, V. 18, № 6, P. 618-628.  
[3] Mikhailov A.V., Förster M., Leschinskaya T.Y. On the mechanism of the post-midnight winter NmF2 enhancements: dependence on solar activity. *Ann. Geophys.* **2000**, V. 18, № 11, P. 1422-1434.  
[4] Pavlov A.V., Pavlova N.M. Mechanism of the post-midnight winter night-time enhancement in the NmF2 over Millstone Hill during 14-17 January 1986. *J. Atm. Solar-Terr. Phys.* **2005**, V. 67, № 4, P. 381-395.  
[5] Pavlov A.V., Pavlova N.M. Causes of the mid-latitude NmF2 winter anomaly at solar maximum. *J. Atm. Solar-Terr. Phys.* **2005**, V. 67, № 10, P. 862-877.  
[6] Stankov S., Jodogne J.(C., Kutiev I., Stegen K., Warnant R., Evaluation of automatic ionogram scaling for use in real-time ionospheric density profile specification: Dourbes DGS256/ARTIST4 performance // *Ann. Geophysics.* V. 55. № 2. P. 283–291. doi:10.4401/ag4976. **2012**.  
[7] Titheridge J.E. Ionogram analysis with the generalized program Polan. Boulder. CO USA: National Data Center. 189 p. **1985**.  
[8] R. W. Schunk, A.F. Nagy. Ionospheres: Physics, Plasma Physics, and Chemistry. Cambridge University Press, **2004**. P. 554.  
[9] Liu, L., H. Le, W. Wan, M. P. Sulzer, J. Lei, and M.-L. Zhang (2007), An analysis of the scale heights in the lower topside ionosphere based on the Arecibo incoherent scatter radar measurements, *J. Geophys. Res.*, 112, A06307, doi:10.1029/2007JA012250.

УДК 550.383

**А.Ф. Яковец<sup>1</sup>, Г.И. Гордиенко<sup>1</sup>, Б.Т. Жумабаев<sup>1</sup>, Ю.Г. Литвинов<sup>1</sup>, Н. Абдрахманов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>ЕЖШС «Ионосфера институты» «ҰҒЗТО» АҚ, Алматы;

<sup>2</sup>Қорқыт ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті

#### МАКСИМУМ F2-ҚАБАТЫНЫҢ ТҮНГІ КӨБЕЙУЛЕРІНІҢ ЖҰҚА ҚҰРЫЛЫМЫ

**Аннотация.** Түнде F2-қабатының максималды деңгейінде электрондардың концентрациясының ұсақ құрылымының көбейуіне талдау жасалынды. F2 - қабатының параметрлерінің мінез-құлқына нақты мысал келтіріліп, бірнеше кезеңнен тұратын көбеюдің қалыптасу механизмі қарастырылды. Бұл кезеңдер экваторға бағытталған меридианға арналған термосфералық желдің жылдамдығын біртіндеп арттырады, және де рекомбинация жылдамдығын айтарлықтай төмендететін F2-қабатын көтереді, сондықтан қабаттағы электрондардың концентрациясын жоғарлауы басталады. Электрондардың концентрациясының өсуі F2-қабатындағы электрондардың температурасын төмендетуге және плазмалық ағынның жылдамдығының төмендеуіне әкеледі. Төмендетілген бағытталған плазма жылдамдығының жоғарылауы плазманың F2 - қабатына қосымша жеткізілуін қамтамасыз етеді, яғни электрондық тығыздығының артуына әкеледі және т.с.с. Бұл өзін-өзі қамтамасыз ететін көшкін сияқты үрдіс NmF2- шыңын құрайды. Термосфералық желдің hmF қабатының биіктігіне тиісті төмендей бастаған кезде үрдіс тоқтатылады. Қабат рекомбинациясы жоғары болатын биіктіктерге қайта оралады, NmF2 азая бастайды және сипатталған процесс қалпына келтіріледі.

**Кілт сөздер:** ионосфера, тік зондтау, түндік электрондардың концентрациясының артуы.

#### Сведения об авторах:

Яковец Артур Федорович, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, artyak40@mail.ru;

Гордиенко Галина Ивановна, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, ggordienko@mail.ru;

Жумабаев Бейбит Тенелович, канд. ф.-мат. наук, СНС, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, beibit.zhu@mail.ru;

Литвинов Юрий Георгиевич, канд. ф.-мат. наук, Каменское плато, Институт ионосферы, ДТОО «Институт ионосферы» АО «НЦКИТ», Алматы, yurii-litvinov@mail.ru;

Абдрахманов Нуртаза, канд. ф.-мат. наук, Кызылординский государственный университет им. Корқыт ата, Кызылорда

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 55 – 59

**I.V. Vassilyev<sup>1</sup>, B.T. Zhumabayev<sup>2</sup>**<sup>1</sup>«STDB Granite» Ltd, Kazakhstan, Almaty<sup>2</sup>National Center of Space Research and Technology, Institute of Ionosphere, Kazakhstan, Almaty  
[iv@granit.kz](mailto:iv@granit.kz)**INFLUENCE OF GRAVITATION ON FORMATION  
OF THE ELECTRIC FIELD OF THE EARTH**

**Abstract.** The hypothesis of contribution of the gravitational structured quartz molecules to formation of the electric field of the Earth is presented. It is assumed that under the influence of gravitational forces heavier atoms of silicon in the asymmetrical molecules of quartz at their crystallization hold position closer towards the center of the Earth, than lighter atoms of oxygen. As atoms of silicon are charged positively, and oxygen atoms negatively, the similar dominating structural orientation of molecules of quartz has to lead to structural orientation of electric dipoles of these molecules. Addition of the electric fields created by all molecules of quartz which are in a crystalline state creates the resultant field. The given calculations show that the behavior of this field is comparable to the values of an electric field of Earth observed in practice.

**Keywords:** gravitation, electrical dipole moment, quartz, electric field.

УДК: 550.3

**И.В. Васильев<sup>1</sup>, Б.Т. Жумабаев<sup>2</sup>**<sup>1</sup>ТОО Специальное конструкторско-технологическое бюро «Гранит», г. Алматы, Казахстан;<sup>2</sup>Национальный центр космических исследований и технологий ДТОО «Институт ионосферы»,  
Алматы, Казахстан**ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИИ НА ФОРМИРОВАНИЕ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ**

**Аннотация.** Представлена гипотеза о вкладе гравитационно-структурированных молекул кварца в формирование электрического поля Земли. Предположено, что под действием гравитационных сил более тяжёлые атомы кремния в несимметричных молекулах кварца при их кристаллизации занимают положение ближе в сторону центра Земли, чем более лёгкие атомы кислорода. Так как атомы кремния заряжены положительно, а атомы кислорода отрицательно, то подобная доминирующая структурная ориентация молекул кварца должна приводить к структурной ориентации электрических диполей этих молекул. Сложение электрических полей, создаваемых всеми молекулами кварца, находящимися в кристаллическом состоянии, создаёт результирующее поле. Приведённые расчёты показывают, что характер поведения этого поля сопоставим с наблюдаемыми на практике значениями электрического поля Земли.

**Ключевые слова:** гравитация, дипольный момент, кварц, электрическое поле.

Природа возникновения электрического поля Земли остаётся предметом дискуссий до настоящего времени. Существует много теорий его происхождения. В русскоязычной литературе достаточно подробный обзор этих теорий приведён в монографии Кузнецова В.В. [1]. Большинство моделей связывают происхождение поля с облаками и грозами. Несколько особняком стоит идея Ландау и Лифшица, связывающая появление поля с трением атмосферы о Землю при её вращении. Представления о связи атмосферного электричества с циркуляцией воды

продолжает доминировать в научной среде, и Земля моделируется как сферический конденсатор [2].

Характер электрического поля Земли достаточно странный, его напряжённость слишком резко убывает с высотой. Наиболее типичные зависимости напряжённости поля от высоты показаны на рис. 1 [3].

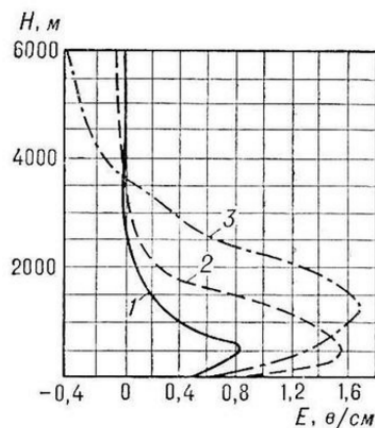


Рисунок 1 - Изменение напряжённости электрического поля  $E$  с высотой  $H$ . 1 - Ленинград; 2 - Киев; 3 - Ташкент

На сайте Института космических исследований и аэронавтики им. Ю.Г. Шафера СО РАН (г. Якутск) приведена схожая типовая зависимость (рис. 2) [4].

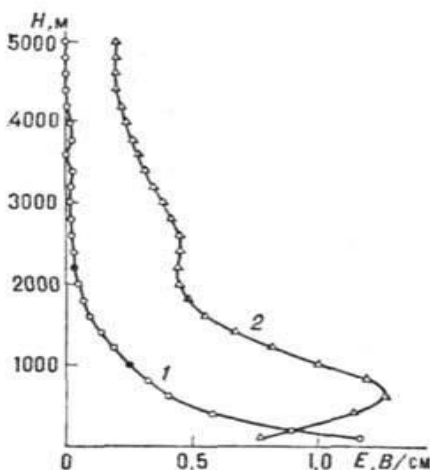


Рисунок 2 - Ход напряжённости электрического поля  $E$  с высотой  $H$  в зонах "хорошей" погоды. 1 - в чистой атмосфере (океан, арктические районы и т. д.); 2 - над континентами

Напряжённость поля у поверхности Земли в разных районах земного шара различна (таблица 1) [5], и в среднем составляет около 130 В/м.

Таблица 1 - Значение градиента потенциала в разных пунктах

Пункт наблюдений	$E$ , В/м	Пункт наблюдений	$E$ , В/м
Павловск (СПб, Россия)	171	Южно-Сахалинск	147
Потсдам (Германия)	203	Ташкент	128
Кью (Лондон, Англия)	363	Самоа (группа островов)	115
Упсала (Швеция)	70	Ява (о., Индонезия)	86
Шпицберген (арх., Норвегия)	78	Антарктида (Мирный), по данным МГГ	140
Екатеринбург	161		
Иркутск	192	Океаны, по данным МГГ	134



Основной проблемой при построении всех теорий является странное поведение электрического поля Земли, которое не вписывается в модели поведения заряженных тел, изучаемые в курсах электростатики. Какой бы моделью ни пытались описать поведение электрического поля (заряженная сфера, заряженный шар, заряженный сферический конденсатор «Земля – ионосфера» и т.п.), основной проблемой было то, что напряжённость поля уменьшается не обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли до точки измерения, а значительно быстрее! В таблице 2 приведены усреднённые значения напряжённости электрического поля в зависимости от высоты точки измерения над поверхностью Земли [6].

Таблица 2

Высота, км	0	0.5	1.5	3	6	12
Напряжённость, В/м	130	50	30	20	10	2,5

Учитывая, что радиус Земли 6380 км (высота над поверхностью Земли 0 км), то напряжённость поля должна уменьшаться в 4 раза только на высоте, на которой радиус удваивается, то есть высота над поверхностью – 6380 километров, а она падает до такой величины уже на высоте 1,5 километра. На высотах, на которых летают искусственные спутники Земли, чувствительность современных приборов не позволяет измерить величину электрического поля. Это свидетельствует о том, что в целом Земля является электрически нейтральной, но существует некий локальный эффект, приводящий к появлению быстро спадающего по уровню электрического поля у поверхности Земли.

В то же время, появление гипотезы о природе возникновения магнитного поля Земли как следствия структурной ориентации молекул кварца под действием гравитации [7,8] позволяет пересмотреть подход к теории происхождения атмосферного электричества. Вертикально расположенные диполи этого минерала при своём вращении вокруг оси Земли, приводили к появлению не скомпенсированного градиента напряжённости магнитного поля. Это позволило сделать численный расчёт значения магнитного поля Земли, достаточно хорошо совпавшего с результатами наблюдений.

Гравитационно-упорядоченные диполи молекул кварца, в целом электрически нейтральные, должны создавать нескомпенсированное электрическое поле в направлении вдоль оси электрического диполя, на которой расположены эти заряды. А это направление перпендикулярно поверхности земного шара. Из-за того, что отрицательно заряженные атомы кислорода расположены выше положительно заряженных атомов кремния, то общее поле отрицательных зарядов должно несколько доминировать. Поле гравитационно структурированных диполей молекул кварца должно соответствовать полю, создаваемому пластиной поляризованного диэлектрика.

Математически это можно выразить как интеграл полей зарядов отдельных диполей, расположенных вдоль оси, идущей от центра Земли до её поверхности и далее до точки измерений. Пределы интегрирования от  $r_1$  (расстояние от точки измерения поля до границы верхней мантии, где горные породы уже находятся в твёрдом состоянии) до  $r_2$  (расстояние от точки измерения поля до границы осадочных пород или дна водоёмов, выше которых упорядоченная ориентация кварца отсутствует).

Поле одного диполя

$$E_d = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r + \Delta r)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(r + \Delta r)^2 - r^2}{r^2 \cdot (r + \Delta r)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{2r\Delta r + \Delta r^2}{(r + \Delta r)^2} \approx \frac{q\Delta r}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1)$$

Здесь, символом  $\Delta r$  обозначено расстояние между зарядами в молекуле. Фактически, числитель этой формулы – это дипольный момент единичной молекулы кварца. Для системы соосных диполей напряжённость поля будет описываться интегралом

$$E = \int_{r_1}^{r_2} E_d dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\Delta r}{2\pi\epsilon_0 r^3} dr = \frac{q\Delta r}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q\Delta r}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \quad (2)$$

На самом деле таких систем соосных диполей, расположенных параллельно друг другу, множество и величина поля будет больше пропорционально их числу. Из уравнения (2) видно, что член уравнения, который содержит квадрат расстояния от поверхности Земли до границы верхней мантии, настолько мал, что фактически напряжённость поля зависит только от расстояния до границы осадочных пород  $r_2$  (а это не так далеко от поверхности Земли). Можно упростить уравнение:

$$E = \frac{q\Delta r}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2^2}\right) \text{ или } E = A \cdot \left(\frac{1}{r_2^2}\right), \text{ где} \quad (3)$$

$A$  – коэффициент пропорциональности.

Разделим  $r_2$  на две части, на расстояние от границы осадочных пород (воды) до поверхности Земли ( $x$ ) и на высоту от точки измерений до поверхности Земли ( $h$ ).

$$r_2 = x + h \quad (4)$$

Вычислим значение  $A$ , подставив в уравнение (3) уровень напряжённости поля на поверхности Земли ( $h = 0$  км,  $E = 130$  В/м), равное  $A = 130 \cdot x^2$ .

Найдём величину  $x$ , через значение напряжённости поля на высоте, например, 12 км ( $h = 12$  км,  $E = 2.5$  В/м), где влияние приземных факторов минимально.

$$x = \sqrt{\frac{A}{E}} - h = \sqrt{\frac{130x^2}{2.5}} - 12 = 7.2x - 12$$

Искомое значение будет равно 1,94 км. Следовательно, в нашем случае, коэффициент пропорциональности  $A$  будет равен 489. Теперь можно рассчитать напряжённость поля для остальных высот (таблица 3). В скобках, для сравнения, показаны значения из ранее приведённой таблицы 2.

Таблица 3

Высота над Землёй (км)	0,5	1,5	3	6
$r_2$	2,44	3,44	4,94	7,94
$r_2^2$	6,0	11,8	24,4	63
$E$ (В/м)	82 (50)	41 (30)	20 (20)	7,7 (10)

### Заключение

1 Как следует из таблицы 3, совпадение расчётных и усреднённых величин напряжённостей электрических полей достаточно высокое, что свидетельствует о возможности применения предложенной модели для описания электрического поля Земли. Земля в целом электрически нейтральна.

2 Увеличение значений наблюдаемого поля на поверхности Земли в ряде регионов (таблица 1) свидетельствует о более близком к поверхности Земли залегании гравитационно-ориентированных молекул кварца.

3 Снижение напряжённости электрического поля непосредственно над сушей вероятнее всего происходит вследствие компенсации электрического поля Земли поляризованными частицами пыли. Они ориентируются в пространстве таким образом, чтобы скомпенсировать земное электрическое поле. С высотой, концентрация пылевых частиц уменьшается, и характер поля становится аналогичен характеру поля над морской поверхностью, над которой пылевых частиц существенно меньше, чем над сушей.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузнецов В. В. Физика Земли // Новосибирск, 2011г.  
 [2] Смирнов Б.М. Электрический цикл в земной атмосфере // Успехи физических наук, Том 184, №11, ноябрь 2014г., стр. 1153-1176.  
 [3] Имянитов И. М. и Чубарина Е. В., Электричество свободной атмосферы, Л., 1965, 240 с.

- [4] <http://ikfia.ysn.ru/telefony/9-uncategorised/860-priroda-atmosfer-polya.html>, посещение 1.05.2017г.
- [5] Л.В.Кашлева, Атмосферное электричество Учебное пособие. - СПб.: изд. РГГМУ, 2008. - 116 с.
- [6] <http://e4-cem.ru/Guide/GuidePhysics/ElectricityAndMagnetism/EIPotentials/EIPotentialEarth.html>, посещение 6.05.2017г.
- [7] Васильев И.В. Влияние гравитации на формирование магнитного поля Земли // Журнал проблем эволюции открытых систем, т.1 (16), 2014, стр.48-55.
- [8] Васильев И.В. О возможности экспериментальной проверки теории происхождения магнитного поля Земли // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2016 [текст]: сб. тр. междунар. науч.-техн. и науч.-метод. конф.: в 4 т. Т.1./ под общ. ред. О.В. Миловзорова. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2016; Рязань, стр. 51-55.

**И.В. Васильев<sup>1</sup>, Б.Т.Жумабаев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>«Гранит» арнайы конструкторлық және технологиялық бюросы ЖШС, Алматы қ., Қазақстан;

<sup>2</sup> Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы,  
"Ионосфера институты" ЕЖШС, Алматы қ., Қазақстан

### **ЖЕРДІҢ ЭЛЕКТРЛІК ӨРІСІНІҢ ҚАЛЫПТАСУЫНА ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ КҮШІНІҢ ӘСЕРІ**

**Түйін.** Жердің электр өрісін қалыптастыруда гравитациялық-құрылымдалған кварц молекулалардың қосқан үлесінің гипотезасы ұсынылды. Гравитациялық күштердің әсерінен кварцтың симметриялы емес молекулаларындағы кремнийдің ауырлау атомдарының кристалдану кезінде жеңіл оттегінің атомдарынан қарағанда жер орталығына жақынырақ деп болжанып отыр. Кремний атомдары оң зарядталған, ал оттегі атомдары теріс зарядталғандықтан, онда мұндай үстем құрылымдылық бағдар беретін кварц молекулалары осы молекулалардың электр өрісінің құрылымдық бағдарына әкелуі тиіс. Кварцты барлық молекулаларынан туындаған электр өрістерінің қосындысы нәтижелі өрісті жасайтын кристалдық күйде болады. Келтірілген есептеулер бұл өрістің сипаттамасын, Жердің электр өрісінің байқаланған тәжірибелік мәндерімен салыстырғанда сәйкес екенін көрсетеді.

**Кілт сөздер:** гравитация, дипольдік момент, кварц, электр өрісі.

#### **Сведения об авторах:**

Васильев И.В., к.ф.-м.н., заместитель генерального директора СКТБ «Гранит», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050060, Республика Казахстан, г.Алматы, ул.Хусаинова, 292. Служ. тел. 302-25-99; e-mail: [iv@granit.kz](mailto:iv@granit.kz)

Жумабаев Б.Т., к.ф.-м.н., начальник отдела солнечно-земной физики, ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато. Служ. тел. 380-37-08; e-mail: [beibit.zhu@mail.ru](mailto:beibit.zhu@mail.ru)

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 60 – 65

I.D. Kozin, I.N. Fedulina

Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan

E-mail: IDKozin@yandex.ru, InnaFedulina@yandex.kz

VACUUM - ENVIRONMENT  
IN THE DECISION OF RADIO PHYSICS PROBLEMS

**Abstract.** It is shown that assignment to vacuum of electric and magnetic characteristics in SI system has led to necessity to introduce for propagation mediums relative values of the same parameters which play only a role of coefficients. It is offered for vacuum in SI system to enter light velocity as a constant, dielectric and magnetic permeability to equate to unit, and for medium these parameters to make absolute. Discrepancies of some quantities of the electromagnetic theory to the appropriated dimensions are given.

**Key words:** Dimension, units, systems of units, electric properties, magnetic properties

УДК 621.351.819

И.Д. Козин, И.Н. Федулina

Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

ВАКУУМ – СРЕДА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ РАДИОФИЗИКИ

**Аннотация.** Показано, что присвоение вакууму электрических и магнитных характеристик в системе единиц СИ привело к необходимости введения для сред распространения относительных значений тех же параметров, которые играют лишь роль коэффициентов. Предлагается для вакуума в систему единиц СИ ввести скорость света в качестве постоянной величины, диэлектрические и магнитные проницаемости приравнять к единице, а для среды эти параметры сделать абсолютными. Приведены несоответствия некоторых величин электромагнитной теории присвоенным размерностям.

**Ключевые слова:** размерность, единицы, системы единиц, электрические свойства, магнитные свойства.

Пространство, в котором происходит распространение радиоволн, называется средой. Средой распространения мы называем и свободное пространство (вакуум), электрически нейтральные и заряженные образования. К средам можно отнести также проводники и изоляторы. Вакуумом мы называем пространство, в котором отсутствует любой вид материи (вещества). Чаще всего, мы подразумеваем, что вакуум не обладает никакими физическими свойствами: температурой, плотностью вещества и т.п. В первую очередь к вакууму мы относим межзвёздное и межгалактическое пространство. И хотя истинного вакуума даже в межзвёздном пространстве нет, оно наиболее близко по характеристикам к таковому. Но даже через это межзвёздное пространство распространяются свет, корпускулярная радиация звёзд, космическая и метеоритная пыль.

Закономерности распространения радиоволн в различных средах определяются совместным решением уравнений Максвелла и среды распространения [1]. При этом среда распространения характеризуется следующими выражениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_v), \quad (1)$$

где  $D$  – электрическое смещение (индукция),  $B$  – магнитная индукция,  $H$ ,  $E$  и  $E_v$  – магнитная и электрические (тока Ампера и тока смещения) напряжённости поля,  $j$  – плотность тока,  $\sigma$  –

удельная проводимость,  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости, которые и определяют свойства среды относительно распространения электромагнитных волн.

Выражения (1) называются *уравнениями состояния среды*, в которой происходят электромагнитные процессы.

Во всех системах единиц за основные размерности приняты обозначения длины  $L$ , массы  $M$  и времени  $T$ . В каждой из таких систем введено ещё по одной единице. В качестве четвёртой величины в системе СИ принята единица силы тока ампер, размерность которой  $[I]=L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$ . Система СГС подразделяется на две подсистемы, в которые в качестве четвёртой основной единицы вводится диэлектрическая постоянная и даёт системе название СГСЕ или магнитная постоянная, что даёт ей название СГСМ.

В каждой из систем находятся и производные единицы, типа «сила» и т.п.

В исследованиях направления электромагнетизм чаще всего используются системы СИ и СГС.

Таблица 1 – Единицы измерения и размерности электромагнитных величин среды

Величина	Обозначения	единица		размерность	
		СИ	СГС	СИ	СГС
Напряжённость электрического поля	$E$	В/м	б/н	$LM T^{-3} I^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Электрическая индукция	$D$	Кл/м <sup>2</sup>	б/н	$L^{-2} T I$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Диэлектрическая проницаемость: вакуума среды	$\varepsilon$	б/р	б/р	$L^{-3} M^{-1} T^4 I^2$	б/р
	$\varepsilon_0$	Ф/м			
	$\varepsilon_a$	Ф/м			
Напряжённость магнитного поля	$H$	Вб, А/м	Мкс	$L^{-1} I$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Магнитная индукция	$B$	Т	Гс	$M T^{-2} I^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Магнитная проницаемость: вакуума среды	$\mu$	б/р	б/н	$LM T^{-2} I^{-2}$	б/р
	$\mu_0$	Г/м			
	$\mu_a$	Г/м			
Плотность тока	$j$	А/м <sup>2</sup>	б/н	$L^{-2} I$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-2}$
Удельная проводимость	$\rho$	См/м	б/н	$L^{-3} M^{-1} T^3 I^2$	$T^{-1}$

б/р – безразмерная величина,  
б/н – величина без названия

**1. Индукция и напряжённость электромагнитного поля.** В соотношениях индукций и напряжённостей полей в научных публикациях допускаются различные толкования. Так, во множестве учебной литературы и научных публикациях термины индукции и напряжённости электрических и магнитных полей просто отождествляются. Читая такие заключения, необходимо уточнять какой системой единиц пользовался автор. Например, для системы СГС индукция – это напряжённость для вакуума. В системе СГС формально напряжённость магнитного поля может быть определена из выражения

$$H=B/\mu,$$

а электрического поля –

$$E=D/\varepsilon.$$

За единицу напряжённости магнитного поля  $H$ , равной одному эрстеду (Э) принимается напряжённость поля в вакууме при индукции  $B$ , равной 1 Гауссу (Гс). Поскольку магнитная  $\mu$  и  $\varepsilon$  электрическая проницаемости – величины безразмерные, размерности обеих напряжённостей в этом случае совпадают с размерностями соответствующих индукций, но присвоенные названия единиц не тождественны.

В тоже время размерностью магнитной индукции в системе СИ принимают единицу «тесла» – Т, а напряжённость – «вебер» – Вб или А/м. В этой системе индукция магнитного поля имеет размерность  $[B]=M T^{-2} I^{-1}$ , в то время как в системе СГС она  $[B]=L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$ . Согласимся, что различная размерность в различных системах, имеющих одинаковые основные величины, не совсем логична. Не совсем логично, когда названия величин отличаются, а их размерность одинакова.

Для определения единицы напряжённости магнитного поля удобно воспользоваться любым из следствий закона Био-Савара-Лапласа, дающих выражение напряжённости магнитного поля тока для конкретных контуров. Возьмём для этой цели формулу напряжённости магнитного поля в центре кругового тока

$$H=I/(2R).$$

Согласно этой формулы напряжённость поля будет равняться единице, если по кольцу радиусом в один метр будет протекать ток силой 2А или, что, разумеется, тоже, ток силой 1А – по кольцу радиусом 0,5 м. Единицей напряжённости названа величина А/м. Размерность напряжённости магнитного поля

$$[H]=L^{-1}I.$$

Не указывая на многочисленные источники, отметим, что в пределах одной публикации эти названия чередуются как равноправные понятия.

Рассмотрим размерности величин, входящих в выражения (1).

$$E \rightarrow \left( \frac{B}{m} \right) \rightarrow [B \cdot m^{-1}], D \rightarrow \left( \frac{A \cdot c}{B \cdot m} \cdot \frac{B}{m} \right) = \frac{A \cdot c}{m^2} \rightarrow [A \cdot c \cdot m^{-2}] \text{ и}$$

$$H \rightarrow \left( \frac{A}{m} \right) \rightarrow [A \cdot m^{-1}], B \rightarrow \left( \frac{B \cdot c}{A \cdot m} \cdot \frac{A}{m} \right) = \frac{B \cdot c}{m^2} \rightarrow \text{Тл} \rightarrow [B \cdot c \cdot m^{-2}]$$

Как видим, размерности индукции и напряжённости обеих компонент электромагнитной среды существенно различаются, не совпадают с указанными в работе [2] и отождествлять их не имеет смысла.

**2. Электрическая и магнитная проницаемости.** Диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  сред распространения электромагнитных волн – абсолютные физические переменные, которые определяют сопротивление среды для электрического и магнитного полей.

Характеристиками среды также являются:

- диэлектрическая проницаемость, равная  $\varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$ ,
- магнитная проницаемость, равная  $\mu_a = \mu \cdot \mu_0$  и
- удельная проводимость  $\sigma$ .

Величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  – относительны к аналогичным единицам, присущим вакууму  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ .

Если удельная проводимость  $\sigma$  - величина абсолютная и имеет размерность См/м, то величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  размерности не имеют, они, можно сказать, играют роль коэффициентов  $k_\varepsilon$  и  $k_\mu$  при  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ , относящихся к вакууму. То есть, можно предыдущие выражения представить в виде:

$$\varepsilon_a = k_\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \text{ и } \mu_a = k_\mu \cdot \mu_0.$$

Как отмечается в справочнике [2], из уравнений электромагнетизма можно установить аналогию между  $E$  и  $B$ ,  $D$  и  $H$ ,  $\varepsilon$  и  $1/\mu$ , которая показывает неудачность наименований характеристик магнитного поля. Для определения магнитных величин, а именно взаимодействия полюсов постоянных магнитов, использовался закон Кулона.

В нижеприведенной таблице 2 приведены значения относительной диэлектрической проницаемости и абсолютной проводимости для ряда веществ среды распространения радиоволн.

Вариации  $\sigma$  связаны в основном с температурой сред распространения радиоволн.

В общем случае  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  могут быть функциями времени и координат, особенно это относится к величинам  $\varepsilon$  и  $\sigma$  для реальной земной поверхности и атмосферы, свойства которых неоднородны и непостоянны во времени.

Таблица 2 – Относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  и проводимость  $\sigma$  некоторых приземных сред

Среда	Частота, МГц	$\varepsilon = k_\varepsilon$	$\sigma$ , (См/м)
Вакуум		1,0	0
Воздух		1,00059	0
Пресная вода ( $t=20^\circ\text{C}$ )	<300	90	$2 \div 10^{-2}$
	3000	80	5
	10000	40	20
	100000	10	5
Морская вода ( $t=20^\circ\text{C}$ )	<300	78	5
	3000	70	5
	10000	40	20
	100000	10	5
Влажная почва ( $t=20^\circ\text{C}$ )	<300	$15 \div 30$	$10^{-2} \div 1 \cdot 10^{-1}$
	3000	$15 \div 30$	$10^{-1} \div 5 \cdot 10^{-1}$
	10000	$10 \div 15$	$1 \div 3$
Сухая почва ( $t=20^\circ\text{C}$ )	<300	$3 \div 6$	$10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3}$
	3000	$3 \div 6$	$5 \cdot 10^{-3} \div 7 \cdot 10^{-2}$
	10000	$2 \div 5$	$10^{-1} \div 2 \cdot 10^{-1}$
Лёд ( $t= -10^\circ\text{C}$ )	<300	$4 \div 5$	$10^{-2} \div 10^{-1}$
	3000	3,5	$10^{-4} \div 10^{-3}$
	10000	3,2	$10^{-4} \div 10^{-3}$
Снег ( $t= -10^\circ\text{C}$ )	<300	1,2	$10^{-6}$
	3000	1,2	$10^{-5}$
	10000	1-2	$10^{-5}$
Мёрзлая почва ( $t= -35^\circ\text{C}$ )	<300	$3 \div 7$	$10^{-3} \div 10^{-2}$
Лес	<30	1,004	$10^{-6} \div 10^{-5}$
	$60 \div 3000$	$1,004 \div 1,4$	$10^{-5} \div 10^{-3}$

Вопреки приведённым определениям теоретическая радиофизика в системе СИ присвоила вакууму вполне определённые характеристики и свойства. Так только для того, чтобы оправдать значение величины скорости света, определяемой выражением

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \quad (2)$$

вакуум приобрёл такие характеристики как электрическая  $\varepsilon_0$  и магнитная  $\mu_0$  проницаемости, имеющие в системе единиц СИ значения

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}, \text{ Ф/м}, \left( \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}} \right) \text{ и } \mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}, \text{ Гн/м}, \left( \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} \right). \quad (3)$$

Малопонятно, что физически эти величины в вакууме означают. Как мы уже отмечали: нет вещества, нет физических свойств.

Предлагаемые изменения в теорию электромагнетизма сведены в таблицу 3.

Интересно, что с метрологической точки зрения между  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  существует различие. Значение величины  $\mu_0$  зафиксировано международным соглашением и является неизменным. Значение  $\varepsilon_0$  определяется точностью измерения скорости света (2) и, по мере уточнения последней, может изменяться [2].

Относительные электрическая и магнитная проницаемости для большинства веществ, например, для воздуха, близки к единице,  $\varepsilon \approx \mu \approx 1$  и  $\varepsilon_a \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ , Ф/м, а  $\mu_a \approx 1,256 \cdot 10^{-6}$ , Гн/м. Для любых иных сред и  $\varepsilon \neq 1$ , и  $\mu \neq 1$ .

Неправомерность присвоения каких-либо свойств вакууму можно продемонстрировать на следующем примере [2]. В системе МКСМ в нерациональном виде основные единицы те же, что и в системе СИ. Однако электрическим и магнитным свойствам присвоены следующие, иные, чем в системе СИ, значения:  $\mu_0 = 10^{-7}$  Гн/м, а  $\varepsilon_0 = 1,1 \cdot 10^{-10}$  Ф/м. Как видим, единицы и размерности  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  в обеих системах идентичны, а значения различны. Но тогда, согласно уравнению (2), скорость

распространения электромагнитной волны в вакууме в системе МКСМ составит величину  $c = 3,33 \cdot 10^7$  м/с, то есть почти на порядок меньше истинного значения.

Правильней следовало бы в систему СИ, как и в любую другую систему, ввести величину скорости света и электромагнитных волн в вакууме без введения величин  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ , то есть ввести значение этой величины как физической константы  $c=3 \cdot 10^8$  м/с, а  $\varepsilon_0 = \mu_0=1$ , как это принято в системе единиц СГС.

Тогда скорости этих волн в среде вместо

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \mu\mu_0}},$$

можно представить уравнением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}, \quad (4)$$

а величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  для сред распространения из относительных следует перевести в абсолютные характеристики.

Это предложение вполне логично, поскольку отклоняет необходимость присвоения электромагнитных свойств вакууму и характеристики сред становятся физическими параметрами. Однако без утверждения этого предложения, пользоваться следует установленными положениями.

Эти установленные положения несут в себе и другие неудобства. Ещё с древних времён опыты электризации веществ привели к мнению, что все нейтральные в электрическом плане вещества – суть диэлектрики, то есть они состоят из двух частей, заряженных различными по знаку зарядами.

Диэлектрик (изолятор) - материал, плохо проводящий или совсем не проводящий электрический ток. Концентрация свободных носителей заряда в диэлектрике не превышает  $10^8$  см<sup>-3</sup>. Основное свойство диэлектрика состоит в способности поляризоваться во внешнем электрическом поле. С точки зрения зонной теории твёрдого тела диэлектрик - вещество с шириной запрещённой зоны больше 3 эВ.

Как показали опыты с электролитами (золочение, серебрение, покрытие медью и т.д.) диэлектриками являются кислотные соли, окислы и т.п. Простые молекулы, например, молекулы атмосферного газа диэлектрическими свойствами не обладают.

Условно, к проводникам относят материалы с удельным электрическим сопротивлением  $\rho < 10^{-5}$  Ом·м, а к диэлектрикам (изоляторам) - материалы, у которых  $\rho > 10^8$  Ом·м. При этом удельное сопротивление хороших проводников может составлять всего  $10^{-8}$  Ом·м, а у лучших диэлектриков превосходить  $10^{16}$  Ом·м. Удельное сопротивление полупроводников в зависимости от строения и состава материалов, а также от условий их эксплуатации может изменяться в пределах  $10^{-5}$ - $10^8$  Ом·м. Хорошими проводниками электрического тока являются металлы. Из 105 химических элементов лишь двадцать пять являются неметаллами, причём двенадцать элементов могут проявлять полупроводниковые свойства. Но кроме элементарных веществ существуют тысячи химических соединений, сплавов или композиций со свойствами проводников, полупроводников или диэлектриков. Чёткую границу между значениями удельного сопротивления различных классов материалов провести достаточно сложно. Например, многие полупроводники при низких температурах ведут себя подобно диэлектрикам. В то же время диэлектрики при сильном нагревании могут проявлять свойства проводников или полупроводников. Качественное различие состоит в том, что для металлов проводящее состояние является основным, а для полупроводников и диэлектриков - возбуждённым.

Зачастую в электрическом плане среды разделяют на *диэлектрики*, *полупроводники* и *проводники* по отношению плотностей тока смещения  $j_v$  и тока проводимости  $j$ . Оно зависит от электрической проницаемости, проводимости и длины волны и равно

$$\left| \frac{j_v}{j} \right| = \frac{\varepsilon}{60 \cdot \lambda \cdot \sigma}, \quad (5)$$

где  $\lambda = c/f$  - длина волны,  $f$  - частота,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с - скорость света.



Как уже упоминалось (1), магнитная проницаемость – физическая величина, характеризующая изменение магнитной индукции  $\mathbf{B}$  среды при воздействии магнитного поля  $\mathbf{H}$  [3]. Для физического вакуума  $\mu = 1$ . Относительная магнитная проницаемость для большинства материалов (например, для воздуха), равняется единице,  $\mu = 1$ . Материалы с относительной магнитной проницаемостью меньшей единицы  $\mu < 1$  называются *диамагнетиками*, с положительной, но большей единицы, относительной магнитной проницаемостью  $\mu > 1$  - *парамагнетиками* и с очень большой относительной магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$  - *ферромагнетиками*.

Таблица 3 - Используемые и рекомендуемые единицы сред распространения электромагнитных волн

Физические характеристики и их обозначения			
Теория электромагнетизма		Рекомендуемые	
Единицы	Размерности	Единицы	Размерности
$\varepsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12}, [\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$	$\varepsilon_0$	1, бр*
$\mu_0$	$1,256 \cdot 10^{-6}, [\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$	$\mu_0$	1, бр
$\varepsilon$	бр	$\varepsilon = k_\varepsilon$	$[\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$
$\mu$	бр	$\mu = k_\mu$	$[\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$
$\varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$	$[\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$	$\varepsilon_a = k_\varepsilon \cdot \varepsilon_0 = k_\varepsilon$	$[\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$
$\mu_a = \mu \cdot \mu_0$	$[\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$	$\mu_a = k_\mu \cdot \mu_0 = k_\mu$	$[\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$
$c_0$	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$	const**	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$

\*бр – безразмерная величина,

\*\* - константа

Таким образом, теория электромагнетизма требует пересмотра и коррекции в терминологии.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козин И.Д., Федулina И.Н. Космическая погода и ее влияние на распространение радиоволн: Учебное пособие – Алматы: АУЭС, 2012, - 79 с.  
 [2] Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1977. - 336 с.  
 [3] Физический энциклопедический словарь. - М.: Советская энциклопедия, 1983. - 928 с.

#### REFERENCES

- [1] Kozin I.D., Fedulina I.N. Space weather and its influence on radiowave propagation. Almaty: AUES, 2012. 79 p. (in Russ.).  
 [2] Sena L.A. Edinicy fizicheskikh velichin i ih razmernosti . M.: Nauka, 1977. 336 p. (in Russ.).  
 [3] Fizicheskij enciklopedicheskij slovar. M.: Sovetskaja enciklopedija, 1983. 928 p. (in Russ.).

**И.Д. Козин, И.Н. Федулina**

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

#### РАДИОФИЗИКА ЕСЕПТЕРІН ШЕШУДЕГІ ВАКУУМ – ОРТА

**Аннотация.** Өлшемдер жүйесінде ӨЖ вакуумге электрлік және магниттік сипаттамаларды меншіктеу, таралу орталарына тек коэффициенттердің рөлін ойнайтын дәл сол параметрлердің салыстырмалы мәндерін енгізудің қажеттілігі көрсетілді. Вакуум үшін өлшемдер жүйесіне ӨЖ тұрақты шама ретінде жарық жылдамдығын енгізу, диэлектрлік және магниттік өткізгіштіктерін бірге теңеу, ал орта үшін бұл мәндерді абсолютті ету ұсынылады. Электромагниттік теориясының кейбір өлшемдерінің меншіктелген өлшемдеріне сәйкес еместігі келтірілген.

**Тірек сөздер:** өлшемділік, бірліктер, бірліктер жүйесі, электрлік қасиеттер, магниттік қасиеттер

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 66 – 70

I.D. Kozin, I.N. Fedulina

Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan

E-mail: IDKozin@yandex.ru, InnaFedulina@yandex.kz

## RADIO-WAVE ACTION ON THE RECEIVING ANTENNA

**Abstract.** It is shown that the field generated by an electric current in a conductor (antenna) contains one electrical  $E_{\parallel}$  and two magnetic  $H_{\parallel}$  and  $H_{\perp}$  components. Response vertically and horizontally oriented antenna on vertical linearly polarised radiated wave was investigated. It is shown also that only influence of  $H_{\parallel}$  radio-wave component adequately received in experiment.

**Key words:** Radio-wave, electric and magnetic components, antenna current.

УДК 621.029

И.Д. Козин, И.Н. Федулина

Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

## Воздействие радиоволны на приёмную антенну

**Аннотация.** Показано, что генерируемое электрическим током в проводнике (антенне) поле содержит одну электрическую  $E_{\parallel}$  и две магнитные  $H_{\parallel}$  и  $H_{\perp}$  компоненты. Исследовалась реакция вертикально и горизонтально ориентированной антенны на вертикальную линейно поляризованную излучаемую волну. Показано также, что только воздействие  $H_{\parallel}$  составляющей радиоволны адекватно получаемому в эксперименте.

**Ключевые слова:** радиоволна, электрические и магнитные компоненты, ток антенны.

Радиоволна – это электромагнитные колебания, распространяющиеся со скоростью света  $c$ . Она, согласно современным представлениям, состоит из перпендикулярно расположенных, синхронно и синфазно изменяющихся электрической  $E$  и магнитной  $H$  компонент.

Со времён Г. Герца принято считать штыревую антенну открытым колебательным контуром. Схема такого преобразования приведена на рисунке 1.

На этом же рисунке изображены электрические  $E_{\parallel}$  и магнитные  $H_{\parallel}$  и  $H_{\perp}$  поля, генерируемые при прохождении электрического тока в передающей антенне. В теории электромагнетизма компоненты  $H_{\perp}$  и  $E_{\parallel}$  названы магнитной индукционной  $H_{in}$  и электрической стационарной  $E_{st}$  составляющими поля. Они сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $90^{\circ}$ , быстро затухают в пространстве, «привязаны» к антенне и не могут распространяться в пространство. Напряжённость электрического поля  $E_{st}$  от расстояния уменьшается пропорционально  $d^3$ , а  $H_{in}$  - пропорционально  $d^2$ . Для генерации распространяющей радиоволны с указанными выше характеристиками в теорию электромагнетизма вводится мифический ток смещения - «displacement current» -  $I_v$ , образуемый электрическим полем  $E_{st}$ . Этот ток порождает новое магнитное поле  $H_w = H_{\perp}$ , а уж оно генерирует новое электрическое поле  $E_w = E_{\parallel}$ , совпадающее с ним по фазе. Этот механизм подробно описан авторами в учебном пособии [1].



Рисунок 1 – Условная схема преобразования колебательного контура в антенну: а) закрытый колебательный контур, б) раскрытие колебательного контура, в) вертикальная штыревая антенна (монополь)

Следует отметить, что в теории электромагнетизма отсутствуют ток смещения между обкладками конденсатора закрытого контура (рисунок 1а) и магнитная составляющая поля  $H_{\parallel}$  в антенне (рисунок 1 в).

Как показывает опыт, продольная составляющая магнитного поля  $H_{\parallel}$  обладает теми же свойствами, что и  $H_{\perp}$ . Достаточно вспомнить работу электромагнита или на рисунке 2 привести схему из курса лекций Р. Феймана [2].

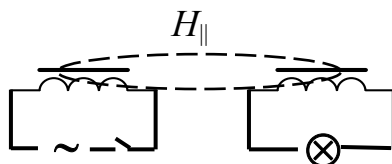


Рисунок 2 - Передача энергии из одного контура в другой

Если в первичной обмотке течёт переменный ток, лампочка во вторичной обмотке светится.

В отличие от устоявшейся интерпретации опыта Фарадея, приведенная схема доказывает передачу энергии от одного контура к другому за счёт продольной составляющей магнитного поля  $H_{\parallel}$ .

Итак, радиоволна, излучаемая вертикальным монополем, состоит из одной электрической  $E_{\parallel}$  и двух магнитных компонент  $H_{\perp}$  и  $H_{\parallel}$ .

Рассмотрим воздействие этих компонент радиоволны на приёмную антенну, роль которой будет играть вертикальный монополь, аналогичный излучающей антенне.

Излучаемая радиоволна при этом будет иметь линейно-вертикальную поляризацию. Критерием оценки таких воздействий будет достоверный факт – в вертикально ориентированной приёмной антенне наводится электрический ток, а в горизонтально расположенной антенне ток отсутствует.

Наводимый в антенне ток привёл создателей электромагнитной теории к заключению о создании магнитной компонентой волны электрической компоненты, которая создаёт в антенне электродвижущую силу – ЭДС. Первым эту идею озвучил М. Фарадей [3]. Он считал, что электрическая компонента существует, о её присутствии спорят, и он видел, однако, насколько осязательно выступают в своих действиях эти силы, в то время как самой электрической компоненты он никак не мог обнаружить.

Такого же мнения придерживался и создатель электромагнитной теории Д. Максвелл. В своей работе [4] он утверждал, что эта волна состоит *полностью из магнитных возмущений*, причём направление магнитного вектора находится в плоскости волны. Далее он утверждал, что магнитные возмущения подобны свету и поперечны к направлению распространения, то есть такие волны могут обладать всеми свойствами поляризованного света. Неудивительно, что уравнения этой волны относятся только к магнитной компоненте. Свою теорию Д. Максвелл математически представил в виде приведенной ниже системы 20 общих уравнений электромагнитного поля:

Уравнения Д. Максвелла:  
 электромагнитного количества движения  
 магнитной напряжённости  
 электродвижущей силы – ЭДС  
 тока, обусловленного (истинной) проводимостью  
 электрического тока смещения  
 полного тока (включая изменения тока смещения)  
 количества свободного электричества  
 электрического потенциала

$\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$   
 $H_x, H_y, H_z$   
 $\Xi_x, \Xi_y, \Xi_z$   
 $I_x, I_y, I_z$   
 $I_{yx}, I_{yz}, I_{zx}$   
 $I_{\Sigma x}, I_{\Sigma y}, I_{\Sigma z}$   
 $Q$   
 $U$

В эти уравнения электромагнитного поля входят 20 переменных величин.

Отсутствие процесса генерации электрической компоненты радиоволны магнитной составляющей отмечается во многих современных исследованиях, например, [5, 6].

*Воздействие электрической компоненты радиоволны  $E_{\parallel}$  на антенну.* На рисунке 3 изображено пространственное расположение вертикальных и горизонтальной антенн  $A$  и векторов вертикальных электрической  $E_{\parallel}$ , магнитной  $H_{\parallel}$  и горизонтальной магнитной  $H_{\perp}$  компонент радиоволны.

Вектора  $E_{\parallel}$  в любой момент времени будут создавать по всей длине приёмной антенны одинаковые потенциалы  $\varphi$ , то есть напряжение, как разность потенциалов между любыми точками антенны  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , всегда должно быть равно нулю и, следовательно, тока в антенне не возникнет. Но, как было сказано выше, ток в так расположенной антенне наводится.

Если антенну разместить горизонтально в направлении прихода радиоволны, то  $E_{\parallel}$  будет вдоль её длины иметь различные по величине значения напряжённости, естественно, наводит различные потенциалы и, соответственно, появится электрический ток. Но в реалии тока в так расположенной антенне не наводится. Из этого можно сделать единственно правильное заключение: электрической компоненты  $E_{\parallel}$  в радиоволне нет.

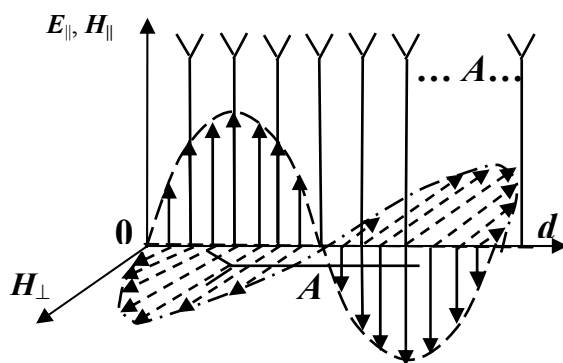


Рисунок 3 – Графики пространственного распределения компонент радиоволны и приёмных антенн

Следовательно, обнаруживаемый в вертикальной антенне ток возникает от других причин. Может ли быть, что электромагнитная волна состоит только из магнитных компонент? Можно ли с их помощью объяснить известные закономерности регистрации поля?

*Воздействие магнитных компонент радиоволны на антенну.* Рассмотрим реакцию антенного тока на изменения магнитных компонент радиоволны. Движение зарядов (электронов) в магнитном поле описывается законом Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{H}].$$

Модуль магнитной силы равен  $F = q \cdot v \cdot H \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между векторами  $v$  и  $H$ . Направлена эта сила перпендикулярно как направлению скорости частицы  $v$ , так и направлению магнитного поля  $H$ . Движение электронов будет происходить по двум направлениям: вокруг и вдоль

магнитной силовой линии. Движение электрона вдоль линии с нулевым градиентом  $H$  будет с постоянной скоростью, а вдоль направления ненулевого положительного градиента равнозамедленным. Такие движения зарядов наблюдаются в радиационных поясах Земли.

Направление движения, скажем электронов в проводнике, будет определяться направлением самого проводника и это обстоятельство окажется существенным при наведении тока радиоволной в приёмной антенне.

*Горизонтальная составляющая* радиоволны  $H_{\perp}$  в нашем случае перпендикулярна направлению антенны, а напряжённость поля одинакова по всей её длине. Как и в случае с электрической компонентой  $E_{\parallel}$ , магнитная компонента  $H_{\perp}$  не создаст электрического тока вдоль длины антенны. Слабо связанные с ядром металла электроны приобретут лишь дополнительное вращательное движение.

Для горизонтально размещённой антенны ситуация другая. Напряжённость поля горизонтальной магнитной компоненты радиоволны  $H_{\perp}$  по длине антенны будет различной, что приведёт к смещению электронов вдоль градиента поля и антенны. Но, как известно из экспериментов, в горизонтально расположенной антенне электрический ток не наводится. Из этого можно сделать вывод, идентичный предыдущему. Магнитная составляющая  $H_{\perp}$  в радиоволне отсутствует. Или, магнитная составляющая  $H_{\perp}$  радиоволны быстро затухает в пространстве распространения.

Как среагирует вертикально расположенная антенна на  $H_{\parallel}$  составляющую магнитной компоненты радиоволны?

*Вертикальная магнитная составляющая* радиоволны  $H_{\parallel}$  параллельна направлению антенны, а напряжённость поля одинакова по всей её длине. Однако такое поле приведёт, согласно уравнению Лоренца, к движению электронов вдоль линии антенны. То есть причиной появления тока в антенне можно считать магнитную компоненту  $H_{\parallel}$  радиоволны, приводящую в металле к движению слабо связанных электронов, которое и будет подчиняться законам изменения магнитной компоненты радиоволны.

Обобщая сказанное, отметим:

1. Создаваемое вертикальным монополем поле содержит три компоненты: одну электрическую  $E_{\parallel}$  и две магнитные  $H_{\parallel}$  и  $H_{\perp}$ .

2. Величина составляющей  $H_{\parallel}$  зависит от магнитных свойств антенны. С увеличением магнитной проницаемости растёт и амплитуда  $H_{\parallel}$ .

3. Компоненты  $E_{\parallel}$  и  $H_{\perp}$  не могут создать наблюдаемый электрический ток в антенне. Такой эффект может создать только магнитная составляющая  $H_{\parallel}$  радиоволны.

4. Магнитная составляющая  $H_{\perp}$  в радиоволне отсутствует. Или, магнитная составляющая  $H_{\perp}$  радиоволны быстро затухает в пространстве распространения быстрее, чем  $H_{\parallel}$  составляющая. Магнитные компоненты радиоволны  $H_{\parallel}$  и  $H_{\perp}$  не создают в нейтральных средах электрической компоненты  $E_{\parallel}$ . Этот эффект возможен только в средах, содержащих свободные электроны (ионосфера, радиационные пояса, металлические проводники).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козин И.Д., Федулina И.Н. Распространение радиоволн: Учебное пособие. – Алматы: АУЭС, 2014. - 78 с.
- [2] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т. 6. Электродинамика. –М.: МИР, 1977. – 347 с.
- [3] Козин И.Д., Федулina И.Н. Развитие теории электромагнетизма. История. Проблемы: Учебное пособие. – Алматы: АУЭС, 2015. - 67 с.
- [4] Максвелл Д.К. Динамическая теория поля. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Пер. с англ. -М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952. - 687 с.
- [5] Авраменко Р.Ф., Грачев Л.П., Николаева В.И. Экспериментальная проверка дифференциальных законов электромагнитного поля. Научно-технический отчёт. -М.: НИИРП, 1976.
- [6] Докторович З.И. Несостоятельность теории электромагнетизма и выход из сложившегося тупика // Сознание и физическая реальность. – 1996. – т. 1. - № 3. - С. 18-27.

REFERENCES

- [1] Kozin I.D., Fedulina I.N. Rasprostranenie radiovoln. Almaty: *AUES*, **2014**. 78 p. (in Russ.).
- [2] Feynman R., Leighton R., Sands M. The Feynman Lectures on Physics. V. 6. Electrodynamics. M.: *MIR*, **1977**. 347 p. (in Russ.).
- [3] Kozin I.D., Fedulina I.N. Razvitie teorii elektromagnetizma. Istorija. Problemy. Almaty: *AUES*, **2015**. 67 p. (in Russ.).
- [4] Maxwell D.K. Dinamicheskaja teorija polja. Izbrannye sochinenija po teorii elektromagnitnogo polja. M.: *Gos. izd. tehniko-teoreticheskoy literatury*, **1952**. 687 p. (in Russ.).
- [5] Avramenko R.F., Grachev L.P., Nikolaeva V.I. Eksperimentalnaja proverka differencialnyh zakonov elektromagnitnogo polja. M.: *NIRP*, **1976**. (in Russ.).
- [6] Doktorovich Z.I. *Soznanie i fizicheskaja realnost*, **1996**, 1 (3), 18-27. (in Russ.).

**И.Д. Козин, И.Н. Федулina**

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

**РАДИОТОЛҚЫННЫҢ ҚАБЫЛДАҒЫШ АНТЕННАҒА ӘСЕРІ**

**Аннотация.** Өткізгіштегі (антеннадағы) электр тоғымен генерацияланатын өріс бір электрлік  $E||$  және екі магниттік  $H||$  және  $H\perp$  құраушыдан тұратыны көрсетілді. Вертикалды және горизонталды бағытталған антеннаның вертикалды сызықты поляризацияланған шығарылатын толқынға реакциясы зерттелді. Сонымен қатар, радиотолқынның тек қана  $H||$  құраушысы ғана тәжірибеде алынатын әсері ғана сай екені көрсетілді.

**Тірек сөздер:** радиотолқын, электрлік және магниттік компоненталар, антенна тоғы

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 71 – 74

UDC: 528.06:51-7

**Zh.Sh. Zhantaev, A.P. Stikharny, A.V. Vilyayev**

Institute of Ionosphere, National Center of Space Research and Technology,  
Republic of Kazakhstan, Almaty, Kamenskoe Plateau  
[stix\\_qwa@mail.ru](mailto:stix_qwa@mail.ru), [vilyayev@gmail.com](mailto:vilyayev@gmail.com)

**THE ALGORITHM FOR FILTERING THE ERRORS  
OF TIME SERIES GPS MONITORING  
OF ACTUAL MOVEMENTS OF THE EARTH'S SURFACE**

**Abstract.** The experience of measurements at ten GPS stations of Almaty Prognostic polygon showed that in the initial data there can be long time intervals of measurement skipping, random single errors and systematic deviations of measurements over long time intervals. An algorithm for filtering measurement errors by methods of mathematical statistics is developed.

**Key words:** GPS measurements, time series, mathematical interference filtering

УДК: 528.06:51-7

**Ж.Ш. Жантаев, А.П. Стихарный, А.В. Виляев**

Институт ионосферы, Национальный центр космических исследований и технологий,  
Республика Казахстан, Алматы, Каменское плато

**АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ ПОМЕХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ GPS  
МОНИТОРИНГА СОВРЕМЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ  
ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

**Аннотация.** Опыт измерений на десяти GPS-станциях Алматинского прогностического полигона показал, что в исходных данных могут присутствовать длительные временные интервалы пропуска измерений, случайные единичные выбросы и систематические отклонения измерений на продолжительных временных интервалах. Разработан алгоритм фильтрации помех методами математической статистики.

**Ключевые слова:** GPS-измерения, временные ряды, математическая фильтрация помех.

**Введение**

В практике мониторинга геодинамического состояния земной коры конечной информацией для вычисления скорости современных движений земной поверхности используют временные ряды координат GPS-станций. Обработка первичных Rinx файлов выполняется универсальным пакетом анализа GPS-данных GAMIT/GLOBK, разработанным в Массачусетском технологическом институте, Гарвард-Смисонском Астрофизическом Центре (CfA) и Океанографическом институте имени Скриппса (SIO).

В определении координат станции учитываются влияние тропосферной и ионосферной рефракции на распространение радиосигналов, атмосферные задержки, относительные положения набора станций, орбитальные параметры и параметры вращения Земли, задержки зенита, неточности фазы навигационного сигнала и прочее [1]. Данный подход к обработанным пакетом

GAMIT/GLOBK GPS-данным позволяет при двухчастотном измерении достигать миллиметровой точности позиционирования.

Скорость движения GPS-станции вычисляется по временному ряду полученных координат как приращение линейного тренда за период наблюдений. Для исключения влияния сезонной составляющей в определение уравнения линейного тренда продолжительность такого временного ряда должна составлять не менее 4-х лет.

Исходные данные представляют собой текстовый файл с записанными последовательностями отсчетов в виде колонок чисел, где первая колонка определяет время вычисленной суточной координаты. Опыт измерений на 10 GPS-станциях Алматинского прогностического полигона показал, что в наблюдаемом временном ряду могут присутствовать длительные временные интервалы пропуска измерений, случайные единичные выбросы и систематические отклонения измерений (далее «ступеньки») на продолжительных временных интервалах (до года). Не останавливаясь на причинах появления указанных помех, нами разработан алгоритм фильтрации последних методами математической статистики.

#### Исходные помехи временных рядов

В ряду значений могут присутствовать следующие погрешности (рис.1):

1. Пропуск значений (отсутствие электроэнергии, ремонт приёмной аппаратуры и т.п.) отмечается несвойственным для данного ряда значением

2011-02-01	00:00:00.000	032 24806.30	2124.30	48827.90	54809.02
2011-02-02	00:00:00.000	033 99999.00	99999.00	99999.00	99999.00
2011-02-03	00:00:00.000	034 24807.70	2124.10	48827.90	54809.65

Временная координата – первая колонка год, вторая – месяц, третья число. Отсутствуют данные за 2 февраля 2011 года (99999.00 вместо наблюдаемого значения).

2. Отсутствие измерений за определенный промежуток времени

2016	345	2016.9399	7.92107	9.39982	2.18584
2016	350	2016.9535	7.92208	9.3992	2.18142
2016	351	2016.9563	7.92208	9.39926	2.18869

Временная координата – первая колонка год, вторая – день года. Отсутствуют данные за 346 – 349 дни 2016 года.

3. Отдельные выбросы (сбой аппаратуры или аномальное значение, вызванное физическим явлением).

4. Относительный уровень некоторых участков ряда значительно отличаются от уровня всего ряда («ступеньки»).

Пусть исходный ряд  $X = \{x_i\}_{i=0}^M$ . Аппроксимационным рядом для  $X$  назовём ряд  $Y = \{y_i\}_{i=0}^M$ , где  $y_i = \sum_{i=0}^N A_i \cdot I^i + \sum_{i=1}^K \left( B_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot I}{T_i}\right) + C_i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot I}{T_i}\right) \right)$ .

Коэффициенты  $A_i B_i C_i$  и периоды  $T_i$  подбираются методом наименьших квадратов, минимизирующих дисперсию ряда  $X - Y$ . Некоторые периоды задаются непосредственно. Например, 365.25 суток для годовой гармоникой или 24 часа для суточной. На практике чаще всего применяется линейный тренд ( $N = 1, K = 0$ ).

#### Алгоритм первичной обработки помех

1. Применяются два способа удаления выбросов (замена на отсутствующее значение). По первому строится ряд приращений  $D = \{d_i\}_{i=1}^M$ , где  $d_i = x_i - x_{i-1}$ , на котором строится 3-х сигмовый коридор ( $3\sigma$ ). Если  $d_i$  и  $d_{i+1}$  выходят за этот коридор, причем имеют разные знаки, то  $x_i$  – выброс. По второму строится аппроксимационный ряд  $Y$ . Для ряда  $X - Y$  строится 3-х сигмовый коридор. Выход за этот коридор принимается за выброс. Второй способ применяется после избавления от ступенек. Так как после этого уменьшается сигма, процедура повторяется нужное количество раз.



2. Избавление от ступенек производится в полуавтоматическом режиме. На графике отмечаются начало и конец каждой ступеньки. Каждая ступенька понижается (повышается) на разность линейного тренда ступеньки и линейного тренда ряда без ступенек.

3. Вставка пропущенных значений, по нашему мнению, необходима в случаях, когда дальнейшая обработка невозможна с пропусками, либо требуется сформировать непрерывный ряд для конкретных задач исследователя. Строится аппроксимационный ряд  $Y$ . Пропущенные значения ряда  $X$  берутся из ряда  $Y$ .

4. Сглаживание (осреднение) производится классическим методом скользящего окна. Для каждой  $i$ -ой ( $0 \leq i < M$ ) точки ряда  $X$  из окна  $[i_n, i_k]$ , где  $i_n = i - r$ , если  $i < r$  иначе  $i_n = 0$  и  $i_k = i + r$ , если  $i < M - r$  иначе  $i_k = M - r$  ( $r$  – заданный радиус сглаживания) выбираются в отдельный ряд  $W$  все присвоенные значения. Количество точек в  $W$   $L \leq 2r + 1$ . Из этого ряда удаляются либо по  $o$  наибольших и наименьших значений ( $o$  зависит от  $L$ ) либо значения, выходящие за 3-х сигмовый коридор. Сглаженное  $x_i$  равно среднеарифметическому значению оставшегося ряда (комбинация среднего и медианного сглаживания).

**Результаты применения алгоритма обработки помех**

Ниже приведены графики ряда после элементов обработки. По оси ординат отложены относительные координаты центра приемной антенны в м. Каждый ряд сопровождается среднеквадратическим отклонением ( $\sigma$ ) ряда, за исключением линейного тренда.

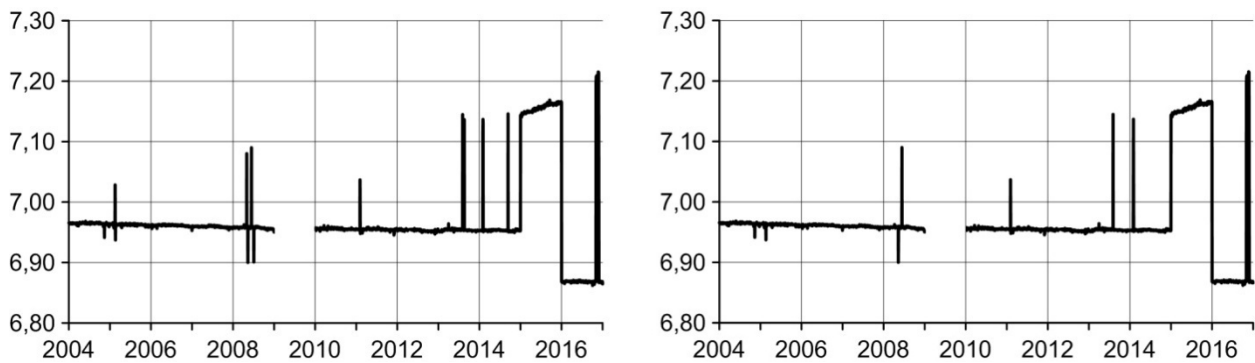


Рисунок 1 - Слева – исходный ряд измерений 4262; отсутствуют значения за 2009 год; отдельные выбросы в 2005, 2008, 2011, 2013, 2014 и 2016 годах; «ступеньки» в 2015 и 2016 годах,  $\sigma=0.010431$ .  
Справа – после удаления по первому способу 7 выбросов за 2 прогона  $\sigma=0.009623$

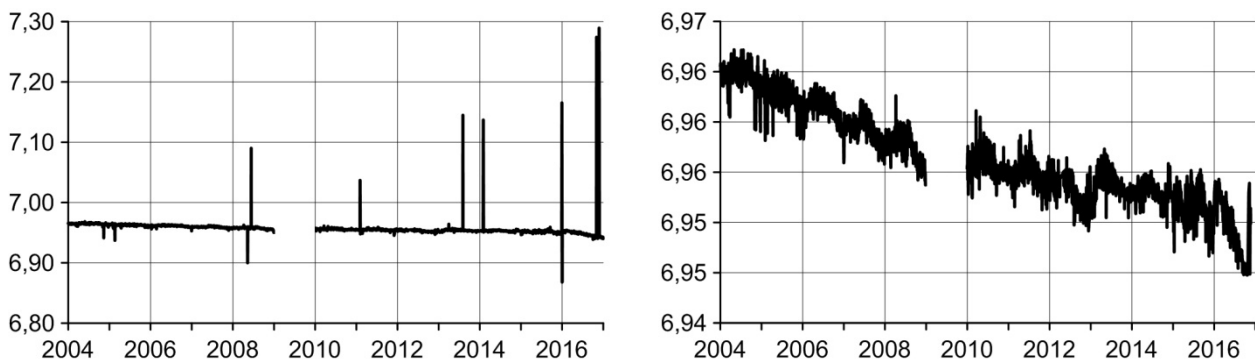


Рисунок 2 - Слева – ряд после исправления 3 «ступеньки»  $\sigma=0.001887$ . Справа – по второму способу за 5 прогонов удалено 102 выброса, построен аппроксимационный ряд при  $N = 1K = 1 T_i = 365.25y_i = A_0 + A_1 \cdot I + B_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot I}{365.25}\right) + C_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot I}{365.25}\right)$   $\sigma=0.001556$ .



Рисунок 3 - Исходный ряд после применения алгоритма обработки помех осредненный скользящим окном (радиус сглаживания 7 значений)  $\sigma = 0.001623$ , прямая линия – линейный тренд очищенного от помех ряда для вычисления скорости движения GPS станции

Разработанный алгоритм предназначен для фильтрации ошибок временных рядов и может использоваться в системах низкочастотного геофизического мониторинга.

Работа выполнялась в рамках проекта «Разработать методологию исследования геомеханического состояния земной коры кризисных территорий с использованием спутниковых технологий и математического моделирования» по Республиканской бюджетной программе 008 «Развитие космических технологий мониторинга процессов на земной поверхности и в литосфере, создание элементной базы и аппаратуры для его проведения, разработка приборов, аппаратно-программных средств и подсистем космической техники».

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] T. A. Herring, R. W. King, S. C. McClusky Gamit: GPS Analysis at MIT Version 10.4// Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2010A. –162 p.

УДК: 528.06:51-7

**Ж.Ш. Жантаев, А.П. Стихарный, А.В. Виляев**

Ионосфера институты, Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы,  
Қазақстан Республикасы, Алматы, Каменское плато

#### **ЖЕРДІҢ ҚАЗІРГІ ЗАМАНҒЫ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ GPS БАҚЫЛАУЫНДАҒЫ УАҚЫТТЫҚ КАТАРЛАРЫНЫҢ КЕДЕРГІСІН СҮЗУ АЛГОРИТМІ**

**Андатпа.** Алматының болжамдық полигонында орналасқан 10 GPS бекеттерінің өлшеу тәжірибесі, ұзақ уақытқа созылған уақыт аралығында өлшеудің жүйелік ауытқуларын, кездейсоқ бірліктік шығарылу және бастапқы мәліметтерде ұзақ уақыттық аралықтарда өлшемнің болмауын көрсетті. Математикалық талдау әдістемесі бойынша кедергілерді сүзетін алгоритмі өңделді.

**Түйін сөздер:** GPS өлшемі, уақыттық қатарлар, кедергілердің математикалық сүзгіленуі

#### **Сведения об авторах:**

Жантаев Ж.Ш. - д.ф.-м.н, член-корр. НАН РК, ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато, Служ. тел. 380-30-54;

Стихарный А.П. - к.ф.-м.н, ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато, Служ. тел. 385-87-58; e-mail: [stix\\_qwa@mail.ru](mailto:stix_qwa@mail.ru);

Виляев А.В. - к.г.-м.н., ДТОО «Институт ионосферы», г.Алматы, Казахстан, Адрес: 050020, Алматы, Каменское плато, Служ. тел. 385-09-68; e-mail: [vilayev@gmail.com](mailto:vilayev@gmail.com)

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 75 – 83

UDC 539.23; 539.216.1

**D.G. Batryshev<sup>1,3</sup>, Ye. Yerlanuly<sup>1,3</sup>, T.S. Ramazanov<sup>2</sup>, M.T. Gabdullin<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Laboratory of Engineering Profile, Al-Farabi Kazakh National University;

<sup>2</sup> Scientific and Research Institute of Experimental and Theoretical Physics,  
Al-Farabi Kazakh National University;

<sup>3</sup> National Nanotechnological Laboratory of Opened Type, Al-Farabi Kazakh National University  
Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabi avenue, 71  
[yerlanuly@physics.kz](mailto:yerlanuly@physics.kz)

**INVESTIGATION OF STRUCTURAL AND ELECTRONIC  
PROPERTIES OF SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES  
ON THE BASIS OF A HYBRID FUNCTIONAL  
BECKE 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (B3LYP)**

**Abstract:** This work is devoted to the study of the structural and electronic properties of single-walled carbon nanotubes from "the first principles" by the electron density functional method and the Hartree-Fock approximation. On the basis of this method, quantum-chemical calculations of the energy minimum and the band gap of single-walled carbon nanotubes were performed as a function of the chirality angle. It was shown that single-walled nanotubes have both metallic and semiconducting conductivity. From calculations of the energy minimum, it has been established that chiral single-walled carbon nanotubes have the most stable structure, rather than the "zigzag" and "armchair" type. Although the nanotubes of the chair type (11.11) and the zigzag type (11.0), which are identical in the chirality index, have the closest values of the energy minimum and the same number of atoms in the unit cell, they differ in diameter, volume of the unit cell, and the chirality angle and, consequently, the types of conductivity.

**Key words:** carbon nanotubes, structural properties, electronic properties, electron density functional

УДК 539.23; 539.216.1

**Д.Г. Батрышев<sup>1,3</sup>, Е. Ерланулы<sup>1,3</sup>, Т.С. Рамазанов<sup>2</sup>, М.Т. Габдуллин<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Лаборатория инженерного профиля, КазНУ им. аль-Фараби;

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. аль-Фараби;

<sup>3</sup>Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, КазНУ им. аль-Фараби,  
Казахстан, 050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СВОЙСТВ  
ОДНОСТЕННЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК  
НА ОСНОВЕ ГИБРИДНОГО ФУНКЦИОНАЛА  
BECKE 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (B3LYP)**

**Аннотация:** Данная работа посвящена изучению структурных и электронных свойств одностенных углеродных нанотрубок «из первых принципов» методом функционала электронной плотности и приближения Хартри-Фока. На основе данного метода были проведены квантово-химические расчеты минимума энергии и ширины запрещенной зоны одностенных углеродных нанотрубок в зависимости от угла хиральности. Показано, что одностенные нанотрубки имеют как металлическую, так и полупроводниковую

проводимость. Из расчетов минимума энергии установлено, что наиболее стабильной структурой обладают хиральные одностенные углеродные нанотрубки, нежели типа «зигзаг» и «кресло». Показано, что хотя идентичные по индексу хиральности нанотрубки типа «кресло» (11,11) и типа «зигзаг» (11,0) имеют наиболее близкие значения минимума энергии и одинаковое количество атомов в элементарной ячейке, они различаются по диаметру, объему элементарной ячейки и углу хиральности и, следовательно, типами проводимости.

**Ключевые слова:** углеродные нанотрубки, структурные свойства, электронные свойства, функционал электронной плотности.

### Введение

На сегодняшний день большой интерес исследования одностенных углеродных нанотрубок (ОУНТ) связано с их уникальными механическими, электрическими, магнитными, оптическими свойствами, благодаря которым они могут применяться в электронике (гибкие дисплеи, датчики, быстродействующие и экономичные диоды и транзисторы) [1,2], в медицине (лечение онкологических заболеваний, биосовместимые функциональные препараты и маркеры) [3-5], в энергетике (создание солнечных панелей, топливные элементы, эффективный катодный электрокатализатор)[6-8] и т.д. Для использования углеродных нанотрубок в перечисленных отраслях, требуется обширное понимание их электронных и структурных свойств. Именно для этих целей компьютерное моделирование и теоретические расчеты являются подходящими методами изучения характеристик наноматериалов и имеют немаловажную роль в процессе изучения свойств наноструктур, в частности и УНТ [9-16]. Расчеты структурных и электронных свойств проводят «из первых принципов» как в рамках приближения Хартри–Фока (HF), так и на теории функционала электронной плотности (DFT), или гибридных методов (DFT/HF). В основе используемых методов лежит представление одноэлектронных волновых функций, которые в свою очередь выражаются через локальные базисные функции на основе функций гауссова типа.

### Расчеты и обсуждение результатов

В данной работе для изучения структурных и электронных свойств одностенных углеродных нанотрубок был использован гибридный метод. Из литературных данных [17–21] известно, что использование гибридного функционала дает качественное описание электронных и структурных свойств периодической системы (энергия оптимизации, длина химической связи, ширина запрещенной зоны и т.д.) соответствующие результатам экспериментальных измерений. В DFT/HF-вычислениях использовался гибридный функционал Becke 3-parameter Lee-Yang-Parr (B3LYP), где обменная энергия рассчитывается на основе точных вычислений, полученных в приближении методом Хартри–Фока. В расчетах для описания базисного набора атомов углерода был использован псевдопотенциал Reintiger-Oliveiro-Bredowtriple-zetavalence + polarization. Оптимизация геометрии структуры одностенных углеродных нанотрубок (ОУНТ) проводилась с помощью минимизации полной энергии (точность  $10^{-7}$  a.u.).

В процессе проведения исследования были рассмотрены структуры ОУНТ различной хиральности, параметры которых приведены в таблице 1. Как известно, ОУНТ классифицируются на 3 типа: «кресло» (armchair), «зигзаг» (Zigzag) и хиральные (chiral), которые различаются по типу проводимости в зависимости от степени хиральности ( $n_1, n_2$ ).

На рисунке 1 представлена структура ОУНТ с коэффициентами хиральности  $n_1=11, n_2=11$ . Как видно из рисунка, структура нанотрубки (11,11) имеет характерную форму ОУНТ типа «кресло», в которых две из шести С-С связи в гексагоне перпендикулярны относительно оси ОУНТ. Из литературных источников известно, что все ОУНТ типа «кресло» имеют металлическую проводимость. Произведенные расчеты электронных свойств ОУНТ (11,11) типа «кресло» действительно показывают отсутствие запрещенной зоны (рисунок 2). Значению  $E=0$  соответствует уровень Ферми.

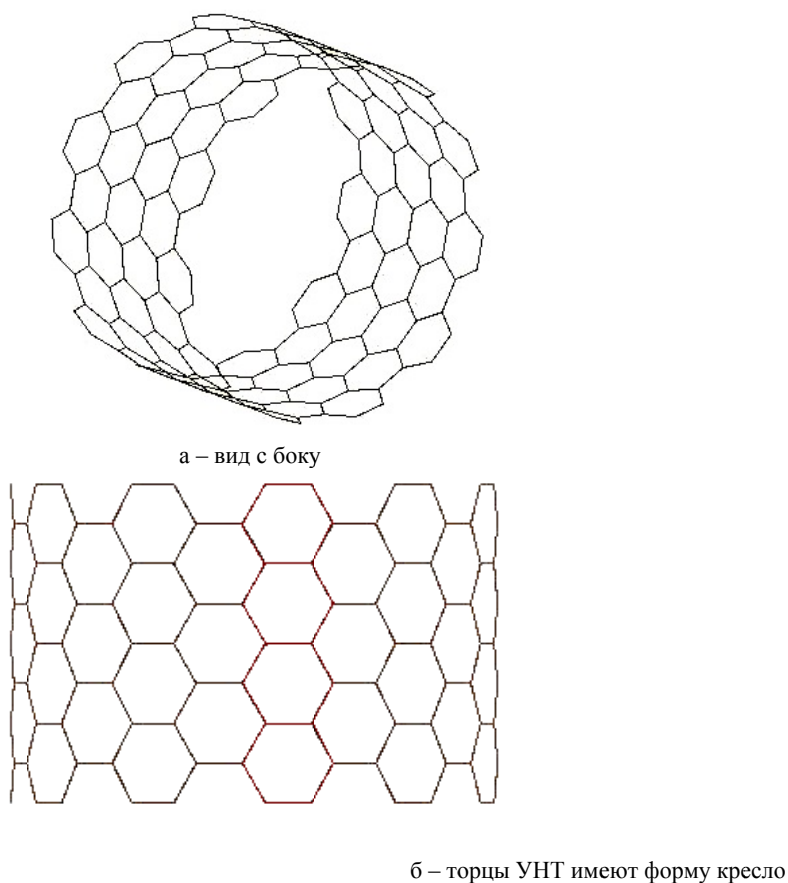
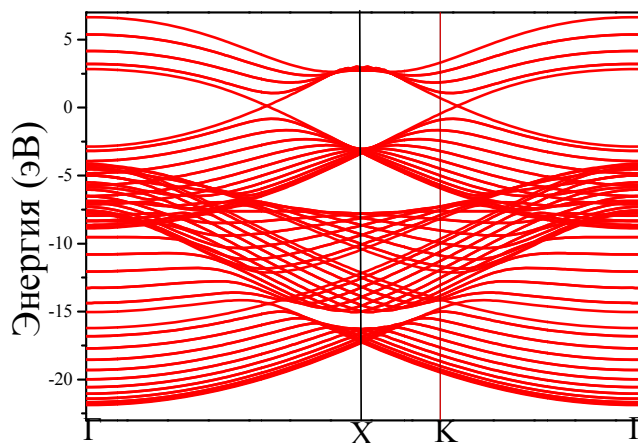


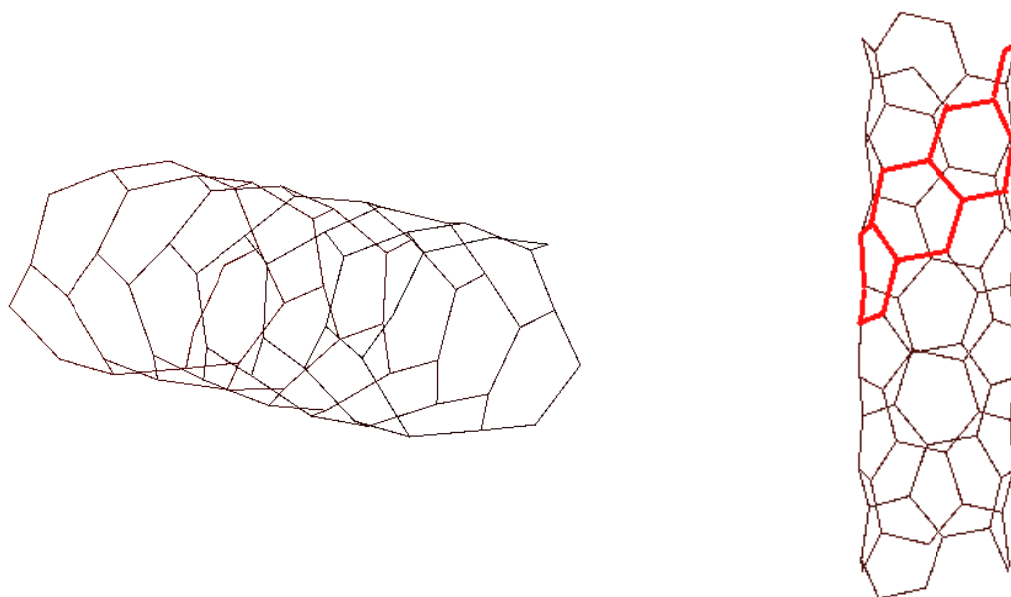
Рисунок 1 – Структура ОУНТ (11,1) типа «кресло»

Рисунок 2 – Электронная структура ОУНТ (11,1) типа «кресло»,  $E=0$  соответствует уровень Ферми

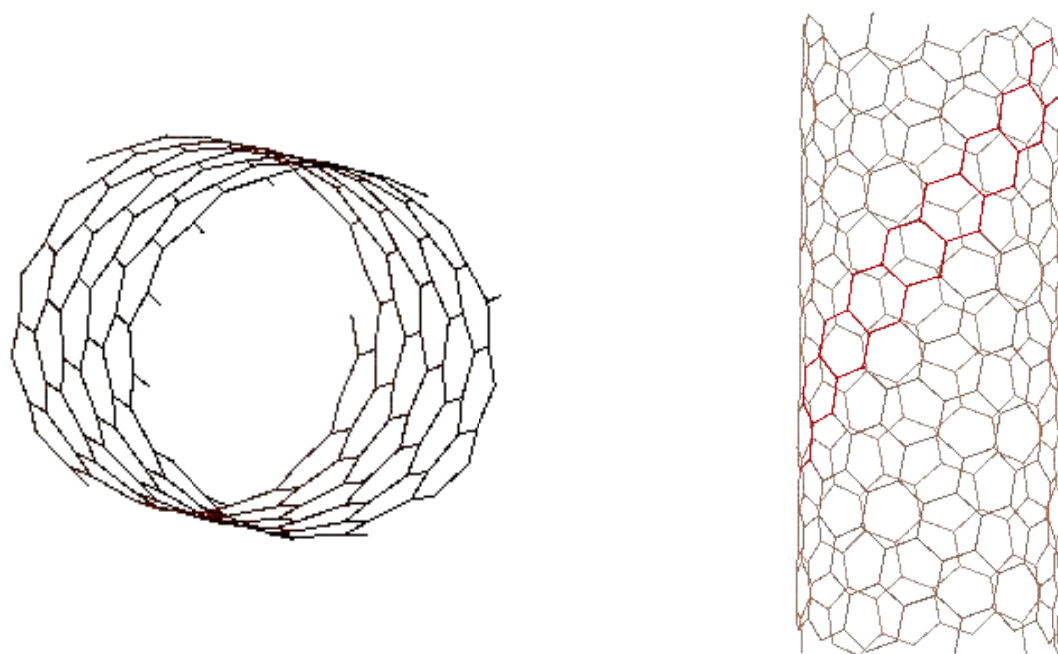
На рисунке 3 представлены структуры хиральных ОУНТ с коэффициентами хиральности (4,2) и (12,3). Известно, что если у ОУНТ разность коэффициентов хиральности  $n_1$  и  $n_2$  кратно трем:

$$n_1 - n_2 = 3q \quad (6),$$

где  $q = 1, 2, 3 \dots$ , то ОУНТ имеют металлическую проводимость, если нет - то полупроводниковую.



а – ОУНТ с хиральностью (4,2)



б – ОУНТ с хиральностью (12,3)

Рисунок 3 – Структура хиральных ОУНТ

Полученные электронные структуры хиральных ОУНТ показывают, что ОУНТ (4,2) имеет полупроводниковый тип проводимости с шириной запрещенной зоны порядка 1 эВ (рисунок 4). Тогда как, ОУНТ (12,3) имеет металлическую проводимость, в структуре которой отсутствует запрещенная зона (рисунок 5).

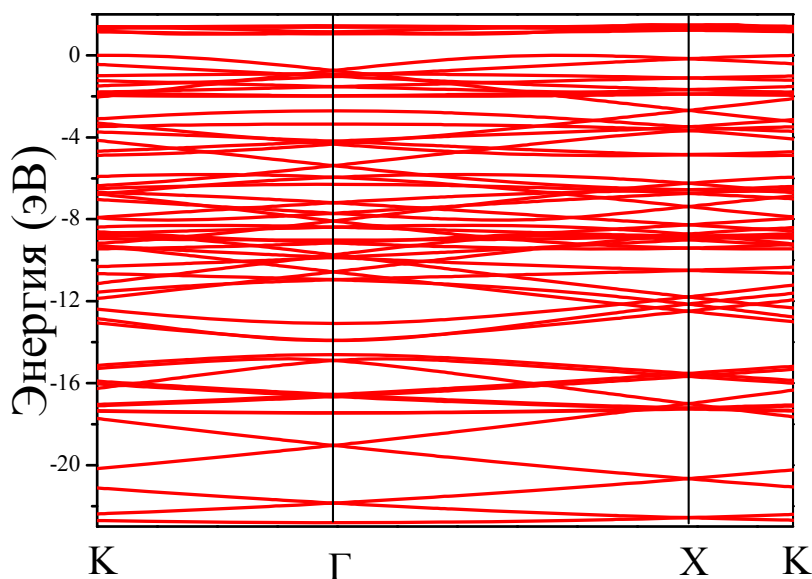


Рисунок 4 – Электронная структура хиральной ОУНТ (4,2),  $E=0$  соответствует уровень Ферми

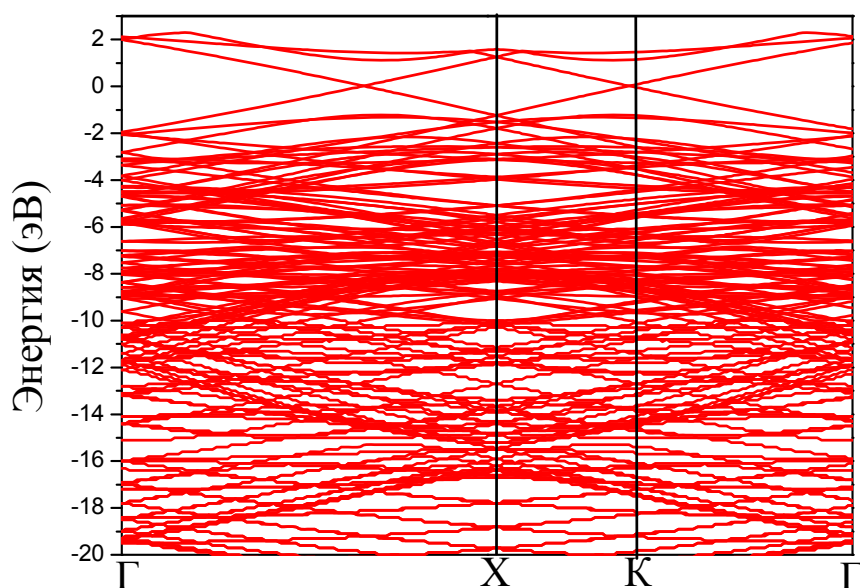
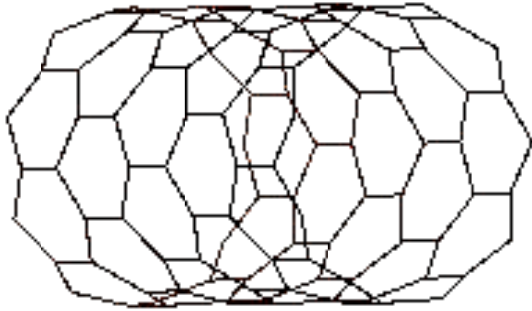
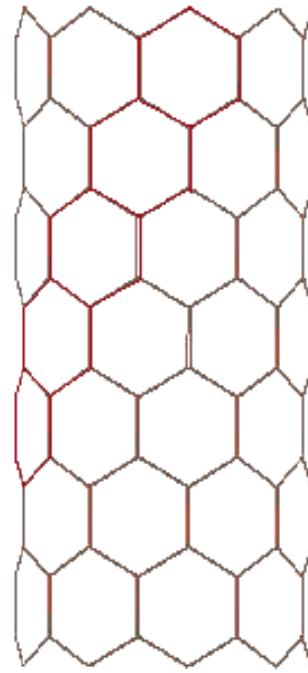


Рисунок 5 – Электронная структура хиральной ОУНТ (12,3),  $E=0$  соответствует уровень Ферми

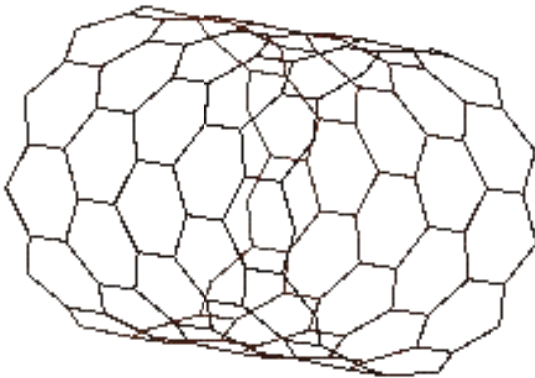
На рисунке 6 представлены структуры ОУНТ типа «зигзаг». Данные ОУНТ отличаются от других типов ОУНТ характерными зигзагообразными миторцами. Большая часть ОУНТ типа зигзагов имеют полупроводниковую проводимость, а остальная часть - металлическую. Электронные структуры ОУНТ типа «зигзаг» (9,0) и (11,0) представлены на рисунках 7 и 8, соответственно. Как видно из зонных структур, ОУНТ (9,0) имеет металлическую проводимость, а (11,0) полупроводниковую с шириной запрещенной зоны порядка 1,25 эВ.



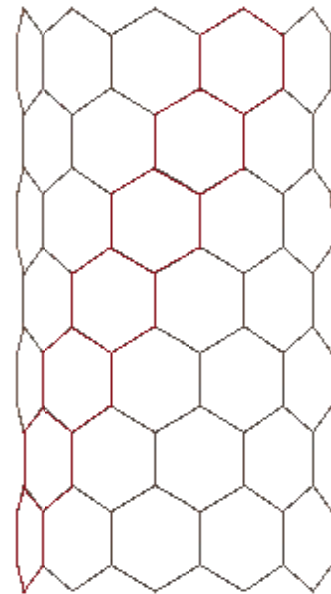
а – ОУНТ с хиральностью (9,0), вид с боку



б – ОУНТ с хиральностью (9,0) имеют форму зигзагов



в – ОУНТ с хиральностью (11,0), вид с боку



г – ОУНТ с хиральностью (11,0) имеют форму зигзагов

Рисунок 6 – Структуры ОУНТ типа «зигзаг»



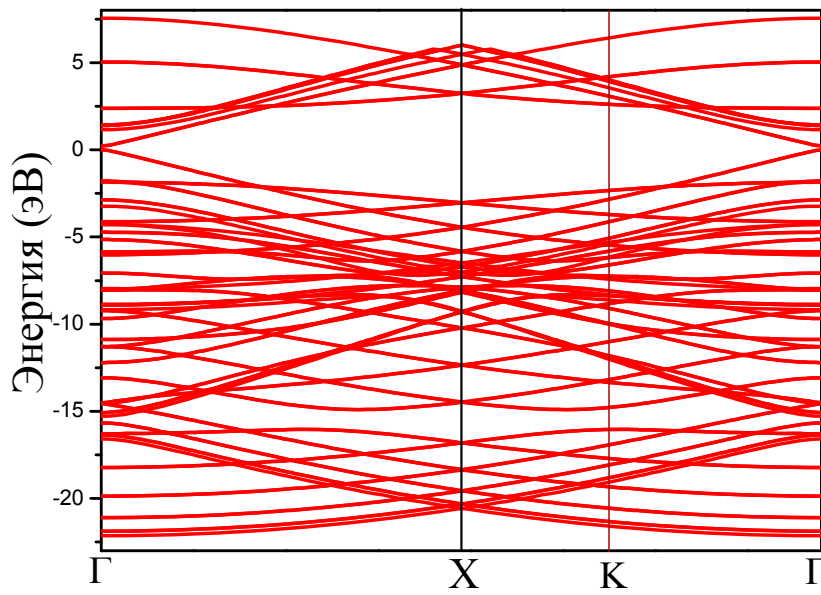


Рисунок 7 – Электронная структура ОУНТ  
типа «зигзаг» (9,0),  $E=0$  соответствует уровень Ферми

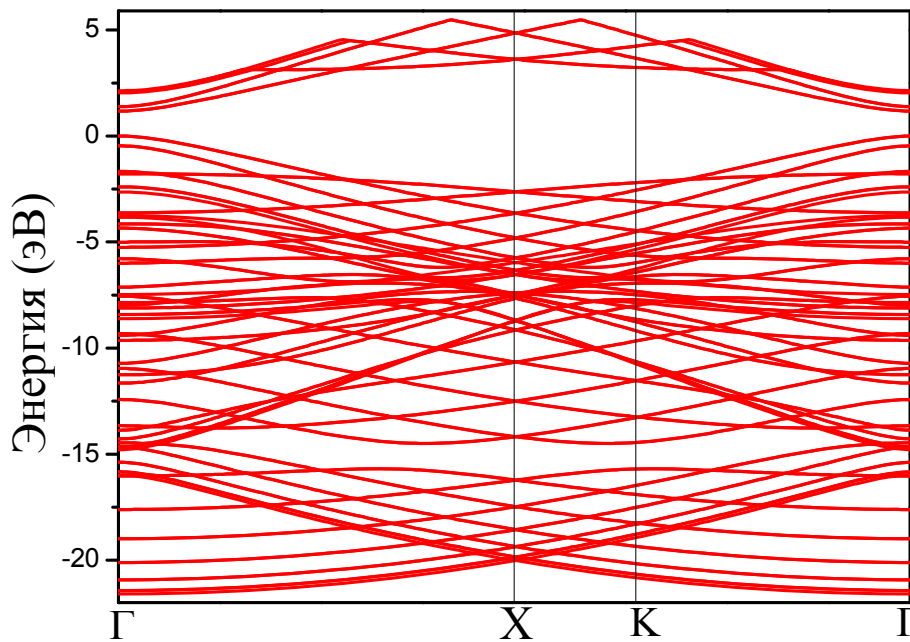


Рисунок 8 – Электронная структура ОУНТ  
типа «зигзаг» (11,0),  $E=0$  соответствует уровень Ферми

Таблица 1 – Структурные параметры ОУНТ

Нано- трубка	Диаметр, нм	Кол-во атомов в элемент. ячейке	Угол хиральности, градус	Объем элемент.ячейки, куб. ангстрем	Минимум полной энергии, Хартри	Ширина запрещенной зоны, эВ
Тип «кресло»						
(11,11)	1,4980	44	30	2,45310	-1676,29	0
Тип «хиральный»						
(4,2)	0,416	56	19,107	11,20799	-2132,54	1
(12,3)	1,0808	84	10,893	6,4864	-3200,09	0
Тип «зигзаг»						
(9,0)	0,7076	36	0	4,25258	-1371,33	0
(11,0)	0,8648	44	0	4,24337	-1676,17	1,25

Из расчетов минимума энергии, показанной в таблице 1, установлено, что наиболее стабильной структурой обладают хиральные одностенные углеродные нанотрубки, нежели типа «зигзаг» и «кресло». Также показано, что хотя идентичные по индексу хиральности нанотрубки типа «кресло» (11,11) и типа «зигзаг» (11,0) имеют наиболее близкие значения минимума энергии и одинаковое количество атомов в элементарной ячейке, они различаются по диаметру, объему элементарной ячейки и углу хиральности и, следовательно, типами проводимости.

Таким образом, на основе гибридного функционала *becke 3-parameter lee-yang-parr (B3LYP)* была изучена кристаллическая и электронная структура одностенных углеродных нанотрубок из первых принципов. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными литературными данными и показывают, что проводимость ОУНТ зависит от хиральности. Структурные параметры ОУНТ и значения запрещенной зоны представлены в таблице 1.

### Заключение

В данной работе были изучены структурные и электронные свойства одностенных углеродных нанотрубок «из первых принципов» методом функционала электронной плотности и приближения Хартри-Фока. На основе данного метода были проведены квантово-химические расчеты минимума энергии и ширины запрещенной зоны одностенных углеродных нанотрубок в зависимости от угла хиральности. Показано, что одностенные нанотрубки имеют как металлическую, так и полупроводниковую проводимость. Из расчетов минимума энергии установлено, что наиболее стабильной структурой обладают хиральные одностенные углеродные нанотрубки, нежели типа «зигзаг» и «кресло». Показано, что хотя идентичные по индексу хиральности нанотрубки типа «кресло» (11,11) и типа «зигзаг» (11,0) имеют наиболее близкие значения минимума энергии и одинаковое количество атомов в элементарной ячейке, они различаются по диаметру, объему элементарной ячейки и углу хиральности и, следовательно, типами проводимости.

Данная работа выполнена в рамках проекта 0263/ПЦФ.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Xiao L., Chen Zh, Feng Ch., Liu L., Bai Z.-Q, Wang Y., Qian L., Zhang Y., Li Q., Jiang K., FanSh., Stretchable, Transparent Carbon Nanotube Thin Film Loudspeakers // Nano Lett. – 2008 – Vol. 8, №12 – P. 4539–4545.
- [2] Zheng Q., Jiang Q., Multiwalled Carbon Nanotubes as Gigahertz Oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2002 – Vol.88 – 045503.
- [3] Chen J., Chen S., Zhao X., Kuznetsova L.V., Wong S.S., Ojima I. Functionalized single-walled carbon nanotubes as rationally designed vehicles for tumor-targeted drug delivery // J. Am. Chem. Soc. 2008. V. 49, no. 130. P. 16778–16785.
- [4] Devitt M.R. Tumor targeting with antibody-functionalized, radiolabeled carbon nanotubes // The J. of nuclear medicine. 2007. V. 48, no. 7. P. 1180–1189.
- [5] Kateb B., Yamamoto V., Alizadeh D., Zhang L., Manohara H.M., Bronikowski M.J., Badie B. Multi-walled carbon nanotube (MWCNT) synthesis, preparation, labeling, and functionalization // Immunotherapy of Cancer, Methods in Molecular Biology. 2010. No. 651. P. 307–317.
- [6] Ye Y., Ahn C.C., Witham C., Fultz B., Liu J., Rinzler A.G., Colbert D., Smith K.A., Smalley R.E., Hydrogen adsorption and cohesive energy of single-walled carbon nanotubes. // Applied Physics Letters 1999, 74, (16), 2307-2309.
- [7] Xu W.C., Takahashi K., Matsuo Y., Hattori Y., Kumagai M., Ishiyama S., Kaneko K., Iijima S., Investigation of hydrogen storage capacity of various carbon materials. // International Journal of Hydrogen Energy 2007, 32, (13), 2504-2512.

- [8] Panella B., Hirscher M., Roth S., Hydrogen adsorption in different carbon nanostructures. //Carbon –2005 – Vol.43, №10, –P. 2209-2214.
- [9] G. Bertoni, L. Calmels, Micron 37 (2006) 486–491.
- [10] R. Nizam, S. Mahdi, A. Rizvi, A. Azam, International Journal of Science and Technology 1 (2011) 153–162.
- [11] R.S. Ruoff, D. Qian, W.K. Liu, Comptes Rendus Physique 4 (2003) 993–1008.
- [12] B.I. Yakobson, P. Avouris, Topics in Applied Physics 80 (2001) 287–327.
- [13] J. Zhao, H. Park, J. Han, J.P. Lu, Physical Chemistry B 108 (2004) 4227–4230.
- [14] K. Gharbavi, H. Bادهian, Structural and electronic properties of armchair (7, 7) carbon nanotubes using DFT, COMPUTATIONAL MATERIALS SCIENCE, – 2014 –Том: 82 Стр.: 159-164.
- [15] Duan, YN; Zhang, JM; Wei, XM; Fan, XX ; Xu, KW; Ji, V , Structural and electronic properties of copper nanowires inside zigzag carbon nanotubes, PHYSICA B-CONDENSED MATTER – 2015– Том: 447 Стр.: 77-82.
- [16] Ya-Nan, L; Jun-Zhe, L; Heng-Jiang, Z; Yu-Chao, T; Xiang, L; Jing, L; Ting, W , Structural derivative and electronic properties of zigzag carbon nanotubes, ACTA PHYSICA SINICA – 2017– Том: 66 Выпуск: 9.
- [17] Lee H., Cheong S.W., Kim B.G. Hybrid functional band gap calculation of SnO 6 containing perovskites and their derived structures // Journal of Solid State Chemistry. – 2015. – Vol. 228. – P. 214-220.
- [18] Kim B.G., Jo J.Y., Cheong S.W. Hybrid functional calculation of electronic and phonon structure of BaSnO<sub>3</sub> // Journal of Solid State Chemistry. – 2013. – Vol. 197. – P. 134-138.
- [19] Chang Y.H., Park C.H., Matsuishi K. First-principles study of the structural and the electronic properties of the lead-halide-based inorganic-organic perovskites (CH<sub>3</sub>NH<sub>3</sub>)PbX<sub>3</sub> and CsPbX<sub>3</sub> (X=Cl, Br, I) // Journal of Korean Physical Society. – Vol. 44, №. 4. – P. 889-893.
- [20] Borriello I., Cantele G., Ninno D. Ab initio investigation of hybrid organic-inorganic perovskites based on tin halides // Physical Review B: Condensed Matter Materials Physics. – 2008. – Vol. 77. – P. 1-9.
- [21] Ahmed R., Aleem F., Hashemifar S.J., Akbarzadeh H. First principles study of structural and electronic properties of different phases of boron nitride // Physica B: Condensed Matter. – 2007. – Vol. 400, №. 1-2. – P. 297-306.

Д.Ғ. Батрышев<sup>1,3</sup>, Е. Ерланұлы<sup>1,3</sup>, Т.С. Рамазанов<sup>2</sup>, М.Т. Габдуллин<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>Инженерлі бейіндегізертхана, әл-Фарабиатындағы ҚазҰУ;

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

<sup>3</sup>Ашық түрдегі ұлттық нанотехнологиялық зертхана, әл-Фарабиатындағы ҚазҰУ,  
Қазақстан, 050040 Алматы, әл-Фараби, 71

### БІР ҚАБЫРҒАЛЫ КӨМІРТЕКТІ НАНОТҮТІКШЕЛЕРДІҢ ҚҰРЫЛЫМДЫҚ ЖӘНЕ ЭЛЕКТРОНДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН БЕСКЕ 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (ВЗЛҮР) ГИБРИД ФУНКЦИОНАЛЫ НЕГІЗІНДЕ ЗЕРТТЕУ

**Аннотация:** Аталған жұмыс электрондық тығыздықтың функционалы және Хартри-Фок жуықталуы әдісімен бір қабырғалы көміртекті нанотүтікшелердің құрылымдық және электрондық қасиеттерін зерттеуге арналған. Аталған әдіс негізінде хираль бұрышына байланысты бір қабырғалы көміртекті нанотүтікшелердің минимум энергиясы және тыйым салынған аймақ ені квантты-химиялық есептеулері жүргізілді. Бір қабырғалы нанотүтікшелер металдық және жартылай өткізгіштік қасиетке ие екендігі көрсетілді. Минимум энергияны есептеу барысында «зигзаг» және «кресло» типіне қарағанда хиральды бір қабырғалы көміртекті нанотүтікшелер тұрақты құрылымға ие екендігі анықталды. «Кресло» (11,11) және «зигзаг» (11,0) типті нанотүтікшелердің хиральдық индексі, минимум энергиясының шамасы және элементар ұяшықтағы атомдар саны бірдей болғаны көрсетілсе де, олар диаметр, элементар ұяшықтың көлемі және хиральдылық бұрышымен өзгешеленеді, сәйкесінше өткізгіштік типі де өзгеше.

**Тірек сөздер:** көміртекті нанотүтікшелер, плазмохимиялық қондыру, плазма углеродные нанотрубки, құрылымдық қасиеттер, электрондық қасиеттер, электрондық тығыздықтың функционалы.

#### Сведения об авторах:

Батрышев Д.Г. - Ст. преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 123 каб., [batryshev@physics.kz](mailto:batryshev@physics.kz);

Рамазанов Т.С. – Профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 332 каб., [ramazan@physics.kz](mailto:ramazan@physics.kz);

Габдуллин М.Т. - Ст. Преподаватель, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 427 каб., [gabdullin@physics.kz](mailto:gabdullin@physics.kz);

Ерланұлы Е. – Инженер, КазНУ им. аль-Фараби, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 120 каб., +77073234341 [verlanuly@physics.kz](mailto:verlanuly@physics.kz)

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 84 – 90

UDC 523.62

**A. Serebryanskiy, L. Usoltseva, A. Komarov, I. Reva**

Fesenkov Astrophysical Institute, Observatory 23, Almaty, Republic of Kazakhstan  
[alex@aphi.kz](mailto:alex@aphi.kz), [komarov@aphi.kz](mailto:komarov@aphi.kz), [usoltseva@aphi.kz](mailto:usoltseva@aphi.kz), [reva@aphi.kz](mailto:reva@aphi.kz)

**THE TRASFORMATION COEFFICIENTS AND INSTANTANEOUS  
VALUES OF ATMOSPHERIC EXTINCTION**

**Abstract.** We describe the process to determine the transformation coefficients from instrumental photometric system into standard Johnson-Cousines (BVR) photometric system as well as instantaneous values of atmospheric transparency coefficients. These results were obtained for Zeiss-1000 telescope equipped with Apogee Alta U9000D9 CCD camera. The process of PSF photometry using IRAF package is also described and obtained magnitudes and color indexes were compared with catalog values.

**Key words:** astronomical observations, UBVR photometry, standard stars

УДК 523.62

**А. В. Серебрянский, Л. А. Усольцева, А. А. Комаров, И. В. Рева**

Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан

**КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕХОДА И МГНОВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  
АТМОСФЕРНОЙ ЭКСТИНКЦИИ**

**Аннотация.** Дается детальное описание процесса определения переходных коэффициентов из инструментальной фотометрической системы в стандартную фотометрическую систему Джонсона-Коузина (BVR), а также определения мгновенных значений коэффициента атмосферной экстинкции. Результаты получены для телескопа ``Цейсс-1000`` обсерватории Тянь-Шань, оснащенного ПЗС камерой Apogee Alta U9000D9. Описан процесс фотометрии звезд в пакете IRAF методами апертурной и PSF-фотометрии. Дано сравнение полученных значений звездных величин и показателей цвета с каталожными значениями.

**Ключевые слова:** астрономические наблюдения, UBVR фотометрия, стандартные звезды.

**Введение**

Одной из основных задач при наблюдениях ГСС является точная оценка его яркости в разных спектральных диапазонах, что позволяет оценить его физические размеры, форму, состав и состояние его поверхности, а также размер солнечных панелей, что позволяет проводить оценку его энергопотребления и, следовательно, делать выводы о его возможном назначении. Вариации блеска ГСС дают нам информацию о динамике объекта, например, о его вращении. Задачей данной работы была отработка методики оценки изменения атмосферной экстинкции в течении одной ночи, а также определение коэффициентов перехода от инструментальной к стандартной фотометрической системе BVR для телескопа ``Цейсс-1000`` обсерватории Тянь-Шань. Методика, применяемая в данной работе, взята из работы по стандартизации АЗТ-22 обсерватории Майданак (Узбекистан) [1].

Внеатмосферное значение звездной величины в инструментальной системе можно записать в виде:

$$m_{0,\lambda} = m_\lambda - (k_{1,\lambda} - k_{2,\lambda} \cdot C_0) \cdot X \quad (1)$$

где,  $\lambda$  - центральная длина волны соответствующего фильтра (B, V, R),  $m_\lambda$ - видимая звездная величина в данном фильтре,  $C_0$  - показатель цвета в стандартной системе, то есть  $(B-V)_0$  или  $(V-R)_0$ . Тогда значение звездной величины в стандартной системе можно представить в виде:

$$M_\lambda = m_{0,\lambda} + \eta_\lambda \cdot C_0 + \alpha_\lambda \cdot \overline{UT} + \zeta_\lambda \quad (2)$$

В этих выражениях зависимость атмосферной экстинкции от воздушной массы предполагается линейной и определяется коэффициентом  $k_{1,\lambda}$ . Зависимость от показателя цвета также предполагается линейной и определяется коэффициентом  $k_{2,\lambda}$ . Коэффициент  $\zeta_\lambda$  определяет постоянную часть нуль-пункта фотометрической системы в данном фильтре. Зависимость изменения нуль-пункта в течении времени наблюдений определяется параметром  $\alpha_\lambda$ . Параметр  $\overline{UT}$ - временной промежуток относительно некоторого выбранного начального момента времени (обычно берется полночь).

Задачу определения всех коэффициентов и параметров в выражении (2) можно разделить на две подзадачи: 1) определить зависимость нуль-пункта от времени, а также исправить инструментальные звездные величины за атмосферную прозрачность и 2) определить коэффициенты пересчета в стандартную фотометрическую систему. Подставляя (1) в (2), получим:

$$M_\lambda = m_\lambda - k_{1,\lambda} \cdot X + k_{2,\lambda} \cdot C_0 \cdot X + \eta_\lambda \cdot C_0 + \alpha_\lambda \cdot \overline{UT} + \zeta_\lambda \quad (3)$$

Для оценки всех параметров в выражении (3) необходимо выбрать определенные стандартные площадки и соответствующим образом выстроить процесс наблюдений.

Таблица 1 Список стандартных площадок и параметры наблюдений

Название площадки	$\alpha_{(J2000)}$	$\delta_{(J2000)}$	Фильтры	Экспозиция в сек. (кол-во кадров)
Galadi 1	00 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup>	+30°22'30"	B,V,R	20(10),20(10),20(10)
Galadi 2	01 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 15 <sup>s</sup>	+00°22'30"	B,V,R	40(9),40(9),40(9)
Galadi 3	03 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 39 <sup>s</sup>	-00°01'30"	B,V,R	40(3),40(3),40(3)
Galadi 11	22 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup> 42 <sup>s</sup>	+01°13'30"	B,V,R	20(12),20(12),20(12)
GD 2	00 <sup>h</sup> 07 <sup>m</sup> 34 <sup>s</sup>	+33°18'51"	B,V,R	40(9),40(9),40(9)
GD 8	00 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup> 45 <sup>s</sup>	+31°34'46"	B,V,R	40(3),40(3),40(3)
GD 277	01 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 27 <sup>s</sup>	+51°08'41"	B,V,R	40(3),40(3),40(3)
GD 391	20 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 50 <sup>s</sup>	+39°15'53"	B,V,R	20(3),20(3),20(3)
GD 405	23 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 44 <sup>s</sup>	+47°27'08"	B,V,R	40(12),40(12),40,20(12)
GD 421	01 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup>	+67°41'51"	B,V,R	40(9),40(9),20(9)
SA23 SF3	03 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 21 <sup>s</sup>	+45°27'28"	B,V,R	40(6),40(6),40(6)
SA 41	21 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup>	+45°25'46"	B,V,R	20(6),20(6),20(6)

### Описание наблюдений и анализ данных

Наблюдения проводились на телескопе «Цейсс-1000» Тянь-Шаньской обсерватории. Диаметр главного зеркала  $D=1000$  мм, относительное фокусное расстояние  $f_{\text{отн}} = 6580$  мм. Телескоп оборудован ПЗС камерой Arogee Alta U9000D9, позволяющая получать поле зрения (FOV) размером  $19'.5 \times 19'.5$  с масштабом  $0".38/\text{пиксель}$ . Для многоцветной фотометрии используется набор фильтров B, V, R компании «Astrodon». Стандартные площадки наблюдались 23 августа 2016 года. Список площадок и параметры наблюдений приведены в Таблице 1. Данные взяты из работ [2, 3].

Предварительная обработка ПЗС кадров и последующая фотометрия звезд проводилась в пакете IRAF. В процесс этой обработки входит вычитание из каждого изображения темного тока, с последующим делением на откалиброванные значения плоского поля. Следующим шагом является получение оценки наблюдаемой звездной величины каждой стандартной звезды в каждом фильтре и каждом изображении методом апертурной фотометрии. Для этого используются процедура phot из библиотеки noao.digiphot.daophot пакета IRAF. После получения соответствующих апертурных значений наблюдаемых звездных величин строится PSF профиль звезд (PSF – Point Spread

Function) с последующей процедурой PSF-фотометрии [4]. Для этого использовались процедуры pstselect, psf, allstar пакета IRAF из библиотеки noao.digiphot.daophot. Поскольку PSF-значения инструментальной звездной величины получены по оценкам ограниченной апертуры на последнем шаге необходимо определить апертурную коррекцию. Данная процедура выполняется также в IRAF процедурами photcal.mkarfile, mkimsets, mkobsfile.

**Определение коэффициентов  $k_{2,\lambda} \cdot X + \eta_\lambda$ .** Мы начнем с определения цветовых коэффициентов пересчета в стандартную систему  $k_{2,\lambda}$  и  $\eta_\lambda$ . Чтобы определить эти коэффициенты, мы анализируем отдельные стандартные площадки ( $term2_{i,j}$ ) на Рисунке 1. На площадке должно быть достаточное количество стандартных звезд в как можно более широком диапазоне показателей цвета  $C_0$ .

Перегруппировка членов уравнения (3) дает:

$$M_\lambda - m_\lambda = \underbrace{-k_{1,\lambda} \cdot X + \alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda}_{term\ 1} + \underbrace{(k_{2,\lambda} \cdot X + \eta_\lambda) \cdot C_0}_{term\ 2} \quad (4)$$

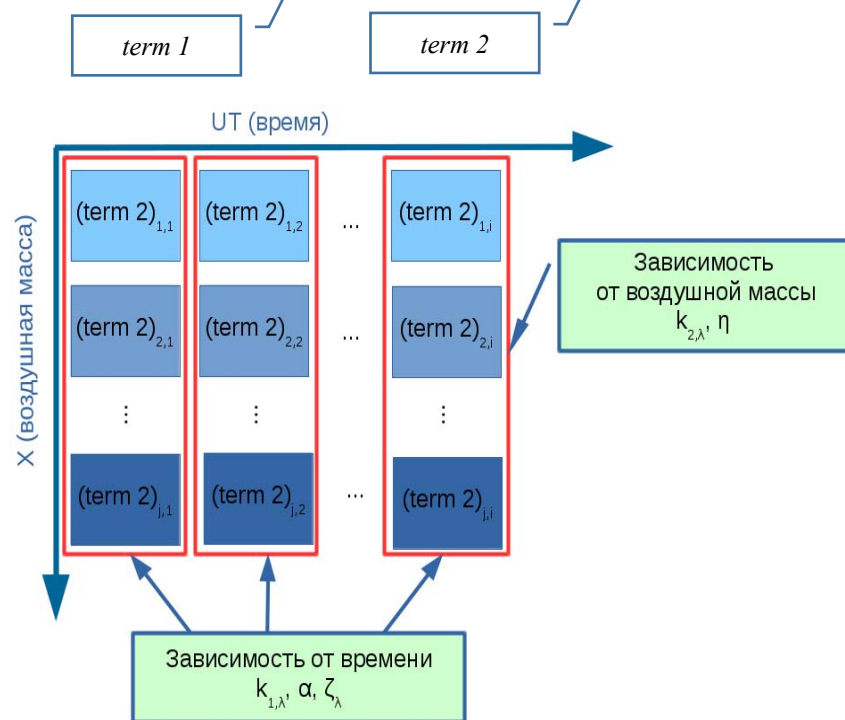


Рисунок 1 - План проведения наблюдений для определения коэффициентов пересчета в стандартную фотометрическую систему и коэффициента атмосферной экстинкции.

Для отдельно взятой стандартной площадки в определенный момент времени  $UT$  можно предположить, что  $X$  есть величина постоянная и следовательно постоянной является сумма членов  $-k_{1,\lambda} \cdot X + \alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$  которую мы обозначим как  $Const_1$ . Следовательно, наше уравнение (4) примет вид:

$$M_\lambda - m_\lambda = (k_{2,\lambda} \cdot X + \eta_\lambda) \cdot C_0 + Const_1 \quad (5)$$

То есть, для некоторой  $i$ -той стандартной площадки, при некотором значении воздушной массы  $X_i$  будем иметь

$$y_i(X_i) = A_{1,i}(X_i) \cdot C_0 + Const_{1,i} \quad (6),$$

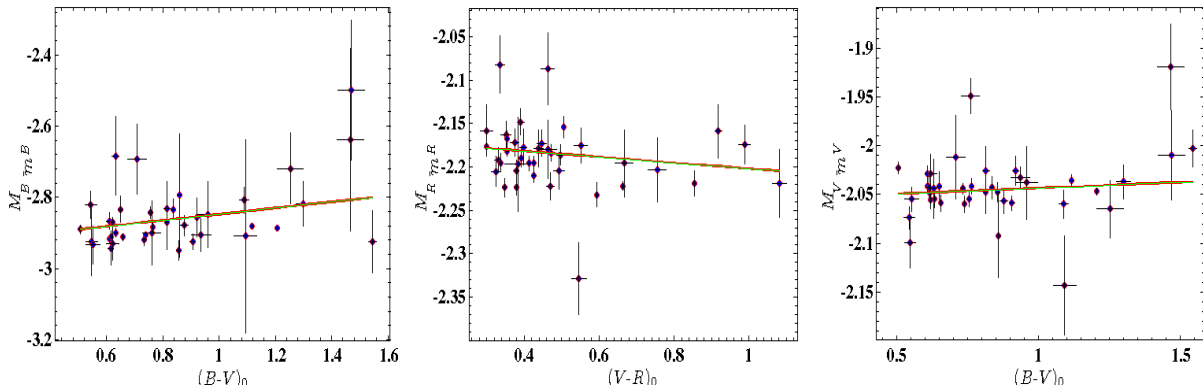


Рисунок 2. Зависимость разности звездных величин  $M_\lambda - m_\lambda$  от показателя цвета  $C_0$ . Красной линией показаны результаты линейной аппроксимации.

где  $A_{1,i}(X_i) = k_{2,\lambda} \cdot X_i + \eta_\lambda$ . Следовательно, строя зависимость  $y_i(X_i)$  от  $C_0$  и аппроксимируя ее линейной зависимостью мы можем определить  $A_{1,i}(X_i)$  и  $Const_{1,i}$ . Пример построения таких зависимостей и линейной аппроксимации показаны на Рисунке 2. Отметим, что мы считаем коэффициент  $k_{1,\lambda}(UT)$  зависящим от момента наблюдения, то есть меняющимся в течении ночи.

**Определение коэффициентов  $k_{2,\lambda}$  и  $\eta_\lambda$**

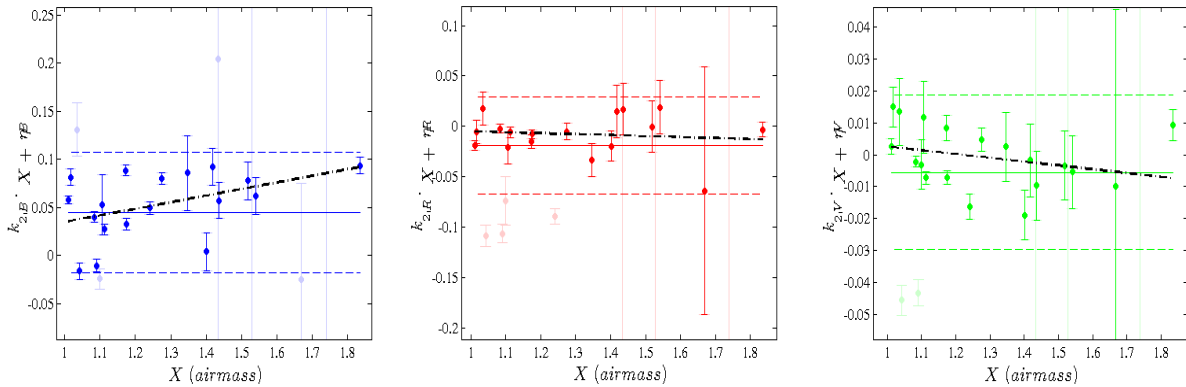


Рисунок 3 - Зависимость  $k_{2,\lambda} \cdot X + \eta_\lambda$  от воздушной массы  $X$  в разных фильтрах (слева сверху – фильтр В, справа сверху – фильтр V, внизу – фильтр R)

Если коэффициент  $k_{2,\lambda}$  принять постоянным в течении одной ночи, так же как и коэффициент  $\eta_\lambda$  (что должно достаточно точно выполняться), то исследуя зависимость параметра  $A_{1,i}(X_i)$  от  $X$  из линейной аппроксимации можно определить в отдельности коэффициенты  $k_{2,\lambda}$  и  $\eta_\lambda$  (см. Рисунок 3). В принципе, из предположения постоянства коэффициента  $k_{1,\lambda}$  в течении одной ночи из значений  $Const_{1,i}$  и линейной аппроксимации зависимости от воздушной массы  $X$  можно определить как само среднее для данной ночи наблюдений значение  $k_{1,\lambda}$  так и значение параметра  $\alpha_\lambda \cdot \overline{UT} + \zeta_\lambda$ , то есть нуль-пункт фотометрической системы с учетом его изменения в течении ночи. Полученные значения параметра  $k_{1,\lambda}$  и соответствующие ошибки, а также значения параметра  $\alpha_\lambda \cdot \overline{UT} + \zeta_\lambda$  с соответствующей ошибкой можно использовать как первые приближения и как накладываемые ограничения на диапазон их возможных значений для последующего уточнения и

определения этих параметров для отдельно взятого момента времени. Полученные нами средние значения таковы:  $k_{2,B} = 0.0485 \pm 0.0066$ ,  $\eta_B = -0.00384 \pm 0.0084$ ,  $k_{2,V} = -0.0057 \pm 0.0064$ ,  $\eta_V = 0.0152 \pm 0.0083$ ,  $k_{2,R} = 0.0432 \pm 0.0084$ ,  $\eta_R = -0.0575 \pm 0.0106$ . Кроме того, можно оценить усредненные за всю ночь значения коэффициентов экстинкции и нуля-пункта фотометрической системы  $\zeta_\lambda$ . Медианные значения, в нашем случае, получились следующими:  $\zeta_B = -2.749 \pm 0.0016$ ,  $\zeta_V = -2.175 \pm 0.0008$ ,  $\zeta_R = -2.177 \pm 0.0010$ . Значения этих же параметров, полученные из линейной аппроксимации, таковы:  $k_{1,B} = 0.244 \pm 0.014$ ,  $\zeta_B = -2.384 \pm 0.017$ ,  $k_{1,V} = 0.022 \pm 0.008$ ,  $\zeta_V = -2.073 \pm 0.010$ ,  $k_{1,R} = 0.139 \pm 0.008$ ,  $\zeta_R = -1.829 \pm 0.010$ .

**Вычисление коэффициентов  $k_{1,\lambda} \cdot X + \alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$**

По результатам первого шага мы оценили значения параметров  $k_{2,\lambda}$  и  $\eta_\lambda$ . После этого мы можем переходить к определению квази-мгновенных значений  $k_{1,\lambda}$  и  $\alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$  из следующей зависимости

$$y(X_i) = A_{2,i} + Const_{2,i} \tag{7}$$

где

$$y(X_i) = M_\lambda - m_\lambda - (k_{2,\lambda} \cdot X + \eta_\lambda) \cdot C_0 \tag{8}$$

и

$$Const_{2,i} = \alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda \tag{9}$$

Здесь под термином «квази-мгновенность» мы подразумеваем то факт, что несколько стандартных площадок на разных воздушных массах сняты в разных фильтрах почти в одно и тоже время. На практике с одним инструментом это осуществить довольно сложно. Во-первых, время экспозиции в каждом фильтре конечно. Во-вторых, обычно необходимо снимать по несколько кадров в каждом фильтре, для уменьшения вкладов различных случайных шумов. В-третьих, для наведения телескопа с одной площадки на другую тоже затрачивается определенное время. Фактически, учитывая все перечисленные факторы «квази-мгновенность» подразумевает определение значения экстинкции в течении приблизительно одного часа.

Таблица 2 - Значения параметра  $k_{1,\lambda}$  в разные моменты времени наблюдения в течении одной ночи

Время (JD-2400000)	$k_{1,B}$	$\sigma_{k_{1,B}}$	$k_{1,V}$	$\sigma_{k_{1,V}}$	$k_{1,R}$	$\sigma_{k_{1,R}}$
57624.18632	1.352	0.015	1.373	0.009	1.540	0.009
57624.25082	0.622	0.023	0.740	0.015	0.930	0.016
57624.30702	0.283	0.025	0.371	0.017	0.519	0.018
57624.36522	0.226	0.021	0.149	0.015	0.197	0.018
57624.41764	0.227	0.013	0.084	0.010	0.000	0.011

Таблица 3 - Значения параметра  $Const_{2,i} = \alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$  в разные моменты времени наблюдения в течении одной ночи

Время (JD-2400000)	$Const_{2,B}$	$\sigma_{Const_{2,B}}$	$Const_{2,V}$	$\sigma_{Const_{2,V}}$	$Const_{2,R}$	$\sigma_{Const_{2,R}}$
57624.18632	1.297	0.020	1.723	0.012	1.871	0.012
57624.25082	0.484	0.032	1.007	0.021	1.175	0.022
57624.30702	0.094	0.034	0.554	0.023	0.651	0.025
57624.36522	-0.001	0.030	0.231	0.021	0.170	0.023
57624.41764	0.0004	0.021	0.063	0.015	-0.212	0.017

Результаты определения коэффициента  $k_{1,\lambda}$  и  $\alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$  для разных моментов времени наблюдений показаны в Таблице 2 и Таблице 3, соответственно. Пример аппроксимации линейной зависимости  $k_{1,\lambda} \cdot X + \alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$  от воздушной массы показан на Рисунке 4.

**Сравнение с каталогом**

После того как мы определили коэффициент экстинкции  $k_{1,\lambda}$  и нуля-пункта фотометрической системы с коэффициентом его изменения в течении ночи  $\alpha_\lambda \cdot \widehat{UT} + \zeta_\lambda$  мы можем использовать эти



значения для расчетов значений  $M_\lambda$  для их с каталожными значениями. Результаты сравнений показаны на Рисунке 5.

Работа проделана в рамках проектов №0073-1/ПЦФ-15-МОН и №0069/ГФ4 Республики Казахстан.

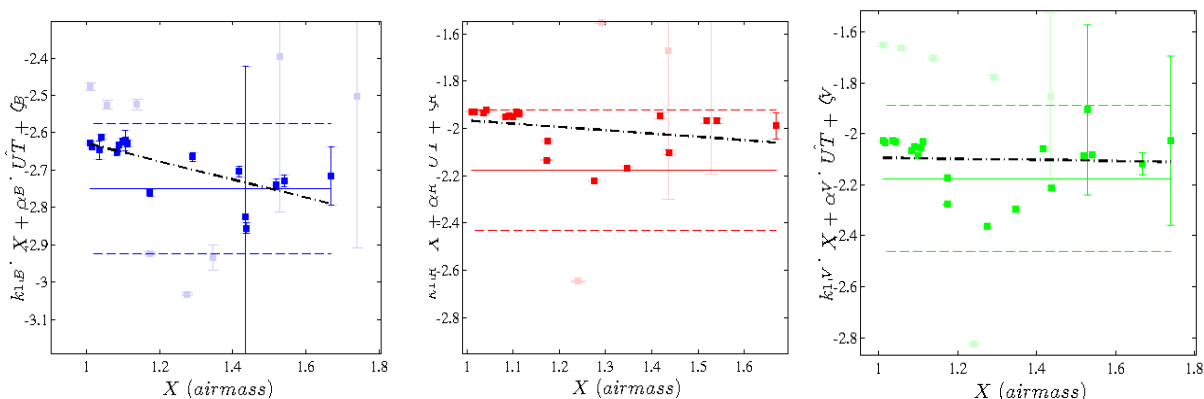


Рисунок 4 - Зависимости  $k_{\lambda, \lambda_0} \cdot X + \alpha_{\lambda, \lambda_0} \cdot UT + \zeta_{\lambda, \lambda_0}$  от воздушной массы  $X$ . Красным цветом показана зависимость для фильтра R, зеленым для фильтра V и синим для фильтра B. Пунктирными линиями того же цвета показаны диапазоны  $3\sigma$  отклонений от среднего (показаны сплошной линией соответствующего цвета). Черной пунктирной линией показаны результаты линейной аппроксимации.

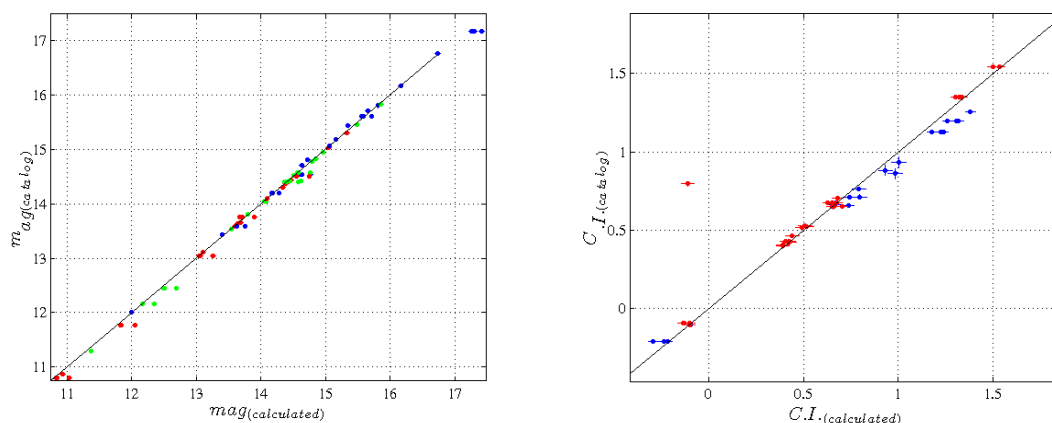


Рисунок 5 - Слева: зависимость вычисленных значений звездных величин  $M_\lambda$ , обозначенные как  $mag_{\text{calculated}}$ , от каталожных значений звездных величин  $mag_{\text{catalog}}$  (значение цветов: красный-фильтр R, синий-фильтр B, зеленый-фильтр V). Справа: зависимость вычисленных значений показателя цвета  $C.I._{\text{calculated}}$  от каталожных значений показателя цвета  $C.I._{\text{catalog}}$  (значение цветов: красный - (V-R), синий - (B-V)).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lim, B., Sung, H., Bessell, M. S., Karimov, R. Irahimov, M. CCD Photometry of Standard Stars at Maidanak Astronomical Observatory in Uzbekistan: Transformations and Comparisons // Journal of Korean Astronomical Society 2009. - V.42. - pp.161-174 <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009JKAS...42..161L>
- [2] Landolt, A. U. UBVRI Photometric Standard Stars around the Sky at +50 deg Declination // The Astronomical Journal 2013. - V.146. - p.131 <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013AJ....146..131L>
- [3] Landolt, A. U. UBVRI Photometric Standard Stars Around the Celestial Equator: Updates and Additions // The Astronomical Journal 2009. - V.137. - pp.4186-4269 <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009AJ....137.4186L>

[4] Stetson P.B. DAOPHOT – A computer program for crowded-field stellar photometry // Astronomical Society of the Pacific 1987. – V. 99. – pp.191-222

#### References

[1] Lim, B., Sung, H., Bessell, M. S., Karimov, R. Irahimov, M. CCD Photometry of Standard Stars at Maidanak Astronomical Observatory in Uzbekistan: Transformations and Comparisons // Journal of Korean Astronomical Society 2009, V.42, pp. 161-174 <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009JKAS...42..161L>

[2] Landolt, A. U. UBVR Photometric Standard Stars around the Sky at +50 deg Declination // The Astronomical Journal 2013, V.146, p.131 <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013AJ....146..131L>

[3] Landolt, A. U. UBVR Photometric Standard Stars Around the Celestial Equator: Updates and Additions // The Astronomical Journal 2009, V.137, p.p. 4186-4269 <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009AJ....137.4186L>

[4] Stetson P.B. DAOPHOT – A computer program for crowded-field stellar photometry // Astronomical Society of the Pacific 1987. – v. 99. – pp.191-222 <http://adsabs.harvard.edu/abs/1987PASP...99..191S>

**А. В. Серебрянский, Л. А. Усольцева, А. А. Комаров, И. В. Рева**

В.Г. Фесенков атындағы Астрофизикалық институты, Алматы қ., Қазақстан

#### **АТМОСФЕРАЛЫҚ ЭКСТИНКЦИЯНЫҢ ЛЕЗДІК МӘНДЕРІ ЖӘНЕ АУЫСУЫ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ**

**Аннотация.** Бұл аспаптық фотометриялық жүйесінің стандартты фотометриялық Джонсон-Коузина жүйе-сіне ауыстыру (БВР) коэффициенттерін анықтау процесінің толық сипаттамасын және атмосфералық экстинкцияның лездік мәндерін анықталады. Тянь-Шань обсерватория телескопы “Zeiss-1000” үшін алынған нәтижелер, ол CCD Arogee Alta U9000D9 камерасымен жабдықталған. IRAF пакеттің апертура мен PSF-фотометрия әдісімен жұлдызды фотометрия процесін сипаттайды. Жұлдыздық шамаларды салыстыру каталогы мәндері мен түс көрсеткіштері алынған.

**Тірек сөздер:** астрономиялық бақылау, UBVR фотометрия, стандартты жұлдыздар

#### **Сведения об авторах:**

Серебрянский Александр Владимирович, зав. сектором наблюдений ИСЗ и ИС ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова», адрес: 050020, Алматы, Обсерватория, д.23., т. 383 49 52, [alex@aphi.kz](mailto:alex@aphi.kz);

Усольцева Любовь Александровна, ВНС сектора наблюдений ИСЗ и ИС ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова». Адрес: 050020, Алматы, Обсерватория, д.23., т. 260 87 95, факс. 260 75 90, [usoltseva@aphi.kz](mailto:usoltseva@aphi.kz);

Комаров Андрей Анатольевич, СНС сектора наблюдений ИСЗ и ИС, ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова», адрес: 050020, Алматы, Обсерватория, д.23, факс. 260 75 90, [komarov@aphi.kz](mailto:komarov@aphi.kz);

Рева Инна Владимировна, инженер Тянь-Шаньской Обсерватории «Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова», адрес: 050020, Алматы, Обсерватория, д.23., т. 383 49 52, [reva@aphi.kz](mailto:reva@aphi.kz)

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 91 – 100

**K. Baktybaev<sup>1</sup>, M.K. Baktybaev<sup>2</sup>, D.D.Naukenov<sup>2</sup>, A.Dalelkhankyzy<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Kazakh National Research Technical University named after K.I.Satpaev, Almaty, Kazakhstan;

<sup>3</sup>Almaty university of power engineering and telecommunications, Almaty, Kazakhstan

[darmen.naukenov@mail.ru](mailto:darmen.naukenov@mail.ru); [dalelkhankyzy.d@gmail.com](mailto:dalelkhankyzy.d@gmail.com)

**MICROSCOPIC JUSTIFICATION OF THE MODEL  
OF INTERACTING BOSONS AND A GENERALIZED QUASISPIN  
FORMALISM IN THE THEORY OF THE NUCLEI**

**Abstract.** A relatively simple microscopic theory of the justification of the phenomenological model of interacting bosons of collective excitation of nuclear systems is proposed, in which detailed calculations of the parameters of the phenomenological model are made on the basis of a generalized fermion quasispin formalism (GQF). This formalism makes it possible to extract the most necessary  $S - D$  pair part from the huge shell space, in which the collective states of the fermion systems are constructed by the action of single-particle and specified pair forces between nucleons. The use of the generalized quasispin method made it possible to solve exactly the many-particle problems for fermion systems with a certain number of particles and with given internucleon forces. The operators of the equations include quantities reflecting the nonuniform distribution of nucleons over various nondegenerate  $j -$  shells, which give a consistent description of the properties of real nuclei. The application of the method to a system of interacting fermions greatly facilitates the exact solution of problems with certain symmetric-model Hamiltonians and to calculate the selectable parameters of the boson theory of collective nuclear states through the matrix elements of the fermion operators of the interaction of nucleons in the system. The separation from the complete fermionic space of  $S - D$  pairwise collective domains simplifies the procedure for calculating the matrix elements of the operators of the problem, expressing many-particle integrals by calculating simple two-particle ones.

The theory is applied to the study of the structure and properties of the collective states of even neodymium isotopes  $^{132-138}Nd$ , which were also interpreted in the model of interacting bosons. The pair interactions of nucleons are determined from the description of the spectra of the excited states of the nuclei under study. The tensor part of the pair interaction is neglected because of their smallness in comparison with the Wigner and singlet parts of them. The values of pair interactions of nucleons turned out to be close to the values of the corresponding parameters for heavy nuclei obtained in earlier studies. Using the obtained wave functions of nuclear states, the reduced probabilities of electromagnetic  $E2 -$  transitions between the levels of like and dissimilar bands of the spectrum are calculated. The ratios of the probabilities of transitions between different states are also calculated. The results of the calculations, both from the spectra and from the probabilities of gamma transitions between the levels, were compared with their experimental values. Discussion of the results of the calculation with experimental data for even neodymium isotopes was carried out.

**Key words:** atomic nucleus, nucleons, energies, operators, wave functions, transition probabilities.

**К. Бактыбаев<sup>1</sup>, М.К. Бактыбаев<sup>2</sup>, Д.Д. Наукенов<sup>2</sup>, А. Далелханкызы<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup> Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан;

<sup>3</sup> Алматинский университет энергетики связи, Алматы, Казахстан

**МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ И ОБОБЩЕННЫЙ  
КВАЗИСПИНОВЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ТЕОРИИ ЯДРА**

**Аннотация.** Предлагается относительно простая микроскопическая теория обоснования феноменологической модели взаимодействующих бозонов коллективного возбуждения ядерных систем, в которой

производятся детальные вычисления параметров феноменологической модели на основе обобщенного фермионно-квасиспинового формализма (ОКФ). Этот формализм позволяет выделить из огромного оболочечного пространства самую необходимую  $S - D$  парную ее часть, в которой действием одночастичных и заданных парных сил между нуклонами строятся коллективные состояния фермионных систем. Использование метода обобщенного квазиспина дало возможность точно решить многочастичные задачи для фермионных систем с определенным числом частиц и с заданными межнуклонными силами. В операторы уравнений входят величины отражающие неравномерное распределение нуклонов по разным невырожденным  $j$ -оболочкам, что дают последовательное описание свойств реальных ядер. Применение метода к системе взаимодействующих фермионов намного облегчает точное решение задач с некоторыми симметрично-модельными гамильтонианами и вычислить выбираемые параметры бозонной теории коллективных состояний ядер через матричные элементы фермионных операторов взаимодействия нуклонов в системе. Выделение из полного фермионного пространства  $S - D$  парные коллективные области упрощает процедуру вычисления матричных элементов операторов задачи, выражая многочастичные интегралы посредством вычисления простых двухчастичных.

Теория применяется к изучению структуры и свойств коллективных состояний четных изотопов неодима  $^{132-138}Nd$ , которые также были интерпретированы в модели взаимодействующих бозонов. Парные взаимодействия нуклонов определены из описания спектров возбужденных состояний изучаемых ядер. При этом тензорная часть парного взаимодействия пренебрежены из-за их малости по сравнению с вигнеровской и синглетной их частями. Величины парных взаимодействий нуклонов оказались близкими к значениям соответствующих параметров для тяжелых ядер, полученным в более ранних работах. Используя полученные волновые функции состояний ядер вычислены приведенные вероятности электромагнитных  $E2$  - переходов между уровнями одноименных и разноименных полос спектра. Также вычислены отношения вероятностей переходов между различными состояниями. Результаты вычислений, как по спектрам так и по вероятностям  $\gamma$  - переходов между уровнями были сравнены с их экспериментальными значениями. Проведены обсуждения результатов расчета с экспериментальными данными для четных изотопов  $Nd$ .

**Ключевые слова:** атомное ядро, нуклоны, энергии, операторы, волновые функций, вероятности переходов.

## 1. Введение

Несмотря на сложность и малоизученность сил взаимодействия, атомные ядра как система, состоящая из большого числа нуклонов, по своим низколежащим спектрам проявляют относительно простую структуру. Многие закономерности состояний ядер были описаны оболочечной моделью при помощи волновых функций нуклонов, движущихся независимо друг от друга, в центральном статическом потенциале. Когда число валентных нуклонов растет, приходится учесть остаточные взаимодействия между ними, для того, чтобы описать коллективные состояния в спектре систем. Такие коллективные полосы состояний, лежащие в низких энергетических областях ядер тяжелого и среднего атомного веса, успешно описываются феноменологической моделью взаимодействующих бозонов [МВБ][1,2]. В феноменологических вычислениях параметры МВБ обычно выбираются удобным способом, чтобы получить лучшее описание состояний ядер, в которых параметры теории меняются плавно. Были предприняты некоторые попытки вычислить модельные параметры МВБ из определенных детальных микроскопических подходов [3 - 9]. Во многих из них производилось обрезание полнооболочечно-модельного пространства и замена его  $S - D$  парной областью и использование некоторых модельных взаимодействий между нуклонами.

В представленной работе предлагается детальное микроскопическое вычисление параметров МВБ на основе обобщенного квазиспинового формализма(ОКФ), в котором модельное  $S - D$  парное оболочечное пространство описывается квантовым числом обобщенной сеньорити и с заданными межнуклонными силами.

Известно, что обычный квазиспиновый формализм дает весьма приближенное описание структуры и свойств реальных ядер. Собственные функции и собственные значения гамильтониана в этой модели являются довольно грубым приближением к точным решениям уравнения Шредингера. Это связано не только с сильной идеализацией существующих ядерных сил, но и также с схематическим распределением нуклонов по вырожденным  $j$ -оболочкам с равными амплитудами вероятностей.

В предлагаемом методе данной работы указанные недостатки устраняются введением новых обобщенных квазиспиновых операторов взаимодействия, более адекватно описывающих реальные свойства существующих ядер. В эти операторы входят величины отражающие неравномерное распределение нуклонов по разным невырожденным  $j$  – оболочкам. В то же время обобщенные квазиспиново-групповые свойства этих операторов не теряют своих простых и привлекательных черт, присущих обычной схеме квазиспина.

Использование этого метода, называемого в дальнейшем обобщенным квазиспиновым формализмом (ОКФ), дало возможность точно решить многочастичные задачи, для фермионных систем с определенным числом частиц и с заданными межнуклонными силами. Здесь он применяется к расчету и объяснению структуры многочастичных состояний реальных ядерных систем. Применительно к системе взаимодействующих бозонов метод ОКФ намного облегчает точное решение задач с некоторыми симметрично-модельными гамильтонианами вычислить выбираемые параметры бозонной теории через матричные элементы фермионных операторов взаимодействия. Введение в таких расчетах понятия обобщенного квазиспина позволяет выделить из полного фермионного пространства  $S$  – Дпарные коллективные и квазичастичные его области. А это в свою очередь, облегчает процедуру вычисления матричных элементов операторов взаимодействия через нуклонные парные силы.

## II. Метод обобщенного квазиспина

Изложая метод расчета, сначала введем понятия обобщенного квазиспинового пространства и двойные тензора в таком пространстве. С помощью этих тензоров легко находятся собственные значения и собственные функции физических операторов в квазиспиновом(S)пространстве. Этот метод позволяет выразить многочастичные матричные элементы через двухчастичные. Такие формулы, как известно называются редукционными.

Известно, что оператор рождения частицы  $a_{jm}^+$  является сферическим тензорным оператором полуцелого ранга  $j$  в пространстве углового момента. Тогда тензорные произведения этих операторов определяются в виде:

$$\begin{aligned} A^+(j_1 j_2; JM) &= (1 + \delta_{j_1 j_2})^{-1/2} [a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+]_M^{(J)}, \\ \tilde{A}(j_1 j_2; JM) &= -(1 + \delta_{j_1 j_2})^{-1/2} [\tilde{a}_{j_1 j_1} \tilde{a}_{j_2 j_2}]_M^{(J)}, \\ U(j_1 j_2; JM) &= [a_{j_1 m_1}^+ \tilde{a}_{j_2 j_2}]_M^{(J)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

С помощью этих операторов записываются все виды двухчастичного взаимодействия:

$$V = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \sqrt{2J+1} G_J(j_1 j_2 j_3 j_4) [A^+(j_1 j_2 J) \tilde{A}(j_3 j_4 J)]_0^{(0)}, \quad (2.2)$$

$$\text{где } G_J(j_1 j_2 j_3 j_4) = (1 + \delta_{j_1 j_2})(1 + \delta_{j_3 j_4})/4 \cdot \langle j_1 j_2; J | V | j_3 j_4 \rangle. \quad (2.3)$$

Из трех тензорных операторов образуем обобщенную квазиспиновую группу:

$$S_+ = \sum_j \alpha_j S_j^+; S_- = \sum_j \frac{1}{\alpha_j} S_j^-; S_0 = \sum_j S_j^0 = \frac{N - \Omega}{2}, \quad (2.4)$$

$$[S_+, S_-] = 2S_0, [S_0, S_{\pm}] = \pm S_{\pm} \quad (2.5)$$

где  $\alpha_j$  – некоторые постоянные величины, определяющие амплитуды вероятностей заселения орбит  $N = \sum_j N_j$ ,  $\Omega = \sum_j \alpha_j \Omega_j$ ,  $\Omega_j = j + 1/2$

Эти три обобщенные квазиспиновые операторы  $S_0, S_{\pm}$  также обладают коммутационными свойствами обычных квазиспиновых операторов и являются генераторами алгебры Ли. Как видно из (2.5) обобщенные квазиспиновые операторы состоят из обычных квазиспиновых операторов  $S_j^{\pm}, S_j^0$ .

$$S_j^+ = \sqrt{\Omega} A^+(j_1 j_2; 00); S_j^- = \sqrt{\Omega} \tilde{A}(j_1 j_2; 00), S_j^0 = \frac{1}{2}(N^j - \Omega^j) \quad (2.6)$$

где  $N^j = \sum_m a_{jm}^+ a_{jm} = \sum(-)^{j-m} a_{jm}^+ \tilde{a}_{j-m}$ .

В случае  $\alpha_j = 1$  из равенств (2.4) и (2.5) получаем обычную вырожденную квазиспиновую группу. Все группы (2.4) и (2.5) являются изоморфными друг-другу. По этому представление любой группы (2.5) будет эквивалентно представлению обычной вырожденной группы. Тогда если через  $R$  обозначить преобразование, переводящее базисы обычной квазиспиновой группы  $|\varphi_i\rangle$  в базисы обобщенной группы  $|\Psi_i\rangle$ , то

Можно также выполнить преобразование операторов из одного базиса в другой, например для одночастичных операторов:

$$\begin{aligned} C_{jm}^+ &= R a_{jm}^+ R^{-1} = \sqrt{\alpha_j} a_{jm}^+, \\ C_{jm} &= R a_{jm} R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_j}} a_{jm}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и должно выполняться равенство  $C_{jm}^+ = (C_{jm})^+$ , в котором  $+$  означает операции эрмитового сопряжения с одновременной заменой  $\sqrt{\alpha_j}$  на  $\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}$  во всех фермионных операторах. Эти операторы, теперь выражаются через произведения новых  $C_{jm}$ .

Из-за изоморфности всех групп (2.4) и (2.5) при любых значениях  $\alpha_j$  в обобщенном квазиспиновом формализме также можно ввести полный оператор обобщенного квазиспина  $S$ :

$$S^2 = S_+ S_- + S_0^2 - S_0 \quad (2.8)$$

Новые обобщенные операторы удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, каким подчиняются операторы угловых моментов, т.е. свойства операторов квазиспина и углового момента аналогичны. Векторы состояний характеризуются новыми квантовыми числами  $s$  и  $s_0$ ,  $s_0 = -s, -s + 1, \dots, s$ , которые определяют собственные значения операторов полного квазиспина  $S$  и его проекции  $S_0$ . Теперь эти числа и образуют обобщенное квазиспиновое пространство, волновые функции которого обозначим  $|s, s_0, q\rangle$ . Используя правила коммутации (2.5), получим:

$$S_- |s, s_0, q\rangle = \text{const} |J, J_0 - 1, q\rangle, \quad (2.9)$$

$$S_- |s, s_0, q\rangle = \text{const} |J, J_0 + 1, q\rangle$$

$S_- |s, s_0 = -s, q\rangle = 0$  (2.10). Последнее равенство (2.10) означает, что в данном состоянии  $s_0 = -s$ ,  $N = \Omega - 2s$ . Значения квантовых чисел  $s_0$  и  $s$  определяются также альтернативными числами обобщенной сеньерити  $v$  и полного числа нуклонов  $N$  с помощью соотношений:

$$s = \frac{1}{2}(\Omega - v), s_0 = \frac{1}{2}(N - \Omega) \quad (2.11)$$

Квантовое число  $v$  определяет число неспаренных частиц в состоянии с обобщенным квазиспином  $s$ . Если в системе все частицы спарены, то  $v = 0$  и  $s = \Omega/2$ . В полном неспаренном состоянии  $v = \Omega$  а обобщенный квазиспин  $s = 0$ . Таким образом, обобщенный квазиспин приобретает смысл квантового числа, классифицирующего состояния системы по их трансформационным свойствам по отношению к вращениям системы координат в квазиспиновом пространстве.

Гамильтониан спаривательного взаимодействия

$$H_s = \varepsilon N - G S_+ S_- \quad (2.12)$$

также диагонален в представлении обобщенного квазиспина как и в обычном квазиспиновом пространстве. Собственные значения  $H_s$ :

$$E_s(N, v) = \varepsilon N - \frac{G}{4}(N - v)(2\Omega + 2 - N - v) \quad (2.13)$$

согласуется с выводами метода обобщенной сеньерити обычного квазиспина. [10,11]. Волновые функции основного состояния для системы  $N$  четных частиц:

$$\left| s = \frac{\Omega}{2}, s_0, J = 0, M = 0 \right\rangle = K_{n,0}^\Omega (S_+)^n |0\rangle, \quad (2.14)$$

волновые функции возбужденных состояний с  $JM$ :

$$|s, s_0, JM\rangle = K_{n,v}^{\Omega} (S_+)^n |J, J_0 = -J, JM\rangle, \quad (2.15)$$

где  $n = \frac{1}{2}(N - v)$  число спаренных частиц и  $K_{n,v}^{\Omega}$  – нормировочные константы, которые вычисляются из условия нормировки волновых функций.

$$(K_{n,n}^{\Omega})^2 = \{ \langle s, -s, JM | (S_-)^n (S_+)^n | s, -s, JM \rangle \}^{-1}.$$

Хотя, в общем случае  $\alpha_j \neq 1$  оператор  $H_s$  неэрмитов, его собственные значения вещественные, по форме формально совпадают с собственными значениями  $H_s$  в обычном квазиспиновом пространстве. Но все физические величины здесь определяются посредством постоянных  $\alpha_j$ , описывающих вероятности распределения частиц по невырожденным состояниям.

### III. Задача с полным гамильтонианом в представлении обобщенного квазиспина

Рассмотрим многочастичную задачу в пространстве обобщенного квазиспина с произвольным оператором парного взаимодействия. Полный гамильтониан в этом случае удобно разбить на две части, выделив из него спаривательное взаимодействие  $H_s$ , в представлении обобщенного квазиспина:  $H = H_s + W$ , где  $W$  – оператор, выражающий остальную часть взаимодействия частиц, но диагональную в представлении обобщенного квазиспина

$$W = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \langle j_1 j_2 J | V' | j_3 j_4 J \rangle A_+(j_1 j_2 JM) A_-(j_3 j_4 JM) \quad (3.1)$$

Тогда задача на собственные значения полного гамильтониана  $H$ , диагонального в  $s$  – представлении сводится к решению уравнения

$$H |s, s_0, q\rangle = E(n = s + s_0, v = \Omega - 2s, q) |s, s_0, q\rangle. \quad (3.2)$$

Полная энергия системы также делится на две части:

$$E(n, v, q) = E_s(N = 2n + v, v) + E'(n, v, q), \quad (3.3)$$

где  $E_s$  – собственные значения спаривательной части гамильтониана  $H_s$ .

Найдем условия, при которых полный гамильтониан  $H$  будет диагонален в представлении обобщенного квазиспина. Для этого достаточно, чтобы функции (2.15) были собственными функциями оператора  $W$ :

$$W |s, s_0, q\rangle = E'(n, v, q) |s, s_0, q\rangle. \quad (3.4)$$

Это уравнение можно свести к нескольким легко решаемым, независимым от  $n$  уравнениям. Для этой цели рассмотрим коммутатор:

$$[W, S_+] = 2 \sum \langle j_1 j_2 J | V' | j_3 j_4 J \rangle A_+(j_1 j_2 JM) \left\{ \frac{\sqrt{\Omega j_3} \alpha_{j_3} \delta_{JM}^{00}}{\sqrt{2}} - (-)^{J-M} \alpha_{j_3} T_{-M}^J(j_3 j_4) + (-)^{j_3 + j_4 - M} \alpha_{j_4} T_{-M}^J(j_4 j_3) \right\} \quad (3.5)$$

где

$$T_M^J(jj') = (2\sqrt{1 + \delta_{jj'}})^2 \sum_{mm'} (jj'm - m'/JM) c_{jm}^+ \tilde{c}_{j'm'} \quad (3.6)$$

одночастичный оператор, удовлетворяющий соотношениям:

$$[T_M^J(jj'), S_+^j] = 2\delta_{jj'} A_+(jj'JM). \quad (3.7)$$

Этот оператор разрывает пару частиц в состоянии  $S_+|0\rangle$  и переводит их в возбужденное состояние  $A_+(jj'JM)$ . Кроме того введем оператор рождения  $v$  неспаренных частиц с общим угловым моментом  $J$ :

$$Q^+(v, JM)|0\rangle = \sum_j \gamma_j^{v,J} Q^+(j^v JM)|0\rangle. \quad (3.8)$$

Из условия нормировки волновых функций имеем:  $\sum_j (\gamma_j^{v,J})^2 = 1$

Тогда уравнение (3,4) можно переписать в виде:

$$W(S_+)^n Q^+(v, JM)|0\rangle = E'(n, v, J)(S_+)^n Q^+(v, JM)|0\rangle \quad (3.9)$$

Это уравнение будет удовлетворено, если только выполняются равенства:

$$\begin{aligned} [[W, S_+], Q^+(v, JM)] &= \lambda(v, J)S_+ Q^+(v, JM) \\ WQ^+(v, JM)|0\rangle &= E'(0, v, J)Q^+(v, JM)|0\rangle \\ E'(n, v, J) &= E'(0, v, J) + n\lambda(v, J) \end{aligned}$$

В итоге условия диагонализации полного гамильтониана  $H = H_s + W$  в  $s$  – представлении сведется к решению системы уравнений

$$HS_+|0\rangle = E_0 S_+|0\rangle$$

$$[[H, S_+], S_+] = 2G(S_+)^2$$

$$\begin{aligned} HQ^+(v, JM)|0\rangle &= E(v, J)Q^+(v, JM)|0\rangle, \\ [[H, S_+], Q^+(v, JM)] &= (vG + \lambda(v, J))S_+ Q^+(v, JM), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $E_0 = E_s(N = 2, v = 0) = 2\varepsilon - G\Omega$  полная энергия системы определяется равенством (3.3).

Таким образом, решение задачи с полным гамильтонианом  $H$  приводит к снятию вырождения состояний по угловому моменту  $J$  в мультиплетах, характеризующихся квантовым числом обобщенной сеньоритив, положения которых линейно зависят от числа пар  $n$  в системе.

Как было отмечено, квазиспиновый метод позволяет выразить многочастичные матричные элементы через двухчастичные. В частности, важно выразить  $N$  –частичные матричные элементы через матричные элементы частиц с сеньоритив. Существуют редукционные формулы определяющие сложные матричные элементы физических операторов через их выражения зависящие от числа частиц  $n$  и  $v$  [11 – 13]. Для этого операторы  $a_{jm}^+$  и  $\tilde{a}_{jm}$  записываются как компоненты двойного сферического и неприводимого тензора рангов  $\frac{1}{2}$  и  $j$  в пространствах как угловых моментов так и квазиспинов, т.е

$$T_{1/2, m}^{(1/2, j)} = a_{jm}^+ \quad (3.11)$$

$$T_{1/2, m}^{(1/2, j)} = \tilde{a}_{jm}$$

Операторы, состоящие из произведений  $a^+$  и  $a$  можно выразить через введенные двойные тензора  $T$ . Например, для случая  $k$  –четных чисел имеем

$$\begin{aligned} T_{1q}^{(1, k)}(jj) &= A^+(jjkq) \\ T_{-1, q}^{(1, k)}(jj) &= -\left\{ U(jjkq) + \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \delta(k, 0) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$T_{-1q}^{(1, k)}(jj) = \tilde{A}(jjkq)$$

Любой одночастичный оператор  $\sum_i f_i^{(k)}$  пропорционален двойному тензору  $k$  –ранга в обычном и первого ранга в квазиспиновом пространстве  $T^{(1, k)}(jj)$  если он векторный потенциал, а если же он скалярный, то он пропорционален двойному тензору  $T^{(0, k)}(jj)$ . Поэтому, для скалярного одночастичного потенциала пишем:



$$\langle j^n v \alpha J \| \sum_i f_i^{(k)} \| j^n v' \alpha' J \rangle = \delta_{vv'} \langle j^v v \alpha J \| T_{0,q}^{(0,k)} \| j^v v' \alpha' J \rangle,$$

а для векторного потенциала:

$$\langle j^n v \alpha J \| \sum_i f_i^{(k)} \| j^n v' \alpha' J \rangle = \frac{f_{10}(n)}{f_{10}(v)} \langle j^v v \alpha J \| T_0^{(1,k)} \| j^v v' \alpha' J \rangle, \quad (3.13)$$

где  $v' = v, v + 2$ ,  $f_{10}(n) = ((\Omega - v)/2, 1, (n - \Omega)/2, 0 | (\Omega - v)/2, (n - \Omega)/2)$ ,  $f_{10}$  – коэффициент Клебша-Гордона.

Аналогичным путем можно вычислить двухчастичные матричные элементы, используя двойные тензора. Такие формулы записываются для скалярных двухчастичных операторов парного взаимодействия, которые выражаются через двойные тензора в виде:

$$V' = -\sum_J \sqrt{2J+1} G_J \left[ T_{(JJ)}^{(1,J)} \times T_{(JJ)}^{(1,J)} \right]_{00}^{(\lambda,0)} (111 - 1 | \lambda 0),$$

где  $G_J = \langle j^2 J | V | j^2 J \rangle$ ,  $\lambda = 0, 1, 2$  – определяют ранги тензоров в  $s$  – пространстве.

Диагональные по сеньоритивматричные элементы этого оператора равны:

$$\langle j^n v \alpha J | V | j^n v \alpha' J \rangle = \langle j^n v \alpha J | T_0^{(0)} | j^n v \alpha' J \rangle + \frac{f_2(n)}{f_2(v)} \langle j^n v \alpha J | T_0^{(2)} | j^n v \alpha' J \rangle - (n - \Omega) F_0, \quad (3.14)$$

где  $f_2(n) = ((\Omega - v)/2, 2, (n - \Omega)/2, 0 | (\Omega - v)/2, (n - \Omega)/2)$  – коэффициент Клебша-Гордона и  $F_0 = \frac{1}{2\Omega} \sum_J (2J + 1) G_J$ .

Оператор мультиполь-мультипольного взаимодействия часто записывается в феноменологической форме:

$$V_\lambda = (2\lambda + 1) K^\lambda \sum_{i < j} (U_i^{(\lambda)} \cdot U_j^{(\lambda)}) \quad (3.15)$$

в которой  $K^\lambda = const$  и  $U_i^{(\lambda)}$  – единичный сферический тензор. Если число  $\lambda$  нечетно, то  $V_\lambda$  – квазиспиновый скаляр, поэтому, он выразится через  $T^{(0,\lambda)}$ :

$$V_\lambda^{неч} = \frac{1}{2} (2\lambda + 1)^{-3/2} \cdot K^\lambda \cdot (-)^\lambda \left[ T^{(0,\lambda)} \times T^{(0,\lambda)} \right]^{(0,0)} - \frac{N}{4\Omega} K^\lambda (2\lambda + 1)$$

Тогда матричный элемент этого оператора легко выразится линейно по квантовому числу  $n$ :

$$\langle j^n v \alpha J | V^{неч} | j^n v \alpha' J \rangle = \delta_{vv'} \left[ \frac{1}{2} (n - v) G_0 \delta_{\alpha\alpha'} + \langle j^v v \alpha J | V^{неч} | j^v v \alpha' J \rangle \right] \quad (3.16)$$

В случае четного  $\lambda$  оператор мультипольного взаимодействия содержит квазиспиновые скалярные и тензорные части:

$$V_\lambda^{чет} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda \neq 0} K^\lambda (-)^\lambda \left[ T^{(1,\lambda)} \times T^{(1,\lambda)} \right]^{(0,0)} - \frac{N}{4\Omega} \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) K^\lambda \quad (3.17)$$

Потенциал парного нуклон-нуклонного взаимодействия выбран в простейшем виде:

$$V(1,2) = (U_\omega + U_s \pi_s + U_\tau S_{12}) f(r, r_0) + U_c, \quad (3.18)$$

в котором  $U_\omega, U_s, U_\tau$  – параметры Вигнеровских, синглерных и тензорных сил,  $\pi_s$  и  $S_{12}$  – операторы синглерного и тензорного проектирования;  $f(r, r_0)$  – радиальная зависимость ядерных сил, выбранная в виде потенциала Гаусса,  $U_c$  – Кулоновский потенциал. Парный потенциал нуклонных взаимодействий состоит из трех частей:  $V = V_{pp} + V_{nn} + V_{np}$ , взаимодействия одноименных нуклонов и нейтрон-протонной части.

#### IV. Применение метода к изучению структуры четных изотопов неодима $^{132-138}\text{Nd}$ и обсуждение результатов исследований.

Метод применим к четным изотопам  $^{132-138}\text{Nd}$ . Эти ядра интерпретированы в МВБ [11]. В нашем подходе в качестве одночастичных энергии взяты нижние состояния ядер  $^{133}_{51}\text{Sb}$ ,  $^{131}_{50}\text{Sn}$  взяты из [11], которые даны в Таблице-1.

Таблица 1 - Одночастичные (дырочные) энергии протонов и нейтронов в ядрах  $^{133}_{51}\text{Sb}$ ,  $^{131}_{50}\text{Sn}$

$\varepsilon_p(\text{МэВ})$	$g_{7/2}$	$d_{5/2}$	$d_{3/2}$	$h_{11/2}$	$s_{1/2}$
	0	0.96	2.69	2.76	2.99
$\varepsilon_n(\text{МэВ})$	$d_{3/2}$	$h_{11/2}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	$g_{7/2}$
	0	0.24	0.33	1.66	2.34

Парные взаимодействия нуклонов можно определить из описания спектров возбуждения изотопов изучаемых ядер  $Nd$ . Хотя одначастичные и  $V_{pp}$  глубины энергии с изменением масс изотопов должны были медленно изменяться но они не должны отличаться друг от друга на много. В данной работе мы их выбираем равными:  $U_{\omega}^p = 26 \text{ МэВ}$ ,  $U_s^p = 18 \text{ МэВ}$ . Величину тензорного взаимодействия считали пренебрежимо малыми по сравнению  $cU_{\omega}$  и  $U_s$ .

Параметры  $pn$  и  $np$  взаимодействия даны в Таблице-2.

Таблица 2 - Параметры  $V_{nn}$  и  $V_{np}$  для изотопов  $Nd(\text{МэВ})$

	$U_{\omega}^n$	$U_s^n$	$U_{\omega}^{np}$	$U_s^{np}$
$^{138}\text{Nd}$	-24	-18	-32	-20
$^{136}\text{Nd}$	-22	-16	-30	-18
$^{134}\text{Nd}$	-21	-13	-27	-15
$^{132}\text{Nd}$	-18	-12	-23	-13

Эти величины близки к значениям соответствующих параметров потенциала для тяжелых ядер, полученным в более ранних работах [15,16]. Как видно, эти параметры меняются с изменением числа нейтронов монотонно и медленно. Кроме того,  $V_{pp} > V_{nn}$  для всех изотопов. Это связано с тем, что одно-частичные энергии расщепляются для протонов несколько больше чем для нейтронных дырок. Таблица показывает, что глубина нейтрон-протонного взаимодействия также несколько больше для всех изотопов и она также медленно уменьшается с уменьшением числа нейтронов.

Таблица 3 - Спектры изотопов  $Nd(\text{МэВ})$ . Экспериментальные значения взяты из [17]

$J^{\pi}$	Ядра	$^{132}\text{Nd}$		$^{134}\text{Nd}$		$^{136}\text{Nd}$		$^{138}\text{Nd}$	
		Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.
$0_1^+$		0	0	0	0	0	0	0	0
$2_1^+$		0.21	0.22	0.25	0.27	0.37	0.38	0,52	0,54
$4_1^+$		0.61	0.63	0.79	0.81	0.98	1.01	1,24	1,25
$6_1^+$		1.13	1.16	1.42	1.44	1.75	1.78	2,13	2,16
$8_1^+$		1.71	1.76	2.13	2.19	2.63	2.71	3,14	3,16
$10_1^+$		2.31	2.37	2.82	2.91	3.55	3.61	-	4,09
$2_2^+$		0.82	0.85	0.75	0.81	0.86	0.89	1,01	1,13
$3_1^+$		1.12	1.16	1.09	1.17	1.23	1.29	1,45	1,58
$4_2^+$		1.39	1.45	1.31	1.42	1.54	1.62	1,84	2,01
$5_1^+$		-	2.06	-	2.08	2.05	2.18	-	2,31
$6_2^+$		-	2.7	1.91	2.78	2.44	2.55	-	2,71
$8_2^+$		-	3.3	2.47	3.37	-	3.41	-	3,99
$10_2^+$		-	3.9	3.05	3.93	-	4.05	-	4,45

Используя полученные величины из первого уравнения равенств (3.10) можно определить энергии связи основных состояний ядер и установить структуру оператора  $S_+$ . Результаты расчетов показывают неплохое согласие вычисленных величин с экспериментальными их значениями. Вычисленный и экспериментальный спектр ядер  $^{132-138}\text{Nd}$  приведены в Таблице-3. Экспериментальные значения энергии уровней взяты из справочника [17]. Экспериментальные и теоретические значения энергий состояний в общем неплохо согласуются между собой. Особенно, как видно, хорошо для состояний ираст полосы. Но для  $\beta$  и  $\gamma$  –полос наблюдаются некоторые расхождения. Эти расхождения растут для более высоко расположенных уровней. Это объясняется

не только выбором интенсивности  $pp, pn, np$  – взаимодействий, но и также, повидимому, ограниченным учетом только  $S$  и  $D$  пар в вычислениях. Кроме того, мы полностью исключили из рассмотрения вклад тензорной части парного взаимодействия.

Таблица-4. Вероятности переходов между ираст-состояниями

$J_i^\pi \rightarrow J_f^\pi$	$^{132}\text{Nd}$		$^{134}\text{Nd}$		$^{136}\text{Nd}$		$^{138}\text{Nd}$	
	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.
$2_1 \rightarrow 0_1$	$0.46 \pm 0.4$	0.39	$0.24 \pm 0.02$	0.22	-	0.2	-	0.18
$4_1 \rightarrow 2_1$	$0.47 \pm 0.2$	0.51	$> 0.54$	0.55	-	0.47	-	0.35
$6_1 \rightarrow 4_1$	$0.33 \pm 0.04$	0.41	$0.11 \pm 0.02$	0.15	-	0.22	-	0.16
$8_1 \rightarrow 4_1$	$0.23 \pm 0.03$	0.29	$0.10 \pm 0.02$	0.14	-	0.18	-	0.13
$10_1 \rightarrow 8_1$	$> 93$	0.18	-	0.11	-	0.14	-	0.11

Используя полученные волновые функции состояний вычислены приведенные вероятности  $E2$  – переходов между уровнями ираст-полосы, а также отношения переходов вероятностей между различными состояниями. Результаты вычислений и их экспериментальные значения приведены в таблицах 4 и 5, соответственно. Эти величины вероятностей вычислены в приближении когда одночастичные радиальные интегралы заменены выражением  $3R^\lambda/(\lambda + 3)$ , что соответствует волновой функции, постоянной внутри ядра радиусом  $R$  и равной нулю вне его.

Таблица 5 - Отношения вероятностей переходов в изотопах  $Nd$ 

Ядра $\frac{J_i - J_f}{J'_i - J'_f}$	$^{132}\text{Nd}$		$^{134}\text{Nd}$		$^{136}\text{Nd}$		$^{138}\text{Nd}$	
	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.	Эксп.	Теор.
$6_1 \rightarrow 4_1/4_1 \rightarrow 2_1$	-	0.52	-	0.36	$\sim 0.18$	0.22	-	0.16
$8_1 \rightarrow 6_1/6_1 \rightarrow 4_1$	-	0.91	-	0.97	$\sim 1$	1.2	-	1.1
$2_2 \rightarrow 2_1/2_2 \rightarrow 0_1$	-	26	-	22	$16 \pm 1$	24	91	47
$3_1 \rightarrow 4_1/3_1 \rightarrow 2_1$	-	19	-	17	$10 \pm 2$	16	-	29
$3_1 \rightarrow 2_2/3_1 \rightarrow 2_1$	-	17	-	14	$20 \pm 2$	24	125	93
$8_2 \rightarrow 6_2/8_2 \rightarrow 6_1$	-	22	$25 \pm 3$	28	-	31	-	42
$5_1 \rightarrow 4_2/5_1 \rightarrow 4_1$	-	19	-	18	$13 \pm 4$	16	-	26
$5_1 \rightarrow 4_2/5_1 \rightarrow 3_1$	-	0.94	-	0.86	$0.51 \pm 0.15$	0.94	-	1.04

Из таблиц видно, что удовлетворительное согласие между вычисленными и опытными значениями указанных величин находятся в пределах  $70 \div 75\%$ . Как видно из таблицы-5, отношения вероятностей переходов внутри одинаковых полос (ираст,  $\beta u \gamma$ ) находятся в пределах одного порядка, тогда как они между уровнями разных полос различаются в два порядка. Таковыми являются, например отношения  $3_1 \rightarrow 4_1/3_1 \rightarrow 2_1$ ,  $8_2 \rightarrow 6_2/8_2 \rightarrow 6_1$ ,  $5_1 \rightarrow 4_2/5_1 \rightarrow 4_1$ . Такие простые расчеты хорошо передают резкое падение  $B(E2)$  от ядра к ядру, что является следствием конфигурационных смешиваний волновых функций с малыми компонентами.

#### V. Заключение

Предложено относительно простое, в то же время детальное микроскопическое вычисление параметров МВБ на основе обобщенного квазиспинового формализма, в котором учитывается модельное  $SD$  – парное оболочечное пространство. Теория вполне удовлетворительно описывает нижние коллективные состояния ядер среднего и тяжелого атомных весов. В частности, теория приложена к изучению структуры и свойств четных изотопов неодима  $Nd$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Arima A., Iachello F. Interacting boson model of collective states I. Ann. Phys. 1976, v. 99, p. 253-317. II. Ann. Phys. 1978, v. 111, p. 201-238, III. Ann. Phys. 1978, v. 115, p. 325-366.

- [2] Бактыбаев К. Описание коллективных возбуждений ядер в модели взаимодействующих бозонов. ЯФ., 1979. т.30, вып.4(10), стр.963-973
- [3] Scholten O. Microscopic calculation for the interacting boson model. Phys. Rev. C 28.1783-1790.
- [4] Y-A Luo, F.Pan.Ch.Bahri, J.P.Drayer-Phys.Rev.C 71044304(2005).SD-Pair shall model and the interacting boson model.
- [5] K.Baktybayev,A.Dalelkhankyzy, K.Ramankulov,N.koilyk- Adv.Studies Theor.phys.,Vol.8, 2014,no.10,475-484.Description of Collective States of  $^{102,104,106,108,110}Pd$  Isotopes in Nucleon-pair Shell Model.
- [6] K.Baktybayev,A.Dalelkhankyzy and N.koilyk-Advanced Studies in Theoretical Physics, Vol.9, 2015,no.10,483-493.The Scattering Processes  $^3He$  on Spherical Nuclei  $^{28,30,32}Si$  and the Strong Coupling Method Channels.
- [7] K.Baktybayev,A.Dalelkhankyzy, K.Ramankulov,N.koilyk -Advanced Studies in Theoretical Physics, Vol.7, 2013,no.12,595-603.The Nucleon-Pair Shell Description of the Collective Excitations of Spherical Nuclei.
- [8] Y.M.Zhao,N.Yoshinagaet.all-Nucleon-pair approximation of the shell model: Unified formalism for both odd and even systems, Phys.Rev.C.v.62.014304
- [9] Y.A.Luo,I.Q.Chen // Shell model calculation in the SD- subspace.Phys.Rev.C58(1998).p.589-592
- [10] Talmi I.-On a group-theoretical treatment of generalized seniority.Phys.Lett.55 B.p.255(1975)
- [11] Бактыбаев К., Абельдина Ж.К.-формализм обобщенного квазиспина в теории ядра. Изв.АН СССР, сер.физ.1979,т.43.стр.296-312.
- [12] Lowson.R.D.,Macfarlane M.H.-The quasi-spin formalism and the dependence of nuclear matrix elements on particles number.Nucl.Phys.1965,v.66,p.80.
- [13] Ichimura M., Arima A.-Quasi-spin formalism and matrix elements in the shell model.Progr.Theor.Phys.1966,v.36,p.296-312.
- [14] Luo I.A.,J-Q.Chen,J.P.Drayer-Nucleon-pair shall model calculation of the even-even  $Xe$  and  $Ba$  nuclei, Nucl.Phys.2000. A 669, p.101-118.
- [15] Слив Л.А. Новые данные по исследованию около магических ядер-Изв.АН СССР, 1972, сер.физ.т.36,стр.2026.
- [16] Исаков В.И.,Харитонов Ю.И.-Матричные элементы парного взаимодействия в ядрах.Препринт ЛИЯФ,1973, №47.
- [17] Бегжанов Р.Б. и др. Справочник по ядерной физике, 1989,книга 1.
- [18] Lederer C.M., Shirley V.S. Table of isotopes 7<sup>th</sup> ed. N.Y.1978.

Қ. Бактыбаев<sup>1</sup>, М.К. Бактыбаев,<sup>2</sup> Д.Д Наукенов<sup>2</sup>, А. Далелханкызы<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup>Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық Зерттеу Техникалық Университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup>Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

### ӨЗАРА ӘРЕКЕТТЕСУШІ БОЗОНДАР МОДЕЛІНІҢ МИКРОСКОПТЫҚ НЕГІЗДЕМЕСІ ЖӘНЕ ЯДРОЛЫҚ ТЕОРИЯДАҒЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН КВАЗИСПИНДІК ФОРМАЛИЗМ

**Аннотация:** жалпыланған квазиспин формализм негізінде әсерлесуші бозондар моделінің параметрлерін микроскоптық фермиондық жолмен оңай есептеу әдісі жасалған. Әдіс  $^{132-138}Nd$  ядролар изотоптарының коллективтік күйлерінің құрылысын зерттеуге қолданылған. Ядролардың спектрлерімен олардағы электромагниттік ауысулар ықтималдығы есептелген және олар эксперименттегі мәндерімен салыстырылған.

**Тірек сөздер:** атом ядросы, нуклондар, энергиялар, операторлар, толқындық функция, ауысым ықтималдығы.

#### Сведения об авторах:

Бактыбаев К.Б. - д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, пр. аль-Фараби 71, Алматы, Казахстан,+77714573147 ;

Бактыбаев М.К. - к.ф.-м.н.,ассоц.профессор, Казахский национальный исследовательский технический университет им.К.И.Сатпаева, пр. Сатпаева 22, Алматы, Казахстан

Наукенов Д.Д. - магистр, ассистент,Казахский национальный исследовательский технический университет им.К.И.Сатпаева, пр. Сатпаева 22, Алматы, Казахстан, e-mail: [darmen.naukenov@mail.ru](mailto:darmen.naukenov@mail.ru)

Далелханкызы А. - phd докторант, Алматинский университет энергетика и связи, Алматы, Казахстан,e-mail:[dalelkhankyzy.d@gmail.com](mailto:dalelkhankyzy.d@gmail.com)

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 101 – 111

UDC 517.977

**K.B.Bapayev<sup>1</sup>, S.S.Slamzhanova<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Institute of Mathematics and Mathematical Modeling<sup>2</sup>Zhetysu State University named after I.Zhansugurov[v\\_gulmira@mail.ru](mailto:v_gulmira@mail.ru), [beksultan.82@mail.ru](mailto:beksultan.82@mail.ru)**ON STABILITY OF DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS**

**Abstract.** The evolution of the system in time is usually represented in the form of a trajectory in the corresponding phase space. As a rule trajectories are continuous. However their observation is possible only at certain time intervals which is the basis for the discreteness of information.

Another reason for the discreteness of the evolution of the system is the need to use digital computer technology which requires the construction of algorithms to resolve the corresponding dependencies. The study of such models is associated with the knowledge of the qualitative aspects of their development. When the discreteness in the system is generated by the above reason obtained by recurrence relations the systems are called "difference-dynamic systems".

Models of evolution of the difference-dynamical systems are sequences. These sequences are subject to the dependences called recurrence equations. All the tasks of the difference-dynamical systems are presented: as a problem related to the properties of the solution of recurrence equations; or as a problem related to the properties of mappings in Euclidean or other spaces.

Every fact formulated according to the first method can be formulated according to the second method, and vice versa. Therefore when the solutions of nonlinear difference-dynamical systems are investigated people try to do similar methods for investigating the corresponding problem of a system of differential and algebraic equations.

In this work the various types of stability definitions are introduced to investigate the qualitative property of solutions of the difference-dynamical systems. Using the analogy of the Lyapunov second method the conditions under which the difference-dynamical systems solutions are asymptotically stable in general, exponentially stable, Lagrange-stable. And the difference-dynamical system is convergent.

**Keywords:** Asymptotic stability in general, exponential stability, Lagrangian stability, convergence.

УДК517.977

**К.Б.Бапаев, С.С.Сламжанова**

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

Жетысуский государственный университет имени И.Жансугурова

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО –  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Аннотация.** Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве. Как правило, траектории являются непрерывными часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информации.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по сказанной причине, полученной рекуррентными соотношениями, системы называются «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемым рекуррентными уравнениями.

По этой причине все задачи РДС представляются как проблема относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений; или как проблема относящаяся к свойствам отображений в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений.

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости (поскольку устойчивость является первичным качеством любой системы) и с помощью аналогии второго метода Ляпунова устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивыми в целом, экспоненциально устойчивыми, устойчивыми по Лагранжу и РДС является конвергентной.

**Ключевые слова:** Асимптотическая устойчивость в целом, экспоненциальная устойчивость, устойчивость по Лагранжу, конвергентность.

**Введение.** Во многих научных дисциплинах и их приложениях в последнее время все в большей степени можно заметить стремление замены описания системы в данный момент времени на исследование ее развития во времени. Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве. Как правило, траектории являются непрерывными часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информации.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по второй причине, полученной рекуррентными соотношениями, системы называются «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции рассматриваемых РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемыми рекуррентными уравнениями.

Поэтому, рассматривая модель РДС, удобно говорить просто о свойствах соответствующего рекуррентного уравнения.

По этой причине все задачи представляются:

- 1) как проблема относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений;
- 2) как проблема относящаяся к свойствам отображений в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот.

В теории РДС используются оба способа, однако в случае линейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах рекуррентных уравнений, а в случае нелинейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах отображений. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС обычно стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений [1,4-9,16-18,20].

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости (поскольку устойчивость является первичным качеством любой системы), использованные для системы дифференциальных уравнений [1,4-8] и с помощью аналогии второго метода Ляпунова [2,3,11,13,14] устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивыми в целом, экспоненциально устойчивыми, устойчивыми по Лагранжу и РДС является конвергентной [1,4-10,15, 16-20].

#### **Асимптотическая устойчивость в целом**

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = X(n, x_n) \quad (X(n, 0)) = 0, \quad (1)$$

где  $X(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$ ,

где  $Z^+$  - множество неотрицательных целых чисел,  $R^k - k$  - мерные евклидовы пространства.

**Определение 1.** Говорят, что нулевое решение  $x_n = 0$  РДС (1) асимптотически устойчиво в целом, если

- 1) оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и
- 2) для каждого решения  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0}) (\forall n_0 \in Z^+)$  выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (2)$$

(т.е. область притяжения представляет собой все пространство  $R^k$ ).

**Определение 2.** Будем говорить, что

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$$

допускает бесконечно большой нижний предел при  $x_n \rightarrow \infty$ , если

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} V(n, x_n) = \infty \quad (3)$$

т.е. для любого  $M > 0$  существует  $R = R(M)$  такое, что

$$|V(n, x_n)| > M \text{ при } n \in Z^+ \text{ и } \|x_n\| \geq R.$$

**Определение 3.** Будем говорить, что

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$$

допускает в  $R^k$  сильный бесконечно малый высший предел при  $x_n \rightarrow 0$ , если существует функция

$$U(x_n) \in C(R^k)$$

такая, что

$$|V(n, x_n)| \leq U(x_n) \quad (4)$$

при

$$(n, x_n) \in Z^+ \times R^k \text{ и } U(0) = 0.$$

**Теорема 1.** Если для РДС (1) существует положительно определенная функция

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k),$$

допускающая в  $R^k$  сильный бесконечно малый высший предел при  $x_n \rightarrow 0$  и бесконечно большой нижний предел при  $x_n \rightarrow \infty$ , причем первые разности  $\Delta V(n, x_n)$ , взятые в силу РДС(1) отрицательно определены в  $R^k$ , то тривиальное решение  $x_n = 0$  (1) асимптотически устойчиво в целом.

**Доказательство.** Так как условия этой теоремы, очевидно, включают условия первой теоремы Ляпунова [2], т.е. нулевое решение  $x_n = 0$  устойчиво по Ляпунову.

Пусть  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$  - решение РДС(1), определяемое начальными условиями

$$x_n = x(n; n_0, x_{n_0}) = x_{n_0} \neq 0$$

при  $\forall n_0 \in Z^+$  и  $\forall x_{n_0} \in R^k$ .

Обозначим через  $D_{x_n}$  - некоторый компакт содержащий точку  $x_n$

$$x_{n_0} \in D_{x_n} \subset R^k$$

и пусть  $M = \sup V(n, x_n)$  на  $Z^+ \times D_{x_n}$ .

В силу неравенства (4) имеем  $M < +\infty$

Так как функция  $V(n, x_n)$  обладает в  $R^k$  бесконечно большим пределом при  $x_n \rightarrow \infty$ , то существует шар  $S\{\|x_n\| < R\} \supset D_{x_n}$  такой, что

$$V(n, x_n) > M$$

при

$$\|x_n\| \geq R. \quad (5)$$

По условию теоремы вдоль траектории  $x(n; n_0, x_{n_0})$  выполнено неравенство  $\Delta V_n < 0$ , поэтому при  $n \geq n_0$  имеем

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n_0, x_{n_0}) \leq M$$

и следовательно

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| < R,$$

т.е. все решения РДС (1) ограничены.

Покажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) = 0.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $\delta > 0$  такова, что функция  $U(x_n)$ , определяемая неравенством (4), удовлетворяет условию

$$0 \leq U(x_n) < \varepsilon$$

При

$$\|x_n\| < \delta. \quad (6)$$

Покажем, что решение  $x(n; n_0, x_{n_0})$  при  $n \rightarrow \infty$  обязательно войдет внутри замкнутого шара  $\|x_n\| \leq \delta$ .

Действительно, предположим обратно, т.е.

$$0 < \delta < \|x_n\| < R$$

при  $n \geq n_0$ .

Тогда  $\Delta V_n$  будет отрицательно определенной, имеет в области

$$Z^+ \times \{\delta \leq \|x_n\| < R\}$$

отрицательную верхнюю грань -  $m$  ( $m > 0$ ) и, значит, при  $n \geq n_0$  справедливо неравенство

$$\Delta V_n \leq -m.$$

Суммируя это неравенство в пределах от  $n_0$  до  $n$  получим

$$V(n, x_n) \leq V(n_0, x_{n_0}) - m(n - n_0) < 0.$$

Если только



$$n > \left[ n_0 + \frac{V(n, x_{n_0})}{m} \right],$$

(где  $[ \ ]$  -целые части), что противоречит положительности функции  $V(n, x_n)$ . Следовательно, существует момент  $n_1 > n_0$  такой, что

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| \leq \delta$$

т.е.

$$U(x(n; n_0, x_{n_0})) < \varepsilon$$

Отсюда ввиду монотонности убывания функции

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0}))$$

при  $n > n_1$ , будем иметь

$$V(n, x_n) < V(n_1, x_{n_1}) \leq U(x_{n_1}) < \varepsilon$$

и таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n; x_{n_0}) = 0. \quad (7)$$

Из последнего равенства выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n; n_0, x_{n_0}) = 0.$$

Так как в противном случае существовала бы последовательность

$$x(n_l; n_0, x_{n_0}) \quad (l = 1, 2, \dots; n_l \rightarrow \infty)$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n_l; x_{n_l}) \neq 0.$$

Это противоречило бы равенству (7). Теорема доказана.

#### Экспоненциальная устойчивость

**Определение 4.** Нулевое решение РДС (1) называется экспоненциально устойчивым при  $n \rightarrow \infty$ , если для каждого решения  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$  в некоторой области

$$D_{x_n} = Z^+ \times \{x_n \in R^k / \|x_n\| < h < H\}$$

(где  $h$  и  $H$  - некоторые постоянные) справедливо неравенство

$$\|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}, \quad n \geq n_0, \quad (8)$$

где  $L$  и  $\alpha$  - положительные постоянные, не зависящие от выбора решения  $x_n$ . Из определения видно, что из экспоненциальной устойчивости нулевого решения  $x_n = 0$  следует его асимптотическая устойчивость. Действительно, полагая

$$\|x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{L} = \delta,$$

где  $0 < \varepsilon$  - сколь угодно малое произвольное постоянное.

Из неравенства (8) имеем

$$\|x_n\| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq n_0,$$

т.е. решение  $x_n = 0$  устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, очевидно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

если только  $\|x_{n_0}\| < h$ .

Если неравенство (8) справедливо для всех точек  $x_{n_0} \in R^k$ , то имеет место асимптотическая устойчивость в целом.

**Теорема 2.** Если нулевое решение однородной линейной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{9}$$

с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчиво при  $n \rightarrow \infty$ , то эта РДС экспоненциально устойчива, т.е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство:** Как известно [2] нулевое решение РДС (9) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы  $A$  по модулю меньше единицы, т.е.

$$|\lambda_\rho(A)| < 1 \quad (\rho = 1, 2, \dots, k).$$

Положим

$$\max_\rho |\lambda_\rho(A)| < e^{-\alpha} < 1,$$

где  $\alpha > 0$ .

Тогда при  $n \in Z^+$  получим

$$|A^n| \leq L e^{-\alpha n}, \tag{10}$$

где  $L$  - некоторая положительная постоянная. Из РДС (9) для любого решения  $x_n$  находим

$$x_n = A^{n-n_0} x_{n_0},$$

где начальный момент  $n_0$  произволен. Следовательно, на основании (10) при  $n_0 < n$  получаем

$$\|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}.$$

Отсюда для любого решения  $y_n$  РДС (9) учитывая, что разность  $x_n - y_n$  есть решение этой РДС при  $n_0 \leq n$  будем иметь

$$\|x_n - y_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0} - y_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}.$$

Что и требовалось доказать.

**Замечание.** Для нестационарной линейной РДС из асимптотической устойчивости ее нулевого решения вообще говоря не следует экспоненциальная устойчивость [3].

**Теорема 3.** Если существует положительно – определенная квадратичная форма

$$V(x_n) = x_n' A x_n \tag{11}$$

( $'$  - знак транспонированная) первой разности которой  $\Delta V_n$  в силу РДС (1) удовлетворяет неравенству

$$\Delta V_n \leq W(x_n), \tag{12}$$

$$(n_0 < n; \|x_n\| \leq h < H),$$

где

$$W(x_n) = x_n' B x_n \tag{13}$$

отрицательно определенная квадратичная форма ( $A$  и  $B$  - постоянные симметрические матрицы),

то нулевое решение РДС (1) экспоненциально устойчиво при  $n \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство:** На основании формул (11) и (13) получаем:

$$a_1(x_n; x_n) \leq V_n \leq a_2(x_n; x_n)$$

и

$$b_1(x_n; x_n) \leq -W \leq b_2(x_n; x_n)$$

где

$$a_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(A), \quad a_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(A)$$

и соответственно

$$b_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(B), \quad b_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(B).$$

Причем  $0 < a_1 \leq a_2$  и  $0 < a_1 \leq a_2$ .

Отсюда на основании неравенства (12) выводим

$$\Delta V_n \leq -b_1(x_n; x_n) \leq -\frac{b_1}{a_2} V(x_n).$$

Суммируя это неравенство, будем иметь при  $n_0 < n$

$$V(x_n) \leq V(x_{n_0}) e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

где  $n_0 \leq n$  - находим

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{1}{a_1} V(x_n) \leq \frac{a_2}{a_1} \|x_{n_0}\|^2 e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

т.е. при  $n_0 < n$

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{a_1} \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)},$$

где  $S = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$  и  $\|x_{n_0}\|$  - достаточно мала.

#### Устойчивость по Лагранжу

**Определение 5.** РДС (1) называется устойчивой по Лагранжу, если

- 1) каждое решение  $x(n; n_0, x_{n_0})$ , где  $n_0 \in Z^+$  существует для всех  $n \in Z^+$ ;
- 2)  $\|x_{n_0}\|$  - ограничена на  $Z^+$ .

Используя функции Ляпунова, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости РДС (1) по Лагранжу.

**Теорема 4.** Для того, чтобы РДС (1) была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в  $Z^+ \times R^k$  существовала функция  $V(n, x_n)$  такая что

- 1)  $V(n, x_n) \geq W(x_n)$  где  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} W(x_n) = \infty$ ;
- 2) для каждого решения  $x_n$  функция была невозрастающей относительно  $n \in Z^+$ .

#### Доказательство.

*Достаточность:* Пусть для РДС (1) существует функция  $V(n, x_n)$  обладающая свойствами 1) и 2).

Для всякого решения РДС (1)

$$x(n; n_0, x_{n_0}) \quad (n_0 \in Z^+; \|x_{n_0}\| < \infty)$$

в силу условия 2) при  $n \geq n_0$  имеем

$$V(n, x_n) \leq V(n_0, x_{n_0}).$$

Отсюда на основании 1) получаем

$$W(x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n_0, x_{n_0}) \quad (14)$$

при  $n \geq n_0$ .

Из последнего неравенства следует, что решение  $x(n; n_0, x_{n_0})$  ограничено.

Действительно, если это не так, то нашлась бы последовательность моментов  $n_l \rightarrow \infty$  ( $l = 1, 2, \dots; n_l > n_0$ ) такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l}\| = \infty$$

и следовательно  $\lim_{l \rightarrow \infty} W(x_{n_l}) = \infty$ .

Это противоречило бы неравенству (14), что невозможно.

*Необходимость:* Пусть любое решение  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$  РДС (1) существует и ограничено в  $Z^+$ .

Положим

$$V(n, x_n) = \sup_{v>0} \|x_{n+v}\| = \sup_{v>0} \|x(n+v; n, x_n)\|^2, \quad (15)$$

где

$$\|x_n\| < \infty, \quad n > n_0 \in Z^+,$$

из формулы (15) имеем

$$V_n \geq \|x(n+v; n, x_n)\|^2 = \|x_n\|^2 = W(x_n)$$

Причем, очевидно

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} W(x_n) = \infty$$

т.е. условие 1) выполнено.

Далее, при  $n_0 < n_1 < n_2$ , учитывая, что в силу свойства единственности решения  $x_n = x(n; n_2; x_{n_2})$  является продолжением решения  $x_n = x(n; n_1; x_{n_1})$ , получаем

$$\begin{aligned} V(n; x_{n_1}) &= \sup_{v>0} \|x(n_1+v; n_1; x(n_1; n_0; x_{n_0}))\|^2 \geq \\ &\geq \sup_{v \geq 0} \|x(n_2+v; n_2; x(n_2; n_0; x_{n_0}))\|^2 = V(n_2; x(n_2; n_0; x_{n_0})). \end{aligned}$$

Таким образом, условия 2) так же выполнено. Т.е. теорема полностью доказана.

### РДС с конвергенцией

**Определение 5.** Будем говорить, что РДС (1) обладает свойством конвергенции, если:

1) все решения  $x(n_2; n_0; x_{n_0})$  определены при

$$\forall n \in Z_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, \infty\};$$

2) существует единственное решение  $r_n$  определенное и ограниченное на  $Z$  т.е.

$$\sup \|r_n\| < \infty;$$

3) решение  $r_n$  асимптотически устойчиво в целом при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. для любого  $x(n_2; n_0; x_{n_0})$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x(n; n_0; x_{n_0}) - r_n] = 0.$$

Можно сказать, что в некотором смысле  $r_n$  является предельным режимом [7] РДС (1).

Очевидно, если РДС (1) обладает свойством конвергенции, то все ее решения  $x(n_2; n_0; x_{n_0})$  предельно ограничены при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. существует положительное число  $R$  такое, что

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| < R \text{ при } n \gg n_0$$

В частности, например, можно принять:

$$R = \sup_{n \in Z} \|r_n\| + 1$$

**Замечание.** Если правая часть  $X(n; x_n)$  конвергентной РДС (1)  $\bar{N}$ -периодична по  $n$  где ( $\bar{N} \in N$ -множества натуральных чисел), то ограниченное решение  $r_n$  также  $\bar{N}$ -периодична по  $n$ .

Действительно, пусть

$$X(n + \bar{N}; x_n) = X(n; x_n).$$

Рассмотрим вектор-функцию  $r(n + \bar{N})$  имеем  $r(n + \bar{N} + 1) = X(n + \bar{N}; x_{n + \bar{N}})$ . Таким образом,  $r(n + \bar{N})$  также является решением РДС (1) и притом ограниченным на  $Z$ . А так как РДС с конвергенцией обладает единственным ограниченным на  $Z$  решением то

$$r(n + \bar{N}) = r(n).$$

т.е.  $r_n$  есть  $\bar{N}$  периодическое решение РДС (1).

**Теорема 5.** Пусть  $x_{n+1} = Ax_n + f(n)$ , (16)

где  $A$ -постоянная  $k \times k$  матрица и  $(k \times 1)$  столбца  $f(n) \in C(Z_+)$ .

Если

1) все собственные числа  $\lambda_j(A)$ -матрицы  $A$  по модулю меньше единицы т.е.

$$|\lambda_j(A)| < 1; \quad j = \bar{1}, k; \quad (17)$$

2)  $\sup_{n \in Z} \|f(n)\| = \beta < \infty$ ,

то РДС (16) обладает свойством конвергенции, причем

$$r(n) = \sum_{j=-\infty}^n A^{n-j} f(j-1) \quad (18)$$

представляет собой единственное ограниченное на  $Z_+$  решение РДС (16).

**Доказательство.** Из условия (17) имеет

$$\|A^n\| \leq \gamma \cdot e^{-\alpha n}$$

при  $n \geq 0$ , где  $\gamma > 0$  и  $0 < \alpha < -\max_j \ln |\lambda_j|$ .

Отсюда  $\|r_n\| \leq \gamma \sum_{j=-\infty}^n e^{-\alpha(n-j)} \|f(j-1)\| \leq \beta \gamma e^{-\alpha n} \cdot \frac{e^{\alpha n}}{\alpha} = \frac{\beta \gamma}{\alpha} < \infty$

следовательно, сумма (18) сходится и функция  $r(n)$  ограничена, причем

$$\sup_{n \in Z} \|r_n\| \leq \frac{\lambda}{\alpha} \sup_{n \in Z} \|f(n)\|,$$

варьируя функцию (18) по  $n$ , получим

$$r(n+1) = f(n) + A \sum_{j=-\infty}^n A^{n-j} f(j-1) = f(n) + Ar(n)$$

и таким образом,  $r(n)$  является решением РДС (16).

То, что ограниченное решение РДС (16) единственное следует из того обстоятельства, что разность двух ограниченных решений неоднородной РДС (16) является ограниченным решением соответствующей однородной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

не имеющей нетривиальные решения, ограниченных на  $Z_+$ .

Действительно, если  $r(n)$ -другое решение РДС (16), ограниченное на  $Z_+$ , то при любом  $n_0 \in Z$  имеем

$$r_1(n) - r(n) = A^{n-n_0} [r_1(n_0) - r(n_0)]$$

отсюда

$$\|r_1(n) - r(n)\| \leq \gamma e^{-\alpha(n-n_0)} \|r_1(n_0) - r(n_0)\| \quad (19)$$

Так как

$$\sup_{n_0 \in Z} \|r_1(n_0) - r(n_0)\| < \infty,$$

то фиксируя  $n$  и переходя при  $n_0 \rightarrow \infty$  в (19), получим

$$\|r_1(n) - r(n)\| \leq 0,$$

т.е.  $r_1(n) = r(n)$  и таким образом, других, кроме  $r_n$  ограниченных на  $Z_+$ , решение РДС (16) не имеет.

Если  $x_n$ -любое решение неоднородной РДС (16), то учитывая, что разность  $x_n - r(n)$  удовлетворяет однородной РДС получим

$$x_n - r(n) = A^{n-n_0} [x_{n_0} - r(n_0)].$$

Отсюда

$$\|x(n) - r(n)\| \leq \gamma e^{-\alpha(n-n_0)} \|x_{n_0} - r(n_0)\|,$$

при  $n \geq n_0$  и следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n) - r(n)\| = 0.$$

Таким образом,  $r(n)$  устойчиво в целом при  $n \rightarrow \infty$  и значит РДС (16) конвергентна.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Барбашин Е.А., Красовский М.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. Прикладная математика и механика, Т. 18, вып 3, 1954, с. 345-350.
- [2] Бапаев К.Б., Бапаева С.К. Об устойчивости линейных РДС. Материалы II міжнародної Науково-практичної конференції «Дні науки», 2006, Днепропетровск, С. 52-58.
- [3] Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967, 324 с.
- [4] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 212 с.
- [5] Лефшец С., Ла-Силль И.С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
- [6] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949, 550 с.
- [7] Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964, 367 с.
- [8] Zevinsan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations. Puke Wath Journ. 15(1948). p. 111-126.
- [9] ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations. ChineseMath -3,2(1963). p. 169-183.
- [10] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 324 р.
- [11] Александров А.Ю., Жабко А.П. Устойчивости разностных систем. Санкт Петербург, 2003.
- [12] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1935, 371 с.
- [13] Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев.: Наукова Думка, 1972.
- [14] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
- [15] Yoshizawa T. stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Japan, 1966.
- [16] Wichel A.N., Wu S.H. Stability of discrete systems over finite integral time // Int. J. control. 1969. V. 9. P. 679-693.
- [17] Talpalaru P. Stability problems for difference equations // An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza». Tasi. Mat. 2005. 51, № 2. P. 231-244.
- [18] Hahn W. Theory stability of motion / Berlin Heidelberg-New York: Springer Verlag. 1967.
- [19] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math.Soc. Japan, 1966.
- [20] Yoshizawa T. Stability theory and existence of periodic solutions almost periodic solutions. NewYork. Heidelberg. Berlin. 1975.

## REFERENCES

- [1] Barbashin E.A., Krasovsky M.N. On the existence of a Lyapunov function in the case of asymptotic stability in general. *Applied Mathematics and Mechanics*, 18, issue 3 (1954) p. 345-350.
- [2] Бабаев К.Б., Бабаева С.К. On the stability of linear RDS. Proceedings of III Int. Scientific-Practical Conference "Science Day". Dnipropetrovsk, 2006, pp. 52-58.
- [3] Bromberg P.V. Matrix methods in the theory of relay and impulse regulation. Moscow: Nauka, 1967, 324 p.
- [4] Krasovskiy N.N. Some problems of the theory of stability of motion. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 212 p.
- [5] Lefschetz S., LaSalle I.S. Investigation of stability by the direct Lyapunov method. Moscow: Mir, 1964.
- [6] Nemytskiy V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. Moscow: Gostekhizdat, 1949, 550.
- [7] Pliss V.A. Nonlocal problems of the theory of oscillations. Moscow: Nauka, 1964, 367.
- [8] Zevinan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations. *Puke Wath Journ.* 15(1948). p. 111-126.
- [9] ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations. *Chinese Math* -3,2(1963). p. 169-183.
- [10] Demidovich B.P. Lectures on the mathematical theory of stability. Moscow: Nauka, 1967, 324 p.
- [11] Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Stability of difference systems. St. Petersburg, 2003.
- [12] Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. Moscow, 1935, 371 p.
- [13] Martynuk D.I. Lectures on the qualitative theory of difference equations. Kiev: Naukova Dumka, 1972.
- [14] Khalanay A., Wexler D. Qualitative theory of impulse systems. Moscow: Mir, 1971.
- [15] Yoshizawa T. stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Japan, 1966.
- [16] Wichel A.N., Wu S.H. Stability of discrete systems over finite integral time // *Int. J. control.* 1969. V. 9. P. 679-693.
- [17] Talpalaru P. Stability problems for difference equations // *An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza». Tasi. Mat.* 2005. 51, № 2. P. 231-244.
- [18] Hahn W. Theory stability of motion / Berlin Heidelberg-New York: Springer Verlag. 1967.
- [19] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math.Soc. Japan, 1966.
- [20] Yoshizawa T. Stability theory and existence of periodic solutions almost periodic solutions. New York, Heidelberg, Berlin. 1975.

**К.Б. Бабаев, С.С. Слэмжанова**

Математика және математикалық моделдеу институты,  
И.Жансугурова атындағы Жетісу мемлекеттік университеті

### **АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ**

**Аннотация.** Уақытқа байланысты жүйелер эволюциясы фазалық кеңістіктегі олардың траекториясымен сипатталады. Ал траектория көп жағдайда үздіксіз болып бейнеленілітінімен оның бақыланылуы дискретті хабарларға негізделеді.

Екінші жағынан жүйелер эволюциясының дискреттік сипатталуы ол жүйелер эволюциясын зерттегенде оған цифрлық техникаларды қолдану қажеттілігі бизді тағыда дискретті информацияға алып келеді. Міне осылардың негізінде жүйеміз дискретті жүйе болып шығады. Оны айырымдық-динамикалық жүйе деп атайды. Айырымдық-динамикалық жүйелер эволюциясы рекурренттік қатынаста болады. Ол қатынастар рекурренттік теңдеулермен анықталады.

Сөйтіп айырымдық-динамикалық жүйелер есебін: не рекурренттік теңдеулер шешулерімен байланысты проблемалар немесе евклидтік немесе басқа кеңістіктердегі бейнелеу теорияларының проблемасы деп қарастыруға болады.

Сондықтанда сызқтық емес айырымдық-динамикалық жүйелерді зерттеу үшін дәл сандай дифференциалдық теңдеулер теориясының немесе алгебралық теңдеулер теориясының әдістерінің баламаларын жасап пайдалануға тырысады.

Бұл жұмыста айырымдық-динамикалық жүйелердің шешулерін сапалы зерттеу үшін дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне пайдаланылған орнықтылықтың әр-түрлі типтері енгізіледі және Ляпуновтың екінші әдісінің дискретті баламасы бойынша айырымдық-динамикалық жүйелер шешулерінің тұтас асимптотикалық, экспоненттік Лагранж мағынасындағы, орнықтылықтарымен конвергенттілік шарттары алынған.

**Тірек сөздер:** тұтас асимптотикалық орнықтылық, экспоненттік орнықтылық, Лагранж мағынасындағы орнықтылық, конвергенттілік.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 112 – 126

UDC 517.94

**A.B.Imanbayeva, A.Sh. Shaldanbayev, A.A. Kopzhasarova**

Southern Kazakhstan state university of Aueyzov M. O, Shymkent  
[shaldanbaev51@mail.ru](mailto:shaldanbaev51@mail.ru)

**ASYMPTOTIC DECOMPOSITION THE DECISION IS SINGULAR  
THE INDIGNANT TASK OF CAUCHY FOR THE SYSTEM  
OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH CONSTANT COEFFICIENTS**

**Abstract:** In the real work, the spectral method, has received frontier layer decomposition the decision is singular the indignant task of Cauchy for linear system ordinary differential the equation with constant coefficients:  $L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \vec{f}(t)$ .

**Keywords:** singulyarny, self-conjugate operator, spectral method, Gilbert-Schmidt's theorem, spectral decomposition, interface, asymptotic decomposition.

УДК 517.94

**А.Б.Иманбаева, А.А.Копжасарова, А.Ш.Шалданбаев**

Южно-казахстанский государственный университет им. М.О Ауезова, г.Шымкент

**Асимптотическое разложение решения сингулярно  
возмущенной задачи Коши для системы  
обыкновенных дифференциальных уравнений  
с постоянными коэффициентами**

**Аннотация:** В настоящей работе, спектральным методом, получено погранслоное разложение решений сингулярно возмущенной задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнении с постоянными коэффициентами:  $L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \vec{f}(t)$ .

**Ключевые слова:** сингулярный, самосопряженный оператор, спектральный метод, теорема Гильберта-Шмидта, спектральное разложение, пограничный слой, асимптотическое разложение.

**1.Введение.** Пусть  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$ , элементами которой служат комплексные числа. Линейная система

$$\dot{x} = Ax, t \in [0,1] \quad (1.1)$$

называется линейной однородной системой порядка  $n$ .

Известно, что для любого  $\xi$  и для  $\tau \in [0,1]$  существует единственное решение  $\varphi$  системы (1.1) на интервале  $[0,1]$ , удовлетворяющее  $\varphi(\tau) = \xi$ .



**Лемма 1.1.** Множество всех решений системы (1.1) на интервале  $[0,1]$  образуют  $n$ -мерное векторное пространство над полем комплексных чисел.

**Определение 1.1.** Всякое множество  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  линейно независимых решений системы (1.1) называется базисом или фундаментальным множеством решений системы (1.1).

**Определение 1.2.** Если  $\Phi$  - матрица,  $n$  столбцов которой являются  $n$  линейно независимыми решениями на  $[0,1]$ , то  $\Phi$  называется фундаментальной матрицей системы (1.1). Очевидно,  $\Phi$  удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), t \in [0,1]. \quad (1.2)$$

Под матричным дифференциальным уравнением, соответствующим системе (1.1) на  $[0,1]$ , подразумеваем задачу отыскания квадратной матрицы  $\Phi$  порядка  $n$ , столбцы которой являются решениями системы (1.1) на  $[0,1]$ . Эта задача обозначается так:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), (t \in [0,1]). \quad (1.3)$$

**Лемма 1.2.** Для того, чтобы решение-матрица уравнения (1.3) была фундаментальной матрицей, необходимо и достаточно, чтобы  $\det \Phi(t) \neq 0$  для  $t \in [0,1]$ .

**Лемма 1.3.** Если  $\Phi$  - фундаментальная матрица системы (1.1) и  $C$  - (комплексная) постоянная неособая матрица, то  $\Phi \cdot C$  также является фундаментальной матрицей системы (1.1). Каждая фундаментальная матрица системы (1.1) может быть представлена в такой форме при помощи некоторой неособой матрицы  $C$ .

Заметим, что если  $\Phi$  - фундаментальная матрица системы (1.1) и  $C$  - постоянная неособая матрица, то  $C \cdot \Phi$ , вообще говоря, не является фундаментальной матрицей.

Две различные однородные системы не могут иметь одну и ту же фундаментальную матрицу, ибо из уравнения (1.1) следует, что  $A = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)$ .

**Сопряженные системы.** Если  $\Phi$  - фундаментальная матрица для системы (1.1), то

$$(\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A,$$

или переходя к сопряженным матрицам,

$$(\Phi^*{}^{-1})' = -A^*(A^*)^{-1}.$$

Поэтому  $\Phi^*{}^{-1}$  - фундаментальная матрица для системы

$$\dot{x} = -A^*x, t \in [0,1]. \quad (1.4)$$

Система (1.4) называется сопряженной для системы (1.1) и матричное уравнение

$$\dot{x} = -A^*x, (t \in [0,1]) \quad (1.5)$$

называется сопряженной для уравнения (1.3).

**Лемма 1.4.** Если  $\Phi$  - фундаментальная матрица для системы (1.1), то  $\psi(t)$  - есть фундаментальная матрица для сопряженной системы (1.4) в том и только в том случае, когда

$$\psi^*\Phi = C, \quad (1.6)$$

где  $C$  - постоянная неособая матрица.

Если  $A = -A^*$ , то  $\Phi^*{}^{-1}$ , будучи фундаментальной матрицей для системы (1.4), является также фундаментальной матрицей для системы (1.1). Поэтому в силу леммы 1.3

$$\Phi = \Phi^*{}^{-1} C \text{ или } \Phi^*\Phi = C, \quad (1.7)$$

где  $C$  - постоянная неособая матрица. Из уравнения (1.7), в частности, следует, что евклидова длина каждого вектора-решения системы (1.1) постоянна.

**Определение 1.3.** Пусть  $A$  - неособая квадратная матрица порядка  $n$  из комплексных чисел и  $f$  - непрерывный вектор на  $[0,1]$ , не равный тождественно нулю. Система уравнений

$$\dot{x} = Ax + f(t), (t \in [0,1]) \quad (1.8)$$

называется линейной неоднородной системой порядка  $n$ .

Если координаты  $f(t)$  непрерывна на  $[0,1]$ , то существует единственное решение  $\varphi$  системы (1.8), для которого

$$\varphi(\tau) = \xi,$$

где  $\tau \in [0,1]$  и  $|\xi| < \infty$ ,  $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}$ .

Если известна фундаментальная матрица  $\Phi$  системы (1.1), то легко найти решение системы (1.8).

**Лемма 1.5.** Фундаментальная матрица  $\Phi$  системы (1.1) дается формулой

$$\Phi(t) = e^{tA} (|t| < \infty) \quad (1.9)$$

и решение системы (1.1) удовлетворяющее условию

$$\varphi(\tau) = \xi (|\tau| < \infty, |\xi| < \infty)$$

имеет вид

$$\varphi(t) = e^{(t-\tau)A} \xi (|t| < \infty).$$

Решение  $\varphi$  системы (1.8) удовлетворяющее условию  $\varphi(\tau) = \xi$ , где  $\tau \in [0,1]$ ,  $|\xi| < \infty$  имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{(t-\tau)A} \xi + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A} f(s) ds, (t \in [0,1]). \quad (1.10)$$

**Определение 1.4.** Ряд

$$e^A = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (1.11)$$

называется экспонентой матрицы  $A$ .

**Определение 1.5.** Фундаментальную матрицу, нормированной условий

$$\Phi(\tau) = I \quad (1.12)$$

принято называть матрицантом или матрицей Коши, например  $e^{(t-\tau)A}$  - является матрицантом системы (1.1).

**Постановка задачи.**

Рассмотрим в пространстве сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_{\varepsilon} \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A \vec{x} = \overline{f(t)} t \in [0,1], \quad (1.12)$$

$$\vec{x}(0) = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\overline{x(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \overline{f(t)} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$a_{ij} (i, j = \overline{1, n})$  - вещественные коэффициенты,  $\varepsilon > 0$  - малый параметр,  $L^2$  - пространство Гильберта векторзначных функций со скалярным произведением

$$(\vec{y}, \vec{z}) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 y_k(t) \overline{z_k(t)} dt \quad (1.14)$$

и нормой

$$\|\vec{y}\| = \left( \sum_{k=1}^n \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.15)$$

Спрашивается, при каких условиях на матрицу  $A$ , и правую часть  $\overrightarrow{f(t)}$  имеет место предельное соотношение, в том или ином смысле

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{x}(t, \varepsilon) = \overrightarrow{x_0}(t), \quad (1.16)$$

где  $\overrightarrow{x_0}(t)$  - есть решение невозмущенного уравнения

$$A\overrightarrow{x_0}(t) = \overrightarrow{f(t)}. \quad (1.17)$$

Через  $W_2^1$  - обозначим пространство Соболева векторзначных функций с нормой:

$$\|\vec{x}(t)\|_1 = \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \int_0^1 |x_k(t)|^2 dt + \int_0^1 |\dot{x}_k(t)|^2 dt \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где  $(\dot{\phantom{x}})$  - означает дифференцирование по переменной  $t$ .

Существуют различные методы исследования сингулярно возмущенных задач [1-15], среди них в последней работе сделана попытка построения общей теории таких задач. Основным недостатком этих работ является отсутствие явной оценки остаточного члена асимптотического разложения через коэффициенты системы уравнений. В настоящей работе предложен новый метод, основанный на спектральную теорию функционально-дифференциальных уравнений [15].

## 2. Методы исследования

**Лемма 2.1.** Для любой непрерывной функции  $\overrightarrow{f(t)}$  задача Коши

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}, \quad (2.1)$$

$$\vec{x}(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

имеет единственное решение

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_\varepsilon(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau, \quad (2.4)$$

где  $K_\varepsilon(t-\tau)$  - есть матрицант системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon z(t) + Az(t) = 0, \\ z(0) = I. \end{cases} \quad (2.5), (2.6)$$

**Доказательство.** Продифференцировав формулу (2.4), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \frac{1}{\varepsilon} K_\varepsilon(0) \overrightarrow{f(t)} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau, \\ \varepsilon \dot{\vec{x}}(t) &= K_\varepsilon(0) \overrightarrow{f(t)} + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau = \overrightarrow{f(t)} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \varepsilon \frac{\partial K}{\partial t}(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau = \overrightarrow{f(t)} - \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t AK_\varepsilon(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau = \overrightarrow{f(t)} - A\vec{x}(t), \Rightarrow \varepsilon \dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \overrightarrow{f(t)}. \end{aligned}$$

**Определение 2.1.** Интегрального оператора

$$K_\varepsilon \overrightarrow{f(t)} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_\varepsilon(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \theta(t-\tau) K(t-\tau) \overrightarrow{f(\tau)} d\tau$$

назовём оператором Коши.

**Лемма 2.2.** Если  $Su(x) = u(1 - x)$ , то имеет место формула

$$SK_\varepsilon = K_\varepsilon^*S,$$

где  $K_\varepsilon^*$  - сопряженный оператора Коши.

**Доказательство.** Сопряженный оператор  $K_\varepsilon^*$  имеет вид:

$$K_\varepsilon^* \vec{g}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \theta(\tau - t) K(\tau - t) \vec{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^1 K(\tau - t) \vec{f}(\tau) d\tau,$$

поэтому

$$\begin{aligned} K_\varepsilon^* S \vec{f}(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^1 K(\tau - t) S \vec{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^1 K(\tau - t) \vec{f}(1 - \tau) d\tau = \left| \begin{array}{l} 1 - \tau = \xi, \tau = 1 - \xi, \\ d\tau = -d\xi \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{1-t}^0 K(1 - \xi - t) \vec{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{1-t} K(1 - \xi - t) \vec{f}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{1-t} K(1 - t - \xi) \vec{f}(\xi) d\xi = SK \vec{f}(t). \end{aligned}$$

**Следствие 2.1.** Оператор  $SK$  симметрический в пространстве  $L^2$ .

**Доказательство.**  $(SK_\varepsilon)^* = K_\varepsilon^* S^* = K_\varepsilon^* S = SK_\varepsilon$ .

**Следствие 2.2.** Оператор  $\overline{SK}$  вполне непрерывен и самосопряжен в пространстве  $L^2$ .

Если  $SK_\varepsilon \vec{f}(t) = 0$ , то  $K_\varepsilon \vec{f}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t - \tau) \vec{f}(\tau) d\tau = 0, \Rightarrow \int_0^t K(t - \tau) \vec{f}(\tau) d\tau = 0, \Rightarrow \vec{f}(\tau) = 0$ , поскольку однородное вольтерровое уравнение имеет лишь тривиальное решение.

**Теорема 2.1.** Если  $Su(x) = u(1 - x)$ , то

(а) оператор  $\overline{SK}_\varepsilon$  вполне непрерывен и самосопряжен;

(б) ортонормированные собственные векторы оператора  $\overline{SK}_\varepsilon$  образуют базис пространства  $L^2$ .

**Лемма 2.3.**

Если имеет место неравенство

$$(A\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2, \alpha > 0,$$

то

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha},$$

где оператор определен формулами

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x},$$

$$D(L_\varepsilon) = \{ \vec{x} \in C^1(0,1) \cap C[0,1], \vec{x}(0) = 0 \}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\vec{x} \in D(L_\varepsilon)$ , тогда

$$\varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \vec{f}(t) \in L^2.$$

Умножив обе части этого уравнения скалярно на  $\vec{x}$ , имеем

$$(L_\varepsilon \vec{x}, \vec{x}) = \varepsilon (\dot{\vec{x}}, \vec{x}) + (A\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{f}, \vec{x}),$$

$$(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \dot{x}_k x_k dt = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2(t)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2(1) \geq 0; \Rightarrow$$

$$\alpha \cdot \|\vec{x}\|^2 \leq (L_\varepsilon \vec{x}, \vec{x}) = (\vec{f}, \vec{x}) \leq \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{x}\|, \Rightarrow \alpha \cdot \|\vec{x}\| \leq \|\vec{f}\| = \|L_\varepsilon \vec{x}\|, \Rightarrow$$

$$\|\vec{x}\| \leq \frac{\|\vec{f}\|}{\alpha}, \Rightarrow \|L_\varepsilon^{-1} f\| \leq \frac{\|\vec{f}\|}{\alpha}, \Rightarrow \|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha},$$

что и требовалось доказать.

**3. Результаты исследования****Теорема 3.1.** Задача Коши

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}, \quad (3.1)$$

$$\vec{x}(0) = 0, \quad (3.2)$$

сильно разрешима, и ее сильное решение имеет вид:

$$\vec{x}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m})}{\lambda_m} \overrightarrow{\varphi_m}(t), \quad (3.3)$$

и принадлежит пространству  $W_2^1$ , где

$$SL_\varepsilon \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m \cdot \overrightarrow{\varphi_m}(t), S\vec{f}(t) = \vec{f}(1-t), \vec{f}(t) \in L^2. \quad (3.4)$$

**Доказательство.** Действуя оператором  $S$  на обе части уравнения (3.1), имеем

$$SL_\varepsilon \vec{x} = S\vec{f}(x), \Rightarrow \vec{x}(t) = (SL_\varepsilon)^{-1} S\vec{f}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} ((SL_\varepsilon)^{-1} S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}) \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m})}{\lambda_m} \overrightarrow{\varphi_m}(t),$$

где  $\lambda_m^{-1}$  - собственные значения оператора  $(SL_\varepsilon)^{-1}$ , а  $\overrightarrow{\varphi_m}(t)$  соответствующие им собственные векторы, т.е.

$$(SL_\varepsilon)^{-1} \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m^{-1} \overrightarrow{\varphi_m}(t) \text{ или } \lambda_m \overrightarrow{\varphi_m}(t) = SL_\varepsilon \overrightarrow{\varphi_m}(t), \Rightarrow L_\varepsilon \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m S \overrightarrow{\varphi_m}(t), (m = 1, 2, \dots)$$

то есть

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\overrightarrow{\varphi_m}}(t) + A \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m S \overrightarrow{\varphi_m}(t), \\ \overrightarrow{\varphi_m}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.5), (3.6)$$

Включение  $\vec{x}(t) \in W_2^1$  следует из доказанных нами априорных оценок. **Теорема 3.1** доказана.

Если правая часть уравнения (3.1) является достаточно гладкой функцией, то с помощью интегрирования по частям можно преобразовать формулу (3.3), с целью вывода асимптотического разложения решения  $\vec{x}(t)$ . В силу постоянства и симметричности матрицы  $A$  имеет место формула  $(A^*)^{-1}S = SA^{-1}$ , поэтому

$$(S\vec{f}, A^{-1}S\overrightarrow{\varphi_m}) = ((A^{-1})^* S\vec{f}, S\overrightarrow{\varphi_m}) = ((A^*)^{-1} S\vec{f}, S\overrightarrow{\varphi_m}) = (SA^{-1}\vec{f}, S\overrightarrow{\varphi_m}) = (A^{-1}\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m});$$

С помощью интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} (S\vec{f}, A^{-1}\dot{\overrightarrow{\varphi_m}}) &= ((A^{-1})^* S\vec{f}, \dot{\overrightarrow{\varphi_m}}) = (SA^{-1}\vec{f}, \dot{\overrightarrow{\varphi_m}}) = \sum_{k=1}^n [SA^{-1}\vec{f}(t)]_k \varphi_m^k(t) \Big|_0^1 - (\overrightarrow{\varphi_m}, (SA^{-1})\vec{f}) = \\ &= \sum_{k=1}^n [A^{-1}\vec{f}(0)]_k \varphi_m^k(1) + (S(A^{-1}\vec{f}), \overrightarrow{\varphi_m}) = (A^{-1}\vec{f}(0), \overrightarrow{\varphi_m}(1)) + (S(A^{-1}\vec{f}), \overrightarrow{\varphi_m}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}) = \lambda_m (A^{-1}\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}) - \varepsilon (A^{-1}\vec{f}(0), \overrightarrow{\varphi_m}(1)) - \varepsilon (S(A^{-1}\vec{f}), \overrightarrow{\varphi_m}).$$

Подставив эту формулу в (3.3), получим



$$\begin{aligned}
(SA\vec{e}_k, \vec{\varphi}_m) &= (-\varepsilon S\dot{\vec{e}}_k, \vec{\varphi}_m) = \varepsilon((S\dot{\vec{e}}_k), \vec{\varphi}_m) = \varepsilon \sum_{l=1}^n \varphi_m^l(t) S e_{lk}(t) - \varepsilon(S\vec{e}_k, \dot{\vec{\varphi}}_m) = \\
&= \varepsilon \sum_{l=1}^n \varphi_m^l(1) e_{lk}(0) - \varepsilon(S\vec{e}_k, \dot{\vec{\varphi}}_m) = \varepsilon \varphi_m^{(k)}(1) - \varepsilon(S\vec{e}_k, \dot{\vec{\varphi}}_m) = \varepsilon \varphi_m^k(1) - (S\vec{e}_k, \lambda_m S\vec{\varphi}_m - A\vec{\varphi}_m) \\
&= \varepsilon \varphi_m^{(k)}(1) - \lambda_m(S\vec{e}_k, S\vec{\varphi}_m) + (S\vec{e}_k, A\vec{\varphi}_m) = \varepsilon \varphi_m^{(k)}(1) - \lambda_m(\vec{e}_k, \vec{\varphi}_m) + (A^* S\vec{e}_k, \vec{\varphi}_m) = \\
&= \varepsilon \varphi_m^{(k)}(1) - \lambda_m(\vec{e}_k, \vec{\varphi}_m) + (SA\vec{e}_k, \vec{\varphi}_m);
\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место формула:

$$\frac{\varepsilon \varphi_m^k(1)}{\lambda_m} = (\vec{e}_k, \vec{\varphi}_m), k = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

поэтому

$$\vec{e}_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi_m^k(1)}{\lambda_m} \vec{\varphi}_m(t). \quad (3.9)$$

Тогда

$$\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A^{-1} \vec{f}(0), \vec{\varphi}_m(1))}{\lambda_m} \vec{\varphi}_m(t) = \sum_{k=1}^n [A^{-1} \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t). \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.7), получим

$$\vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = A^{-1} \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) - \varepsilon \vec{x}\left(t, \varepsilon, (A^{-1} \dot{\vec{f}})\right), \quad (3.11)$$

где  $\vec{e}_k(t)$  - есть  $k$ -ый столбец матрицанта.

Заметим, что при  $t = 0$  имеет место формула

$$\sum_{k=1}^n [A^{-1} \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(0) = A^{-1} \vec{f}(0),$$

поскольку система  $\{\vec{e}_k(0)\}$  - ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}_n$ .

Подставив в место вектора  $\vec{f}$  вектор  $(A^{-1} \dot{\vec{f}})$  из формулы (3.11), получим

$$\begin{aligned}
\vec{x}\left(t, \varepsilon, (A^{-1} \dot{\vec{f}})\right) &= A^{-1} (A^{-1} \dot{\vec{f}})(t) - \sum_{k=1}^n \left[ A^{-1} (A^{-1} \dot{\vec{f}}(0)) \right]_k \cdot \vec{e}_k(t) - \\
&\quad - \varepsilon \vec{x}\left(t, \varepsilon, \left(\frac{d}{dt} A^{-1}\right)^2 \dot{\vec{f}}\right).
\end{aligned}$$

Полагая  $D^\circ = I, D = \frac{d}{dt} A^{-1}$ , перепишем полученную формулу

$$\vec{x}(t, \varepsilon, D\vec{f}) = A^{-1} D\vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [(A^{-1} D\vec{f})(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) - \varepsilon \vec{x}(t, \varepsilon, D^2 \vec{f}).$$

Подставив эту формулу в (3.11), имеем

$$\vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = A^{-1} \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon \left[ A^{-1} D \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) - \varepsilon \vec{x}(t, \varepsilon, D^2 \vec{f}) \right] = A^{-1} D^\circ \vec{f}(t) - \\
 & - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^\circ \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) - \left[ A^{-1} D \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right] \varepsilon + \\
 & + \varepsilon^2 \vec{x}(t, \varepsilon, D^2 \vec{f}) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left\{ A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right\} \varepsilon^i + \\
 & + (-1)^2 \varepsilon^2 \vec{x}(t, \varepsilon, D^2 \vec{f}).
 \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что при  $l = m$  формула верна

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \left\{ A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right\} \varepsilon^i + \\
 (-1)^{m+1} \varepsilon^{m+1} \vec{x}(t, \varepsilon, D^{m+1} \vec{f}),
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

и покажем, что тогда она верна и при  $l = m + 1$ . В самом деле, из формулы (3.11), имеем

$$\vec{x}(t, \varepsilon, D^{m+1} \vec{f}) = A^{-1} D^{m+1} \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^{m+1} \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) - \varepsilon \vec{x}(t, \varepsilon, D^{m+2} \vec{f}).$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \left\{ A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right\} \varepsilon^i + \\
 + (-1)^{m+1} \left[ A^{-1} D^{m+1} \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^{m+1} \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right] \varepsilon^{m+1} + \\
 (-1)^{m+2} \varepsilon^{m+2} \vec{x}(t, \varepsilon, D^{m+2} \vec{f}) = \\
 \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \left\{ A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right\} \varepsilon^i + (-1)^{m+2} \varepsilon^{m+2} \vec{x}(t, \varepsilon, D^{m+2} \vec{f}).
 \end{aligned}$$

Следовательно, если  $\vec{f}(t) \in W_2^m$ , то имеет место формула

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \left[ A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right] \varepsilon^i + \\
 + (-1)^m \varepsilon^m \vec{x}(t, \varepsilon, D^m \vec{f}),
 \end{aligned}$$

где остаток допускает следующую оценку

$$\|\vec{x}(t, \varepsilon, D^m \vec{f})\| \leq \frac{\|D^m \vec{f}\|}{\alpha},$$

где

$$D \vec{f} = \frac{d}{dt} A^{-1} \vec{f}(t).$$

Нами доказана следующая основная теорема.



**Теорема 3.2.** Если  $\vec{f}(t) \in W_2^m$  и матрица  $A$  с постоянными коэффициентами симметрична и положительно определена в пространстве  $L^2$ , т.е.

$$(A\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2, \alpha > 0, \forall \vec{u} \in L^2, \quad (3.10)$$

то задача Коши

$$\vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad (3.1)$$

$$\vec{x}(0) = 0, \quad (3.2)$$

сильно разрешима, и ее сильное решение допускает асимптотическое представление вида:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = & \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \left[ A^{-1} D^i \vec{f}(t) - \sum_{k=1}^n [A^{-1} D^i \vec{f}(0)]_k \cdot \vec{e}_k(t) \right] \varepsilon^i + \\ & + (-1)^m \varepsilon^m \vec{x}(t, \varepsilon, D^m \vec{f}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $D^\circ = I, D = \frac{d}{dt} A^{-1}$  и остаток допускает оценку:

$$\|\vec{x}(t, \varepsilon, D^m \vec{f})\| \leq \frac{\|D^m \vec{f}\|}{\alpha}. \quad (3.12)$$

#### 4. Обсуждениерезультатов

**Замечание 4.1.** Симметричность матрицы  $A$  является следствием  $SA = A^*S$ , можно избавиться от этого условия с помощью прямых вычислений?

**Решение.**

Решение задачи Коши (2.1)-(2.2) имеет вид

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_\varepsilon(t - \tau) \vec{f}(\tau) d\tau,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \vec{x} \left( t, \varepsilon, \frac{d}{dt} A^{-1} f(t) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_\varepsilon(t - \tau) \frac{d}{dt} A^{-1} \vec{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} [K_\varepsilon(t - \tau) A^{-1} \vec{f}(\tau)]_0^t - \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \tau} (t - \tau) A^{-1} \vec{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} K_\varepsilon(0) A^{-1} \vec{f}(t) - \frac{1}{\varepsilon} K_\varepsilon(t) A^{-1} \vec{f}(0) - \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (A^*)^{-1} \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \tau} (t - \tau) \vec{f}(\tau) d\tau = \left| K_\varepsilon(t - \tau) = e^{-\frac{(t-\tau)A}{\varepsilon}}, \right. \\ \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \tau} &= e^{-\frac{(t-\tau)A}{\varepsilon}} \cdot \frac{A}{\varepsilon} = K_\varepsilon(t - \tau) \frac{A}{\varepsilon} \left| = \frac{1}{\varepsilon} K_\varepsilon(0) A^{-1} \vec{f}(t) - \frac{1}{\varepsilon} K_\varepsilon(t) A^{-1} \vec{f}(0) \right. \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (A^*)^{-1} K_\varepsilon(t - \tau) \frac{A}{\varepsilon} \vec{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \frac{K_\varepsilon(0)}{I} A^{-1} \vec{f}(t) - \frac{1}{\varepsilon} K_\varepsilon(t) A^{-1} \vec{f}(0) \\ &- \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t A^* (A^*)^{-1} K_\varepsilon(t - \tau) \frac{A}{\varepsilon} \vec{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} A^{-1} \vec{f}(t) - \frac{K_\varepsilon(t)}{\varepsilon} A^{-1} \vec{f}(0) - \end{aligned}$$



$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \quad (3.14)$$

где

$$\det A = 0, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} > 0. \quad (3.15)$$

Редуцируем задачу Коши (3.13)-(3.15) к задаче Коши для уравнения второго порядка. Перепишем уравнения (3.13) в развёрнутом виде

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1(t), \\ \varepsilon \dot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2(t), \end{cases}$$

где точка  $(\cdot)$  - означает дифференцирования по переменной  $t$ . Продифференцировав первое уравнение по  $t$  и умножив полученное уравнение на  $\varepsilon$ , имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{x}_1 + a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2 &= \dot{f}_1(t) \cdot \varepsilon, \\ \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + a_{11}\varepsilon \dot{x}_1 + a_{12}\varepsilon \dot{x}_2 &= \varepsilon \dot{f}_1(t). \end{aligned}$$

Воспользовавшись вторым уравнением системы, исключим из этого уравнения величину  $\varepsilon \dot{x}_2$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + a_{11}\varepsilon \dot{x}_1 + a_{12}(f_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) &= \varepsilon \dot{f}_1(t), \\ \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + a_{11}\varepsilon \dot{x}_1 + a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2(f_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) &= \varepsilon \dot{f}_1(t), \\ \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + a_{11}\varepsilon \dot{x}_1 + a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}[\varepsilon \dot{x}_1 + a_{11}x_1 - f_1] &= \varepsilon \dot{f}_1 - a_{12}f_2(t), \\ \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + \varepsilon(a_{11} + a_{22})\dot{x}_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= \varepsilon \dot{f}_1 + a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t), \\ \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + \varepsilon \operatorname{tr} A \dot{x}_1 + \det A \dot{x}_1 &= \varepsilon \dot{f}_1 + a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t). \end{aligned}$$

В нашем случае  $\det A = 0$ , поэтому уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \ddot{x}_1 + \varepsilon \operatorname{tr} A \dot{x}_1 &= \varepsilon \dot{f}_1 + a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t), \\ x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) &= \frac{f_1(0)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Разделив обе части дифференциального уравнения на  $\varepsilon$ , получим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{x}_1 + \operatorname{tr} A \dot{x}_1 = \dot{f}_1(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon}, \\ x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \frac{f_1(0)}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Пусть  $y(t) = \dot{x}_1(t) - \frac{f_1(0)}{\varepsilon}$ , тогда  $y(0) = 0$  и  $\dot{x}_1(t) = y(t) + \frac{f_1(0)}{\varepsilon}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{y} + \operatorname{tr} A \cdot \left[ y(t) + \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \right] &= \dot{f}_1(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon}, \\ \varepsilon \dot{y} + \operatorname{tr} A y(t) &= \dot{f}_1(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \operatorname{tr} A. \end{aligned}$$

Таким образом, относительно неизвестной задача принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y} + \operatorname{tr} A y(t) = \dot{f}_1(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \operatorname{tr} A = F(t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

По нашему предположению  $\operatorname{tr} A > 0$ , известно, что если  $a > 0, f(t) \in C^1[0,1]$  и

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} + az = f(t), \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

то

$$z(t, \varepsilon, f) = \frac{f(t)}{a} - \frac{f(0)}{a} e_{\varepsilon}(t) - \frac{\varepsilon}{a} y(t, \varepsilon, \dot{f}) \text{ и } \|z(t, \varepsilon, f)\| \leq \frac{\|f\|}{a},$$

поэтому

$$y(t, \varepsilon, F) = \frac{\dot{f}_1(t)}{\operatorname{tr} A} + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon \operatorname{tr} A} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \right] \cdot e_\varepsilon(t) - \frac{\varepsilon}{a} y \left( t, \varepsilon, \ddot{f}_1 + \frac{a_{22}\dot{f}_1 - a_{12}\dot{f}_2}{\varepsilon} \right) = \\
 & = \frac{\dot{f}_1(t)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} - \\
 & - \left[ \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \right] e_\varepsilon(t) - \frac{\varepsilon}{trA} y(t, \varepsilon, \ddot{f}_1) - \\
 & - \frac{1}{trA} y(t, \varepsilon, a_{22}\dot{f}_1 - a_{12}\dot{f}_2) = \frac{\dot{f}_1(t)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} - \left[ \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} + \right. \\
 & \left. + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \right] \cdot e_\varepsilon(t) - \frac{\varepsilon}{trA} y(t, \varepsilon, \ddot{f}_1) - \frac{1}{trA} \left[ \frac{a_{22}\dot{f}_1 - a_{12}\dot{f}_2}{trA} - \right. \\
 & \left. - \frac{a_{22}\dot{f}_1(0) - a_{12}\dot{f}_2(0)}{trA} \right] e_\varepsilon(t) - \frac{\varepsilon}{trA} y(t, \varepsilon, a_{22}\ddot{f}_1 - a_{12}\ddot{f}_2) \Big] = \\
 & = \frac{\dot{f}_1(t)}{trA} - \frac{a_{22}\dot{f}_1 - a_{12}\dot{f}_2}{(trA)^2} + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} - \\
 & - \left[ \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} - \frac{a_{22}\dot{f}_1(0) - a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2} \right] e_\varepsilon(t) + \\
 & + \frac{\varepsilon}{(trA)^2} y(t, \varepsilon, a_{22}\ddot{f}_1 - a_{12}\ddot{f}_1) - \frac{\varepsilon}{trA} y(t, \varepsilon, \ddot{f}_1).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \int_0^t \left[ y_1(\xi) + \frac{f_1(0)}{\varepsilon} \right] d\xi = \int_0^t y_1(\xi) d\xi + \frac{f_1(0) \cdot t}{\varepsilon} = \frac{f_1(t) - f_1(0)}{trA} - \\
 & - \frac{a_{22}[f_1(t) - f_1(0)] - a_{12}[f_2(t) - f_2(0)]}{(trA)^2} + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon trA} \int_0^t [a_{22}f_1(\xi) - a_{12}f_2(\xi) - f_1(0)trA] d\xi - \\
 & - \left[ \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} - \frac{a_{22}\dot{f}_1(0) - a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2} \right] \int_0^t e_\varepsilon(t) dt + \\
 & + \frac{\varepsilon}{(trA)^2} \int_0^t y(\xi, \varepsilon, a_{22}\ddot{f}_1 - a_{12}\ddot{f}_1) d\xi - \frac{\varepsilon}{trA} \int_0^t y(\xi, \varepsilon, \ddot{f}_1) d\xi + \frac{f_1(0) \cdot t}{\varepsilon} = \\
 & = \left| \varepsilon \dot{e}_\varepsilon + trA e_\varepsilon = 0, e_\varepsilon(0) = 1, \Rightarrow \int_0^t e_\varepsilon(\xi) d\xi = -\frac{\varepsilon[e_\varepsilon(t) - 1]}{trA} \right| = \\
 & = \frac{f_1(t) - f_1(0)}{trA} - \frac{a_{22}[f_1(t) - f_1(0)] - a_{12}[f_2(t) - f_2(0)]}{(trA)^2} + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon trA} \int_0^t [a_{22}f_1(\xi) - a_{12}f_2(\xi)] d\xi + \left[ \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} \varepsilon + \right. \\
 & \left. + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{trA} - f_1(0) - \frac{a_{22}\dot{f}_1(0) - a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2} \varepsilon \right] \cdot \frac{e_\varepsilon(t) - 1}{trA} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{(trA)^2} \int_0^t y(\xi, \varepsilon, a_{22}\ddot{f}_1 - a_{12}\ddot{f}_1) d\xi - \frac{\varepsilon}{trA} \int_0^t y(\xi, \varepsilon, \ddot{f}_1) d\xi;
 \end{aligned}$$

Тогда для нормы  $x_1(t)$  имеем оценку:

$$\|x_1(t)\| \leq \frac{\|f_1(t)\| + |f_1(0)|}{trA} + \frac{|a_{22}|[\|f_1(t)\| + |f_1(0)|] + |a_{12}|[\|f_2(t)\| + |f_2(0)|]}{(trA)^2} + \frac{1}{\varepsilon trA} \left\| \int_0^t [a_{22}f_1(\xi) - a_{12}f_2(\xi)] d\xi \right\| + \left| \frac{\dot{f}_1(0)}{trA} \varepsilon + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{trA} - f_1(0) - \frac{a_{22}\dot{f}_1(0) - a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2} \varepsilon \right| \cdot \frac{\|e_\varepsilon\| + 1}{trA} + \frac{\varepsilon}{(trA)^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\|a_{22}\ddot{f}_1 - a_{12}\ddot{f}_2\|}{trA} + \frac{\varepsilon}{trA} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\|\ddot{f}_1\|}{trA}.$$

Следовательно, если  $\int_0^t [a_{22}f_1(\xi) - a_{12}f_2(\xi)] d\xi \neq 0$ , то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|x_1(t)\| = +\infty$ .

Этот факт является нежелательным.

### 5. Выводы.

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, с постоянными коэффициентами можно получить с помощью спектральной теории, при этом возможно оценка остаточного члена через коэффициенты системы уравнений.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Математический сборник. 1948. Т.22. - №2. - с.193-204.
- [2] Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. // Математический сборник. 1950. 27(69) – с.147-156.
- [3] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Математический сборник. 1952. Т.31(73). - №3. - с.575-586.
- [4] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. // УМН. 1957. Т.12. - №5. - с.3-122.
- [5] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР. 1958. Т.121. - №5. - с.778-781.
- [6] Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. // УМН. 1963. Т.18. - №3. - с.15-86.
- [7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272с.
- [8] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 200с.
- [9] Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем. Фрунзе. Илим. 1972. 356с.
- [10] Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем. Фрунзе. Илим. 1974. 352с.
- [11] Бутузов В.Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области.// Дифференциальные уравнения. 1975. Т.2. - №6. – с.1030-1041.
- [12] Бутузов В.Ф. Угловой погранслои в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.// Математический сборник. 1977. Т.104. - №3. – с.460-485.
- [13] Тупчиев В.А. Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производных. // ДАН СССР. 1962. Т.143. - №6. – с.1296-1299.
- [14] Треногин В.А. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Математический сборник. 1952. Т.31(73). - №3. – с.575-586.
- [15] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400с.
- [16] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т.К спектральной теории с отклоняющимся аргументом, Математический журнал, Алматы, т.4., №3. с.41-48, 2004.
- [17] Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Дифференциальные уравнения, 26 (1), 55–59 (1990).
- [18] Кальменов Т.Ш., Исакова У.А. Дифференциальные уравнения, 45 (10), 1460–1466 (2009).
- [19] Orazov I., Shaldanbaev A., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [20] Kal'menov T.Sh. and Shaldanbayev A.S. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18 (5), 471–492 (2010).
- [21] Shaldanbayev A.Sh., Orazov I., and Shomanbayeva M. AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930498>.
- [22] Садыбеков М.А., Турметов Б.Х., Торбек Б.Т., Дифференциальные уравнения электронный журнал, 2014, N157(2014).
- [23] Садыбеков М.А., Турметов Б.Х., Дифференциальные уравнения электронный журнал, 50:2, 268–273 (2014).

- [24] Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Искакова У.А. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 24:6, 777–783 (2016).  
[25] Садыбеков М.А., Дилдәбек Г., Тенгаева А. Filomat 31:4, 981–987 (2017).  
[26] Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С., Mathematical Notes, 101:5, 878–887 (2017).  
[27] Садыбеков М.А., Торекбек Б.Т., Турметов Б.Х., Сибирский математический журнал 58:1, 153–158 (2017).  
[28] Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Сибирский математический журнал 58:2, 227–231 (2017).

#### REFERENCES

- [1] Tikhonov A.N. Mat. Sbornik 22 (2) 193–204 (1948). (In Russian.) А.Н. Тихонов  
[2] Tikhonov A.N. Mat. Sbornik 27 (69) 147–156 (1950). (In Russian.)  
[3] Tikhonov A.N. Mat. Sbornik 31 (33) 575–586 (1952). (In Russian.)  
[4] Vishik M. and Lyusternik L. Usp. Mat. Nauk 12, 3–122 (1957). (In Russian.)  
[5] Vishik M. and Lyusternik L. Reports of the Academy of Sciences of USSR 121 (5), 778–781 (1958). (In Russian.)  
[6] Vasil'eva A. Usp. Mat. Nauk 18 (3), 15–86 (1963). (In Russian.)  
[7] Vasil'eva A. and Butuzov V. Asymptotic Expansions of the Solutions of Singularly Perturbed Equations, Nauka, Moscow, 1973. (In Russian).  
[8] Vasil'eva A. and Butuzov V. Asymptotic Methods in the Theory of Singularly Perturbation, Vischaja Shkola, Moscow, 1990. (In Russian).  
[9] Imanaliev M.I. Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Bishkek, Ilim, 1972. (In Russian).  
[10] Imanaliev M.I. Oscillations and stability of singularly perturbed integro - differential systems, Bishkek, Ilim, 1974. (In Russian).  
[11] Butuzov V. Comput. Math. Math. Phys., 12(3), 14–34 (1972).  
[12] Butuzov V. The angular boundary layer in mixed singularly perturbed problems for hyperbolic equations, Math., USSR-Sb. 33, 403–425 (1977).  
[13] Tupchiev V., Reports of the Academy of Sciences of USSR 143 (6), 1296–1299 (1962).  
[14] Trenogin V. Russian Math. Surveys 25, pp. 119–156 (1970).  
[15] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.  
[16] Kal'menov T.Sh., Akhmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. “On the spectral theory of the equations with deviating argument,” Mat. Zh. Almaty, vol. 4, № 3. pp. 41–48, 2004. (In Russian).  
[17] Kal'menov T.Sh. and Sadybekov M.A. Differential Equations 26 (1), 55–59 (1990).  
[18] Kal'menov T.Sh. and Iskakova U.A. Differential Equations 45 (10), 1460–1466 (2009).  
[19] Orazov I., Shaldanbaev A.Sh., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument. // Abstract and Applied Analysis. Volume 2013 (2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.  
[20] Kal'menov T.Sh. and Shaldanbaev A.S. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18 (5), 471–492 (2010).  
[21] Shaldanbaev A.Sh., Orazov I., and Shomanbayeva M. AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930498>.  
[22] Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh. and Torebek B. T. Electronic Journal of Differential Equations 2014, Article Number 157 (2014).  
[23] Sadybekov M. A. and Turmetov B. Kh. Differential Equations 50:2, 268–273 (2014).  
[24] Kal'menov T. S., Sadybekov M. A. and Iskakova U. A. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 24:6, 777–783 (2016).  
[25] Sadybekov M., Dildabek G. and Tengayeva A. Filomat 31:4, 981–987 (2017).  
[26] Sadybekov M. A. and Imanbaev N. S. Mathematical Notes, 101:5, 878–887 (2017).  
[27] Sadybekov M. A., Torebek B. T. and Turmetov B. Kh. Siberian Mathematical Journal 58:1, 153–158 (2017).  
[28] Kal'menov T. Sh. and Sadybekov M. A. Siberian Mathematical Journal 58:2, 227–231 (2017).

ӘОК 517.94

**А.Б.Иманбаева, А.Ш.Шалданбаев, А.А.Копжасарова**

М.О. Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.

#### **КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТҰРАҚТЫ КӘДІМГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР СИСТЕМАСЫНЫҢ СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИ ЕСЕБІН СПЕКТРӘЛДІК ӘДІСПЕН ШЕШУ**

**Аннотация:** Бұл еңбекте спектрәлдік әдіс бойынша, коэффициенттері тұрақты кәдімгі дифференциалдық теңдеулер системасының сингуляр әсерленген Коши есебі шешілді  $L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \vec{f}(t)$ .

**Ключевые слова:** сингуляр әсерленген, спектрәлді әдіс, Гильберт-Шмидттің теоремасы, қаспақ, асимптотикалық таралым.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 127 – 133

UDC 517.94

**A.A. Kopzhasarova, A.Sh. Shaldanbayev, A.B. Imanbayeva**

Southern Kazakhstan state university of Auezov M.  
[shaldanbaev51@mail.ru](mailto:shaldanbaev51@mail.ru)

**THE DECISION IS SINGULAR THE INDIGNANT TASK  
 OF CAUCHY BY A SIMILARITY METHOD**

**Abstract:** In the real work, the similarity method, has received frontier layer decomposition of the decision is singular the indignant task of Cauchy:

$$L_{\varepsilon}y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), y(0) = 0,$$

where  $q(x) \geq \alpha > 0$ ,  $f(x) \in W_2^n[0,1]$ ,  $q(x) \in W_2^n[0,1]$ .

**Keywords:** singulary, self-conjugate operator, similarity method, Gilbert-Schmidt's theorem, spectral decomposition, interface, asymptotic decomposition.

УДК 517.94

**А.А.Копжасарова, А.Ш.Шалданбаев, Иманбаева А.Б.**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О. Ауезова, г.Шымкент

**Решение сингулярно возмущенной задачи Коши  
 методом подобия**

**Аннотация:** В настоящей работе, методом подобия, получено погранслоное разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши:

$$L_{\varepsilon}y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), y(0) = 0,$$

где  $q(x) \geq \alpha > 0$ ,  $f(x) \in W_2^n[0,1]$ ,  $q(x) \in W_2^n[0,1]$ .

**Ключевые слова:** сингулярный, самосопряженный оператор, метод подобия, теорема Гильберта-Шмидта, спектральное разложение, пограничный слой, асимптотическое разложение.

**1.Введение.** Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_{\varepsilon}y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), 0 < x \leq 1 \quad (1.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (1.2)$$

где  $f(x) \in L^2(0,1)$ ,  $q(x) \in C[0,1]$ ,  $\varepsilon > 0$  - малый параметр.

**Определение 1.1.** Регулярным решением начальной задачи (1.1)-(1.2) называется непрерывно дифференцируемая в  $(0,1]$  и непрерывная в  $[0,1]$  функция  $y(x)$ , удовлетворяющая уравнения (1.1) и начального условия (1.2).

**Определение 1.2.** Функция  $y(x)$  называется сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.2), если существует последовательность регулярных решений  $\{y_n(x)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  начальных задач (1.1)-(1.2), такая, что  $Ly \rightarrow f$ ,  $y_n \rightarrow y$  в пространстве  $L^2(0,1)$ .

**Определение 1.3.** Начальная задача (1.1)-(1.2) называется сильно разрешимой, если для любого  $f(x) \in L^2(0,1)$  существует единственное сильное решение начальной задачи (1.1)-(1.2).

Отметим, что при изучении различных сингулярно возмущенных задач возникает необходимость изучения задачи (1.1)-(1.2) [1.]. Существуют различные методы решения этой задачи [1-5], но все они, или почти все являются полуэмпирическими. В этих работах точно указываются порядок остаточного члена по малому параметру  $\varepsilon$ , но коэффициент при параметре остается не известным [6-8]. Среди прикладников бытует мнение, что сингулярно возмущенные задачи стоят обособленно от остальной математики, поэтому широко известные методы здесь не применимы. Но как показаны в работах [9-15], такие задачи можно решать методами спектральной теории операторов [16-17], что и сделано в данной работе.

## 2. Метод исследования.

Сначала покажем сильную разрешимость начальной задачи (1.1)-(1.2).

**Теорема 2.1.** Если  $q(x)$  непрерывная функция на отрезке  $[0,1]$ , удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \min q(x) = \alpha > 0, \quad (2.1)$$

то начальная задача (1.1)-(1.2) сильно разрешима в пространстве  $L^2(0,1)$  и это сильное решение имеет вид:

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \mu_n} \cdot T^{-1} \varphi_n(x), \quad (2.2)$$

где

$$Tf(x) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot f(x), T^{-1}g(x) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot g(x),$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \mu_n x, \mu_n = (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots, S\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x), n = 0, 1, 2, \dots$$

**Доказательство.**

**(а) Единственность.** Предварительно докажем одну лемму, которая может иметь и самостоятельное значение.

**Лемма 2.1.** Если  $q(x)$  непрерывная в  $[0,1]$  функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \alpha > 0, \quad (2.1)$$

то для любой функции  $y(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1]$  и удовлетворяющей условию  $y(0) = 0$  имеет место неравенство:

$$\|L_\varepsilon y\| \geq \alpha \cdot \|y\|. \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Умножив обе части уравнения (1.1) скалярно на  $y(x)$ , получим:

$$\varepsilon(y', y) + (q(x)y, y) = (f(x), y),$$

или

$$\frac{\varepsilon y^2(1)}{2} + \int_0^1 q(x)y^2 dx = \int_0^1 f(x)y(x) dx.$$

Отсюда в силу неравенства (2.1), имеем

$$\alpha \cdot \|y\|^2 \leq \frac{\varepsilon y^2(1)}{2} + \int_0^1 q(x)y^2 dx = (f, y) \leq |(f, y)| \leq \|y\| \cdot \|f\|.$$

Сократив обе части полученного неравенства на  $\|y\|$ , получим требуемое утверждение леммы. Из этой леммы следует единственность сильного решения.



Предположим, что начальная задача (1.1)-(1.2) имеет более двух решений, тогда существуют по крайней мере два решения:  $u(x)$  и  $v(x)$  такие, что  $\|u(x) - v(x)\| \neq 0$ , и  $u_n \rightarrow u, L_\varepsilon u_n \rightarrow f; v_n \rightarrow v, L_\varepsilon v_n \rightarrow f, (n \rightarrow \infty)$ , где  $\{u_n(x)\}$  и  $\{v_n(x)\}$  последовательности классических решений задачи (1.1)-(1.2). Тогда их разность  $z_n = u_n - v_n$  является решением регулярной задачи  $L_\varepsilon z_n = f_n - g_n, n = 1, 2, \dots$ , поэтому в силу неравенства (2.3) имеет место неравенства:

$$\alpha \cdot \|z_n\| \leq \|L_\varepsilon z_n\| = \|f_n - g_n\|, n = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\alpha \cdot \|u - v\| = 0, \Rightarrow \|u - v\| = 0,$$

что противоречит нашему предположению, мы пришли к противоречию, стало быть не верно наше предположение о существовании более двух решений. Следовательно, существует не более одного решения.

**(б) Существование решения.** Пусть

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x) = T^{-1} \sum_{n=0}^N \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi_n(x),$$

тогда

$$y_N(x) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot \sum_{n=0}^N \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi_n(x),$$

поэтому

$$y'_N(x) = -\frac{q(x)}{\varepsilon} y_N(x) + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot \sum_{n=0}^N \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi'_n(x) = -\frac{q(x)}{\varepsilon} y_N(x) + \\ + \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot \sum_{n=0}^N \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon} \cdot S\varphi_n.$$

Следовательно,

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon \cdot y'_N + q(x)y_N(x) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot \sum_{n=0}^N (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n.$$

Оператор  $S$  является унитарным оператором, поэтому он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, стало быть, имеет место Фурье разложение:

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^N (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x),$$

следовательно, последовательность  $\sum_{n=0}^N (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x)$  является фундаментальной в  $L^2(0,1)$ . Тогда из непрерывности оператора  $T^{-1}$  следует фундаментальность последовательности  $\{L_\varepsilon y_N\}$ ,  $N = 1, 2, \dots$  в  $L^2(0,1)$ , а из априорной оценки (2.3) видно фундаментальность  $\{y_N\}$  в  $L^2(0,1)$ .

Заметим, также, что функция

$$\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt\right) \cdot \sum_{n=0}^N (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n$$

непрерывно в  $[0,1]$ , поэтому  $\{y_N(x)\}$ - есть последовательность классических решений. Итак, нами установлено, что  $y_N(x) \rightarrow u(x), L_\varepsilon y_N = g_n \rightarrow g$  в  $L^2(0,1)$ , поэтому функция  $u(x)$  является сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.2).

Теперь исследуем гладкость полученного сильного решения. В силу (2.1) и (2.3) имеет место неравенство

$$\|q(x)y_N(x) - q(x)y_{N'}(x)\| = \|q(x)[y_N(x) - y_{N'}(x)]\| = \left[ \int_0^1 q^2(x)[y_N(x) - y_{N'}(x)]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |q| \cdot \|y_N - y_{N'}\| \leq \frac{\max |q|}{\alpha} \|L_\varepsilon y_N - L_\varepsilon y_{N'}\|,$$

поэтому последовательность  $\{q(x)y_N(x)\}$  также фундаментальна в пространстве  $L^2(0,1)$ , следовательно, последовательность  $\{y_{N'}\}, N = 1, 2, \dots$  также фундаментальна в пространстве  $L^2(0,1)$ . Таким образом, существуют функции  $y(x)$  и  $y'(x)$  из  $L^2(0,1)$ , такие, что  $y_N(x) \rightarrow y(x), y_{N'}(x) \rightarrow y'(x)$  в  $L^2(0,1)$ , а это означает, что функция  $y(x)$  является элементом пространства Соболева  $W_2'[0,1]$ . Известно, что элементы этого пространства есть абсолютно непрерывные функции, имеющие обобщенные производные первого порядка, суммируемые с квадратом в  $[0,1]$ .

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$  в формуле

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x),$$

получим

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x),$$

а переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , в равенстве

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon \cdot y'_N + q(x)y_N(x) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^N (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n =$$

$$T^{-1} \cdot \sum_{n=0}^N (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x),$$

получим

$$L_\varepsilon y = T^{-1} \cdot Tf = f(x).$$

**Следствие 2.1.** Для любого сильного решения задачи Коши имеет место неравенство:

$$\|y\| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \|f\|,$$

иначе говоря,

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} \quad (2.4)$$

### 3. Результаты исследований

Нами доказана следующая основная,

**Теорема 3.1.** Если

$$(a) f(x) \in W_2^n[0,1], q(x) \in W_2^n[0,1];$$

$$(б) q(x) \geq \alpha > 0,$$

то сильное решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1.1)-(1.2) принадлежит пространству  $W_2^{n+1}[0,1]$ , и удовлетворяет оценке:

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{J^k f(x)}{q(x)} - \frac{J^k f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t)dt} \right] \cdot \varepsilon^k \right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{\alpha} \cdot \|J^n f\|,$$

где  $Jf(x) = \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{q(x)}, J^0 = I$  - единичный оператор.

#### 4. Обсуждение результатов

##### Вывод асимптотического разложения.

Из Фурье представления сильного решения сингулярно возмущенной задачи можно вывести погранслойное разложение, оно появляется из формулы коэффициентов Фурье, при интегрировании по частям. Предполагая функции  $f(x)$  и  $g(x)$  достаточно гладкими, преобразуем коэффициенты Фурье формулы (2.2), с целью вывода погранслойного разложения.

$$\begin{aligned} (Tf, S\varphi_n) &= \int_0^1 e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} f(x) \varphi_n(1-x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_n(1-x) \frac{\varepsilon}{q(x)} d e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} = \\ &= \varepsilon \int_0^1 \frac{f(x)}{q(x)} \varphi_n(1-x) d e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} = \varepsilon \frac{f(x)}{q(x)} \varphi_n(1-x) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} \Big|_0^1 - \\ &- \varepsilon \int_0^1 \left[ \left( \frac{f}{q} \right)' \varphi_n(1-x) - \frac{f}{q} \varphi_n'(1-x) \right] \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} dx = - \frac{f(0) \varphi_n(1)}{q(0)} \cdot \varepsilon - \\ &- \varepsilon \int_0^1 \left[ \frac{f(x)}{q(x)} \right]' e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} \cdot \varphi_n(1-x) dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{f(x)}{q(x)} \varphi_n'(1-x) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} dx = \\ &= - \frac{f(0)}{q(0)} \varphi_n(1) \cdot \varepsilon - \varepsilon \left( T \left( \frac{f}{q} \right)', S\varphi_n \right) + \varepsilon \mu_n \left( T \left( \frac{f}{q} \right)', \varphi_n \right); \end{aligned}$$

Подставив это выражение в формулу (2.2), получим формулу подчиняющемуся индуктивному методу

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1} \varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ - \frac{f(0) \varphi_n(1)}{q(0) \mu_n} - \frac{\left( T \left( \frac{f}{q} \right)', S\varphi_n \right)}{\mu_n} + \left( T \left( \frac{f}{q} \right)', \varphi_n \right) \right] \cdot \\ &\cdot T^{-1} \varphi_n(x) = T^{-1} \left[ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0) \varphi_n(1)}{\mu_n} \varphi_n(x) \right] - \varepsilon y \left( x, \varepsilon, \left( \frac{f}{q} \right)' \right) + T^{-1} T \left( \frac{f}{q} \right)' = \\ &= \frac{f(x)}{q(x)} - T^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0) \varphi_n(1)}{q(0) \mu_n} \varphi_n(x) - \varepsilon y \left( x, \varepsilon, \left( \frac{f}{q} \right)' \right) = \\ &= \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} - \varepsilon y \left( x, \varepsilon, \left( \frac{f}{q} \right)' \right), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где для удобства использовано обозначение  $y(x, \varepsilon) = y(x, \varepsilon, f)$  – решение сингулярно возмущенной задачи Коши с правой частью  $f$ . Поясним появление второго члена:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sqrt{2} \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ отсюда } \varphi_n(1) = (-1)^n \sqrt{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \varphi_n(1) \cdot \varphi_n(x) &= 2(-1)^n \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{\varphi_n(1) \cdot \varphi_n(x)}{\mu_n} &= \frac{2(-1)^n \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x}{(-1)^n \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2 \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x}{\left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Единицу разложим в ряд Фурье по системе  $\{\varphi_n(x)\}$ .

$1 = \sum_{n=0}^{\infty} (1, \varphi_n) \varphi_n(x)$ , где  $(1, \varphi_n)$  – Фурье коэффициенты.

$$(1, \varphi_n) = \int_0^1 \sqrt{2} \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x dx = - \frac{\sqrt{2} \cos \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) x}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

$$(1, \varphi_n) \cdot \varphi_n(x) = \frac{2 \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\varphi_n(1) \cdot \varphi_n(x)}{\mu_n}.$$

Формула (3.1) позволяет применить, метод математической индукции, для вывода формулы остаточного члена погранслоного разложения. Для удобства дальнейших вычислений вводим оператор:

$$Jf(x) = \frac{d f(x)}{dx q(x)},$$

которая делит функцию  $f(x)$  на  $q(x)$ , затем дифференцирует полученный результат один раз. Тогда полученная нами формула (3.1) принимает вид:

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} - \varepsilon y(x, \varepsilon, Jf).$$

Предположим, что при  $m = n$  верна формула

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{J^k f(x)}{q(x)} - \frac{J^k f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} \right] \cdot \varepsilon^k + (-1)^n y(x, \varepsilon, J^n f) \cdot \varepsilon^n,$$

где  $J^0 = I$ . Покажем, что тогда она имеет место и при  $m = n + 1$ . В самом деле, по рекуррентной формуле, имеем:

$$y(x, \varepsilon, J^n f) = \frac{J^n f(x)}{q(x)} - \frac{J^n f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} - \varepsilon \cdot y(x, \varepsilon, J^{n+1} f),$$

поэтому

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{J^k f(x)}{q(x)} - \frac{J^k f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} \right] \cdot \varepsilon^k + (-1)^n \left[ \frac{J^n f(x)}{q(x)} - \frac{J^n f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} \right] \cdot \varepsilon^n + (-1)^{n+1} y(x, \varepsilon, J^{n+1} f) \cdot \varepsilon^{n+1}.$$

Таким образом,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{J^k f(x)}{q(x)} - \frac{J^k f(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x q(t) dt} \right] \cdot \varepsilon^k + (-1)^n y(x, \varepsilon, J^n f) \cdot \varepsilon^n$$

где  $J^0 = I$  - единичный оператор, а остаточный член  $y(x, \varepsilon, J^n f)$  является решением задачи Коши:

$$\varepsilon y'(x) + q(x)y = J^n f, y(0) = 0,$$

и поэтому удовлетворяет оценке:

$$\|y(x, \varepsilon, J^n f)\| \leq \frac{\|J^n f(x)\|}{\alpha}.$$

**5. Выводы.** Если коэффициент уравнения строго положительный, то остаток погранслоного разложения допускает оценку через этот коэффициент. Если требуемая точность равна  $\delta$ , то достаточно брать  $\frac{\|J^n f(x)\|}{\alpha} \varepsilon^n < \delta$ . По видимому, это весомый аргумент при численном решении задачи Коши, особенно в той ситуации, когда величина  $\alpha$  очень мала.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. -М.: Высш. шк. 1990. -200с.  
 [2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслоный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.  
 [3] Tikhonov A. N. Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).  
 [4] Imanaliev M. I. Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

- [5] Lomov S. Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [6] Butuzov V. Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
- [7] Vasil'eva A., and Tupchiev V. Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
- [8] Trenogin V. Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
- [9] Kal'menov T. Sh., Akhmetova S. T., and Shaldanbaev A. Sh, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).
- [10] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
- [11] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
- [12] A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
- [13] Orazov I., Shaldanbaev A, Sh, Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363,6 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [14] Shaldanbaev A. Sh. Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498.
- [15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova. Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
- [16] Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.: Наука ,1966, 544с.
- [17] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

## REFERENCES

- [1] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimtoticheskie metody v teorij singuljarnyh vozmushhenij.-М.: Vyssh. shk. **1990**.-200s.
- [2] Vishik M.I., Ljusternik A.A. Reguljarnoe vyrozhdzenie i pogranslojnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s Malym parametrom // Uspehi matematicheskikh nauk, **1957**. №5. s.3-122.
- [3] Tikhonov A. N. Mat. Sbornik 27, 147-156 (**1950**), (in Russian).
- [4] Imanaliev M. I. Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek.
- [5] Lomov S. Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [6] Butuzov V. Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (**1972**).
- [7] Vasil'eva A., and Tupchiev V. Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (**1968**).
- [8] Trenogin V. Russian Math. Surveys 25, 119-156 (**1970**).
- [9] Kal'menov T. Sh., Akhmetova S. T., and Shaldanbaev A. Sh. Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (**2004**), (in Russian).
- [10] Kal'menov T. Sh., and Iskakova U. A. Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (**2009**).
- [11] Kal'menov T. Sh., and Shaldanbaev A. Sh. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (**2010**).
- [12] Kopzhassarova A., and Sarsenbi A. Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (**2012**), (Article ID 576843).
- [13] Orazov I., Shaldanbaev A, Sh, Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(**2013**). Article ID 128363,6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [14] Shaldanbaev A. Sh. Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov. Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (**2015**); doi: 10.1063/1.4930498.
- [15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (**2016**); doi: 10.1063/1.4959704.
- [16] Ahiezer N.N., Glazman N.M. Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve.-М.:Nauka, **1966**.,-544s.
- [17] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoy fiziki. Т.1-2. – М.: Мир, **1977**.

ӨОЖ 517.94

А.А. Копжасарова, А.Ш. Шалданбаев, А.Б. Иманбаева

Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақсан университеті, Шымкент қ.

Ұқсастық әдісі бойынша, сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу

**Аннотация:** Бұл еңбекте, мына,  $L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), y(0) = 0$ , сингуляр әсерленген Коши есебінің шешімінің асимптотикалық таралымы алынды, мұндағы  $q(x) \geq \alpha > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], q(x) \in W_2^n[0,1]$ .

**Тірек сөздер:** сингуляр, жалқы оператор, ұқсастық әдісі, Гилберт пен Шмидтің теоремасы, спектрал-дік таралым, қаспақ, асимптотикалық таралым.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 134 – 142

**V.N. Kossov<sup>1</sup>, D.B. Zhakebaev<sup>2</sup>, O.V. Fedorenko<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup> Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>3</sup> Institute of Experimental and Theoretical Physics, Almaty, Kazakhstan

[kosov\\_vlad\\_nik@list.ru](mailto:kosov_vlad_nik@list.ru)

**NUMERICAL ANALYSIS OF CONVECTIVE MOTIONS  
OCCURRING UNDER ISOTHERMAL DIFFUSION IN THE VERTICAL  
CHANNELS IN TERNARY GASEOUS MIXTURES**

**Abstract.** There is a wide variety of mixing regimes in a multicomponent gas mixture. Solution of the issues related to the boundary determination of change in the diffusion-convection regimes in multicomponent mixtures, the parameters indicating the occurrence of a convective regime are important for the problems of convective mass transfer.

The paper proposes a computational model on the study of diffusion isothermal transport in ternary gas mixtures having different ratios between the transport coefficients over time by means of 2-D modeling in a vertical cylindrical channel of finite dimensions.

The isothermal diffusion mixing in three-component gas mixtures in cylindrical vertical channels is considered by the splitting method into physical parameters. It is shown that in systems where the diffusion coefficients of the components are comparable with each other, the instability of mechanical equilibrium is impossible. Convective motions may arise for systems in which there is a significant difference in the diffusion coefficients of components. Flows with low velocities arise at the initial stage. Then, developed structured currents are realized. The results of the calculations are in satisfactory agreement with the experimental data, which makes it possible to recommend the proposed approach for determining the boundary of change in the diffusion-to-concentration convection regimes in gas mixtures.

**Key words:** diffusion, convection, gases, mixtures, numerical analysis.

УДК 533.15:536.25

**В.Н.Косов<sup>1</sup>, Д.Б. Жакебаев<sup>2</sup>, О.В. Федоренко<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

<sup>3</sup> Институт экспериментальной и теоретической физики, Алматы, Казахстан

**Численный анализ конвективных движений, возникающих  
при изотермической диффузии в вертикальных  
каналах в трехкомпонентных газовых смесях**

**Аннотация.** В многокомпонентных газовых смесях имеет место большое разнообразие режимов смешения. Решение вопросов связанных с определением границы смены режимов «диффузия – конвекция» в многокомпонентных смесях, параметров определяющих возникновение конвективного режима являются важными для задач конвективного массопереноса.

В работе предлагается расчетная модель по изучению диффузионного изотермического переноса в трехкомпонентных газовых смесях с различными соотношениями между коэффициентами переноса с течением времени посредством 2-D моделирования в вертикальном цилиндрическом канале конечных размеров.

Методом расщепления по физическим параметрам рассмотрено изотермическое диффузионное смешение в трехкомпонентных газовых смесях в цилиндрических вертикальных каналах. Показано, что в системах, где коэффициенты диффузии компонентов сравнимы друг с другом, неустойчивость механического равновесия невозможна. Для систем, в которых имеет место существенное отличие коэффициентов диффузии компонентов могут возникнуть конвективные движения. На начальной стадии возникают течения с малыми скоростями. Затем реализуются развитые структурированные течения. Результаты расчетов находятся в удовлетворительном согласии с опытными данными, что позволяет рекомендовать предлагаемый подход для определения границы смены режимов «диффузия – концентрационная конвекция» в газовых смесях.

**Ключевые слова:** диффузия, конвекция, газы, смеси, численный анализ.

### Введение

В многокомпонентных газовых смесях существует большое разнообразие режимов смешения [1]. Интенсивность массопереноса в них определяется молекулярным, конвективным, а чаще всего совместным действием перечисленных режимов. При этом практически не принимается во внимание факт, что молекулярная диффузия может привести к неустойчивости механического равновесия смеси с последующим возникновением естественной конвекции, которая заметно интенсифицирует суммарный массоперенос [2]. Причем возникновение и развитие концентрационной конвекции происходит не только в рамках традиционных представлений тепловых задач Рэлея [3], но и для ситуаций, когда движения возникают при устойчивой стратификации в изотермической смеси [4,5]. В опытах по изучению смешения в многокомпонентных системах [6], диффузии смеси паров растворов в инертный газ [7] были зарегистрированы конвективные течения, приводящие к синергетическому эффекту, связанному со значительным увеличением скорости смешения компонентов системы. Поэтому решение вопросов связанных с определением механизма смены режимов «диффузия – конвекция» в многокомпонентных газовых смесях, параметров определяющих возникновение конвективного режима являются важными для задач конвективного массопереноса.

В работе предлагается расчетная модель по изучению диффузионного изотермического переноса в трехкомпонентных газовых смесях с различными соотношениями между коэффициентами переноса с течением времени посредством 2-D моделирования в вертикальном цилиндрическом канале конечных размеров. Проводится сравнение между расчетными результатами и опытными данными.

### Базовые уравнения

Конвективное смешение изотермической тройной газовой смеси описывается общей системой уравнений гидродинамики, которая включает в себя записанные в приближении Буссинеска уравнения Навье-Стокса, сохранения числа частиц смеси и компонентов [6, 8-10]. Принимая во

внимание условие независимой диффузии, при которой для газовой смеси  $\sum_{i=1}^3 \vec{j}_i = 0$ ;  $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$ ,

эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla \vec{u}) \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \rho \vec{g},$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{v} \nabla c_i = -\operatorname{div} \vec{j}_i, \quad (1)$$

$$\vec{j}_1 = -(D_{11}^* \nabla c_1 + D_{12}^* \nabla c_2),$$

$$\vec{j}_2 = -(D_{21}^* \nabla c_1 + D_{22}^* \nabla c_2).$$

Здесь  $\vec{u}$  – вектор среднemasовой скорости;  $\vec{v}$  – вектор среднечисловой скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $\eta$  и  $\zeta$  – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости;  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения;  $n$  – числовая плотность;  $t$  – время;  $c_i$  – концентрация  $i$ -го компонента;  $\vec{j}_i$  – вектор плотности диффузионного потока  $i$ -го компонента;  $D_{ij}^*$  – практические коэффициенты диффузии, которые определяются через коэффициенты взаимной диффузии  $D_{ij}$

$$D_{11}^* = \frac{D_{13} [c_1 D_{32} + (c_2 + c_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{12}^* = -\frac{c_1 D_{23} (D_{12} - D_{13})}{D},$$

$$D_{22}^* = \frac{D_{23} [c_2 D_{13} + (c_1 + c_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{21}^* = -\frac{c_2 D_{13} (D_{12} - D_{23})}{D},$$

$$D = c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}.$$

Связь между  $\vec{j}_i$ ,  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  определяется соотношением

$$\vec{v} = \sum \vec{j}_i / c_0, \quad \vec{u} = \sum m_i \vec{j}_i / \rho,$$

где  $m_i$  – молекулярная масса  $i$ -го компонента,

$$\rho = \sum m_i c_i, \quad c_0 = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Система уравнений (1) дополняется уравнением состояния среды

$$\rho = \rho(c_1, c_2, p), \quad T = \text{const} \quad (2)$$

Упростим (1), (2) используя метод малых возмущений [8-10], в котором предполагается, что концентрацию  $i$ -го компонента  $c_i$  и давление  $p$  представим в виде суперпозиции постоянных средних значений  $\langle c_i \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ , принимаемых в качестве начала отсчета и малых возмущений  $c_i'$ ,  $p'$  следующим образом:

$$c_i = \langle c_i \rangle + c_i', \quad p = \langle p \rangle + p'.$$

Возмущения  $c_i'$ ,  $p'$  малы и обусловленные ими отклонения плотности  $c'$  от среднего значения  $c_0 = c(\langle c_i \rangle, \langle p \rangle)$  малы по сравнению с  $c_0$ , а также считая, что различия в возмущенных значениях скоростей не существенны [8], систему уравнений (1) возможно свести к возмущенным уравнениям (штрихи опущены) следующего вида

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + g(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \vec{y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \vec{u} \nabla c_1 = D_{11}^* \nabla^2 c_1 + D_{12}^* \nabla^2 c_2,$$



$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \vec{u} \nabla c_2 = D_{21}^* \nabla^2 c_1 + D_{22}^* \nabla^2 c_2,$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

В системе уравнений (3)  $\nu = \eta / \rho$  – кинематическая вязкость смеси,  $\beta_i$  – изотермический аналог коэффициента теплового расширения,  $\vec{y}$  – единичный вектор.

Обезразмерим уравнения (3) относительно заданных масштабных единиц: длины –  $x_1^* = \frac{x}{H}$ ,  $x_2^* = \frac{z}{H}$ , времени –  $\tau = \frac{t\nu}{H^2}$ , скорости –  $u_1^* = \frac{uH}{D_{22}^*}$ ,  $u_2^* = \frac{wH}{D_{22}^*}$ , давления –

$p^* = p \frac{H^2}{\rho_0 \nu D_{22}^*}$ , концентрации  $i$ -го компонента  $c_1^* = \frac{c_1}{A_1 H}$ ,  $c_2^* = \frac{c_2}{A_2 H}$ . Преобразованная

безразмерная система уравнений имеет следующий вид (здесь и далее знак «\*» опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{1}{P_{22}} u_1 \frac{\partial(u_1)}{\partial(x_1)} + \frac{1}{P_{22}} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial(x_2)} &= -\frac{\partial p}{\partial(x_1)} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial(x_1)^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial(x_2)^2} + R_1 c_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{1}{P_{22}} u_1 \frac{\partial(u_2)}{\partial(x_1)} + \frac{1}{P_{22}} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial(x_2)} &= -\frac{\partial p}{\partial(x_1)} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial(x_1)^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial(x_2)^2} + R_2 c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(c_1)}{\partial(\tau)} + \frac{1}{P_{22}} u_1 \frac{\partial(c_1)}{\partial(x_1)} + \frac{1}{P_{22}} u_2 \frac{\partial(c_1)}{\partial(x_2)} &= \\ \frac{1}{P_{11}} \frac{\partial^2(c_1)}{\partial(x_1)^2} + \frac{1}{P_{11}} \frac{\partial^2(c_1)}{\partial(x_2)^2} + \frac{1}{P_{12}} \frac{\partial^2(c_2)}{\partial(x_1)^2} + \frac{1}{P_{12}} \frac{\partial^2(c_2)}{\partial(x_2)^2}, \\ \frac{\partial(c_2)}{\partial(\tau)} + \frac{1}{P_{22}} u_1 \frac{\partial(c_2)}{\partial(x_1)} + \frac{1}{P_{22}} u_2 \frac{\partial(c_2)}{\partial(x_2)} &= \\ \frac{1}{P_{21}} \frac{\partial^2(c_1)}{\partial(x_1)^2} + \frac{1}{P_{21}} \frac{\partial^2(c_1)}{\partial(x_2)^2} + \frac{1}{P_{22}} \frac{\partial^2(c_2)}{\partial(x_1)^2} + \frac{1}{P_{22}} \frac{\partial^2(c_2)}{\partial(x_2)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0.$$

Критериальными параметрами подобия являются:

$$P_{ii} = \frac{\nu}{D_{ii}^*} - \text{диффузионное число Прандтля}, \quad R_1 = \frac{g \beta_1 A_1 H^4}{D_{22}^* \nu}, \quad R_2 = \frac{g \beta_2 A_2 H^4}{D_{22}^* \nu} - \text{парциальное}$$

число Рэлея,  $A_1 = c_1/d$ ,  $A_2 = c_2/d$ .

Начальные условия:

1) Для скорости:  $u_i(x_1, x_2, \tau = 0) = 0, i = 1, 2$ .

2) Изучается процесс, когда тяжелые и легкие газы расположены в верхней части вычислительной области, а газ с промежуточной плотностью – в нижней части. Для концентрации в верхней вычислительной области  $S_1$  (рис. 1а):  $c_1|_{t=0, (x_1, x_2) \in S_1} = X_1$  для самого легкого по плотности компонента,  $c_2|_{t=0, (x_1, x_2) \in S_1} = X_2$  для самого тяжелого по плотности компонента,  $c_3|_{t=0, (x_1, x_2) \in S_1} = 0$  для компонента, который имеет промежуточную плотность,  $X_1, X_2$  мольные концентрации компонентов смеси в вычислительной области  $S_1$ .

3) Для концентрации в нижней вычислительной области  $S_0$  (рис. 1а):  $c_1|_{t=0, (x_1, x_2) \in S_0} = 0$  для легкого компонента,  $c_2|_{t=0, (x_1, x_2) \in S_0} = 0$  для тяжелого компонента,  $c_3|_{t=0, (x_1, x_2) \in S_0} = 1$  для компонента имеющего промежуточное значение плотности.

Граничные условия:

Для скорости смешения:  $u_i = 0, i = 1, 2$ ; для концентрации компонентов:  $\frac{\partial c_i}{\partial n} = 0, i = 1, 2$ .

### Численный алгоритм

Как следует из опытных данных смешение осуществляется в канале, который, как правило, имеет цилиндрическую форму. Тяжелый и легкий по плотностям компоненты бинарной смеси находятся в верхней части канала, а газ с промежуточной плотностью в нижней части канала. Для упрощения задачи рассматривается двумерная область сечение цилиндрической области  $H \times d$  в декартовой системе координат  $(x, y)$ , где  $H$  – высота цилиндрического канала, а  $d = 2r$  – диаметр (рис. 1б). Для регистрации изоконцентрационных линий, характеризующих возникновение и развитие конвекции, достаточно рассматривать часть данной области ( $H/d \gg 1$ ), где происходит диффузия компонентов (рис. 1б), пренебрегая остальными областями двумерной области.

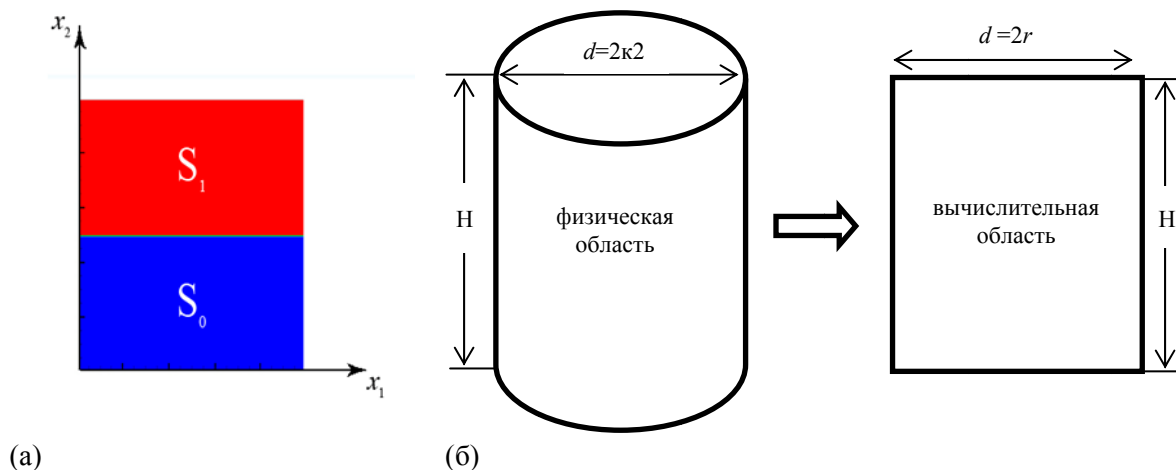


Рисунок 1 - Моделирование исследуемого процесса: а) Начальные условия размещения трехкомпонентных смесей в диффузионном канале; б) Физические и вычислительные области смешения

Для численного решения системы уравнений (3) используется схема расщепления по физическим параметрам. Пространственные производные аппроксимируются на равномерной прямоугольной сетке с числом узлов  $64 \times 64$ . Производные по времени аппроксимируются разностями вперед с первым порядком.

На первом этапе перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится методом пятиточечной прогонки [11] с

четвертым порядком точности по пространству и третьим порядком точности по времени с использованием явной схемы Адамса-Башфорта для конвективных членов и неявной схемы Кранка-Николсона для диффузионных членов [12]

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\tau} = -\bar{u}^n \nabla \bar{u}^{n+1} + \Delta \bar{u}^{n+1} + \tau_{11} Ra_1 C_1 + Ra_2 C_2. \quad (4)$$

На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Промежуточное поле скорости находится при использовании метода дробных шагов. На каждом этапе метода дробных шагов используется метод прогонки для нахождения этапных значений промежуточного поля скорости [13]

$$\Delta p = \frac{\nabla \bar{u}^{n+1}}{\tau}. \quad (5)$$

На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления, где пересчитывается окончательное поле скоростей

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n+1}}{\tau} = -\nabla p. \quad (6)$$

На четвертом этапе вычисляется концентрация компонентов смеси на основе метода пятиточечной прогонки с использованием схемы Адамса-Башфорта с учетом найденных полей скоростей.

$$\frac{\bar{C}_1^{n+1} - \bar{C}_1^n}{\tau} = -\left(\bar{u}^{n+1} \nabla\right) \bar{C}_1^{n+1} + \frac{1}{Pr_{11}} \Delta \bar{C}_1^{n+1} + \frac{1}{Pr_{12}} \Delta \bar{C}_2^{n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\bar{C}_2^{n+1} - \bar{C}_2^n}{\tau} = -\left(\bar{u}^{n+1} \nabla\right) \bar{C}_2^{n+1} + \frac{1}{Pr_{21}} \Delta \bar{C}_1^{n+1} + \frac{1}{Pr_{22}} \Delta \bar{C}_2^{n+1}. \quad (8)$$

### Результаты численного моделирования

Проанализируем результаты численного исследования, выполненные для реальных физических характеристики геометрических параметров канала по предложенной схеме (4) – (8). Основным допущением при моделировании является ограничение двумерными течениями. Как было показано экспериментальными исследованиями [5] в системах, где коэффициенты диффузии компонентов сравнимы друг с другом, массоперенос осуществляется за счет диффузии. Приведенные на рис. 2 а, б изоконцентрационные линии для системы  $0,65 \text{ CH}_4(1) + 0,35 \text{ Ar}(2) - \text{N}_2(3)$  практически не искривленные, что говорит об отсутствии конвективных возмущений в таких смесях.

Совершенно другая ситуация возникает в системе  $0,40 \text{ He}(1) + 0,60 \text{ Ar}(2) - \text{N}_2(3)$ , где  $D_{ij}$  существенно отличаются друг от друга. При давлении  $P \sim 2,0$  МПа изображение изоконцентрационных линий искривляются. С течением времени формируются условия для конвективных структурных формирований и происходит переход от диффузионного режима к конвективному. Полученные результаты совпадают с экспериментальными данными, наблюдаемыми в [4,6,8]. Таким образом, основным признаком смены режимов «диффузия – конвекция» это проявление искривления изоконцентрационных линий.

Результаты расчетов показывают, что на начальной стадии возникают течения с малыми скоростями. Затем развитие более интенсивных течений приводит к существенному искривлению изоконцентрационных линий и увеличения скорости переноса. Время потери устойчивости механического равновесия смеси для данной системы составляет десятки секунд, что соизмеримо с опытными данными, приведенными в [8]. Затем наблюдается быстрое развитие

конвективных течений. Конвективные течения реализуются в виде крупномасштабных структур. Таким образом, результаты сравнения показывают, что используемая модель и метод расчета позволяет определить параметры смены режимов «диффузия – концентрационная конвекция», получить надежные данные по концентрационным полям в режиме конвективной неустойчивости у изотермических трехкомпонентных газовых смесях.

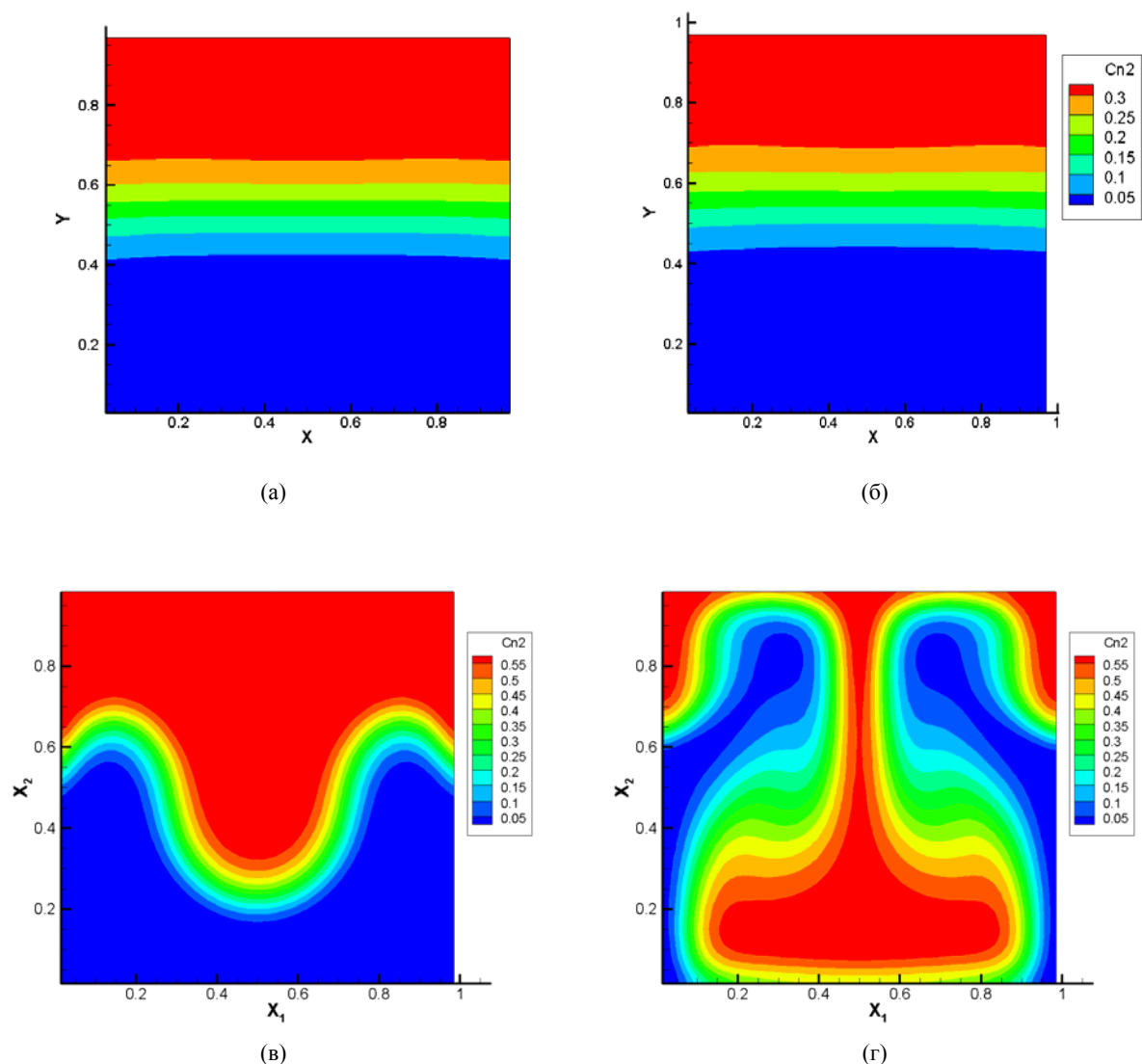


Рисунок 2 - Изоконцентрационные линии для трехкомпонентных систем: а)  $0,65 \text{ CH}_4$  (1) +  $0,35 \text{ Ar}$  (2) –  $\text{N}_2$  (3),  $P = 1,5$  МПа,  $t = 13,5$  с,  $T = 298,0$  К; б)  $0,65 \text{ CH}_4$  (1) +  $0,35 \text{ Ar}$  (2) –  $\text{N}_2$  (3),  $P = 2,0$  МПа,  $T = 298,0$  К,  $t = 18$  с; в)  $0,4 \text{ He}$  (1) +  $0,6 \text{ Ar}$  (2) –  $\text{N}_2$  (3),  $P = 2,5$  МПа,  $T = 298,0$  К,  $t = 10,55$  с; г)  $0,4 \text{ He}$  (1) +  $0,6 \text{ Ar}$  (2) –  $\text{N}_2$  (3),  $P = 2,5$  МПа,  $T = 298,0$  К,  $t = 20,30$  с.

Работа выполнялась в рамках проекта Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан №3482/ГФ, государственная регистрация 0115RK01033.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Taylor R, Krishna R (1993) Multicomponent mass transfer. John Wiley & Sons, Inc., New York. ISBN: 978-0-471-57417-0
- [2] Kaminskii V.A., Obvintseva N.Yu. (2007) Evaporation Regimes of Binary Solutions, Theor. Found. Chem. Engin., 41: 512-518. DOI: 10.1134/S0040579507050090
- [3] Джозеф Д. (1981) Устойчивость движений жидкости, пер. с англ. Мир, Москва.
- [4] Kosov V.N., Seleznev V.D., Zhavrin YuI. (1997). Separation of Components during Isothermal Mixing of Ternary Gas Systems under Free Convection Conditions. Tech. Phys., 42: 1236-1237. DOI: 10.1134/1.1258905

- [5] ZhavrinYu.I., Kosov V.N., Fedorenko O.V., Akzholova A.A. (2016) Some Features of the Multicomponent Gas Transfer in the Convective Instability of Gas Mixture. *Theor. Found. Chem. Engin.*, 50: 171-177. DOI: 10.1134/S0040579516020135
- [6] Kosov V.N., Fedorenko O.V., ZhavrinYu.I., Mukamedenkyzy V. (2014) Instability of Mechanical Equilibrium during Diffusion in a Three-component Gas Mixture in a Vertical Cylinder With a Circular Cross Section. *Tech. Phys.*, 59: 482-486. DOI: 10.1134/S1063784214040161
- [7] Dil'man V.V., Lipatov D.A., Lotkhov V.A., Kaminskii V.A. (2005) Instability in Unsteady-state Evaporation of Binary Solutions into an Inert Gas. *Theor. Found. Chem. Engin.*, 39: 566-572. DOI: 10.1007/s11236-005-0118-0
- [8] Косов В.Н., Селезнев В.Д. (2004) Аномальное возникновение свободной гравитационной конвекции визотермических тройных газовых смесях. Екатеринбург: УрОРАН. ISBN: 5-7691-1441-X
- [9] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. (1972) Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Наука, Москва.
- [10] Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др. (1987) Математическое моделирование конвективно-тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса. Наука, Москва.
- [11] Navon M. (1987) Pent: aPeriodicPenta-diagonalSystemsSolver. *Commun. inAppliedNumer. Methods*, 3: 63-69. DOI: 0748-8025/87/010063-07\$05.00
- [12] Kim J., Moin P. (1985) Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comp. Phys.*, 59: 308-323. DOI: 10.1016/0021-9991(85)90148-2
- [13] Abdibekova A.U., Zhakebayev D.B., Zhumagulov B.T. (2014) The Decay of MHD Turbulence Depending on the Conducting Properties of Environment. *Magnetohydrodynamics*, 50: 121-138.

## REFERENCES

- [1] Taylor R., Krishna R. (1993) Multicomponent mass transfer. John Wiley & Sons, Inc., New York. ISBN: 978-0-471-57417-0
- [2] Kaminskii V.A., Obvintseva N.Yu. (2007) Evaporation Regimes of Binary Solutions. *Theor. Found. Chem. Engin.*, 41: 512-518. DOI: 10.1134/S0040579507050090
- [3] Joseph D.D. (1981) Stability of Fluid Motions [Ustojchivost' dvizhenijzhidkosti]. Mir, Moscow. (in Russian)
- [4] Kosov V.N., Seleznev V.D., Zhavrin Yu.I. (1997) Separation of Components during Isothermal Mixing of Ternary Gas Systems under Free Convection Conditions. *Tech. Phys.*, 42: 1236-1237. DOI: 10.1134/1.1258905
- [5] Zhavrin Yu.I., Kosov V.N., Fedorenko O.V., Akzholova A.A. (2016) Some Features of the Multicomponent Gas Transfer in the Convective Instability of Gas Mixture. *Theor. Found. Chem. Engin.*, 50: 171-177. DOI: 10.1134/S0040579516020135
- [6] Kosov V.N., Fedorenko O.V., ZhavrinYu.I., Mukamedenkyzy V. (2014) Instability of Mechanical Equilibrium during Diffusion in a Three-component Gas Mixture in a Vertical Cylinder With a Circular Cross Section. *Tech. Phys.*, 59: 482-486. DOI: 10.1134/S1063784214040161
- [7] Dil'man V.V., Lipatov D.A., Lotkhov V.A., Kaminskii V.A. (2005) Instability in Unsteady-state Evaporation of Binary Solutions into an Inert Gas. *Theor. Found. Chem. Engin.*, 39: 566-572. DOI: 10.1007/s11236-005-0118-0
- [8] Kosov V.N., Seleznev V.D. (2004) Anomalous Onset of the Free Gravitational Convection in Isothermal Ternary Gas Mixtures [Anomal'noevoznikoveniesvobodnojgravitacionnojkonvekcii v izotermicheskihtrojnyhgazovyhsmesjah]. Ural Branch Russian Academy of Science, Yekaterinburg. (in Russian)
- [9] Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. (1972) Convective stability of incompressible fluid [Konvektivnayaustoiichivostneszhimaemoizhidkosti]. Nauka, Moscow. (in Russian)
- [10] Polezhaev V.I., Bune A.V., Veresub N.A. and others (1987) Mathematical modeling of convective heat and mass transfer based on the Navier-Stokes equations [Matematicheskoe modelirovanie konvektivnogo teplomassoobmenana osnoveuravnenij Nav'e-Stoksa]. Nauka, Moscow. (in Russian)
- [11] Navon M. (1987) Pent: aPeriodicPenta-diagonalSystemsSolver. *Commun. inAppliedNumer. Methods*, 3: 63-69. DOI: 0748-8025/87/010063-07\$05.00
- [12] Kim J., Moin P. (1985) Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comp. Phys.*, 59: 308-323. DOI: 10.1016/0021-9991(85)90148-2
- [13] Abdibekova A.U., Zhakebayev D.B., Zhumagulov B.T. (2014) The Decay of MHD Turbulence Depending on the Conducting Properties of Environment. *Magnetohydrodynamics*, 50: 121-138.

**В.Н.Косов<sup>1</sup>, Д.Б. Жакебаев<sup>2</sup>, О.В. Федоренко<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup> Аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup> Эксперименталды және теориялық физика институты, Алматы, Қазақстан

**ИЗОТЕРМИЯЛЫҚ ДИФФУЗИЯ КЕЗІНДЕГІ ТІК КАНАЛДАРДАҒЫ  
ҮШКОМПОНЕНТТІ ГАЗДАР ҚОСПАЛАРЫНДА ПАЙДА БОЛАТЫН КОНВЕКТИВТІК  
ҚОЗҒАЛЫСТАРДЫҢ САНДЫҚ ТАЛДАУЫ**

**Аннотация.** Көпкомпонентті газдар қоспаларында араласу тәртібінің әртүрі көптеп орын алады. Көпкомпонентті газдар қоспаларында «диффузия – конвекция» тәртібінің алмасуы шекарасын анықтауға

байланысты сұрақтар, конвективті тәртіптің пайда болуын анықтайтын параметрлер конвективті масса тасымалдау мәселелері бойынша маңызды болып табылады. Көпкомпонентті газдар қоспаларында «диффузия – конвекция» тәртібінің алмасуы шекарасын анықтауға байланысты сұрақтар және конвективті тәртіптің пайда болуын анықтайтын параметрлер конвективті массатасымалдау мәселелері бойынша маңызды болып табылады.

Аталған жұмысташеткі өлшемді тік цилиндр каналдарындағы  $2-D$  модельдеу арқылы тасымалдау коэффициенттері арасындағы уақытқа қатысты әртүрлі байланысқан үшкомпонентті газдар қоспаларындағы диффузиялық изотермиялық тасымалдауды зерттеудің сандық моделі ұсынылған.

Тік цилиндр каналдардағы үшкомпонентті газдар қоспаларында диффузиялық изотермиялық араласу физикалық өлшемдер бойынша бөлшектеу әдісі қарастырылған. Компоненттердің диффузия коэффициенттері өзара бірдей болатын жүйелерде, механикалық тепе-теңдік орнықсыздығы мүмкін болмайды. Компоненттердің диффузия коэффициенттері айтарлықтай өзгеше болатын жүйелерде конвективті қозғалыс пайда болуы мүмкін. Алғашқы кезеңде аз жылдамдықтағы ағын пайда болады. Кейін дамыған құрылымдық ағын қалыптасады. Газдар қоспаларында «диффузия – концентрациялық конвекция» тәртібінің алмасу шекарасын анықтауда есептеулердің нәтижелері тәжірибе арқылы алынған нәтижелермен сәйкес болуына байланысты, аталған әдісті ұсынуға мүмкіндік береді.

**Тірек сөздер:** диффузия, конвекция, газдар, қоспалар, сандық талдау.

**Сведения об авторах:**

Косов Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН РК, проректор по научной работе Казахского Национального Педагогического Университета им. Абая, г. Алматы.

Жакебаев Даурен Бактыбекович, PhD доктор, доцент, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования Казахского Национального Университета им. аль-Фараби, г. Алматы.

Федоренко Ольга Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ экспериментальной и теоретической физики, г. Алматы.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 143 – 148

S.R.Myrzakul<sup>1</sup>, F.B.Belisarova<sup>1</sup>, T.R.Myrzakul<sup>1</sup>, K.R.Myrzakulov<sup>2</sup><sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan<sup>2</sup>L.N.Gumilov Eurasian National University, Astana, 010008, Kazakhstan

shynaray1981@gmail.com, farida.belisarova@kaznu.kz, tmyrzakul@gmail.com mkr\_79@mail.ru

DYNAMICS OF F-ESSENCE IN FRAME  
OF THE STAROBINSKY MODEL

**Abstract.** In this paper, a cosmological model of a flat and homogeneous universe was considered for the Starobinsky model, which interacts non-minimally with f-essence. For this model, the field equations were obtained and particular solutions of the coupling functions and the fermion field were considered. It is shown that a fermion field can describe the nature of the universe.

**Key words:** Flat and homogeneous universe, f-essence, fermion field, model of Starobinsky.

УДК 524.8

Ш.Р. Мырзакул<sup>1</sup>, Ф.Б.Белисарова<sup>1</sup>, Т.Р. Мырзакул<sup>1</sup>, К.Р. Мырзакулов<sup>2</sup><sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, 050040, Казахстан;<sup>2</sup>Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, 010008, КазахстанДИНАМИКА F-ЭССЕНЦИИ В РАМКАХ  
МОДЕЛИ СТАРОБИНСКОГО

**Аннотация.** В работе была рассмотрена космологическая модель плоской и однородной Вселенной для модели Старобинского  $F(R) = \alpha R + \beta R^2$ , которая неминимально взаимодействует с f-эссенцией. Для этой модели были получены уравнения поля и рассмотрены частные решения функций связи и фермионного поля. Показано, что фермионное поле может описывать природу Вселенной.

**Ключевые слова:** плоская и однородная Вселенная, f-эссенция, фермионное поле, модель Старобинского.

**Введение**

Как известно, основной теорией, описывающей гравитационные явления в природе, является общая теория относительности (ОТО). Правильность этой теории подтверждается различными экспериментальными и наблюдательными данными [1,2]. Однако, она не способна полностью описать некоторые эпохи эволюции Вселенной, такие как нынешнее ускоренное расширение Вселенной. В настоящее время предложены различные альтернативные теории ОТО. Одной из таких альтернативных теорий является  $F(R)$  теория гравитации, где  $F$  является некоторой функцией от скаляра Риччи  $R$  [3-5]. В работах [6-8] рассмотрены космологические аспекты  $F(R)$  гравитации с различными полями материи. Известная модель Старобинского является одним из примеров модифицированной  $F(R)$  гравитации [8].

В данной работе нами была рассмотрена модель Старобинского неминимально взаимодействующая с f-эссенцией для однородной и изотропной метрики Фридмана-Робертсона-Уокера. Опре-

делены соответствующие уравнения движения и получены решение для масштабного фактора в виде квази-де Ситтера. Также были найдены космологические параметры такие как параметр Хаббла, параметр уравнения состояния и параметр замедления. Полученные результаты соответствуют модели темной энергии и соответственно способны описать позднюю эволюцию Вселенной.

### Действие и уравнения движения

В этом разделе, мы зададим действие и определим уравнения движения для космологической модели Старобинского неминимально взаимодействующей с f-эссенцией для метрики Фридмана-Робертсона-Уокера. Действие для этой модели можно будет записать в следующем виде

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ h(u) (\alpha R + \beta R^2) + 2K(Y, u) \right] \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  являются некоторыми константами, значение которых зададим ниже,  $\psi$  – функция ферминого поля и  $\bar{\psi}$  ее сопряженная функция,  $u = \bar{\psi}\psi$  – некая билинейная функция,  $h(u)$  – функция связи гравитации с фермионным полем,  $K(Y, u)$  – Лагранжиан  $f$ -эссенции, однако при  $K(Y, u) = Y - V$ , имеем стандартное уравнение Дирака для фермионного поля.

Совместно с действием (1), рассмотрим также метрику Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2)$$

где  $a(t)$  является масштабным фактором зависящим от космологического времени  $t$ . Для этой метрики имеем следующие выражение

$$\sqrt{-g} = a^3, R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), Y = \frac{1}{2} i (\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi) \quad (3)$$

Здесь точка над буквой обозначает производную по времени  $t$ . Тогда, для метрики (2) функцию Лагранжана можно будет записать как

$$L = 6\alpha a \dot{a}^2 + 6\alpha a^2 \dot{a} \dot{h} + \beta a^3 h R^2 + 12\beta a h R \dot{a}^2 + 12\beta a^2 R \dot{a} \dot{h} + 12\beta a^2 h \dot{a} \dot{R} - 2a^3 K. \quad (4)$$

Далее с помощью этого точечного Лагранжиана можно будет определить уравнения движения для рассматриваемой модели как

$$3\alpha \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a} \dot{h}}{a h} \right) + 6\beta \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a} \dot{h}}{a h} + \frac{\dot{a} \dot{R}}{a R} - \frac{1}{12} R \right) R - \frac{1}{h} (Y K_Y - K) = 0, \quad (5)$$

$$\alpha \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a} \dot{h}}{a h} + \frac{\ddot{h}}{h} \right) + 2\beta \left[ \ddot{R} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{h}}{h} \right) \dot{R} + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a} \dot{h}}{a h} + \frac{\ddot{h}}{h} - \frac{1}{4} R \right) R \right] + \frac{1}{h} K = 0, \quad (6)$$



$$K_Y \dot{\psi} + 0.5 \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} K_Y + \dot{K}_Y \right) \psi - i K_Y \gamma^0 \psi -$$

$$- 3i \left[ \alpha \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + 2\beta \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{12} R \right) R \right] h_u \gamma^0 \psi = 0, \quad (7)$$

$$K_Y \dot{\bar{\psi}} + 0.5 \left( 3 \frac{\dot{a}}{a^2} K_Y + \dot{K}_Y \right) \bar{\psi} + i K_u \bar{\psi} \gamma^0 +$$

$$+ 3i \left[ \alpha \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + 2\beta \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{12} R \right) R \right] h_u \bar{\psi} \gamma^0 = 0, \quad (8)$$

Для описания динамики эволюции Вселенной необходимо из уравнений (5)-(8) определить явный вид масштабного фактора  $a$  от времени  $t$ . Однако, эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями высокого порядка, решение которых является не простой задачей. Также необходимо определить явный вид функции  $h(u)$  и  $K(Y, u)$ . В следующем разделе, для описания эволюции Вселенной попытаемся определить космологическое решение для рассматриваемой модели.

### Космологические решения

Из метрики (2) видно, что основным параметром способным описать динамику Вселенной является масштабный фактор  $a$ . В этом разделе, для описания динамики эволюции Вселенной будем определять космологическое решение из системы уравнения (5)-(8). Однако, как видно эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями высшего порядка и необходимо определить явный вид функции  $h$  и  $K$ . Здесь мы ограничимся рассмотрением частных решений этих функций, как

$$h = h_0 u^n, K = K_0 Y - V_0 u, \quad (9)$$

где  $K_0, V_0, n$  и  $h_0$  являются некоторыми константами. Подставляя эти решения в уравнения (7) и (8) и умножая обе части уравнения (7) на функцию  $\psi^+$  и соответственно, уравнение (8) умножая на функцию  $\bar{\psi}$ , затем приравнявая эти уравнения друг к другу, получим следующее выражение

$$\dot{u} + 3 \frac{\dot{a}}{a} u = 0. \quad (10)$$

Интегрируя это уравнение, определим зависимость билинейной функции  $u$  от масштабного фактора  $a$  как

$$u = \frac{u_0}{a^3}, \quad (11)$$

где  $u_0$  являются константой интегрирования. Далее подставляя выражения (9) и (11) в (6), получим следующее уравнение для масштабного фактора

$$2a^{(3)}\dot{a}a^2 + (2 - 6n)\ddot{a}\dot{a}^2a - \ddot{a}^2a^2 + \frac{\alpha(1 - 3n)}{6\beta}\dot{a}^2a^2 - 3(1 + 2n)\dot{a}^4 - \frac{\nu u_0^{1-n}}{6\beta h_0}a^{3n-1} = 0, \quad (12)$$

где  $a^{(3)} = \frac{d^3a(t)}{dt^3}$ . Как видно, это уравнение является нелинейным дифференциальным

уравнением третьего порядка определение точного решения которого является сложной задачей. В работе [9] были рассмотрены аналитические решения модели Старобинского и определены похожие полевые уравнения и их точные решения. Здесь же ограничимся рассмотрением случая, при  $n = 1, \alpha = 1$  и  $\beta = 1$ , тогда уравнение (12) примет более компактную форму

$$2a^{(3)}\dot{a}a^2 - 4\ddot{a}\dot{a}^2a - \ddot{a}^2a^2 - \frac{1}{3}\dot{a}^2a^2 - 9\dot{a}^4 - Ca^4 = 0, \quad (13)$$

где  $C = \frac{V_0 u_0^{-\frac{2}{3}}}{6h_0}$ . Для решения уравнения (13) ограничимся рассмотрением решения в виде де-

Ситтера  $a = a_0 e^{\xi t}$ , в этом случае имеем следующее характеристическое уравнение

$$12\xi^4 + \frac{1}{3}\xi^2 + C = 0, \quad (14)$$

решение которого определяем в виде

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 432C}}{72}},$$

тогда, масштабный фактор имеет такую форму

$$a = a_0 e^{\sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 432C}}{72}} t}, \quad (15)$$

а функция  $u$  получится в таком виде

$$u = \frac{u_0}{a_0^3 e^{3\sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 432C}}{72}} t}}. \quad (16)$$

Соответственно, параметр Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 432C}}{72}} = const. \quad (17)$$

Используя уравнение для параметра уравнения состояния  $\omega$  и параметра замедления  $q$ :

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (18)$$

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}, \quad (19)$$

определяем, что

$$\omega = -1, q = -1. \quad (20)$$

Данный результат соответствует модели темной энергии, следовательно можно прийти к выводу, что наша модель при значении констант  $n = \frac{5}{3}, \alpha = 1, \beta = 1$  и рассмотрении решения для масштабного фактора в виде де-Ситтера  $a = e^{\dot{a}t}$ , имеем выражение (15), которое способно описать позднюю динамику эволюции Вселенной. Этот результат не противоречит современным астрономическим данным.

### Заключение

В данной работе нами были рассмотрены некоторые космологические аспекты модели Старобинского неминимально взаимодействующей с f-эссенцией для плоской и однородной Вселенной. В первом разделе, было приведено короткое введение в теорию гравитацию. Во втором разделе, для метрики Фридмана-Робертсона-Уокера была определена функция Лагранжа (4) и используя уравнения Эйлера-Лагранжа и условие нулевой энергии определили соответствующие уравнения движения (5)-(8). Как видно, эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями высшего порядка, решение которых является сложной задачей. Также для решения этой системы было необходимо определить явный вид функции  $h(u)$  и  $K(Y, u)$ . В

третьем разделе нами была определена следующая зависимость  $u = \frac{u_0}{a^3}$ , а также были рассмотрены следующие частные решения  $h = h_0 u^n, K = K_0 Y - V_0 u$ . Подставляя полученные значения  $u, h$  и  $K$ , и значения  $n = 1, \alpha = 1$  и  $\beta = 1$  в уравнение (6), и рассматривая де-Ситтеровское решение, получили эволюцию масштабного фактора в виде (15). Найдены все необходимые космологические параметры данной модели  $a, H, \omega, q$ , которые способны описать ускоренное расширение современной Вселенной и не противоречат современным астрономическим наблюдательным данным.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. // The Astrophysical Journal, **517**, N2, 565-586 (1999). [arXiv:astro-ph/9812133]
- [2] Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. // The Astronomical Journal, **116**, N3, 1009-1038 (1998). [arXiv:astro-ph/9805201]
- [3] Faulkner T. et al. Constraining f(R) Gravity as a Scalar Tensor Theory. // Physical Review D **76**, 063505 (2007). [arXiv:astro-ph/0612569].
- [4] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of f(R) cosmic acceleration that evade solar-system tests. // Physical Review D **76**, N1, 064004 (2007). [arXiv:0705.1158].
- [5] Sebastiani L., Myrzakulov R. F(R) gravity and inflation. // Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. **12**, N09, 1530003 (2015). [arXiv:1506.05330].
- [6] Momeni D., Gholizade H., Raza M., Myrzakulov R. Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations in non-local f(R) gravity. // A Int. J. Mod. Phys. A **30**, 1550093, (2015). [arXiv:1601.04994].

[7] Sebastiani L., Myrzakulov R.  $F(R)$  gravity and inflation. // *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.* 12, N09, 1530003 (2015). [arXiv:1506.05330].

[8] Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. // *Physics Letters B* 91 (1), N 1, 99-102 (1980).

[9] Paliathanasis A. Analytic Solution of the Starobinsky Model for Inflation// *The European Physical Journal C.* – 2017. - 77, 438. [arXiv:1706.06400v2].

**Ш.Р. Мырзақұл<sup>1</sup>, Ф.Б. Белисарова<sup>1</sup>, Т.Р. Мырзақұл<sup>1</sup>, К.Р. Мырзақулов<sup>2</sup>**

әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., 050040, Қазақстан  
Л.Н. Гумилев атындағы Евразиялық Ұлттық Университеті, Астана қ., 010008, Қазақстан

### **СТАРОБИНСКИЙ МОДЕЛІНІҢ НЕГІЗІНДЕГІ $f$ -ЭССЕНЦИЯ ДИНАМИКАСЫ**

**Аннотация.** Жұмыста  $f$ -эссенциямен минималды емес әрекеттесетін Старобинский моделі  $F(R) = \alpha R + \beta R^2$  үшін жазық және біртекті Әлемнің космологиялық моделі қарастырылған. Бұл модель үшін өріс тендеулері алынды және байланыс функциясы мен фермионды өрістер үшін дербес шешімдер қарастырылды. Фермиондық өріс Әлемнің табиғатын сипаттайтыны көрсетілген.

**Тірек сөздер:** жазық және біртекті Әлем,  $f$ -эссенция, фермиондық өріс, Старобинский моделі.

**NEWS****OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 149 – 155

UDC 007.3

**O.Zh. Mamyrbayev, K.Zh. Muhsina**

Institute of Information and Computing Technologies  
of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan  
E-mail: morkenj@mail.ru, [kuka\\_ai@mail.ru](mailto:kuka_ai@mail.ru)

**ANALYSIS OF EXISTING SYSTEMS  
FOR DETERMINATION OF TONNITY OF TEXT**

**Abstract.** The article considers the existing systems for the analysis of the text. The development of computer technology and the increasing role of information on the present day has given the methods of text analysis a special privileged role. Methods of text analysis are used to search, systematize, evaluate, select information, diagnose, analyze and predict the events or behavior of the subject, which is why these methods have been widely used in security systems.

**Keywords:** text, text analysis, text analysis program.

ӘОЖ:007.3

**О.Ж. Мамырбаев, Қ.Ж. Мухсина**

Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы қ., Қазақстан

**МӘТІН ҮНДЕСІТІЛІГІН АНЫҚТАУҒА АРНАЛҒАН  
ҚОЛДАНЫСТАҒЫ ЖҮЙЕЛЕРДІ ТАЛДАУ**

**Аннотация.** Мақалада мәтінді талдауға арналған қолданыстағы жүйелер қарастырылған. Компьютерлік технологиялардың дамуы мен ақпараттың рөлінің артуы жағдайында қазіргі таңда мәтінді талдау әдістеріне ерекше көңіл бөлінді. Мәтінде талдау әдістері іздеу, жүйеге келтіру, бағалау, ақпаратты іріктеу, оқиғаларды немесе субъектінің әрекетін анықтауда, талдау және болжау кезінде қолданылатындықтан, бұл әдістер қауіпсіздік жүйесінде кең қолданыс.

**Тірек сөздер:** мәтін, мәтін талдауы, мәтін талдауға арналған бағдарламалар.

**Кіріспе.** Компьютерлік технологиялардың дамуы мен ақпараттың рөлінің артуы жағдайында қазіргі таңда мәтінді талдау әдістеріне ерекше көңіл бөлінді. Мәтінде талдау әдістері іздеу, жүйеге келтіру, бағалау, ақпаратты іріктеу. Қазіргі кезде қоғам ақпараттың үлкен көлемін генерациялайды. Сол ақпараттың маңызды бөлігі – кітап, мақала, хат, хабарлама, түрлі құжаттар мен басқалары сияқты мәтіндік түрде жүреді. Осы мәтіндердің көпшілігі оңай басқарылмайтын құрылымға ие. Сонымен қатар мәтінді кластерлеу, мәтіндерді түйіндеу, екі мәтін релеванттылығын бағалау, сұраныс бойынша іздеу және т.б. тапсырмалар да бар. Сондықтан, осы тапсырмаларды автоматты түрде шешу үшін алгоритмдер мен құралдар қажет. 1960 жылдардан бастап ақпаратпен жұмыс істейтін автоматтандырылған іздеу жүйелері пайда бола бастады. Осы кезден бастап ақпараттық іздеудің принциптері мен әдістерін іске асыруға бағытталған белсенді жұмыстар жүріп жатыр.

Мәтінді компьютерлік талдау есептерін шешудің қазіргі заманғы тәсілдері компьютерлік лингвистикалық талдаудың тұтас бір сатылы процедура еместігін көздейді. Мәтінді компьютерлік талдау процедурасы бірнеше өңдеу деңгейлерін қамтиды. Кейбір деңгейдегі өңдеуіштің мәтін

талдау нәтижелері келесі деңгейдегі өңдеуішке беріледі. Осылайша, өңдеуіштер әрбір буыны белгілі бір мәтіндік ақпаратты өңдеу сатысына жауап беретін тізбек түзеді. Лингвистикалық процессордың өңдеуіштер құрамы ол тағайындалған есептермен анықталады. Мәтінді талдауда қажет болатын түсініктер, қатынастар және шектеулермен, яғни қарапайым және түсінікті онтологияны ажырату қиын болатын күрделі грамматикалы әлсіз құрылымды мәліметтермен жұмыс жасаған кезде жоғарыда аталған мәселелерді шешу жолдары болады.

1. Қолданыстағы мәтіндік ақпаратты талдау жүйелеріне шолу жасау, жүйелерді салыстыру критерийлерін анықтап, оларға салыстырмалы талдау жасау.
  - a. Графематикалық жүйелер.
  - b. Мәтіннің морфологиялық белгілері мен канонизациясын анықтау жүйелері.
  - c. Синтаксистік өзара байланыс және синтаксистік парсингті талдау жүйелері.
  - d. Мәтіннің үндестігін талдау жүйелері.
  - e. Барлық тіл деңгейінде мәтінді талдауға мүмкіндік беретін интегралды пакеттер.
2. Осы ұсыныстармен жұмыс істейтін ақпарат мәтін мен әдістер ұсыну тәсілдеріне шолу жасау
  - a. raw text құрылмаған мәтін пішіні
  - b. Vector Space Model (VSM) - векторлық деректер моделі
  - c. Vector Semantic Spaces - ықтималды векторлық деректер моделі
  - d. Синтаксистік талдау дарағы
3. Мәтіндік ақпараттың классификациялау және жіктеу әдістерінің қазіргі күйіне шолу жасау.
  - a. K-means, K-medoids, X-means
  - b. Аңғал Байесов сыныптаушысы (Naive Bayes)
  - c. K-NN жіктелімі
  - d. Иерархиялық жіктелімдер (агломеративті және дивизимді)
  - e. Нейрондық желілер: көп қабатты перцептрондар, рекурсивті нейрондық желілер, терең оқыту нейрондық желілері (Deep Learning)
4. Мәтінді алдын ала өңдеудің әдістерін салыстырмалы талдау және іске асыру.
  - a. Мәтінді канонизациялау алгоритімі: стемминг, лемматизация
  - b. Морфологиялық белгілерін анықтау алгоритімдері:
  - c. Синтаксистік парсерлер
5. Деректер моделін, жүйе компоненттері мен олардың өзара байланысын жобалау.
  - a. Бағдарламалық құралдарды таңдау
  - b. ДҚ жобалау
  - c. Жүйе архитектурасын жобалау



1 сурет - Мәтіндік ақпаратты талдау үдерісі

**Зерттеу әдістері.** Осылайша, жұмыс қойылымдық шолу, теориялық және тәжірибелік құрамдас бөліктерін қамтитын бірнеше бөлімдерден тұрады.

Мәтінді талдау күрделілігі тілденгейінің арту шамасына қарай жоғарылайды. Жоғары деңгейдегі талдауды алдыңғы деңгейлерде жүргізілген талдаусыз өткізу мүмкін емес. Мысалы, синтаксистік талдау жүргізу (синтаксистік талдау дарағын құру) морфологиялық талдаусыз мүмкін емес. Өз кезегінде, синтаксистік талдау дарағын құрмай тұрып, семантикалық байланысты анықтау мүмкін емес.

Заманауи мәтіндік ақпаратты талдау құралдарын екі үлкен санатқа бөлуге болады:

1. Мамандандырылған құралдар - нақты тіл деңгейінде талдау жасауға арналған аспаптар (морфологиялық анализатор, синтаксистік парсеттер және т.б.);

2. Интегралды пакеттер – әртүрлі тіл деңгейлерінде мәтіндік талдау жүргізуге мүмкіндік беретін бағдарламалық құралдар;

### Зерттеу нәтижелері.

**Семантикалық талдау** – семантикалық түйін мен семантикалық қарым-қатынастан тұратын семантикалық сөйлем құрылымды құруға бағытталған талдау. Талдау жүргізу мақсаты – бастапқы сөйлем сөздерінен құралған осы түйіндерді құру болып табылады. Семантикалық түйін құрылымына қатысты гипотез жасау негізін синтаксистік талдау нәтижесінде қол жеткізген ақпарат құрайды [1]. Талдау нәтижелері бірқатар кезеңнен тұратын (семантикалық түйіндер мен синтаксистік фрагмент нұсқаларын инициализациялау, көптеген сөздік интерпретация түйіндерін құрылу, уақыт топтарын жасау, жақша ішіндегі түйіндер жасау және т.б.) семантикалық баған түрінде ұсынылады. Семантикалық талдау әртүрлі әдістемелер арқылы жүргізілуі мүмкін, мәселен, PROTAN және басқа көптеген әдістеме түрлерімен. Мысалы, семантикалық талдау T-LAB Tools for Text Analysis әдістемесімен жүргізілген, аталмыш әдістеме тақырыптық талдау, салыстырмалы талдау, шектестік талдау сынды үш түрлі талдау жүргізуге мүмкіндік беретін, сонымен қатар сөздердің мағыналық паттерндері мен мәтіннің негізгі идеяларын айқындайтын компьютерлік әдістеме болып табылады. Бұл әдістемеді мәтінмен жұмыс істеу процесі өзіне мәтінді саралауды, түйін сөздер іріктемесін, сондай-ақ талдаудың үш типтерін жүзеге асыруға арналған процедураларды қамтиды.

Кесте 1 - Орыс тіліндегі мәтіндерді синтаксистік талдауға арналған құралдар

Атауы	Әдістері	Лицензиясы	Платформасы	Console	API	Модуль-ділігі	Құны (ком. тұлға.)
Еркін таратылатын							
AOT	Сөздікті	LGPL	GNU/Linux, Microsoft Windows	+	+	AOT модулі	
Link Grammar Parser	Байланыс грамматикасы	BSD	GNU/Linux, Microsoft Windows	+	+		
AGFL	Соңғы торлар аффиксінің грамматикасы	GPL	GNU/Linux, Microsoft Windows	+			
MaltParser	Машиналық оқу	өзіндік	Java	+			
NLTK	Машиналық оқу	Apache Lisence	Python		+		
Pattern	Ереже, тұрақты айту	BSD	Python				
Проприетарлық							
ABBYY Compreno	Ереже	Коммерциялық	Microsoft Windows			модуль ABBYY SDK	н/д
DictaScope	Ереже	Коммерциялық	FreeBSD, Microsoft Windows		+	Кітапхана	н/д

**Синтаксикалық талдау** – сөздер рөлдері мен олардың өзара байланысын нәтижесінде осындай байланыстар көрсететін арақтар жинағына қол жеткізе отырып, анықтайды. Міндеттерді орындау кіріс деректерінің көп мағыналығы және сол сияқты талдау ережелерінің бірімді еместігімен байланысты талдау барысында туындайтын балама нұсқалардың көптігімен күрделене түседі [2]. 1 кестеде орыс тіліндегі мәтіндерді синтаксистік талдауға арналған құралдар келтірілген.

Кесте - 2. Орыс тіліндегі мәтіндерді талдауға арналған құралдар

Название	Методы	Лицензия	Платформа	Console	API	Модульность	Стоимость (ком.лиц.)
Свободно распространяемое							
AOT	словарный	LGPL	GNU/Linux, Microsoft Windows		+		
MAnalyzer	словарный	MIT	GNU/Linux	-	-	Библиотека	-
Myaso	алгоритм Витерби	MIT	Ruby	-	+	Библиотека	-
mystem	словарный	Некоммерческая	GNU/Linux, Microsoft Windows	+	+		
phpmorphu	словарный	LGPL	PHP	-	+	Библиотека	-
Pullenti SDK	н/д	Условно бесплатная	NET		+	модуль SDK	100 000 руб
pymorphu	словарный	MIT	Python	-	+	Библиотека	-
RussianMorphology	словарный	Apache License	Java	-	+	Библиотека	-
RussianPOSTagger	словарный	GPL	Java	+	+	модуль GATE	-
Snowball	алгоритм Портера	BSD	GNU/Linux, Microsoft Windows	+	+		
Stemka	словарный	Собственная	GNU/Linux, Microsoft Windows	+	+		
SVMTool	метод опорных векторов	LGPL	Perl		+	Библиотека	
TreeTagger	деревья принятия решений	Некоммерческая	GNU/Linux, Microsoft Windows	+	+		
FreeLing	словарный	Условно платная	GNU/Linux	-	+	Библиотека	
Проприетарное							
RCO	словарный	Коммерческая	Microsoft Windows		+	Пакет для СУБД OracleRCO	от 35 000 руб

Мәтінді өңдеудің қиынырақ және ресурс сыйымды сатысы синтаксистік талдау болып табылады. Есептерге байланысты лингвистикалық процессорларда үстіртін (shallow) немесе терең (deep) синтаксистік талдау пайдаланылады [3]. Үстіртін талдау дегеніміз қарапайым, рекурсив енгізілмеген синтаксистік топтардың бөлінуі, бұл тәсіл шетелдік әдебиет көздерінде «chunking» терминімен белгілі. Бұл синтаксистік талдаудың ең қарапайым есебі. Қоспа синтаксистік дарак



құруды көздейтін үстіртін талдау үшін грамматикалық сынды синтаксистік әдістер де қолданылады. Олардың ішінде стохастистік контекстік-еркін грамматика құруға негізделген әдістер кеңінен танымал [4]. Терең синтаксистік талдау мынадай экстралингвистикалық білімдерді тарта отырып, ережелер жүйесін пайдалануға негізделеді: семантикалық сөздіктер, тезаурустар, топтастыру [5]. Орыс тілін терең синтаксистік талдау жүйелеріне ЭТАП-3 [4], Abby Comprero [6] жатады. Ал ағылшын және басқа да еуропа тілдері үшін терең синтаксистік талдау әдістері Xerox XLE жүйесінде [7], RASP [8] и ENJU [9]. іске асырылады. Қазіргі синтаксистік талдау әдістері өте жоғары дәлдігі мен синтаксистік байланыстар орнату толықтығын көрсетеді: тілге байланысты орта есеппен 75% - дан 90% - ға дейін [3].

Мәтінді сөздерге және сөйлемдерге бөлу бірінші кезектегі міндет болып табылады. Ол әдетте эвристикаларды қолдану арқылы тұрақты өрнектер мен түпкілікті автоматтар көмегімен шешіледі [10].

Морфологиялық талдау – аталмыш сөзтұлға жасалынған қалыпты форма мен осы сөзтұлғамен тіркелінген параметрлер жинағын анықтаумен қамтамасыз етеді[11]. 2 - кестеде орыс тіліндегі мәтіндерді талдауға арналған құралдар көрсетілген.

Морфологиялық талдау басқа да мәтін талдау түрлері үшін негіз болып табылатындықтан, көптеген әдістемелерде іске асырылады.

Морфологиялық талдау мынадай сатыларды қамтиды:

1. Мәтінде көптеген мүмкін ықтимал морфологиялық сөз қолдану түсіндірмесін анықтау (леммалар мен сөзтұлғаның морфологиялық сипаттамалары);

2. Омонимге рұқсат беру – мүмкін морфологиялық түсіндірмелерден мәтінде сөз қолдану бағытына сәйкес келетін түсіндірмені бөліп көрсету.

Морфологиялық талдау үшін сөзтұлғамен бірге оның леммасы, морфологиялық қасиеттері сақталынатын тілдің сөз тұлғасы арнайы сөздікке орналастырылатын әдіс кеңінен қолданылады. Талдау осы сөздіктегі аталмыш сөзтұлғаны іздеуге түйістіріледі. Бұл тәсіл AOT[12] және Freeling[13] мәтіндерді компьютерлік талдау жүйелерінде жүзеге асырылған.

Кейбір жағдайларда тек сөздіксіз тәсіл - стемминг (stemming) пайдаланылады, онда белгілерін болжау аффикстер кестесі көмегімен, ал нормалау – аффикстерді мүмкін сөз негізіне дейін қию арқылы жүзеге асырылады [14]. Морфологиялық талдау нәтижесінде пайда болатын омонимдерге рұқсат юеру үшін жасырын Марков моделін [15, 16] және сөздердің морфологиялық сипаттамаларын анықтауға арналған сөз пайдаланулар мәнмәтінін пайдаланатын ережелер жүйесін (мәселен, машиналық оқыту көмегімен қалыптасатын) қолданады [17].

**Графематикалық талдау.** Морфологиялық мәтін талдауын бастау үшін бастапқы құрылымсыз мәтінді сөйлем мен сөзге бөлу қажет. Бұл бір қарағанда, жеңіл міндеттің өзіндік ерекшеліктері бар және әрі қарай мәтін талдау кезінде маңызды рөлге ие.

Графематикалық талдау мыналарды қамтиды:

- ✓ бастапқы мәтінді элементтерге бөлу (сөздерге, айырғыштарға);
- ✓ мәтінге жатпайтын элементтерді жою (белгілерге, метаақпаратқа);
- ✓ стандарттан тыс элементтерді бөліп рәсімдеу:
- ✓ құрылымдық элементер: тақырыптар, абзацтар, ескертулер;
- ✓ сандар, күндер, әріптік-сандық кешендер ;
- ✓ аттары, әкесінің аты, тегі;
- ✓ пішіндеу элементтері: курсивті, астын сызу, қалың шрифт;
- ✓ электрондық мекенжайларды бөлу;
- ✓ файл аттарын бөлу;
- ✓ орнықты айналымды бөлу, бір бірінен бөлек жазылмайтын сөздер ;

Ағылшын тіліндегі дереккөздерінде tokenization (токенизация) анықтамасын кездестіруге болады, ол өзінің мазмұны бойынша графематикалық талдауға ұқсас. Токенизация – мәтін ағынын токендерге бөлу процессі: сөздер, сөз тіркестері және сөйлемдер[18]. Осылайша, графематикалық талдау мәтінді әрі қарай өңдеу үшін қажетті ақпарат қалыптастыратын қандайда бір кодтамада нышандар тізбегі түрінде ұсынылған құрылымы жоқ мәтіннің бастапқы талдауы болып табылады.

Іс жүзінде графематикалық талдауға мамандандырылған құралдар жоқ. Көбіне, графематика интегралды NLTK, Stanford CoreNLP, Apache NLP, AOT, MBSP мәтінді талдау пакетіне және де т.б. мәтіндерге енгізілген. Сондай-ақ токендерге бөлу міндеті мәтіннің белгілеу бағдарламасына

енгізілген, мысалы, part- of-speech taggers. Көп жағдайларда бөлу амалдарын тривиалді тәсілмен айырғыш сөздік және тұрақты өрнек сөздігін пайдалана отырып, шешуге болады. Сонымен қатар, бұл міндетті тұрақты өрнектер көмегімен де шешеді.

Кесте 3 - Мәтін талдау әдістері

Атауы	Әдісі	Тілдер	Лицензиясы	Платформасы
Tokenizer	Ереже	орыс, ағылшын, неміс	GPL	C
Greeb	тұрақты өрнектер	орыс, ағылшын,	MIT	Ruby
Twitter NLP and Part-of- Speech Tagger	Машиналық оқыту	ағылшын	GPL	Java
Lemmatizer	Сөздік	орыс, ағылшын,	GPL	GNU/Linux

### Нәтижелерін талқылау

Жоғарыда аталған әдістерден басқа мәтін талдаудың мынадай тәсілдері бар: құрылымдық талдау, семиотикалық (семиологиялық) талдау, жүйелік талдау, символикалық (мифологиялық) талдау, әлеуметтік индикаторлар мен түйін сөздер наррациясын (желі) талдау, әлеуметтік-рөлдік талдау, риторикалық талдау, перформативтік талдау, жанлық талдау, сөйлеу қызметі талдауы, психоаналитикалық талдау, сыни талдау, тарихи талдау, мәдени талдау, интертекстуалды талдау, феноменологиялық талдау типтері; коммуникативтік стратегиялар мен еркін қауымдастық талдауы, прагма-, психо-, социо-, этно-, когнитивті-лингвистикалық талдау және т.б. түрлері бар.

Қазіргі таңда лингвистикалық мәтін талдау әдістері ойлап табылып, мәтін қосымшаларына автоматты морфологиялық, синтаксистік және семантикалық талдау жүргізуге мүмкіндік беретін бағдарламалық құралдар әзірленген: AOT [19, 20], Solarix [21], NLTK [22, 23], FreeLing [24] және басқалар. Бұл жүйелердің есептеу тиімділігі мен лингвистикалық талдау сапасының деңгейі оларды үлкен мәтіндер топтамасын өңдеу үшін қолдануға мүмкіндік береді.

**Қорытынды.** Қазіргі таңда автоматты морфологиялық, синтаксистік және семантикалық талдаулар жүргізуге мүмкіндік беретін бірқатар мәтіндік ақпаратты лингвистикалық талдау әдістері ойлап табылған. Сонымен қатар, ЕЯ мәтіндерін автоматты талдауға арналған бағдарламалық құралдар (олардың көпшілігі еркін бағдарламалық қамтамасыз ету лицензиясы бойынша таралады) әзірленген. Осыған қарамастан, өнеркәсіптік ақпараттық-аналитикалық жүйелерде лингвистикалық мәтіндер ақпараты (лексикалық, морфологиялық, синтаксистік және семантикалық) кешенжі түрде қолданылмайды.

Белгілі қосымшаларда мәтіндік ақпараттың статистикалық сипаттамалары бар лексика векторы түріндегі қарапайым ұғымын қолданылады немесе мәтіннің өз моделін (мәселен, синтаксистік құрылымдар мен тек семантикалық мағыналарын есепке алатын) пайдалана отырып, жеке есептер (мысалы, сұрақ-жауапты немесе фразалық іздену) шешіледі.

Кез келген талдауды жүргізу барысындағы ең басты параметрлер бірі – қол жеткізген мәліметтердің нақтылығы (яғни талданатын мәтін толықтығымен және оның көрнекілігімен қамтамасыз ететін) және талдау бірлігінің толықтай зерттеуші біліктілігі мен негізі болып табылатын теориялық моделіне байланысты болатын интеркодтау дәйектілігі. Мәтіндік талдауды пайдалануды шектеу зерттеушінің субъективті әрекетіне ықпал тигізіп, өз таңдауын жасауға әсерін тигізеді.

## ОДЕБИЕТ

- [1] Berelson, B. Content Analyses in Communication Research / B. Berelson. –Glencoe, 1952. – 220с.
- [2] Большакова Е.И., Клышинский Э.С., ЛандэД.В., Носков А.А., Пескова О.В., Ягунова Е.В. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и компьютерная лингвистика: учеб. Пособие // – М.: МИЭМ, 2011. – 272 с.
- [3] Смирнов И. В., Шелманов А. О. Семантико-синтаксический анализ естественных языков. Часть I. Обзор методов синтаксического и семантического анализа текстов // Искусственный интеллект и принятие решений. - 2013. - Т. 1. - С. 41–54.
- [4] Л.Л. Иомдин, В. В. Петрович, В. Г. Сизов, Л. Л. Цинман . Синтаксический анализатор системы ЭТАП: современное состояние. / Papers from the Annual International Conference "Dialogue" (2012). – 2012.
- [5] Federici S., Montemagni S., Pirrelli V. Shallow parsing and text chunking: a view on underspecification in syntax // Cognitive science research paper university of Sussex CSRP. – 1996. – P. 35–44 75
- [6] Syntactic and semantic parser based on ABBYYCompreno linguistic technologies / K.V.Anisimovich,K.Ju.Druzhkin,F.R.Minlosetal.//PapersfromtheAnnualInternationalConference"Dialogue"(2012).–Vol.2.– 2012.–P.91–103
- [7] Speedandaccuracyinshallowanddeepstochasticparsing / RonaldM. Kaplan, StefanRiezler, Tracy H.Kingetal // InproceedingsofHLT-NAACL'04. – 2004.
- [8] Briscoe T., Carroll J. Robust accurate statistical annotation of general text. – 2002
- [9] Miyao Y., Tsujii J. Feature forest models for probabilistic hpsg parsing // Comput. Linguist. – 2008. – Vol. 34, no. 1. – P. 35–80
- [10] Урюпина О. Автоматическое разбиение текста на предложения для русского языка. // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: По материалам ежегодной Международной конференции «Диалог» (4–8 июня 2008 г.). Вып. 7 (14). – М.: РГГУ, 2008.
- [11] Большакова Е.И., Клышинский Э.С., ЛандэД.В., Носков А.А., Пескова О.В., Ягунова Е.В. *Автоматическая обработка текстов на естественном языке и компьютерная лингвистика*: учеб. пособие / – М.: МИЭМ, 2011. – 272 с.
- [12] Автоматическая Обработка Текста (АОТ). / [Электронный ресурс] URL: <http://www.aot.ru> (дата обращения 23.01.2013)
- [13] Freeling: An Open Source Suite Of Language Analyzers / [Электронный ресурс] URL: <http://nlp.lsi.upc.edu/freeling> // (дата обращения 05.03.2013).
- [14] Porter M.F. An algorithm for suffix stripping, Program. №14(3), 1980. P.P. 130–137.
- [15] Сокирко А. В., Толдова С. Ю. Сравнение эффективности двух методик снятия лексической и морфологической неоднозначности для русского языка (скрытая модель маркова и синтаксический анализатор именных групп) // Сборник работ стипендиатов Yandex. – 2005. 64.
- [16] Зеленков Ю.Г., Сегалович И.В., Титов В.А. Вероятностная модель снятия морфологической омонимии на основе нормализующих подстановок и позиций соседних слов. //
- [17] Brill E. A simple rulebased part of speech tagger / Proceedings of the workshop on Speech and Natural Language // Association for Computational Linguistics. – 1992. – P. 112–116.
- [18] Feinerer, I., Hornik, K. & Meyer, D. Text mining infrastructure in R. / Feinerer, I., Hornik, K. & Meyer, D. //Journal of statistical software, 25(5). - 2008. - American Statistical Association
- [19] Автоматическая Обработка Текста (АОТ). / [Электронный ресурс] URL:<http://www.aot.ru> (дата обращения 23.01.2013)
- [20] А.Сокирко. Семантические словари в автоматической обработке текста (поматериалам системы ДИАЛИНГ) / Дисс канд.т.н. // [Электронный ресурс]URL: <http://www.aot.ru/docs/sokirko/sokirko-candid-1.html> (датаобращения 23.01.2013)
- [21] Solarix: Компьютерная лингвистика. / [Электронный ресурс] URL: <http://www.solarix.ru/> (дата обращения 05.03.2013)
- [22] Natural Language Toolkit. / [Электронный ресурс] URL: <http://nltk.org/>
- [23] (дата обращения 05.03.2013).
- [24] Bird S. Natural Language Processing with Python. / O'Reilly Media Inc, 2009
- [25] Freeling: An Open Source Suite Of Language Analyzers. / [Электронныйресурс] URL: <http://nlp.lsi.upc.edu/freeling> / (дата обращения 05.03.201).

УДК 007.3

**О.Ж. Мамырбаев, К.Ж. Мухсина**

Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК

**АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ СИСТЕМ  
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОНАЛЬНОСТИ ТЕКСТА**

**Аннотация.** В статье рассмотрены существующие системы для анализа текста. Развитие компьютерных технологий и увеличение роли информации на настоящий день отвело методам анализа текста особую привилегированную роль. Методы анализа текста применяются при поиске, систематизации, оценке, отборе информации, диагностике, анализе и прогнозировании событий или поведения субъекта, из-за чего эти методы получили широкое применение в системах безопасности.

**Ключевые слова:** текст, анализа текста, программы анализа текста.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 156 – 162

UDC 532.133, 371.62, 372.8.002

**G.SH. Omashova, R.S. Spabekova, K.A. Kabylbekov,  
P.A. Saidakhmetov, KH. A. Ashirbaev, A. I. Dzhumagalieva**

M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.  
[gauhar\\_omashova@mail.ru](mailto:gauhar_omashova@mail.ru)

**MODEL OF THE FORM OF THE ORGANIZATION OF COMPUTER  
LABORATORY WORK ON THE RESEARCH OF THE MOVEMENT OF  
THE BODY MOVING WITH ACCELERATION OF GRAVITY**

**Abstract:** The proposed model Blanca computer organization laboratory study of motion of a body moving with an acceleration of free fall. Model Blanca includes brief information of theory test questions to check the readiness of students to work, study job with a computer model and preparation for the work of the task and then reviewing the results with the help of computer experiment, challenges with missing data and ambiguous tasks, research, problem and search tasks. A study of the task with a computer model include the ability to set the required parameters and to determine intervals of change. In problems with a subsequent experimental verification of answers on a computer model you must first solve the problem on paper and then compare the results with the readings from a computer model. Your task must be submitted with the form. Problem with missing data involves the selection of one or more of the missing. Ambiguous tasks include the choice of two interrelated parameters match the specified condition. Research, problem, search the jobs include issues associated with the experimental determination of acceleration of free fall in a gravity field, methods of their realization and ability to propose measures to reduce their errors. The proposed model Blanca tested Nazarbayev intellectual School of physics and mathematics in Shymkent, regional school "Daryn" for gifted children and school-school. M.Auezov, Arys. Most students carried out assignments with great interest.

**Key words:** angle throw, range, height, equation of motion.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**Г.Ш. Омашова, Р.С. Спабекова, К.А. Кабылбеков,  
П.А. Саидахметов, Х.А. Аширбаев, А.И. Джумагалиева**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Казахстан

**МОДЕЛЬ БЛАНКА ОРГАНИЗАЦИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ  
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ  
ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С УСКОРЕНИЕМ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ**

**Аннотация:** Предложена модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движения тела, движущегося с ускорением свободного падения. Модель бланка включает краткие сведения из теории, контрольные вопросы для проверки готовности учащихся к работе, ознакомительные задания с компьютерной моделью и подготовка к работе, задания с последующей проверкой результатов с помощью компьютерного эксперимента, задачи с недостающими данными и неоднозначные задачи, исследовательские, проблемные и поисковые задания. Ознакомительные задания с компьютерной моделью предусматривают умения устанавливать необходимые параметры и определять интервалы их изменения. В задачах с последующей экспериментальной проверкой ответов на компьютерной

модели необходимо предварительно решать задачи на бумаге и затем сравнивать результаты с показаниями компьютерной модели. Ход решения задач необходимо представить вместе с бланком. Задачи с недостающими данными предполагает самостоятельный подбор одного или нескольких из недостающих. Неоднозначные задачи предусматривают выбор двух взаимосвязанных параметров, удовлетворяющих заданное условие. Исследовательские, проблемные, поисковые задания включают вопросы связанные с экспериментальным определением ускорения свободного падения в поле силы тяжести, способов их реализации и умения предложить меры уменьшения их погрешности.

Предлагаемая модель бланка апробирована в Назарбаев интеллектуальной школе физико-математического направления г. Шымкент, областной школе «Дарын» ждя одаренных детей и в школе-гимназии им. М.Ауэзова г.Арысь. Большинство учащихся с большой заинтересованностью выполняли задания.

**Ключевые слова:** угол броска, дальность, высота, уравнение движения.

Президент Республики Казахстан Н. Назарбаев в Послании народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» - новый политический курс состоявшегося государства» обозначив приоритеты в сфере образования сказал: -Нам предстоит произвести модернизацию методик преподавания и активно развивать он-лайн-системы образования, создавая региональные школьные центры. Мы должны интенсивно внедрять инновационные методы, решения и инструменты в отечественную систему образования, включая дистанционное обучение и обучение в режиме он-лайн, доступные для всех желающих [1].

Для реализации поставленных задач кафедра «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. Ауэзова МОН РК с 2011-2012 учебного года внедрила в учебный процесс дисциплины «Информационные технологии в образовании», «Информационные технологии в преподавании физики», «Методика использования электронных учебников», «Компьютерное моделирование физических явлений» программы которых предусматривает освоение и использование современных информационных технологии в преподавании физики.

Методика конструирования заданий для компьютерных моделей приведена в брошюре «Методические аспекты преподавания физики с использованием компьютерного курса «Открытая физика» [2]. В качестве примера в ней приведены бланки заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы с использованием компьютерных моделей «Движение с постоянным ускорением» и «Упругие и неупругие соударения». Такие же материалы размещены в компакт-диске «Открытая физика 2.5», в сайта «Открытый колледж» и на страницах сетевого объединения методистов (СОМ) [3,4]. В них даются два вида лабораторных бланков:

- бланк для внесения ответов обучающимися;
- бланк для учителя в котором имеются ответы тестов и заданий для удобства их проверки.

Одной из трудных задач внедрения результатов использования информационных технологий в учреждениях образования является недостаточное практическое умение преподавателей школ использования компьютерных моделей физических явлений для организации проведения лабораторных работ. От организации компьютерных лабораторных работ во многом зависит активизация, мотивация и в конечном счете эффективность обучения. О создании и использовании моделей бланков организации компьютерных лабораторных работ по исследованию различных физических явлений в учебном процессе нами ранее написаны [5-20].

Мощным средством обучения физике, по мнению многих отечественных и зарубежных специалистов является продукция компании «Физикон» [2]. Используя этот ресурс, нами разработана модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движение тела в гравитационном поле Земли.

**Тема работы:** Исследование движение тела, движущегося с ускорением свободного падения в гравитационном поле Земли.

**Цель работы:** Реализация на компьютерной модели движение тел брошенных под углом к горизонту и вертикально вверх в поле тяготения Земли, определение дальности, высоты полета, скорости тел.

**Класс..... ФИО учащегося.....**

### 1. Краткое сведения из теории.

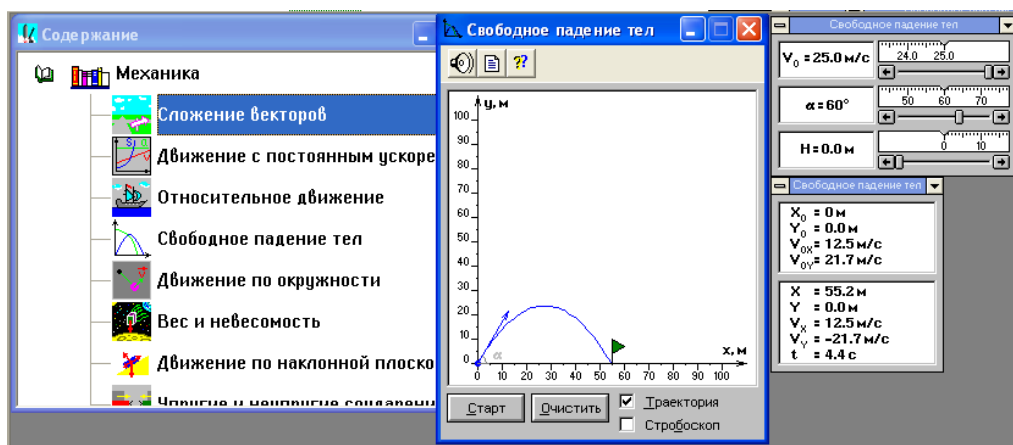


Рисунок 1

**Контрольные вопросы:**

- Тело брошено с поверхности Земли с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Напишите составляющие скорости  $V_{0x}$  и  $V_{0y}$ . Ответ: .....
- Напишите выражение зависимости компонент скоростей  $V_x$  и  $V_y$  в зависимости от времени движения. Ответ: .....
- Напишите уравнение траектории движения тела в поле тяготения Земли. Ответ: ...
- Напишите выражения дальности полета и максимальную высоту тела брошенного с поверхности Земли с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Ответ: .....
- Какая компонента скорости ответственна за высоту подъема тела? Ответ: .....
- Какая компонента скорости ответственна за дальность полета тела? Ответ: .....
- Напишите уравнение траектории движения тела в в поле тяготения, если оно брошено под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$  с горки высотой  $h$ . Ответ: .

**1. Ознакомительные задания с компьютерной моделью (Рис.1).**

- 1.1. В каких пределах можно менять угол броска тела? Ответ: .....
- 1.2. В каких пределах можно менять начальную скорость броска тела? Ответ: .....
- 1.3. В каких пределах можно менять начальную высоту броска тела? Ответ: .....
- 1.4. Реализовать на компьютерной модели бросок тела вертикально вверх с начальными скоростями 5, 10, 15, 20, 25 м/с и провести наблюдение за траекторией. Что вы можете сказать о высоте подъема тела. Ответ: .....
- 1.5. Реализовать на компьютерной модели бросок тела под углом  $45^\circ$  к горизонту с начальными скоростями 5, 10, 15, 20, 25 м/с и провести наблюдение за траекторией. Что вы можете сказать о высоте подъема тела, дальности и времени полета. Ответ: ....
- 1.6. Реализовать на компьютерной модели бросок тела с начальными скоростями 25 м/с под углами  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  к горизонту и провести наблюдение за траекторией. Что вы можете сказать о высоте подъема, дальности и времени полета. Ответ: .....

**2. Задания с последующей проверкой результатов с помощью компьютерного эксперимента.**

Эти задачи необходимо решить на бумаге, затем реализовать их на компьютерной модели и сравнить ответы. Ход решения задач предоставить вместе с бланком.

2.1. Тело брошено вертикально вверх с поверхности Земли с начальными скоростями  $V_0 = 5, 20, 25$  м/с. Определить максимальную высоту подъема и время полета. Ответы вписать в таблицу.

Начальные условия	Результаты вычислений	Показания компьютера
$X_0 = Y_0 =$		
$V_0, \text{ м/с}$		
$\alpha$		

2.2. Тело брошено с поверхности Земли с начальными скоростями  $V_0 = 5, 20, 25$  м/с под углом  $30^\circ$  к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, время и дальность полета. Ответы вписать в таблицу.

Начальные условия	Результаты вычислений	Показания компьютера
$X_0 = Y_0 =$		
$V_0$ , м/с		
$\alpha$		

2.3. Тело брошено горизонтально с горки высотой  $h=20$  м с начальными скоростями  $V_0=5, 20, 25$  м/с. Определить максимальную высоту подъема, время и дальность полета. Ответы вписать в таблицу.

Начальные условия	Результаты вычислений	Показания компьютера
$X_0 = Y_0 =$		
$V_0$ , м/с		
$\alpha$		

2.4. Тело брошено с горки высотой  $h=20$  м с начальными скоростями  $V_0=5, 20, 25$  м/с под углом  $30^\circ$  к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, время и дальность полета. Ответы вписать в таблицу.

Начальные условия	Результаты вычислений	Показания компьютера
$X_0 = Y_0 =$		
$V_0$ , м/с		
$\alpha$		

2.4. Тело брошено с горки высотой  $h=20$  м с начальными скоростями  $V_0=5, 20, 25$  м/с под углом  $60^\circ$  к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, время и дальность полета. Ответы вписать в таблицу.

Начальные условия	Результаты вычислений	Показания компьютера
$X_0 = Y_0 =$		
$V_0$ , м/с		
$\alpha$		

### 3. Задачи с недостающими данными и неоднозначные задачи.

3.1. С какой скоростью и под каким углом наклона к горизонту необходимо бросить тело с поверхности Земли чтобы оно упало на расстоянии 21,7м от места броска? Реализовать этот эксперимент на компьютерной модели.

Ответы: .....Результаты компьютера.....

3.2. С какой скоростью и под каким углом наклона к горизонту необходимо бросить тело с башни высотой  $H=20$ м. чтобы оно упало на расстоянии 61,2м от основания башни? Реализовать этот эксперимент на компьютерной модели.

Ответы: .....Результаты компьютера.....

3.3. С какой скоростью и под каким углом наклона к горизонту необходимо бросить тело с башни высотой  $H=40$ м чтобы оно упало на расстоянии 61,2м от основания башни? Реализовать этот эксперимент на компьютерной модели.

Ответы: .....Результаты компьютера.....

3.4. С какой высоты и с какой начальной скоростью необходимо бросить тело под углом к горизонту чтобы оно упало на расстоянии 79,3м от основания башни? Реализовать этот эксперимент на компьютерной модели.

Ответы: .....Результаты компьютера.....

3.5. С какой высоты и с какой начальной скоростью необходимо бросить тело горизонтально чтобы оно упало на расстоянии 50,5м от основания башни?

Ответы: .....Результаты компьютера.....

### 4. Экспериментальные задания.

4.1. Определить максимальную высоту тела, брошенного с начальной скоростью 5 м/с и время полета. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.2. Определить максимальную высоту тела, брошенного с начальной скоростью 10 м/с и время полета. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.3. Определить максимальную высоту тела, брошенного с начальной скоростью 20 м/с и время полета. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.4. Определить максимальную высоту тела, брошенного с начальной скоростью 25 м/с и время полета. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.5. Сравните результаты заданий 4.1.-4.4. и сделайте заключение. Ответ:.....

4.6. Определить дальность полета и максимальную высоту подъема тела брошенного под углом  $\alpha=30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью 20м/с. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.7. Определить дальность полета и максимальную высоту подъема тела брошенного под углом  $\alpha=45^\circ$  к горизонту с начальной скоростью 20м/с. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.8. Определить дальность полета и максимальную высоту подъема тела брошенного под углом  $\alpha=60^\circ$  к горизонту с начальной скоростью 20м/с. Реализовать эксперимент на компьютерной модели. Ответ:.....

4.9. Сравните результаты заданий 4.6.-4.8. и сделайте заключение. Ответ:.....

### 5. Исследовательские задания.

5.1. Какие эксперименты необходимо провести чтобы определить ускорение свободного падения тела в поле тяжести Земли? Обоснование ответа:.....

5.2. Как экспериментально определить высоту башни? Обоснование ответа:.....

5.3. Как экспериментально определить глубину колодца? Обоснование ответа:.....

5.4. Мотоциклист въезжает на высокий левый берег рва, имеющего угол наклона  $\alpha=30^\circ$ . Ширина рва  $d=10$ м. Правый берег рва ниже левого на  $h=2$ м. Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист в момент отрыва от левого берега, чтобы преодолеть ров. Реализовать эксперимент на компьютерной модели и обосновать ответ. Обоснование ответа:.....

### 6. Творческие задания.

6.1. Придумайте несколько заданий на движение тела в поле тяжести Земли и реализуйте их на компьютерной модели. Ответы:.....

### 7. Проблемные задания.

7.1. Насколько точны выражения дальности, времени полета и максимальной высоты подъема тел приведенных в вышеуказанных заданиях? Какие сделаны приближения по сравнению с реальностью? Обоснование ответа:.....

### 8. Поисковые задания.

8.1. Какие еще эксперименты Вы предлагаете для определения ускорения свободного падения тела в поле тяжести Земли. Обоснование ответа:.....

8.2. Какие методы Вы предложили бы для уменьшения погрешности определения ускорения свободного падения тела в поле тяжести Земли. Обоснование ответа:.....

Количество выполненных заданий	Количество ошибок	Оценка

Задания в бланке даны с избытком. Ученику необязательно их всех выполнять. Учитель может с учетом их способности подобрать каждому из предложенных или другие самостоятельно сконструированные.

Предложенная модель бланка апробирована в Назарбаев интеллектуальной школе физико-математического направления г.Шымкент, областной школе «Дарын» для одаренных детей и в школе-гимназии им. М.Ауэзова г.Арысь. Большинство учащихся с большой заинтересованностью выполняли все задания.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012 г.
- [2] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.
- [3] Кавтрев А.Ф. [http://www.college.ru/metod\\_phys.html](http://www.college.ru/metod_phys.html)
- [4] Кавтрев А.Ф. «Лабораторные работы к компьютерному курсу «Открытая физика». Равномерное движение. Моделирование неупругих соударений». — Газета «Физика», №20, 2001. С. 5–8.
- [5] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. Томск 2011г., С 210-215.



- [6] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Оқушылардың өз бетінше атқаратын компьютерлік зерханалық жұмыс бланкісінің үлгісі. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [7] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е. Абдураимов Р. Фотоэффект, комптонэффекті заңдылықтарын оқытуда компьютерлік үлгілерді қолданудың әдістемесі, компьютерлік зертханалық жұмыс атқаруға арналған бланкі үлгілері. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 114-121.
- [8] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова, Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Жинағыш және шашыратқыш линзаларды үлгілеу тақырыбына сабақ өткізу үлгісі Известия НАН РК, серия физ.-мат.№2, Алматы, 2014, С. 286-294.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П. А, Рүстемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Жарықтың дифракциясын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева, Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адиева Ш.И. Зарядталған бөлшектердің магнит өрісінде қозғалысын және масс-спектрометр жұмысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С. 80-87.
- [11] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А, Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Ньютон сақиналарын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [12] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Жарықтың интерференция құбылысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136
- [13] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Допплер эффектін зерттеуге арналған компьютерлік жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, секция физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [14] Кабылбеков К.А. Физикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру. Оқу құралы. Шымкент қ., 2015, 284 с.
- [15] Кабылбеков К.А. Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43:
- [16] Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию работы селектора скорости. Современные наукоемкие технологии, №6, Москва, 2015, С19-21.
- [17]. Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш. Серикбаева Г.С. Сүйерқұлова Ж.Н. Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН серия физ. мат №2 2016, С84-91.
- [18] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш. Нуруллаев, М.А. Артыгалин Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя совершающего цикл Карно. Изв. НАН серия физ мат №2 2016г. С98-103.
- [19] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е., Исследование работы газа на компьютерной модели. Вестник НАН №2 2016, С83-88.
- [20] Кабылбеков К.А., Саидахметов А.А. Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И. Қозыбақова Г.Н. Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв НАН серия физ. мат №2 2016, С92-97.

## REFERENCES

- [1] Nazarbayev H.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012.
- [2] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1". 2001.
- [3] Kavtrev A.F. [http://www.college.ru/metod\\_phys.html](http://www.college.ru/metod_phys.html)
- [4] Kavtrev A.F. «Laboratory operations to a computer course» Open physics ». The uniform motion. Modelling of inelastic collisions». - the Newspaper of "Physicist", №20, 2001, P 5-8.
- [5] Kabylbekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011., P.210-215.
- [6] Kabylbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P82-89.
- [7] Kabylbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E., Abduraimov R. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P114-121.
- [8] Kabylbekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P286-294.
- [9] Kabylbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P71-77.

[10] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva SH.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), **2015**, P80-87.

[11] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev . H A, Saidahmetov, P A, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, №1 (299), **2015**, P14-20.

[12] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, **2015**, P131-136

[13] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, **2015**, P155-160.

[14] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. **2015** , 284 p.

[15] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, **2015**. P. 40-43.

[16] Kabyzbekov K.A., Models of the form of the organisation of computer laboratory work on research of the selector of speds. Modern high technologies. №6, Moscow, **2015**, P19-21.

[17] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.SH, Serikbaeva G.S., Sujerkulova ZH. News NAN RK, series physical-mat., № 2, **2016**, P84-91.

[18] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., № 2, **2016**, P98-103.

[19] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Ashirbaev H A, Abdubaeva PH.I, Doskanova A.E. Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN PK №2. **2016**. P83-88.

[20] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., № 2, **2016**, P92-97.

**Г.Ш.Омашова, Р.С. Спабекова, К.А. Қабылбеков,  
П.А.Саидхметов, Х.А.Аширбаев, А.И. Джумагалиева**

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ., Қазақстан

### **ЕРКІН ТҮСУ ҮДЕУІМЕН ҚОЗҒАЛҒАН ДЕНЕНІҢ ҚОЗҒАЛЫСЫН ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ БЛАНКІ ҮЛГІСІ**

**Аннотация:** Еркін түсу үдеуімен қозғалған дененің қозғалысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі ұсынылады.

Үлгіде теориядан қысқаша мәліметтер, оқушылардың жұмысты бастауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары, компьютерлік моделмен танысу тапсырмалары, нәтижелерін компьютерлік тәжірибе арқылы тексерілетін есептер, бірімді емес және берілгендері жетіспейтін есептер, зерттеулік, проблемалық және ізденістік тапсырмалар қамтылған. Компьютерлік модельмен танысу тапсырмаларында қажетті параметрлерді өзгерте алу және өзгерту шектерін анықтау қарастырылған. Нәтижелерін компьютерлік тәжірибе арқылы тексерілетін есептер алдын-ала қағазда шығарылып компьютерлік тәжірибе нәтижелерімен салыстырылуы керек. Есептің шығарылу барысы үлгімен бірге тапсырылады. Бірімді емес және берілгендері жетіспейтін есептерді шығаруда өзара байланысқан параметрлердің біреуі немесе бірнешеуі есеп шарттарын қанағаттандыратындай өз бетінше таңдалады. Тәжірибелік, зерттеулік, проблемалық, ізденістік тапсырмаларда ауырлық күш өрісінде қозғалған дененің еркін түсу үдеуін тәжірибе жүзінде анықтау және оны анықтаудың қателігін кеміту тәсілдерін ұсыну және оны іс жүзінде іске асыру амалдарын қарастыру қамтылған. Ұсынылған тапсырмалар Шымкент қ. физика математика бағытындағы Назарбаев зияткерлік мектебінде, дарынды балаларға арналған облыстық «Дарын-1» мектебінде және Арыс қ. М.Әуезов атындағы мектеп-гимназиясының 10-11 сыныптарында физика сабақтарында қолданылды. Оқушылардың басым көпшілігі тапсырмаларды аса қызығушылықпен орындады.

**Тірек сөздер:** лактыру бұрышы, ұшу қашықтығы, қозғалыс теңдеуі.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 163 – 171

**Sh.R.Myrzakul, T.R.Myrzakul, F.B.Belisarova, Kh. Abdullayev, K.R. Myrzakulov**

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan  
[shynaray1981@gmail.com](mailto:shynaray1981@gmail.com), [tmyrzakul@gmail.com](mailto:tmyrzakul@gmail.com), [farida.belisarova@kaznu.kz](mailto:farida.belisarova@kaznu.kz), [hamid\\_darin@mail.ru](mailto:hamid_darin@mail.ru)

## NOETHER SYMMETRY APPROACH IN f-ESSENCE COSMOLOGY WITH SCALAR-FERMION INTERACTION

**Abstract.** The paper is devoted to the investigation of the field of f-essence, which is weakly connected with the gravitational field. After constructing the cosmological model, the Noether symmetry approach was used, which makes it possible to simplify the system of differential equations that determine the dynamics of the considerate model and to determine the integrability of this physical system. The Noether symmetry approach also allows one to verify self-consistency of the our physical model.

**Keywords:** Noether symmetry, f-essence cosmology, dark energy, f-essence, fermionic field, scalar-fermion interactions

УДК 524.8

**Ш.Р. Мырзақұл, Т.Р. Мырзақұл, Ф.Б. Белисарова, Х.Абдуллаев, К.Р. Мырзақұлов**

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, 050040, Казахстан

## ПОДХОД НЕТЕР СИММЕТРИИ В КОСМОЛОГИИ F-ЭССЕНЦИЙ СО СКАЛЯРНО-ФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию поля f-эссенций, которое слабо связано с гравитационным полем. После построения космологической модели, был применен метод Нетер симметрий, который позволяет упростить систему дифференциальных уравнений, определяющих динамику рассматриваемой модели, и определить интегрируемость этой самой физической системы. Метод Нетер симметрий также позволяет проверить само согласованность изучаемой физической модели.

**Ключевые слова:** Нетер симметрии, космология f-эссенций, темная энергия, фермионное поле, скалярно-фермионные взаимодействия.

### Введение

В современной теоретической космологии нашел широкое применение так называемый подход Нетер симметрий. Знаменитая теорема немецкого математика Эммы Нетер, опубликованная в 1918 году [1], позволяет проводить анализ изучаемой физической системы на основе имеющихся данных о симметрии, которой эта система обладает. Теорема сопоставляет количество непрерывных симметрии рассматриваемой системы, количеству законов сохранения, то есть количеству сохраняющихся величин, которых называют сохраняющимися или Нетер зарядами. Этими законами сохранения могут быть: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса и др. Математическим преимуществом использования этого метода в физических проблемах, и в частности в теоретической космологии, состоит, в том, что этот метод позволяет упростить систему дифференциальных уравнений, определяющих динамику рассматриваемой физической системы, а также определить интегрируемость этой самой физической системы. Метод Нетер симметрий также позволяет проверить само согласованность изучаемой физической модели.

Как мы уже отмечали выше, метод Нетр симметрий широко применяется в современной космологии, с результатами самых последних из них, можно ознакомиться в работах [2-9]. В связи со спецификой изучаемой в данной работе, нас больше интересует применение метода Нетр симметрий именно в работах связанных с построением физических моделей, объясняющих природу так называемой темной энергии.

Многочисленные наблюдательные данные, проведенные за последние десятилетия такие как: суперновая типа Ia [10], анизотропия космического микроволнового фона [11], барионные акустические колебания [12], слабое линзирование [13] и крупномасштабная структура [14], подтверждают тот факт, что наша Вселенная находится в стадии ускоренного расширения [15]. Объяснение природы этого ускоренного расширения, является одной из центральных проблем современной космологии, которой занимаются наиболее активная часть физического сообщества. За последние годы появилось множество теорий и моделей пытающиеся объяснить причину этого расширения. Но все эти модифицированные гравитационные теории можно разделить на два класса: модифицированные теории гравитаций объясняющие ускоренное расширение за счет так называемой темной энергии и модифицированные теории гравитаций которые объясняют ускоренное расширение нашей Вселенной без темной энергии. Все модифицированные теории гравитаций, которые построены вокруг таинственной темной энергии, которая как считают является причиной расширения нашей Вселенной (антигравитацией), с теоретической точки зрения можно разделить на разные подклассы в зависимости от значения космологической константы (согласно современным представлениям о темной энергии на параметр уравнения состояния наложено ограничение, где-то в порядке значения  $w = -1$  космологической константы): фантомная материя -  $w < -1$ , космологическая константа -  $w = -1$ , квинтэссенция -  $w \in (-1, -1/3)$ , пыль -  $w = 0$ , излучение -  $w = 1/3$ , твердая Вселенная -  $w \in (1/3, 1)$ , жесткая материя -  $w = 1$ , экипротическое вещество -  $w > 1$  и др.

В этой статье будем рассматривать, одну из этих модифицированных теорий, для однородного и изотропного пространства-времени Фридмана-Робертсона-Уоккера, космологическую модель f-эссенций, которая является частным случаем k-эссенций и фермионным аналогом g-эссенции. Рассматривая f-эссенцию, как гравитационный источник ускоренного расширения, покажем, что фермионное поле, изначально имеющее анизотропное пространство, становится изотропным, образуя сингулярности свободных космологических решений, хорошо описывающих ускоренное расширение Вселенной. Для этих целей, обобщим Лагранжиан, для случая с очень слабой связи f-эссенции с гравитационным полем. Используя этот Лагранжиан, получим систему уравнений поля, а также используем теорему Нетр, для определения явных форм функции связи и функции Лагранжиан f-эссенции.

### Не минимально связанная с R гравитацией модель f-эссенции

Запишем действие для поля f-эссенций, которое не минимально связано с гравитацией в рамках R гравитации в виде

$$S = \int d^4x e \left[ h(u) R + 2K(Y, u) \right], \quad (1)$$

где  $R$  скаляр Риччи,  $u = \bar{\psi}\psi$  обозначают поле f-эссенции  $\psi$  и его сопряжение  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , крестик представляет комплексное сопряжение,  $h(u)$  обобщенная функция, представляющая не минимальную связь гравитации с полем f-эссенций,  $K$  является плотностью Лагранжиана поля f-эссенции, где канонический кинетический член имеет вид

$$Y = \frac{1}{2} i \left[ \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi \right], \quad (2)$$

$\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$  обобщенные матрицы Дирака-Паули, удовлетворяющие алгебре Клиффорда, где фигурные скобки обозначают анти-коммутиационное соотношение, ковариантные  $e_a^\mu$  имеют вид

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Omega_\mu \psi \quad (3)$$

и

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu \quad (4)$$

Выше, f- эссенция связи  $\Omega_\mu$  определяется

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\rho\sigma} \left[ \Gamma_{\mu\delta}^\rho - e_b^\rho \partial_\mu e_\delta^b \right] \Gamma^\sigma \Gamma^\delta \quad (5)$$

С  $\Gamma_{\mu\delta}^\rho$  обозначается символы Кристоффеля.

Рассмотрим простейшую, однородную и изотропную космологическую модель, в которой плоская метрика ФРУ имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (6)$$

где  $a(t)$  является масштабным фактором Вселенной. Для этой метрики, выберем  $(e_a^\mu) = \text{diag}(1, 1/a, 1/a, 1/a)$  и  $(e_a^\mu) = \text{diag}(1, a, a, a)$ .

Матрица Дирака в искривленном пространстве-времени  $\Gamma^\mu$

$$\Gamma^0 = \gamma^0, \Gamma^j = a^{-1} \gamma^j, \Gamma^5 = -i\sqrt{-g} \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3 = \gamma^5, \Gamma_0 = \gamma^0, \Gamma_j = a \gamma^j \quad (i=1, 2, 3). \quad (7)$$

Отсюда получаем

$$\Omega_0 = 0, \Omega_j = \frac{1}{2} \dot{a} \gamma^j \gamma^0 \quad (8)$$

и

$$Y = \frac{1}{2} i \left( \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi \right). \quad (9)$$

Отметим также, что гамма-матрицы, основаны на матрицах Дирака, имеют вид

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $I = \text{diag}(1, 1)$  и  $\sigma^k$  матрицы Паули, имеющие следующий вид

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Скаляр Риччи в метрике ФРУ

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 6(\dot{H} + 2H^2), \quad (12)$$

беря плоское пространство-время ФРУ и параметр Хаббла  $H = \dot{a}/a$ , перепишем вышеупомянутое действие

$$S = \int d^4 x \left[ -6\hbar \dot{a} a^2 - 6\hbar \dot{a}^2 a + 2a^3 K \right], \quad (13)$$

После интегрирования по частям, точечный Лагранжиан принимает следующий вид:

$$L = 6\dot{h}\dot{a}^2 + 6h\dot{a}^2 a + 2a^3 K, \quad (14)$$

Считаем, что поле зависит только от времени, так как метрика однородна и изотропна, т.е.  $\psi = \psi(t)$ .

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -12\dot{a}ah - 6\dot{a}^2 h - 12\dot{a}a\dot{h} - 6a^2 \ddot{h} + 6a^2 \dot{K} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= -6h_u \bar{\psi} \left( \ddot{a} a^2 + \dot{a}^2 a \right) + 2a^3 K_u \bar{\psi} - \\ &- 2ia^3 K_Y \bar{\psi} \dot{\gamma}^0 - 3ia^2 \dot{a} K_Y \bar{\psi} \dot{\gamma}^0 - ia^3 \dot{K}_Y \bar{\psi} \dot{\gamma}^0 = 0 \end{aligned}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} &= -6h_u \psi \left( \ddot{a} a^2 + \dot{a}^2 a \right) + 2a^3 K_u \psi + \\ &+ 2ia^3 K_Y \dot{\gamma}^0 \dot{\psi} + 3ia^2 \dot{a} K_Y \dot{\gamma}^0 \dot{\psi} + ia^3 \dot{K}_Y \dot{\gamma}^0 \dot{\psi} = 0 \end{aligned}, \quad (17)$$

С энергетическим условием

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} \dot{\bar{\psi}} - L = 0, \quad (18)$$

или

$$-6\dot{a}^2 ah - 6\dot{a}a^2 h_u \dot{a} + 2a^3 (YK_Y - K) = 0, \quad (19)$$

получаем уравнение Фридмана

$$3H^2 = \rho, \quad (20)$$

Тогда плотность энергии и давления поля f-эссенции принимают вид

$$\rho = \frac{YK_Y - K - 3H\dot{h}}{h} \quad (21)$$

$$p = \frac{-K + \dot{h} + 2H\dot{h}}{h} \quad (22)$$

Из уравнений (16) и (17) следует, уравнения Дирака для поля и его сопряжения

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2} H \psi + \frac{1}{2} \frac{\dot{K}_Y}{K_Y} \psi - i \left[ \frac{K_u}{K_Y} - 3 \left( \dot{H} + 2H^2 \right) \frac{h_u}{K_Y} \right] \dot{\gamma}^0 \psi = 0, \quad (23)$$

$$\bar{\psi} + \frac{3}{2} H \bar{\psi} + \frac{1}{2} \frac{\dot{K}_Y}{K_Y} \bar{\psi} + i \left[ \frac{K_u}{K_Y} - 3(\dot{H} + 2H^2) \frac{h_u}{K_Y} \right] \bar{\psi} \gamma^0 = 0. \quad (24)$$

Делая некоторые алгебраические операции, получим решения для уравнений (23) и (24)

$$u = u_0 / (a^3 K_Y), \quad (25)$$

где  $u_0$  является постоянной.

### Подход Нетер симметрии

Применим теперь подход Нетер симметрий для нашей модели. Математическим преимуществом использования этого метода в физических проблемах, и в частности в теоретической космологии, состоит, в том, что этот метод позволяет упростить систему дифференциальных уравнений, определяющих динамику рассматриваемой физической системы, а также определить интегрируемость этой самой физической системы. Метод Нетер симметрий также позволяет проверить само согласованность изучаемой физической модели.

Подход Нетер симметрий говорит нам, что производная Лагранжиана относительно заданного векторного поля  $X$  равна нулю, т.е.

$$XL = 0 \quad (26)$$

Лагранжиан с точки зрения компонентов поля  $\psi = (\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3)^T$  и его комплексное сопряжения  $\bar{\psi} = (\psi_0^\dagger, \psi_1^\dagger, -\psi_2^\dagger, -\psi_3^\dagger)$  будет как,

$$L = 6h_u \dot{a} a^2 \sum_{i=0}^3 (\psi_i^\dagger \dot{\psi}_i + \dot{\psi}_i^\dagger \psi_i) + 6h \dot{a}^2 a + 2a^3 K, \quad (27)$$

где  $X$ , как было определено выше равен

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \sum_{k=0}^3 \left( \eta_k \frac{\partial}{\partial \psi_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_k} + m_k \frac{\partial}{\partial \psi_k^\dagger} + \dot{m}_k \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_k^\dagger} \right), \quad (28)$$

где

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \sum_{k=0}^3 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_k} \dot{\psi}_k + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_k^\dagger} \dot{\psi}_k^\dagger \right), \quad (29)$$

$$\dot{\eta}_k = \frac{\partial \eta_k}{\partial a} \dot{a} + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j + \frac{\partial \eta_k}{\partial \psi_j^\dagger} \dot{\psi}_j^\dagger \right), \quad (30)$$

$$\dot{m}_k = \frac{\partial m_k}{\partial a} \dot{a} + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial m_k}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j + \frac{\partial m_k}{\partial \psi_j^\dagger} \dot{\psi}_j^\dagger \right), \quad (31)$$

здесь  $\alpha$ ,  $\eta_i$  и  $m_i$  неизвестные функции переменных  $a, \psi_i$  и  $\psi_i^\dagger$ .

Условие (26) при применении к Лагранжиану(27) приводит к уравнению, которое зависит явно от  $\dot{a}^2, \dot{\alpha} \dot{\psi}_i^\dagger, \dot{\alpha} \dot{\psi}_i, \dot{\psi}_i^\dagger \dot{\psi}_i, \dot{a}, \dot{\psi}_i^\dagger, \dot{\psi}_i$ , и приравняв коэффициенты перед ними к нулю, получаем следующую систему связанных дифференциальных уравнений:

$$\dot{a}^2: \quad h \left( \alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) a h_u \sum_{k=0}^3 \delta_k \left( \psi_k \eta_k + \psi_k^\dagger \eta_k + a \psi_k \frac{\partial \eta_k}{\partial a} + a \psi_k^\dagger \frac{\partial \eta_k}{\partial a} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\dot{a} \psi_k^\dagger: \quad h_u \delta_k \psi_k \left( 2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) + a h_{uu} \delta_k \psi_k \sum_{j=0}^3 \delta_j (m_j \psi_j + \eta_j \psi_j^\dagger) + a h_u \delta_k \eta_k + 2h \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_k^\dagger} + a h_u \sum_{j=0}^3 \delta_j \left( \frac{\partial m_j}{\partial \psi_k^\dagger} \psi_j + \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_k^\dagger} \psi_j^\dagger \right) = 0 \quad (33)$$

$$\dot{a} \psi_k: \quad h_u \delta_k \psi_k^\dagger \left( 2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) + a h_{uu} \delta_k \psi_k^\dagger \sum_{j=0}^3 \delta_j (m_j \psi_j + \eta_j \psi_j^\dagger) + a h_u \delta_k m_k + 2h \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_k} + a h_u \sum_{j=0}^3 \delta_j \left( \frac{\partial m_j}{\partial \psi_k} \psi_j + \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_k} \psi_j^\dagger \right) = 0 \quad (34)$$

$$\psi_i^\dagger \psi_j^\dagger: \quad h_u \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^\dagger} \delta_i \psi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i^\dagger} \delta_j \psi_j \right) = 0 \quad (35)$$

$$\psi_j \psi_i: \quad h_u \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} \delta_i \psi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i} \delta_j \psi_j \right) = 0 \quad (36)$$

$$\psi_j^\dagger \psi_i: \quad h_u \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} \delta_i \psi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i^\dagger} \delta_j \psi_j^\dagger \right) = 0 \quad (37)$$

$$\dot{a}: \quad \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial m_j}{\partial a} \psi_j - \frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_j^\dagger \right) = 0 \quad (38)$$

$$\psi_k^\dagger: \quad 3\alpha \psi_k + a \eta_k + a \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial m_j}{\partial \psi_k^\dagger} \psi_j - \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_k^\dagger} \psi_j^\dagger \right) = 0 \quad (39)$$

$$\psi_k: \quad 3\alpha \psi_k^\dagger + a \eta_k - a \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial m_j}{\partial \psi_k} \psi_j - \frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_k} \psi_j^\dagger \right) = 0 \quad (40)$$

равенство остальных, который используется для определения функции Лагранжа f-эссенций, имеет следующий вид

$$\frac{3\alpha}{aK_u} (K - YK_Y) = - \sum_{i=0}^3 (\delta_i \eta_i \psi_i^\dagger + \delta_i m_i \psi_i). \quad (41)$$

Здесь введен символ, который равен

$$\delta_i = \begin{cases} +1 & \text{для } i=1,2, \\ -1 & \text{для } i=3,4. \end{cases}$$

Первый вывод из уравнений (35) - (37), это то что имеются два возможных варианта  $h' = 0$  или  $h' \neq 0$ . Рассмотрим отдельно два случая.



Из уравнения (41), запишем

$$\sum_{j=0}^3 \delta_j (m_j \psi_j + \eta_j \psi_j^\dagger) = -3 \frac{\alpha}{a} \frac{K - YK_Y}{K_u} \quad (43)$$

после дифференцирования которого по  $a$ , получим следующий вид

$$\sum_{j=0}^3 \delta_j \left( \frac{\partial m_j}{\partial a} \psi_j + \frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_j^\dagger \right) = 3 \left( \frac{\alpha}{a^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) \frac{K - YK_Y}{K_u} \quad (44)$$

Вставим уравнения (43) и (44) в (32), и принимая во внимание то, что  $h$  и  $K$  только функции от  $u$ , получим

$$\frac{a}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{K_u h}{3(K - YK_Y)h_u - 2K_u h} = q \quad (45)$$

где  $K$  постоянная.

Для  $h' \neq 0$ , из уравнений (35) - (37) следует также, что  $\alpha = \alpha(a)$ , следовательно можно определить  $\alpha$  из уравнения (45), что дает нам

$$\alpha = \alpha_1 a^q \quad (46)$$

здесь  $\alpha_1$  постоянная.

Из равенства (41) следует также, что функция Лагранжа  $f$ -эссенции связанна с  $h$  как

$$\frac{K_u}{K - YK_Y} = \frac{3q}{1 + 2q} \frac{h_u}{h} \quad (47)$$

Кроме того, из уравнений (39), (40) и (41), находим решения для генераторов  $\eta_j$  и  $m_j$  как

$$\eta_j = - \left( \frac{3}{2} \alpha_1 a^{q-1} + \sigma \eta_0 \right) \psi_j \quad (48)$$

$$m_j = - \left( \frac{3}{2} \alpha_1 a^{q-1} - \sigma \delta \eta_0 \right) \psi_j^\dagger \quad (49)$$

Подставляя эти значения в уравнение (41) и используя значения альфа (46), получим следующее уравнение

$$K = YK_Y + uK_u \quad (50)$$

Решая это уравнения, получим

$$K = K_1 (Y + u) \quad (49)$$

где  $K_1$  является интегрируемой константой. Тогда из уравнений (47), находим связь  $h$  с  $u$

$$h = h_1 u^{\frac{1+2q}{3q}} \quad (50)$$

### Космологические решения

На основе полученных в предыдущем разделе решений, появилась возможность проанализировать динамику Вселенной. Для этого, нужно определенные в предыдущем разделе решения (51) и (52), поместить в уравнения поля (23), (24). Получим тогда,

$$\dot{u} + 3\frac{\dot{a}}{a}u = 0 \quad (53)$$

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{Y}{u}\right)\frac{K_1}{h_1}u^{\frac{3q}{1+2q}} = l \quad (54)$$

так что

$$u = \frac{u_0}{a^3} \quad (55)$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{1}{m}(C_1e^{-mt} - C_2e^{mt})}, \quad l = \frac{m^2}{2} \quad (56)$$

$$H = -\frac{C_1me^{-mt} + C_2me^{mt}}{2(C_1e^{-mt} - C_2e^{mt})} \quad (57)$$

где  $u_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  постоянные интегрирования.

Плотности энергий и давления для нашей модели

$$\rho = \frac{3}{4}\frac{C_1me^{-mt} + C_2me^{mt}}{(C_1e^{-mt} - C_2e^{mt})^2}, \quad (58)$$

$$p = -\frac{2n+1}{(1-n)^2(t-C_2)^2}. \quad (59)$$

Определим параметр уравнения состояния нашей модели как

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{3}(1+2n). \quad (60)$$

Как было показано ранее, для нашей модели, постоянная  $n$  не может принимать значение 1. В нашей модели, рассматривая значение  $n > 1$ , имеем  $\omega < -1$ , эта фаза будет фантомной фазой, и если  $n = 0$ , то  $\omega = -\frac{1}{3}$  будет фазой квинтэссенций.

Параметр замедления для фермионного поля определяется как

$$q = -\frac{a}{\dot{a}} = -n \quad (61)$$

Из этого примера, можно увидеть, что при  $n > 0$ , Вселенной будет ускоряться и при  $n < 0$  замедлятся.

При  $n = -\frac{1}{2}$ , видим что

$$\rho_{tot} = \frac{4}{3(t-C_2)^2}, \quad p = 0. \quad (62)$$

Это стандартная материя поля без давления. Можно прийти к выводу, что фермионное поле ведет себя и как фантомная и как квинтэссенционная фазы ускоренно расширяющейся Вселенной.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Noether E. (1918) Invariant Variations problem, *Gott.Nachr.* 235-257 (in German) and *Transp. Theory Statist. Phys.* 1:186-207. (in English) DOI: [10.1080/00411457108231446](https://doi.org/10.1080/00411457108231446)
- [2] Capozziello S., De Laurentis M., Odintsov SD. (2014) Noether Symmetry Approach in Gauss-Bonnet Cosmology. *Modern Physics Letters A*, Vol. 29-30. DOI: [10.1142/S0217732314501648](https://doi.org/10.1142/S0217732314501648).
- [3] Jahangeer A., Shamir MF, Naz T., Ifikhar N. (2015) The Scale of Cosmic the Classification Factor is Via Noether Gauge Symmetries. *International, the Journal of Theoretical the Physics*, V.54-7: 2343-2353. DOI: [10.1007/s10773-014-2456-3](https://doi.org/10.1007/s10773-014-2456-3)
- [4] Roshan M. (2015) Exact cosmological solutions for MOG, *The European Physical Journal C*, 75:405. DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3637-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3637-9).
- [5] Jun L., Kun M., Liu Zh. (2015) Near horizon symmetry and entropy of black holes in  $f(R)$  gravity and conformal gravity, *General Relativity and Gravitation* 47(10):116. DOI: [10.1007/s10714-015-1957-6](https://doi.org/10.1007/s10714-015-1957-6).
- [6] Guendelman E, Nissimov E, Pacheva S. (2016) Metric-Independent spacetime Volume-Forms and Dark Energy/Dark Matter Unification. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, vol.191, ed. V. Dobrev, Springer. arXiv:1512.01395v1.
- [7] Wei H, Li H-Y, Zou X.-B. (2016) Exact Cosmological Solutions of  $f(R)$  Theories via Hojman Symmetry. *Nucl. Phys. B* 903:132-149. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2015.12.006](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2015.12.006).
- [8] Belinchón JA, Harko T, Mak MK (2016). Exact Scalar-Tensor Cosmological Solutions via Noether Symmetry, *Astrophys. Space Sci.*, 361:52. DOI: [10.1007/s10509-015-2642-7](https://doi.org/10.1007/s10509-015-2642-7).
- [9] Dutta S, Chakraborty S. (2016) A study of phantom scalar field cosmology using Lie and Noether symmetries. *Int. J. Mod. Phys. D*. DOI: [10.1142/S0218271816500516](https://doi.org/10.1142/S0218271816500516).
- [10] Perlmutter S, et al. (1996) Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First 7 Supernovae at  $z \geq 0.35$ , *Astrophys. J.* 483-565. DOI: [10.1086/304265](https://doi.org/10.1086/304265).
- [11] Eisenstein DJ, et al. (2005). Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies, *Astrophys. J.* 633560: 574. DOI: [10.1086/466512](https://doi.org/10.1086/466512).
- [12] Jain B, Taylor A. (2003), Cross-Correlation Tomography: Measuring Dark Energy Evolution with Weak Lensing, *Phys. Rev. Lett.* 91: 141302. DOI: [10.1103/PhysRevLett.91.141302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.141302).
- [13] Tegmark M, et al. (2004) Cosmological parameters from SDSS and WMAP, *Phys. Rev. D*, 69-103501. DOI: [10.1103/PhysRevD.69.103501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.103501).
- [14] Bennett CL, et al. (2003) First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results, *Astrophys. J. Suppl.* 148-1. DOI: [10.1086/377226](https://doi.org/10.1086/377226).
- [15] Smolin L. (2006) *The Trouble With Physics*, Houghton Mifflin Harcourt, USA. ISBN: 978-0-618-55105-7.

**Ш.Р. Мырзақұл, Т.Р. Мырзақұл, Ф.Б. Белисарова, Х. Абдуллаев, К.Р. Мырзакулов**

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, 050040, Қазақстан

**СКАЛЯРЛЫ-ФЕРМИОНДЫ ӘСЕРЛЕСУЛЕРІ БАР  $f$ -ЭССЕНЦИЯ  
КОСМОЛОГИЯСЫНДА НЕТЕР СИММЕТРИЯ ӘДІСІН ПАЙДАЛАНУ**

**Аннотация.** Бұл жұмыс, гравитациялық өріспен әлсіз байланысқан  $f$ -эссенцияның өрісін зерттеуге арналған. Бұл жұмыста космологиялық модель құрылғаннан кейін, моделдің динамикасын анықтайтын дифференциалдық теңдеулер жүйесін жеңілдету үшін және осы қарастырылып жатқан физикалық жүйенің интегралдануын тексеру үшін Нетер симметрия әдісі қолданылды. Нетер симметрия әдісі, сонымен қатар, физикалық моделдің өзіне сәйкестігін тексеруге мүмкіндік береді.

**Тірек сөздер:** Нетер симметриясы,  $f$ -эссенция космологиясы, күнгірт энергия, фермиондық өріс, скалярлы-фермионды әсерлесу

МАЗМҰНЫ

Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Сызықты біртекті $D_e$ -жүйелерді жордандық канондық түрге келтіру.....	5
Сайдуллаева Н.С., Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Каликулова А.О., Пазылова Д.Т. Matlab бағдарламалар пакетін қолданып «Сыртқы күш әсер еткенде мәжбүрлі тербелістерді есептеу және визуализациялау» компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастыру.....	13
Сайдуллаева Н.С., Тагаев Н.С., Пазылова Д.Т., Каликулова А.О. Бірретті артық жүктеменің шаршау сызаттың дамуына әсері.....	22
Жантаев Ж.Ш., Виляев А.В., Серикбаева Э.Б. Солтүстік Тянь-Шаньнің сейсмикалық тәртіп ерекшелігін бағалауда геотермиялық үлгілеуді қолдану.....	26
Гордиенко Г.И., Яковец А.Ф., Литвинов Ю.Г. Ионосфералақы F-аймақтың биіктігін бағалау әдістерін салыстыру.....	35
Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Крюков С.В., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г. Электрондық концентрацияның ионосфераның F2-қабатының максималындағы күнделікті өзгеруі.....	44
Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н. Максимум F2-қабатының түнгі көбеюлерінің жұқа құрылымы.....	50
Васильев И.В., Жұмабаев Б.Т. Жердің электрлік өрісінің қалыптасуына гравитациялық күшінің әсері.....	55
Козин И.Д., Федулина И.Н. Радиофизика есептерін шешудегі вакуум – орта.....	60
Козин И.Д., Федулина И.Н. Радиотолқынның қабылдағыш антеннаға әсері.....	66
Жантаев Ж.Ш., Стихарный А.П., Виляев А.В. Жердің қазіргі заманғы қозғалысының GPS бақылауындағы уақыттық қатарларының кедергісін сүзу алгоритмі.....	71
Батрышев Д.Ф., Ерланұлы Е., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т. Бір қабырғалы көміртекті нанотүтікшелердің құрылымдық және электрондық қасиеттерін BECKE 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (B3LYP) гибрид функционалы негізінде зерттеу.....	75
Серебрянский А. В., Усольцева Л. А., Комаров А. А., Рева И.В. Атмосфералық экстинкцияның лездік мәндері және ауысуы коэффициенттері.....	84
Бактыбаев Қ., Бактыбаев М.К., Наукенов Д.Д., Далелханқызы А. Өзара әрекеттесуші бозондар моделінің микроскоптық негіздемесіжәне ядролық теориядағы жалпыланған квазиспиндік формализм.....	91
Бапаев К.Б., Слэмжанова С.С. Айырымдық-динамикалық жүйелердің орнықтылығы.....	101
Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш., Копжасарова А.А. Коэффициенттері тұрақты кәдімгі дифференциалдық теңдеулер системасының сингуляр әсерленген Коши есебін спектралдік әдіспен шешу.....	112
Копжасарова А.А., Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б. Ұқсастық әдісі бойынша, сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу.....	127
Косов В.Н., Жакебаев Д.Б., Федоренко О.В. Изотермиялық диффузия кезіндегі тік каналдардағы үшкомпонентті газдар қоспаларында пайда болатын конвективтік қозғалыстардың сандық талдауы.....	134
Мырзақұл Ш.Р., Белисарова Ф.Б., Мырзақұл Т.Р., Мырзакулов К.Р. Старобинский моделінің негізіндегі F-эссенция динамикасы .....	143
Мамырбаев О.Ж., Мухсина Қ.Ж. Мәтін үндесітілігін анықтауға арналған қолданыстағы жүйелерді талдау.....	149
Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Қабылбеков К.А., Саудахметов П.А., Аширбаев Х.А., Джумағалиева А.И. Еркін түсу үдеуімен қозғалған дененің қозғалысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	156
Мырзақұл Ш.Р., Мырзақұл Т.Р., Белисарова Ф.Б., Абдуллаев Х., Мырзакулов К.Р. Скалярлы-фермионды әсерлесулері бар f-эссенция космологиясында нетер симметрия әдісін пайдалану.....	163

## СОДЕРЖАНИЕ

Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Приведение линейных однородных $D_e$ -систем к жордановому каноническому виду.....	5
Сайдуллаева Н.С., Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Каликулова А.О., Пазылова Д.Т. Организация выполнения компьютерной лабораторной работы «Расчет и визуализация вынужденных колебаний при наличии внешней силы» с применением пакета программ Matlab.....	13
Сайдуллаева Н.С., Тагаев Н.С., Пазылова Д.Т., Каликулова А.О. Влияние однократной перегрузки на развитие усталостной трещины.....	22
Жантаев Ж.Ш., Виляев А.В., Серикбаева Э.Б. Применение геотермического моделирования в оценке особенностей сейсмического режима Северного Тянь-Шаня.....	26
Гордиенко Г.И., Яковец А.Ф., Литвинов Ю.Г. Сравнение методов оценки высоты максимума F-области ионосферы.....	35
Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Крюков С.В., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г. День ото дня вариации электронной концентрации в максимуме F2-слоя ионосферы.....	44
Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н. Тонкая структура ночных увеличений в максимуме F2-слоя.....	50
Васильев И.В., Жумабаев Б.Т. Влияние гравитации на формирование электрического поля земли.....	55
Козин И.Д., Федулина И.Н. Вакуум – среда в решении задач радиофизики.....	60
Козин И.Д., Федулина И.Н. Воздействие радиоволны на приёмную антенну.....	66
Жантаев Ж.Ш., Стихарный А.П., Виляев А.В. Алгоритм фильтрации помех временных рядов GPS мониторинга современных движений земной поверхности .....	71
Батрышев Д.Г., Ерланулы Е., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т. Исследование структурных и электронных свойств одностенных углеродных нанотрубок на основе гибридного функционала bescke 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (B3LYP).....	75
Серебрянский А. В., Усольцева Л. А., Комаров А. А., Рева И. В. Коэффициенты перехода и мгновенные значения атмосферной экстинкции.....	84
Бактыбаев К., Бактыбаев М.К., Наукенов Д.Д., Далелханкызы А. Микроскопическое обоснование модели взаимодействующих бозонов и обобщенный квазиспиновый формализм в теории ядра .....	91
Бапаев К.Б., Сламжанова С.С. Об устойчивости разностно – динамических систем.....	101
Иманбаева А.Б., Копжасарова А.А., Шалданбаев А.Ш. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	112
Копжасарова А.А., Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши методом подобия.....	127
Косов В.Н., Жакебаев Д.Б., Федоренко О.В. Численный анализ конвективных движений, возникающих при изотермической диффузии в вертикальных каналах в трехкомпонентных газовых смесях.....	134
Мырзакул Ш.Р., Белисарова Ф.Б., Мырзакул Т.Р., Мырзакулов К.Р. Динамика F-эссенции в рамках модели Старобинского .....	143
Мамырбаев О.Ж., Мухсина Қ.Ж. Анализ существующих систем для определения тональности текста.....	149
Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев Х.А., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движения тела, движущегося с ускорением свободного падения.....	156
Мырзақұл Ш.Р., Мырзақұл Т.Р., Белисарова Ф.Б., Абдуллаев Х., Мырзакулов К.Р. Подход нетер симметрии в космологии F-эссенций со скалярно-фермионным взаимодействием.....	163

CONTENTS

<i>Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.</i> Reduction of linear homogeneous $D_e$ -systems to the jordan canonical form.....	5
<i>Saidullayeva N.S., Kabyzbekov K.A., Ashirbaev Kh.A., Kalikulova A.O., Pazylova D.T.</i> Organization of computer lab work "Calculation and visualization of forced oscillations in the presence of an external force" with the use of the software package Matlab.....	13
<i>Saidullayeva N.S., Tagaev N.S., Pazylova D.T., Kalikulova A.O.</i> Effect of single overload on the development of a fatigue crack.....	22
<i>Zhantaev Zh.Sh., Vilyayev A.V., Serikbaeva E.B.</i> The application of geothermal modeling in the assessment of the features of the seismic regime of the Northern Tien Shan.....	26
<i>Gordienko G.I., Yakovets A.F., Litvinov Yu.G.</i> Comparison of the methods for estimating the hight of the maximum of th $F$ region of the ionosphere.....	35
<i>Yakovets A.F., Gordienko G.I., Kryukov S.V., Zhumabayev B.T., Litvinov Yu.G.</i> Day-to-day variability of electron concentration n the ionospheric $F2$ layer maximum.....	44
<i>Yakovets A.F., Gordienko G.I., Zhumabayev B.T., Litvinov Yu.G., Abdrakhmanov N.</i> Fine structure of nighttime enhancements of the electron concentration in the $F2$ layer maximum .....	50
<i>Vassilyev I.V., Zhumabayev B.T.</i> Influence of gravitation on formation of the electric field of the earth.....	55
<i>Kozin I.D., Fedulina I.N.</i> Vacuum - environment in the decision of radio physics problems.....	60
<i>Kozin I.D., Fedulina I.N.</i> Radio-wave action on the receiving antenna.....	66
<i>Zhantaev Zh.Sh., Stikharny A.P., Vilyayev A.V.</i> The algorithm for filtering the errors of time series GPS monitoring of factual movements of the earth's surface.....	71
<i>Batryshev D.G., Yerlanuly Ye., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T.</i> Investigation of structural and electronic properties of single-walled carbon nanotubes on the basis of a hybrid functional becke 3-parameter LEE-YANG-PARR (B3LYP).....	75
<i>Serebryanskiy A., Usoltseva L., Komarov A., Reva I.</i> The trasformation coefficients and instantaneous values of atmospheric extinction.....	84
<i>Baktybaev K., Baktybaev M.K., Naukenov D.D., Dalelkhankyzy A.</i> Microscopic justification of the model of interacting bosons and a generalizedquasispin formalism in the theory of the nuclei.....	91
<i>Bapayev K.B., Slamzhanova S.S.</i> On stability of difference-dynamical systems .....	101
<i>Imanbayeva A.B., Shaldanbayev A.Sh., Kopzhasarova A.A.</i> Asymptotic decomposition the decision is singular the indignant task of Cauchy for the system of the ordinary differential equations with constant coefficients.....	112
<i>Kopzhasarova A.A., Shaldanbayev A.Sh., Imanbayeva A.B.</i> The decision is singular the indignant task of Cauchy by a similarity method.....	127
<i>Kossov V.N., Zhakebaev D.B., Fedorenko O.V.</i> Numerical analysis of convective motions occurring under isothermal Diffusion in the vertical channels in ternary gaseous mixtures.....	134
<i>Myrzakul S.R., Belisarova F.B., Myrzakul T.R., Myrzakulov K.R.</i> Dynamics of F-essence in frame of the starobinsky model.....	143
<i>Mamyrbayev O.Zh., Muhsina K.Zh.</i> Analysis of existing systems for determination of tonnity of text.....	149
<i>Omashova G.SH., Spabekova R.S., Kabyzbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Ashirbaev KH. A., Dzhumagalieva A. I.</i> Model of the form of the organization of computer laboratory work on the research of the movement of the body moving with acceleration of gravity.....	156
<i>Myrzakul Sh.R., Myrzakul T.R., Belisarova F.B., Abdullayev Kh., Myrzakulov K.R.</i> Noether symmetry approach in f-essence cosmology with scalar-fermion interaction.....	163

---

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.09.2017.  
Формат 60x88<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11 п.л. Тираж 300. Заказ 5.

---

*Национальная академия наук РК*  
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*