

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

3 (313)

МАМЫР – МАУСЫМ 2017 Ж.

МАЙ – ИЮНЬ 2017 г.

MAY – JUNE 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. PhD докторы (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадилаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. доктор PhD (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. PhD (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 5 – 9

UDC 548.735+548.31+577.112.387.2+ 577.112.37+661.8...35

S.B. Berdibay^{1,2,*}, N.A. Paretskaya², A.N. Sabitov², R.A. Islamov²,
R.A. Tamazyan³, S.Zh. Tokmoldin¹, A.I. Ilin², K.S. Martirosyan⁴

¹K.I. Satpayev Kazakh National Research Technical University, Almaty, Kazakhstan;

²Scientific Center for Anti-Infectious Drugs, Almaty, Kazakhstan;

³The foundation “Research Center for Advanced Technologies”, Yerevan, Armenia;

⁴The University of Texas Rio Grande Valley, Texas, USA

*E-mail: sniper_8888@mail.ru

PHENYLALANINE – IODINE COMPLEX AND ITS STRUCTURE

Abstract. This report describes synthesis and structural characterization of the phenylalanine-iodine complex monocrystal in acetone. Crystals of the substance exhibited a rhombic syngony and were stable at a temperature of 25 °C. As a result, a new compound α,α' -di-amino- β,β' -diphenylpropionic acid monoiodide has been obtained. X-ray diffraction analysis showed that dimers of phenylalanine molecules ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) are formed due to hydrogen bonds between the oxygen atoms of carboxyl groups. The hydrogen bonds between the amino groups and iodide form the layers parallel to the (001) plane and these molecular layers are bound to a three-dimensional structure via the van der Waals forces.

Keywords: Phenylalanine, iodine, halogen, hydrogen bonds, amino acid complex with iodine.

Introduction

Iodine, in comparison with other halogens - fluorine, chlorine and bromine, has a number of distinctive properties. First of all, the interatomic distance in the iodine molecule in the solid state is greater than in the gaseous state. This is not observed in either chlorine or bromine. Due to the large size of the iodide anion, the iodide has a small surface charge density, as a result of which the charge distribution can be distorted by the action of certain cations (Li^+ , Mg^{2+} , Fe^{3+} , etc.) and can no longer be regarded as spherically symmetric [1]. In comparison with chlorine and bromine, high iodine polarizability along with low electronegativity makes it possible to form various compounds like charge transfer, donor-acceptor interaction, hydrophobic interaction, hydrogen and halogen bonds [2,3]. These properties of iodine enable to develop a variety of substances and materials, for example, drugs [2], superconductors [4], nonlinear optical crystals [5]. Iodine forms complex compounds with organic substances and interhalogen compounds, including polyiodides [6-9]. Of particular interest are the compounds of iodine with amino acids [10]. The aim of the study was a synthesis of a complex of phenylalanine and iodine and determination its structure by X-ray diffraction analysis.

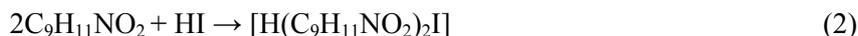
Experimental part

Synthesis of the phenylalanine-iodine complex. Acetone (Sigma, USA) and iodine (Reachim, Russia) were mixed in a molar ratio of 34:1 at a temperature of 60-65°C to produce hydrogen iodide:



Then phenylalanine was added and acetone was slowly evaporated. As the acetone evaporates, crystals of black color form for a long time. The obtained crystals had a rhombic syngony and were stable

at a temperature of 25°C. The chemical formula of this compound can be represented as: $2C_9H_{11}NO_2 \cdot HI$, and the formation reaction:



X-ray diffraction analysis (XRD). A single-crystal needle-shaped sample of 0.02 x 0.08 x 0.28 mm in size was placed in a glass capillary and fixed with a glass rod. To prevent the destruction of crystals under the influence of heat and X-rays, diffraction measurements were carried out at low temperatures. Low temperatures on the samples were maintained by a low temperature prefix of the "Enraf-Nonius" firm in pairs of nitrogen with an accuracy of $\pm 1^\circ\text{C}$. Diffraction measurements were carried out at room temperature on an Enraf-Nonius CAD-4 auto-diffractometer (graphite monochromator, Mo- K_α radiation, $\theta/2\theta$ - scanning). The parameters of the rhombic cell are determined and refined by 24 reflections with $12 < \theta < 13$. The absorption was accounted for using the psi-scan method [11]. The structure is deciphered by the direct method. The coordinates of all hydrogen atoms are determined by geometric calculations. The structure is defined by the completely matrix OLS in the anisotropic approximation for non-hydrogen atoms and isotropic for hydrogen atoms. The coordinates of the hydrogen atoms of the NH_3 and OH groups are refined freely, and the coordinates of the remaining hydrogen atoms are refined by the "rider" model with the following conditions: the length of the bonds is C-H=0.98Å, 0.97Å, 0.93Å and $U_{iso}(H)=1.5U_{eq}(C)$ for CH, CH_2 and phenyl groups, respectively. All structural calculations were carried out using the SHELXTL program complex [12].

The main crystallographic data and experimental parameters are given in Table 1, and the full crystallographic information of the investigated compound was deposited at the Cambridge structural data bank under the number CCDC 1036670.

Table 1 - Crystallographic data of the complex $2(C_9H_{11}NO_2) \cdot HI$

Formula	$2(C_9H_{11}NO_2) \cdot HI$
Molecular weight	458.28
Singonia; Spatial group	Rhombic; $P2_12_12_1$
Lattice parameters a, b, c [Å]	5.3059(11); 12.265(3); 29.585(6)
alpha, beta, gamma [deg]	90.0; 90.0; 90.0
V [Å] ³ ; Z	1925.3(7); 4
D(calc)[g/cm ³]; F(000)	1.581; 920
Mu(MoKa) [mm ⁻¹]	1.687
Dimensions of the crystal [mm]	0.02 x 0.08 x 0.28
Измерения	
Temperature (K); Radiation [Å]	200; MoKa; $\lambda=0.71073$
$\theta_{min}; \theta_{max}$ [Deg]	1.4, 30.0
Measurement area	0: 7; -17: 17; 0: 41
Number of reflexes changed, independent, R(int)	6498, 5612, 0.048
Observed reflexes [$I > 2.0 \sigma(I)$]	3154
Refinement	
Number of reflexes, Number of parameters	5612, 247
R, wR ² , S	0.0616, 0.1304, 0.81
Max. and Av. Shift/Error	0.00, 0.00
Flack x	0.00(4)
Min. and Max. Resd. Dens. [e/Å ³]	-0.69, 0.85

Results and discussion

The structure of the complex $2(C_9H_{11}NO_2) \cdot HI$, determined by X-ray diffraction analysis, is shown in Fig. 1. The independent part of the unit cell contains two molecules of phenylalanine ($C_9H_{11}NO_2$), and one anion I^- .

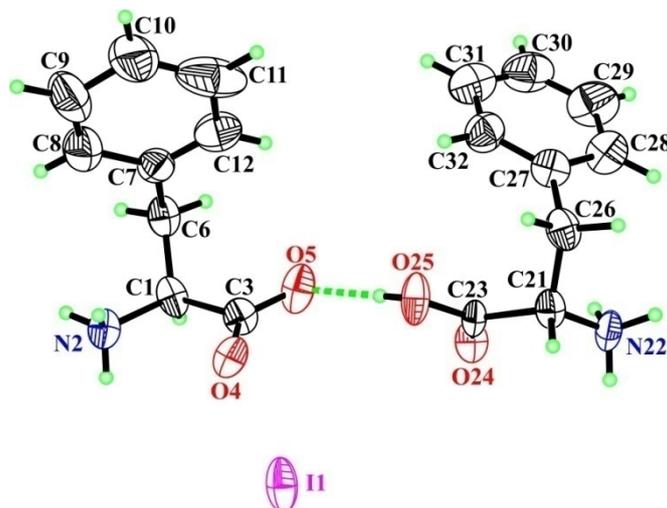


Figure 1 - Atomic model of the structure of $C_{18}H_{23}N_2O_4I$
(ellipsoids of anisotropic thermal oscillations are drawn at the level of 50% probability)

Herewith, two molecules of phenylalanine are bound by the hydrogen bond $O25-H25 \cdots O5$ (Table 2) to form a dimer ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) (Figure 1).

Table 2 - Hydrogen bonds in structure $2(C_9H_{11}NO_2) \cdot HI$

D	H	A	D-H	H-A	D-A	D-H-A
N2	H2A	O24	0.92(4)	1.87(4)	2.778(7)	168(5)
N2	H2B	I1	0.92(7)	2.81(8)	3.642(6)	151(7)
N2	H2C	I1	0.92(8)	2.79(8)	3.575(6)	144(8)
N22	H22B	O4	0.93(4)	1.83(4)	2.760(7)	173(3)
N22	H22A	I1	0.93(8)	2.77(8)	3.602(6)	149(7)
N22	H22C	I1	0.93(6)	2.75(8)	3.616(6)	158(7)
O25	H25	O5	0.88(9)	1.66(9)	2.423(6)	144(8)

In the three-dimensional packaging of the crystal structure, the dimers ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) form an infinite two-dimensional layer parallel to the plane (001) due to the hydrogen bonds between the amino groups and iodide (Figure 2). In the three-dimensional construction of the crystal structure, the interaction between the layers is mainly described by van der Waals forces.

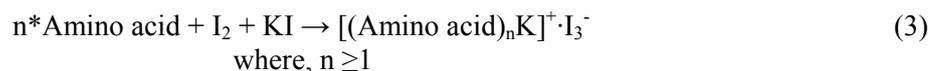
Thus, in the reaction of iodine with phenylalanine in acetone, a complex α, α' -di-amino- β, β' -diphenylpropionic acid monoiodide is formed. Iodine atoms are the acceptors of the hydrogen bond formed with amino groups of phenylalanines of the type:



where, $X = F, Cl, Br$ и I

The average and normalized length of the hydrogen bond $H \cdots X^-$ is 0.83 and, being less than the mean value 0.873 [13], calculated from known structures, indicates a strong hydrogen bond.

The obtained complex differs from other coordination compounds of iodine with amino acids [10] or other biologically active substances [14] with charge transfer by type:



Iodide promotes the dimerization of phenylalanines, initiating the formation of the hydrogen bond between pairs of amino acid molecules. As it is known, multidimensional structures, formed by hydrogen bonds between biological molecules, play an important role - from metabolic transformations to the realization of genetic information encoded in DNA [15, 16]. The role of halogen ions in the stabilization of the action of the reactive center of enzymes is great. For example, the chlorine anion activates the α -

amylase of animals and certain bacteria by forming the hydrogen bond with the amino group of arginine [17]. Similarly, chloride affects cathepsin C [18]. Therefore, interest in halogens as acceptors of the hydrogen bond is very high.

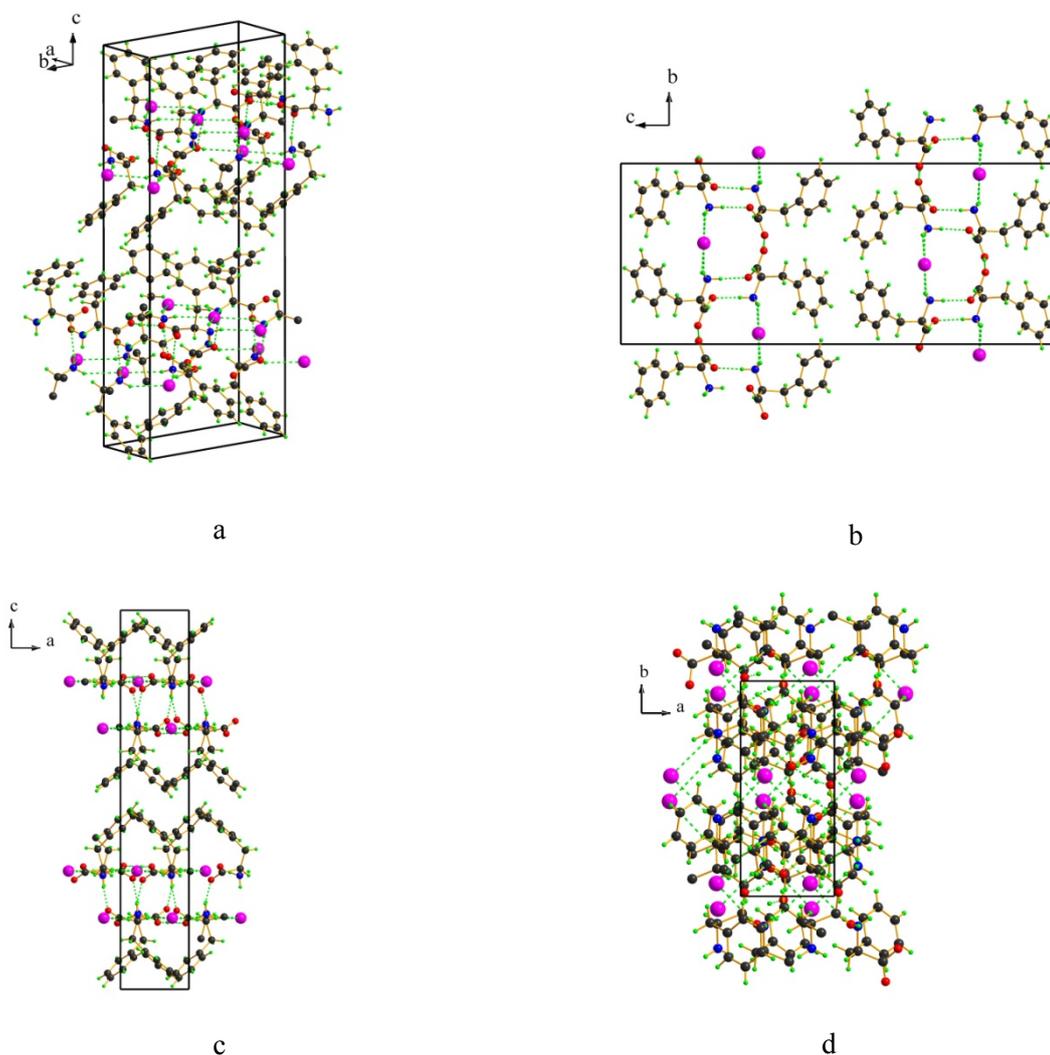


Figure 2 - Crystalline structure $C_{18}H_{23}N_2O_4I$, iodine atoms of magenta colour, carbon - gray, nitrogen - blue, oxygen - red and hydrogen - green, hydrogen bonds are shown in green broken lines: (a) - a perspective view of the structure; (b) - the projection of the structure on (100); (c) - the projection of the structure on (010); (d) - the projection of the structure on (001)

REFERENCES

- [1] Hauskroft K, Konstel J. (2002) *Sovremennyy kurs obshchey himii*. Mir, Rossija. ISBN 5-03-003310-6. (In Russian)
- [2] Küpper FC, Feiters MC, Olofsson B, Kaiho T, Yanagida S, Zimmermann MB, Carpenter LJ, Luther GW 3rd, Lu Z, Jonsson M, Kloo L. (2011) Commemorating two centuries of iodine research: an interdisciplinary overview of current research, *Angew Chem Int Ed Engl*, 50:11598-11620. DOI: 10.1002/anie.201100028
- [3] Bartashevich EV, Cirel'son VG. (2014) *Vzaimnoe vliyanie nekovalentnykh vzaimodejstvij v kompleksah i kristallah s galogennymi svjazjami*, *Uspehi himii*, 83:1181-1203. DOI: 10/RCR4440. (In Russian)
- [4] Mihalache V, Aldica GV, Miu D. (2007) Superconducting properties of iodine-intercalated $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10+x}$, *J Supercond Nov Magn*, 20:261-272. DOI: 10.1007/s10948-006-0199-y
- [5] Yin Z, Wang QX, Zeng MH. (2012) Iodine release and recovery influence of polyiodide anions on electrical conductivity and nonlinear optical activity in an interdigitated and interpenetrated bipillared-bilayer metal-organic framework, *J Am Chem Soc*, 134:4857-4863. DOI: 10.1021/ja211381e
- [6] Refat MS, Al Didamony H, Abou El-Nour KM, El-Zayat L. (2010) Synthesis and spectroscopic characterization on the tri-iodide charge transfer complex resulted from the interaction between morpholine as donor and iodine sigma-acceptor, *J Saudi Chem Soc*, 14:232-330. DOI: 10.1016/j.jscs.2010.04.004
- [7] Blake AJ, Li WS, Lippolis V, Parsons S, Schröder M. (2007) Extended structures of polyiodide salts of transition metal macrocyclic complexes, *Acta Crystallogr B*, 63:81-92. DOI: 10.1107/S0108768106041668

- [8] Walbaum C, Pantenburg I, Junk P, Deacon GB, Meyer G. (2010) Bulky Cations and Four different Polyiodide Anions in [Lu(Db18c6)(H₂O)₃(thf)₆]₄(I₃)₂(I₅)₆(I₈)(I₁₂), *Z Anorg Allg Chem*, 636:1444-1446. DOI: 10.1002/zaac.201000112
- [9] Madhu S, Evans HA, Doan-Nguyen VV, Labram JG, Wu G, Chabinye ML, Seshadri R, Wudl F. (2016) Infinite polyiodide chains in the pyrroloperylene-iodine complex: insights into the starch-iodine and perylene-iodine complexes, *Angew Chem Int Ed Engl*, 55:8032-8035. DOI: 10.1002/anie.201601585
- [10] Mahmoud KR, Refat MS, Sharshar T, Adam MA, Manaaa El-SA. (2016) Synthesis of amino acid iodine charge transfer complexes in situ methanolic medium: Chemical and physical investigations, *J Mol Liq*, 222:1061-1067. DOI: 10.1016/j.molliq.2016.07.138
- [11] North ACT, Phillips DC, Mathews FS. (1968) *Acta Cryst*, A24:351-359.
- [12] Sheldrick GM. (2008) All programs beginning with SHELX, *Acta Cryst*, A64:112-122
- [13] Brammer L, Bruton EA, Sherwood P. (2001) Understanding the behavior of halogens as hydrogen bond acceptors, *Crystal Growth & Design*, 1:277-290. DOI: 10.1021/cg015522k
- [14] Solanki GK, Amin A, Padhiyar A, Ray AK, Oza AT. (2008) Polaron hopping in some biomolecular solids and their charge transfer complexes, *Indian J Biochem Biophys*, 45:421-429
- [15] Bissantz C, Kuhn B, Stahl M. (2010) A Medicinal Chemist's Guide to Molecular Interactions, *J Med Chem*, 53:5061-5084. DOI: 10.1021/jm100112j
- [16] Scholfield MR, Zanden CMV, Carter M, Ho PS. (2013) Halogen bonding (X-bonding): A biological perspective, *Protein Sci*, 22:139-152. DOI: 10.1002/pro.2201
- [17] Aghajari N, Feller G, Gerday C, Haser R. (2002) Structural basis of α -amylase activation by chloride, *Protein Sci*, 11:1435-1441. DOI: 10.1110/ps.0202602
- [18] Cigic B, Pain RH. (1999) Location of the binding site for chloride ion activation of cathepsin C, *Eur J Biochem*, 264:944-951

ӨОЖ: 548.735+548.31+577.112.387.2+ 577.112.37+661.8...35

С.Б. Бердібай^{1,2}, Н.А. Парецкая², А.Н. Сабитов², Р.А. Исламов²,
Р.А. Тамазян³, С.Ж. Токмолдин¹, А.И. Ильин², К.С. Мартиросян⁴

¹Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық зерттеу университеті, Алматы қ., Қазақстан;

²Инфекцияға қарсы препараттар ғылыми орталығы, Алматы қ., Қазақстан;

³Перспективалық технологиялар зерттеу орталығы фонды, Ереван қ., Армения;

⁴The University of Texas Rio Grande Valley, Texas, USA

ИОД ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚҰРЫЛЫМЫМЕН ФЕНИЛАЛАЛИННІҢ КЕШЕНДІ КОМПЛЕКСІ

Аннотация. Мақалада ацетонда фенилаланин-иод кешенінің монокристаллды алу және синтезі сипатталады. Заттың кристаллы ромбылық сингониясы болды және 25 °С температурада тұрақты болды. Нәтижесінде α, α' -ди-амино- β, β' -моноиодид дифенилпропионды қышқылының жаңа қосылысы алынды. Рентгендік құрылымдық зерттеулерімен фенилаланиннің молекула диметрлері (C₁₈H₂₃N₂O₄) карбоксил топтарының оттегі атомдар арасындағы сутектік байланыс салдарынан пайда болатынын көрсетті. Амин топтары мен иодид арасындағы сутектік байланыс параллель жазықтық қатпары пайда болып, осы молекулалар қатпарлары Ван-дер-Ваальс арқылы үш өлшемді құрылысын байланыстырады.

Түйін сөздер: фенилаланин, иод, галоген, сутектік байланыстар, иодпен амин қышқылы кешені.

УДК 548.735+548.31+577.112.387.2+ 577.112.37+661.8...35

С.Б. Бердібай^{1,2,*}, Н.А. Парецкая², А.Н. Сабитов², Р.А. Исламов²,
Р.А. Тамазян³, С.Ж. Токмолдин¹, А.И. Ильин², К.С. Мартиросян⁴

¹Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сәтбаева, Алматы, Казахстан;

²Научный центр противоинфекционных препаратов, Алматы, Казахстан;

³Фонд «Центр исследования перспективных технологий», Ереван, Армения;

⁴The University of Texas Rio Grande Valley, USA

КОМПЛЕКС ФЕНИЛАЛАНИНА С ИОДОМ И ЕГО СТРУКТУРА

Аннотация. В статье описывается синтез и структурный анализ монокристалла комплекса фенилаланин-иод в ацетоне. Кристаллы вещества имели ромбическую сингонию и были стабильны при температуре 25 °С. В результате получено новое соединение α, α' -ди-амино- β, β' -дифенилпропионой кислоты моноиодид. Рентгенструктурными исследованиями показано, что димеры молекулы фенилаланина (C₁₈H₂₃N₂O₄) образуются за счёт водородных связей между атомами кислорода карбоксильных групп. Водородные связи между аминогруппами и иодидом образуют слою параллельно плоскости (001) и эти слою молекул связываются в трехмерную постройку силами Ван-дер-Ваальса.

Ключевые слова. Фенилаланин, иод, галоген, водородные связи, комплекс аминокислоты с иодом.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 10 – 18

UDC 539.17

**A.M. Kabyshev^{1,2}, K.A. Kuterbekov^{1,2}, Yu.E. Penionzhkevich³, V.A. Maslov³,
K. Mendibayev^{2,3}, Yu. G. Sobolev³, S.M. Lukyanov³, G. D. Kabdrakhimova^{1,2},
D. T. Aznabayev³, A. T. Kurmanzhanov^{1,2}**

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, 010008, Astana, Kazakhstan;

²Physical-Technical Society of Kazakhstan, Astana, Kazakhstan;

³Joint Institute for Nuclear Research, 144980, Joliot-Curie 6, Dubna, Russia

**ERRORS IN THE TOTAL REACTION CROSS SECTIONS
AND ENERGIES OF INCIDENT PARTICLES MEASURED USING
MODIFIED TRANSMISSION TECHNIQUE**

Abstract. When determining the values of the total reaction cross sections and the energy of the particles of a beam of weakly bound nuclei, there are always statistical and systematic errors. The former depend on the data collected, the latter – on the components of the experimental setup. A thorough study of the used equipment and components, such as targets and detectors, makes it possible to evaluate and minimize the effect of systematic errors.

In this paper, for the first time, the guidelines and basic principles for determining the errors in the total cross reaction sections and the beam energy in the course of the experiment are described in detail, and the determination of their errors in a particular experiment is demonstrated.

Keywords: Statistical and systematic errors, total reaction cross section, γ -spectrometer.

Introduction

The total error of the final quantity is not only the statistical error of the recorded events. It must include the errors in determining all other quantities used in the calculation formula, for example, the errors in the measurement of the thickness of the target, the distance to the source and others. These errors are systematic errors. Systematic errors are caused by the imperfection of instruments, incorrect installation of the device, displacement of the scale, inaccurate setting of the instrument pointer in the zero position, low sensitivity of the instrument, neglect of external factors affecting the result of measurements (thermal, electric and magnetic fields, pressure, humidity and others) approximate equations and constants used to calculate the desired quantities, and other factors [1].

Systematic errors unlike statistical errors are not described by the methods of mathematical statistics. They can be reduced by examining the instruments used in the experiment and introduction of corrections in the results of measurements.

In this paper, we would like to give an example of the determination of systematic errors by the example of measuring the total cross section of nuclear reactions.

The two main experimentally determined parameters of the nuclear interaction are the values of angular distributions of the differential cross sections (ADDCS) of elastic scattering and total reaction cross sections (TRC). The method of determination of errors of angular characteristics and angular distributions of the differential cross sections of elastic scattering is described in detail in [2, 3].

Let us determine errors in the measurement of total reaction cross sections. The values of the total reaction cross sections are measured indirectly, i.e., using the results of direct measurements of particle fluxes I_0 and I incident on the target and passing through N target nuclei without interaction, respectively.

The total reaction cross section

The TRC value is connected with the intensities of particle fluxes I_0 and I by the equation:

$$\sigma_R = (I_0 - I) / N \cdot I_0. \quad (1)$$

The equation (1) shows that for the direct measurement of the total reaction cross section σ_R it is necessary to simultaneously measure two quantities, namely, the difference $(I_0 - I)$ and the corresponding intensity of the flux I_0 . This method, called the «transmission method», is most commonly used to measure TRC.

Experimental setup

In our experiment, where we measured the total cross sections for the interaction of ${}^6\text{He}$, ${}^8,9\text{Li}$ with the nuclei of ${}^{28}\text{Si}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{59}\text{Co}$ and ${}^{181}\text{Ta}$, we used the modified transmission technique based on the use of a multilayer telescope with semiconductor silicon detectors combined with a 4π -geometry scintillation gamma-spectrometer [4, 5]. This technique provides a direct measurement of the number of events in the reaction $\Delta R = (I_0 - I)$, normalized to the flux intensity I_0 . The number of events in the reaction ΔR was determined by registration of radiation at least in one of the six detectors of the γ -spectrometer in coincidence with the starting semiconductor detector of the telescope.

The experiment was conducted at the U-400M accelerator in the G. N. Flerov Laboratory of Nuclear Reactions, JINR (Dubna). The secondary beam of ${}^6\text{He}$ and ${}^8,9\text{Li}$ nuclei of intensity $I_0 \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$ in the energy range $E = (5 - 30) \text{ MeV/nucleon}$ was obtained as a product of the fragmentation reaction of the primary beam of ${}^{11}\text{B}$ nuclei ($E = 32 \text{ MeV/nucleon}$) on ${}^9\text{Be}$ target. The secondary ${}^8,9\text{Li}$ -beam was formed using the elements of the magnetic system of the ACCULINNA fragment separator equipped with the eight-meter *TOF* transport line for particle identification.

In the input and output parts of the separator channel, thin plastic scintillation detectors, which identified particle energy by energy release dE and by the time of flight *TOF*, were mounted. Multipole focusing elements provided further transportation of ${}^6\text{He}$ and ${}^8,9\text{Li}$ beam to the low-background separator cabin.

This experiment took into account the experience and corrected methodological errors of the previous works. The attempts of joint application of a full geometry γ -spectrometer and transmission technique had a number of significant shortcomings and gave only estimates and only for «energy-integrated reaction cross sections».

One of the disadvantages of this method is that the main source of gamma and neutron background (telescope E -detector of the full beam stop) was placed in the sensitive area of the γ -spectrometer, so that it fixed γ -radiation from the events both in the test target and in the E -detector material, where the number of nuclei is several orders of magnitude larger than that in the target.

In our improved modification of the experiment, all basic background γ -sources are minimized and placed beyond the sensitive area of the γ -spectrometer, and in the physical installation the events ensemble was chosen so that γ -spectrometer played the main role in their analysis, and the E -detector was not a background γ -source. The other part of events, pretending to be nuclear reactions, was selected by the transmission method, where the γ -spectrometer analysis plays a secondary role. Therefore, this physical installation provides two separate exposures $\Theta \gg 0^0$ and $\Theta \sim 0^0$ with the corresponding intensities of ${}^8,9\text{Li}$ beam, γ -spectrometer functions, etc.

4π -geometry CsI(Tl) scintillation γ -spectrometer was installed in the low background cabin in the additional Pb-protection. The studied target, in particular, dE Si-detector, was placed in the center of the γ -spectrometer (see Figure 1). The other dE and E detectors of the semiconductor telescope were placed along the beam axis, before and after the studied target, beyond the sensitive zone of the γ -spectrometer.

The target (dE - detector) was placed in the central zone of the γ -spectrometer, whereas all other telescope detectors, in particular, identifiers dE_0 and dE_1 , detectors-identifiers of reaction products dE_3 and E detector of full beam stop were located in the (n- γ) - protection beyond the sensitive zone of the γ -spectrometer. The experimental technique using 4π - scintillation γ -spectrometer is described in detail in [4, 5].

Semiconductor dE_0 , dE_1 detectors and active collimator dE_{AK} were placed before the target and used for identification of ${}^6\text{He}$ and ${}^{8,9}\text{Li}$ nuclei, and their separation from the other particles-products of the secondary beam. Recording of information started for each event when a particle passed through the detector dE_1 . Different thicknesses of dE_0 and dE_1 detectors allowed the experimenters to change and measure the energy of ${}^{8,9}\text{Li}$ particles incident on the target for each event of particle passage.

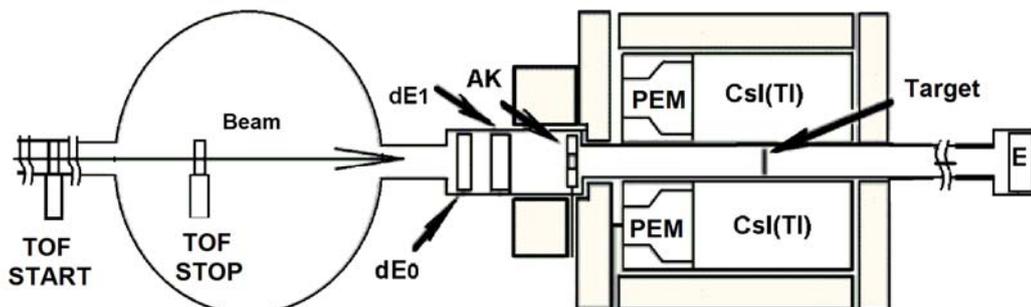


Figure 1 –The scheme of the experiment on measuring reaction cross sections by 4π - scintillation γ -spectrometer

The secondary beam of ${}^6\text{He}$ and ${}^{8,9}\text{Li}$ nuclei successively passed the following parts of the installation:

- the group of plastic scintillator $TOF - dE$ detectors of ACCULINNA separator;
- the group of semiconductor detectors dE_0 , dE_1 for additional identification of the beam particles and reduction of their energy;
- the active collimator detector AK;
- the target located in the center of 4π -geometry CsI(Tl) γ -spectrometer in the (n- γ)- protection;
- the E detector located along the beam axis behind the target.

The E detector was located beyond the γ -spectrometer and recorded the beam particles having passed the target.

Figure 2 shows the two-dimensional spectra: the dependence of energy losses in dE_0 on TOF (left) and energy losses in the detectors dE_0 and dE_1 (right). Compact grouping of points in the two-dimensional spectra shows a reasonably good separation of ${}^6\text{He}$ - and ${}^{8,9}\text{Li}$ -isotopes.

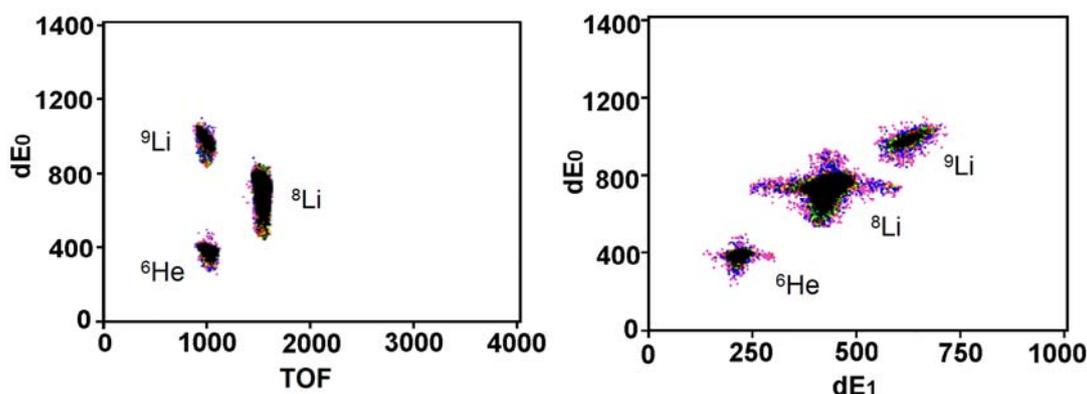


Figure 2 – Two-dimensional spectra of identification detectors dE_0 and dE_1 : energy losses in dE_0 and TOF (left) and energy losses in the detectors ($dE_0 \times dE_1$). (right). The spectra demonstrate good separation of ${}^6\text{He}$ and ${}^{8,9}\text{Li}$ nuclei formed as products of (${}^{11}\text{B} + {}^9\text{Be}$) reaction

Gamma spectrometer with 4π -geometry recorded γ -quanta in coincidence with the starting dE_1 -detector. For each event, the system recorded information about the energy of γ -quanta and the time of their registration.

The number of events-reactions $\Delta R = (I_0 - I)$ was determined by registering radiation at least in one of the γ -spectrometer detectors in coincidence with the starting dE_1 detector. Thus, the total cross section of the reaction was calculated by (4) using the results of measurement of I_0 and ΔR values.

The errors in determining the total reaction cross sections

Expression (1) shows that for direct measurement of the total reaction cross section σ_R it is sufficient to measure two quantities, namely, the difference ($I_0 - I$) and the corresponding flux value I_0 , simultaneously.

In accordance with formula (1), the main contribution to the error of the TRC value is made by statistical errors and errors in determining the target thickness (in the calculation it is the number of target nuclei).

The absolute error is calculated from the expression:

$$\Delta\sigma_R = \sigma_R \cdot \delta \quad (2)$$

The relative error of the measurement result δ is determined by the expression:

$$\delta = \sqrt{(\delta N)^2 + (\delta\varepsilon)^2 + (\delta h_{\text{tar}})^2 + (\delta h_{\text{det}})^2}, \quad (3)$$

where δN is the statistical error, $\delta\varepsilon$ is the error determined by the efficiency of detectors, δh_{tar} is the error in determining the target thickness, δh_{det} is the error in determining the thickness of detectors. Let us consider these errors.

Statistical error:

$$\delta N = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (4)$$

where N is the number of events.

Table 1 – The number of events for different particles detected by the detectors. The error value for each value is \sqrt{N}

Run	⁶ He	⁸ Li		
69	100176	101677	²⁸ Si 420 μm	
77	101889	105373	²⁸ Si 200 μm	
85	789070	943720	²⁸ Si 420 μm	
99	1735797	1149928	²⁸ Si 420 μm	
103	603406	475292	²⁸ Si 420 μm	
run	⁶ He	⁸ Li	⁹ Li	
12	1342089	291723		²⁸ Si 510 μm
24	69625	586099	13499	²⁸ Si 510 μm
32	180758	1747947	56384	²⁸ Si 510 μm
33	169484	1621098	42805	²⁸ Si 510 μm
37	248417	2119843	60880	²⁸ Si 510 μm

Table 1 presents the quantitative data from the spectra for ⁶He- and ^{8,9}Li- particles interacting with ²⁸Si. The statistical error (4) in our experiment (Table 1) is less than 1%.

Error caused by the detector efficiency

Efficiency of silicon semiconductor detectors. To identify beam particles we used semiconductor silicon detectors – penetrated (from 3 to 6 pieces) thin dE -detectors with a thickness of 200, 420, 510 μm and a 710 μm E -detector for total absorption.

Separation (selection) of the products of nuclear reactions by the one-dimensional spectra in the studied detectors leads to measurement errors and determines the accuracy of selection of events in nuclear reactions in the studied pair of detectors. These errors are not less than 1%.

Errors in determining the thickness of detectors. Table 2 presents the main characteristics of silicon semiconductor detectors used in the experiment.

The efficiency of registration of charged particles by semiconductor detectors is 100%.

Table 2 – Nominal characteristics of silicon semiconductor detectors used in the experiment. Values are given without errors from the manufacturer's data

Diameter of active area, mm	40
Diameter of semiconductor wafer, cm	10.16
Detector thickness, microns	200, 420, 510, 710
Dead layer, nm	50
Thickness of metal (aluminum) cover the entire active area of the detector, microns	0.5
Minimum energy threshold, keV	4 – electrons, 90 – protons
Energy resolution, keV	~ (50–70)

Efficiency of γ -spectrometer. We used the γ -spectrometer assembled from six γ -detectors made of inorganic scintillator CsI (T1). Each detector consists of a scintillator in the form of a straight prism of 14 cm high, the base of which is a regular hexagon with the radius of the circumscribed circle of 10 cm, and a photomultiplier PMT-110, optically coupled to the end face of the CsI(T1) prism.

The surface of each scintillator is polished and coated with 150 μm -thick reflective film Tyvek® DuPont™, Wilmington, DE [6] in two layers. The scintillator is placed in the sealed enclosure from 1mm-thick light-shielding plastic.

It is supposed that the γ -spectrometer covers the solid angle 4π (360°). In practice, the solid angle covered by the detectors is less than 4π . Not all γ -quanta emitted in the reaction get to the detector. Moreover, even after getting into the detector, not all γ -quanta are recorded. For γ -spectrometry it is very important that the γ -quanta lose all their energy in the sensitive area of the detector and are registered in the peak of total absorption. Errors related to this process are not less than 1%.

The most important characteristics of γ -spectrometer, determining its efficiency, are the light output and energy yield of scintillators. Many different scintillators have been created. Table 3 lists the properties of some commonly used scintillators including CsI (T1), which was used in this experiment.

Table 3 – Comparative characteristics of some scintillators

Scintillator	light yield κ (%)	energy yield η	density ρ (g/cm ³)	Z_{average}	$t(t_1)$ (ns)	λ_{max} nm	$h\lambda_{\text{max}}$ (eV)	refraction index
Anthracene (C ₁₄ H ₁₀)	100	0.034	1.25	3.9	30(2)	447	2.77	1.62
Stilbene (C ₁₄ H ₁₀)	50	0.030	1.16	4	4.5(0.1)	410	3.03	1.626
NE-102A, plastic	65	0.01	1.032	~ 5	2.4(0.6)	423	2.93	1.58
NaI(T1)	230 (anthr.) 100	0.16±0.01	3.67	~ 32	230(6)	415	2.99	1.85
CsI(T1)	171	0.06	4.51	~ 54	680(64%) 3.34(36%) (22)	540	2.30	1.80
BGO (Bi ₄ Ge ₃ O ₁₂)	22	0.013	7.13	30	300	480	2.58	2.15

To determine the efficiency of the spectrometer, ideally calibrated springs were used. In such measurements, measures were taken to reduce the possibility of errors due to the measurement technique: the error in the geometric reproducibility of measurement conditions was reduced to 0.1%.

Usually, to determine the efficiency, a set of standard reference sources of γ -radiation and reference radio nuclides with a set of γ -lines of different energies E_i (such as ¹⁵²Eu, ¹³³Ba, ¹³⁷Cs and ²⁴¹Am), for which the initial specific activity A_0 (this specific activity is determined for the moment of manufacturing), are used. In our case, as the reference γ -source ⁶⁰Co and ¹³⁷Cs were used.

The efficiency of registration of γ -radiation with energy E_i in predetermined conditions (geometry, sample) is determined by the formula:

$$\varepsilon(E_i) = \frac{N}{A_0^{tk} \cdot q \cdot t \cdot m \cdot K_c}, \quad (5)$$

where A_0^{tk} is the certified value of the specific activity of the source at the time of measurement; q is the output of γ -quanta per one beta decay; t is the time of measurement; m is the mass of the source; N_i is the number of counts in the spectrum during the time interval t ; K_c is the self-absorption coefficient for radiation.

Usually $\varepsilon(E_i)$ and $K_c(E_i)$ are determined together experimentally:

$$\varepsilon(E_i) \cdot K_c(E_i) = \frac{N}{A_0^{tk} \cdot q \cdot t \cdot m} \quad (6)$$

A_0^{tk} for a concrete measurement is equal to:

$$A_0^{tk} = A_0 \cdot \exp[-0.693 \cdot (t_0 - t_k) / T_{1/2}], \quad (7)$$

where A_0 is the specific activity at the time of certification; $(t_0 - t_k)$ is the time elapsed since the certification before the measurement; $T_{1/2}$ is the half-life.

In our case, the efficiency of detection of γ -quanta was 80%.

Error in determining the target thickness

The success of the experiment on studying nuclear reactions depends on the properly selected targets. The most important requirement for the quality of the target is its thickness, uniformity and isotopic enrichment.

Determination of the reduced number of target nuclei depends on the target thickness. The error in determining the thickness of the target is caused by the instrumental error of the instruments used in measurements. To measure the thickness of the target, we used non-contact measuring instrument CHY-CB for thickness measurements with the instrumental error of 3%.

We used self-supporting targets from ^{28}Si with a thickness (500 ± 0.55) mm (Table 2), which simultaneously played the role of detectors, and passive targets of ^9Be , ^{59}Co and ^{181}Ta with thicknesses (200 ± 8) , (65 ± 2.6) and (100 ± 4) mm, respectively.

The errors caused by the target uncertainty are 0.1, 8, 4, and 2.6% for ^{28}Si , ^9Be , ^{59}Co and ^{181}Ta , respectively.

Thus, the main contribution to the TRC errors is made by statistical errors; errors caused by the efficiency of detectors; as well as errors in the determination of thicknesses of targets and detectors.

The statistical errors introduced by the data collection system are small (Table 1) compared to other values.

Errors in determining energy values

The second important quantity in the experiments on determination of TRC values is determination of the error in the energy of incident and registered the secondary particles.

Errors in the determination of energy values are caused by two factors:

1) The initial energy spread of particles incident on the telescope.

Figure 3 shows a typical example of the energy resolution for the secondary beam of ^6He ions with an average energy equal to 100 MeV, which was determined by the energy losses in the detectors, in which the cross section was measured.

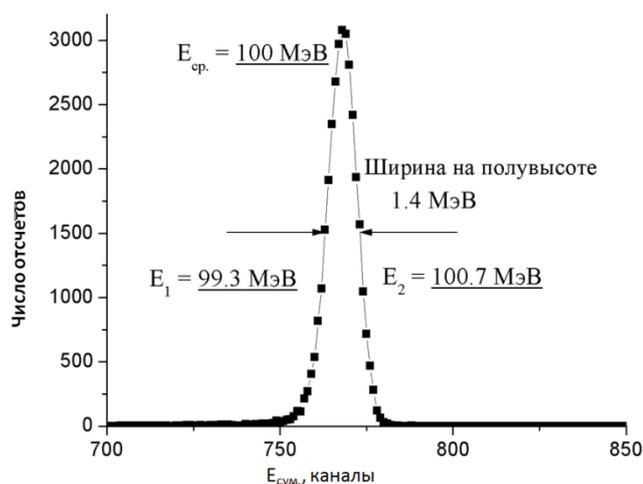


Figure 3 –A one-dimensional spectrum of the total energy loss of particles in the telescope detectors

Consider an example of finding the errors in determining energy. For this purpose let us use the data on the parameters of the primary beam in the given experiment (Table 4).

Table 4 – Parameters of the ${}_{11}\text{B}^{3+}$ -primary beam

Parameter	Value
Date	(19.02.2014 – 20.03.2014)
Average flux on the target, nA	500.0
Beam energy, MeV/nucleon	40.0
Pure time of target irradiation, hours	655
Frequency, MHz	F = 15.01
Harmonic	n = 2
Magnet current, A	1893.90
Date	(14.01.2016 – 28.01.2016)
Average flux on the target, nA	200.0
Pure time of target irradiation, hours	178

Let an ion beam with the energy of $E = (100 \pm 0.7)$ MeV, with the lowest energy of ions E_1 equal to 99.3 MeV and the maximum $E_2 = 100.7$ MeV (energy value at the half maximum of the energy distribution) fall on the telescope. Suppose that the third telescope detector is used as a target, i.e. the detector in which the reaction cross sections are determined (see Figure 4).

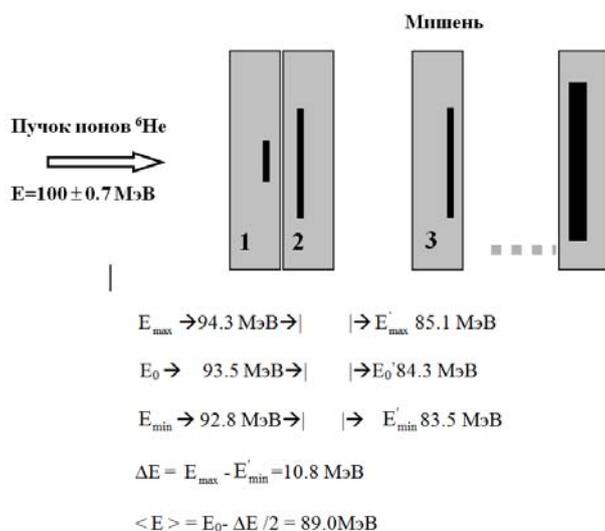


Figure 4 – An example of finding errors in the determination of ion energy

After the first two detectors the average energy of ions, as a result of ionization losses, decreased to 93.5 MeV. The minimum ion energy became equal to 92.8 MeV, and the maximum – 94.3 MeV.

After passing through the target detector the average energy of ions became equal to 84.3 MeV, the minimum energy – 83.5 MeV, the maximum – 85.1 MeV.

The difference between the maximum energy of ions before hitting the target and the minimum energy after its passage determines the energy error. This value was on average equal to 10%.

Thus, the total value of the TRC error is on average $\Delta\sigma_R \approx (5 - 8) \%$. The error in the determination of the incident particle energy is on average 10%.

Conclusion

When measuring the TRC values and in determining the beam particle energy, statistical and systematic errors are always present experimentally. The former depend on the data collected, the latter on the components of the experimental setup. A thorough study of the equipment and components used, such as targets and detectors, makes it possible to evaluate and minimize the effect of systematic errors. In the given example, the best value of the total error of the TRC value is, on the average, $\Delta\sigma_R \approx (5-8) \%$. The value of the total error in determining the energy of the incident particles is higher and averaged 10%.

REFERENCES

[1] Luke C.L. Yuan, Chien-Shiung Wu. Determination of Nuclear Reactions. Determination of Flux and Densities. Radioactive Sources. Beam Transport Systems. Statistical Fluctuations in Nuclear Processes // Methods in Experimental Physics, Volume VB, Nuclear Physics. – 1963. – P. 411.

[2] Kuterbekov K.A., Yuskov A.V. Measurement of angle characteristics of scattering chamber // Instruments and experimental techniques. – 1986. – Vol. 3. – P. 35.

[3] Duisebaev A., Duisebaev BA, Ismailov KM, Kuznetsov IV, Kuterbekov K.A., Lukyanov S.M., Mukhambetzhana A., Penionzhkevich Yu.E., Sadykov BM, Sobolev Yu. G., Ugryumov V.Yu. // *Izv. Ministerstva obrazovaniya i nauki RK, ser. fiz.-mat.*, 2002, 2. 104. (in Russ).

[4] Sobolev Yu.G., Ivanov M.P. Penionzhkevich Yu.E. A setup for measuring total cross sections of nuclear reactions // Instruments and Experimental Techniques. – 2012, – Vol. 55, Issue 6. – P 618.

[5] Sobolev Yu.G., Penionzhkevich Yu.E., Aznabaev D., Ivanov M.P., Kabdrakhimova G.D., Kabyshev A.M., Knyazev A.G., Kugler A., Lashmanov N.A., Lukyanov K.V., Maj A., Maslov V.A., Mendibayev K., Skobelev N.K., Slepnev R.S., Smirnov V.V., Testov D., Zemlyanaya E.V. Experimental research of total reaction cross section energy dependence for ${}^6\text{He} + {}^{\text{nat}}\text{Si}$ and ${}^9\text{Li} + {}^{\text{nat}}\text{Si}$ // Phys. Elementary Part. Atom. Nuclei. – 2017. – Vol. 48. (accepted for publishing)

[6] <http://www.dupont.com/products-and-services/fabrics-fibers-nonwovens/protective-fabrics/brands/tyvek.html>.

**А.М. Кабышев^{1,2}, К.А. Кутербеков^{1,2}, Ю.Э.Пенионжквич³, В.А. Маслов³, К. Мендибаев^{2,3},
Ю.Г.Соболев³, С.М.Лукьянов³, Г.Д.Кабдрахимова^{1,2}, Д. Азнабаев³, А.Т.Курманжанов^{1,2}**

¹Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, 010008, Астана, Казахстан;

²РОО «Физико-Техническое Общество Казахстана», Астана, Казахстан;

³Объединенный Институт Ядерных Исследований, 141980, Жолио-Кюри 6, Дубна, Россия.

ПОГРЕШНОСТИ ВЕЛИЧИН ПОЛНЫХ СЕЧЕНИЙ РЕАКЦИЙ И ЭНЕРГИЙ НАЛЕТАЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРАНСМИССИОННОЙ МЕТОДИКОЙ

Аннотация. При определении величин полных сечений реакций и энергии частиц пучка слабосвязанных ядер, всегда присутствуют статистические и систематические погрешности. Первые зависят от набранных данных, вторые – от компонентов экспериментальной установки. Тщательное изучение используемого оборудования и компонентов, таких как мишени и детекторы, дает возможность оценить и минимизировать влияние систематических погрешностей.

В данной статье впервые подробно представлены указания и основные принципы в определении погрешностей в полных сечениях реакций и энергии пучка в ходе эксперимента, а также продемонстрировано определение их погрешностей в конкретном эксперименте.

Ключевые слова: Статистические и систематические погрешности, полное сечение реакции, γ -спектрометр.

А.М. Кабышев^{1,2}, К.А. Кутербеков^{1,2}, Ю.Э.Пенионжкевич³, В.А. Маслов³, К. Мендибаев^{2,3},
Ю.Г.Соболев³, С.М.Лукьянов³, Г.Д.Кабдрахимова^{1,2}, Д. Азнабаев³, А.Т.Курманжанов^{1,2}

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 010008, Астана, Қазақстан;

²«Қазақстан Физика-техникалық қоғамы», Астана, Қазақстан;

³Біріккен ядролық зерттеулер институты, 141980, Жолио-Кюри 6, Дубна, Ресей.

ӨЛШЕУ КЕЗІНДЕГІ МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН ТРАНСМИССИОНДЫ ӘДІС НЕГІЗІНДЕ – РЕАКЦИЯЛАРДЫҢ ТОЛЫҚ ӨЛШЕМДЕРІНІҢ ҚАТЕЛІКТЕРІН ЖӘНЕ ҰШЫП КЕЛУШІ БӨЛШЕКТЕРДІҢ ЭНЕРГИЯСЫ АНЫҚТАУ

Жұмыста ядролары әлсіз байланысқан бөлшек шоқтарының энергиясы және реакциялардың толық қимасының өлшемдерін анықтау барысында статистикалық және жүйелік қателіктері анықталған болатын. Біріншісі терілген мәліметтерден, ал екіншісі – эксперименттік қондырғы құраушыларынан тікелей тәуелді. Қондырғыны және оның құраушыларын толық зерттеу, мәселен нысана және детектор сияқты бөлшектерін зерттеу жүйелік қателіктерді азайтуға мүмкіндік береді.

Жұмыста алғаш рет эксперимент кезінде реакциялардың толық қимасының және бөлшек шоқтарының энергиясының қателіктерін анықтаудың, сонымен қатар белгілі бір экспериментте қателіктердің анықталғаны көрсетілген.

Тірек сөздер: статистикалық және жүйелік қателер, реакция толық қимасы, γ -спектрометрі.

Сведения об авторах:

Kabyshv A.M. – PhD-докторант 3 курса специальности «Ядерная физика» ЕНУ им. Л.Г.Гумилева;

Kuterbekov K.A. – профессор, д.ф.-м.н., директор НИИ «Евразийский институт физико-энергетических исследований и наукоемких технологий» при ЕНУ, Президент РОО «Физико-Техническое общество Казахстана»;

Penionzhkevich Yu.E. – профессор, д.ф.-м.н. начальник сектора Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н. Флерова ОИЯИ, профессор МИФИ;

Maslov V.A. – к.ф.-м.н., СНС Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н. Флерова ОИЯИ;

Mendibaev K. – аспирант 3 курса специальности «Ядерная физика», МНС ЛЯР ОИЯИ;

Sobolev Yu.G. – к.ф.-м.н., СНС Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н. Флерова ОИЯИ;

Lukyanov S.M. – к.ф.-м.н., СНС Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н. Флерова ОИЯИ;

Kabdrakhimova G. D. – PhD, старший преподаватель ЕНУ им. Л.Г.Гумилева;

Aznabayev D. T. - магистрант 2 курса, инженер Лаборатории ядерных реакций им. Г.Н. Флерова ОИЯИ;

Kurmanzhanov A.T. – старший преподаватель кафедры «Ядерная физика» ЕНУ им. Л.Г.Гумилева.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 19 – 24

UDC 548.735+548.31+577.112.387.2+ 577.112.37+661.8...35

**S.B. Berdibay^{1,2,*}, N.A. Paretskaya², A.N. Sabitov², R.A. Islamov²,
R.A. Tamazyan³, S.Zh. Tokmoldin¹, A.I. Ilin², K.S. Martirosyan⁴**¹K.I. Satpayev Kazakh National Research Technical University, Almaty, Kazakhstan;²Scientific Center for Anti-Infectious Drugs, Almaty, Kazakhstan;³The foundation “Research Center for Advanced Technologies”, Yerevan, Armenia;⁴The University of Texas Rio Grande Valley, Texas, USA

*E-mail: sniper_8888@mail.ru

**PHENYLALANINE COMPLEX
WITH IODINE AND ITS STRUCTURE**

Abstract. This report describes synthesis and structural characterization of the phenylalanine-iodine complex monocrystal in acetone. Crystals of the substance exhibited a rhombic syngony and were stable at a temperature of 25 °C. As a result, a new compound α,α' -di-amino- β,β' -diphenylpropionic acid monoiodide has been obtained. X-ray diffraction analysis showed that dimers of phenylalanine molecules ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) are formed due to hydrogen bonds between the oxygen atoms of carboxyl groups. The hydrogen bonds between the amino groups and iodide form the layers parallel to the (001) plane and these molecular layers are bound to a three-dimensional structure via the van der Waals forces.

Keywords. Phenylalanine, iodine, halogen, hydrogen bonds, amino acid complex with iodine.

УДК 548.735+548.31+577.112.387.2+ 577.112.37+661.8...35

**С.Б. Бердібай^{1,2,*}, Н.А. Парецкая², А.Н. Сабитов², Р.А. Исламов²,
Р.А. Тамазян³, С.Ж. Токмолдин¹, А.И. Ильин², К.С. Мартirosян⁴**¹Казахский национальный исследовательский технический
университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан;²Научный центр противинфекционных препаратов, Алматы, Казахстан;³Фонд «Центр исследования перспективных технологий», Ереван, Армения;⁴The University of Texas Rio Grande Valley, USA**КОМПЛЕКС ФЕНИЛАЛАНИНА
С ИОДОМ И ЕГО СТРУКТУРА**

Аннотация. В статье описывается синтез и структурный анализ монокристалла комплекса фенилаланин-иод в ацетоне. Кристаллы вещества имели ромбическую сингонию и были стабильны при температуре 25 °C. В результате получено новое соединение α,α' -ди-амино- β,β' -дифенил-пропионовой кислоты моноиодид. Рентгенструктурными исследованиями показано, что димеры молекул фенилаланина ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) образуются за счёт водородных связей между атомами кислорода карбоксильных групп. Водородные связи между аминогруппами и иодидом образуют слои параллельно плоскости (001) и эти слои молекул связываются в трехмерную постройку силами Ван-дер-Ваальса.

Ключевые слова. Фенилаланин, иод, галоген, водородные связи, комплекс аминокислоты с иодом.

Введение

Иод, в сравнении с другими галогенами – фтором, хлором и бромом обладает рядом отличительных свойств. Прежде всего, в твердом состоянии в молекуле иода межатомное расстояние больше, чем в газообразном состоянии. Этого не наблюдается ни у хлора, ни у брома. В силу большого размера анион иода – иодид имеет малую поверхностную плотность заряда, вследствие чего распределение заряда может искажаться под действием некоторых катионов (Li^+ , Mg^{2+} , Fe^{3+} и т.д.) и уже не может рассматриваться как сферически-симметричное [1]. Высокая поляризуемость иода наряду с невысокой электроотрицательностью, в сравнении хлором и бромом, позволяет образовывать разнообразные соединения по типу переноса заряда, донорно-акцепторного взаимодействия, гидрофобного взаимодействия, водородных и галогенных связей [2,3]. Эти свойства иода дают возможность разрабатывать разнообразнейшие вещества и материалы, например лекарственные препараты [2], сверхпроводники [4], нелинейные оптические кристаллы [5]. Иод образует комплексные соединения с органическими веществами и интергалогенные соединения, включая полииодиды [6-9]. Особый интерес представляют соединения иода с аминокислотами [10]. Целью исследования являлся синтез комплекса фенилаланина и иода и определение его структуры методом рентгеноструктурного анализа.

Экспериментальная часть

Синтез комплекса фенилаланин·иод. Ацетон (Sigma, США) и иод (Реахим, Россия) смешивали в молярном соотношении 34:1 при температуре 60-65 °С для получения иодоводорода:



Затем добавляли фенилаланин и медленно испаряли ацетон. По мере испарения ацетона достаточно продолжительное время образовывались кристаллы черного цвета. Полученные кристаллы имели ромбическую сингонию и были устойчивы при температуре 25 °С. Химическую формулу данного соединения можно представить, как: $2\text{C}_9\text{H}_{11}\text{NO}_2 \cdot \text{HI}$, а реакцию образования:

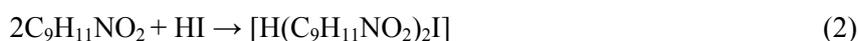


Таблица 1 – Кристаллографические данные комплекса $2(\text{C}_9\text{H}_{11}\text{NO}_2) \cdot \text{HI}$

Формула	$2(\text{C}_9\text{H}_{11}\text{NO}_2) \cdot \text{HI}$
Молекулярный вес	458,28
Сингония; Пространственная группа	Ромбическая; $P2_12_12_1$
Параметры решетки a, b, c [Å]	5.3059(11); 12.265(3); 29.585(6)
alpha, beta, gamma [deg]	90.0; 90.0; 90.0
V [Å] ³ ; Z	1925.3(7); 4
D(calc)[g/cm ³]; F(000)	1.581; 920
Mu(MoKa) [mm ⁻¹]	1.687
Размеры кристалла [mm]	0.02 x 0.08 x 0.28
Измерения	
Температура (K); Излучение [Å]	200; MoKa; $\lambda=0.71073$
θ_{min} ; θ_{max} [Deg]	1.4, 30.0
Область измерений	0: 7; -17: 17; 0:41
Число рефлексов изм., независимых, R(int)	6498, 5612, 0.048
Наблюдаемые рефлексы [$I > 2.0 \sigma(I)$]	3154
Уточнение	
Число рефлексов, Число параметров	5612, 247
R, wR ² , S	0.0616, 0.1304, 0.81
Max. and Av. Shift/Error	0.00, 0.00
Flack x	0.00(4)
Min. and Max. Resd. Dens. [e/Å ³]	-0.69, 0.85

Рентгеноструктурный анализ (РСА). Монокристаллический образец игольчатого вида размерами порядка 0.02 x 0.08 x 0.28 мм помещали в стеклянный капилляр и фиксировали стеклянной палочкой. Для предотвращения разрушения кристаллов под действием тепла и рентгеновских

лучей дифракционные измерения проводили при низких температурах. Низкие температуры на образцах поддерживались низкотемпературной приставкой фирмы «Enraf-Nonius» парами азота с точностью ± 1 °C. Дифракционные измерения проводили при комнатной температуре на автодифрактометре Enraf-Nonius CAD-4 (графитовый монохроматор, Mo-K α излучение, $\theta/2\theta$ -сканирование). Параметры ромбической элементарной ячейки определены и уточнены по 24 рефлексам с $12 < \theta < 13$. Учет поглощения проведен по методу пси-сканов [11]. Структура расшифрована прямым методом. Координаты всех атомов водорода определены по геометрическим расчетам. Структура уточнена полно матричным МНК в анизотропном приближении для не водородных атомов и изотропном – для атомов водорода. Координаты атомов водорода групп NH $_3$ и OH уточнены свободно, а координаты остальных атомов водорода уточнены по модели «наездника» со следующими условиями: длина связей C-H=0.98Å, 0.97Å, 0.93Å и $U_{iso}(H)=1.5U_{eq}(C)$ для CH, CH $_2$ и фенильных групп соответственно. Все структурные расчеты проведены по комплексу программ SHELXTL [12].

Основные кристаллографические данные и параметры эксперимента приведены в Таблице 1, а полная кристаллографическая информация исследованного соединения была депонирована в Кембриджском банке структурных данных под номером CCDC 1036670.

Результаты и их обсуждение

Структура комплекса $2(C_9H_{11}NO_2) \cdot HI$ определённая методом РСА, представлена на Рисунке 1. Независимая часть элементарной ячейки содержит две молекулы фенилаланина ($C_9H_{11}NO_2$), и один анион I.

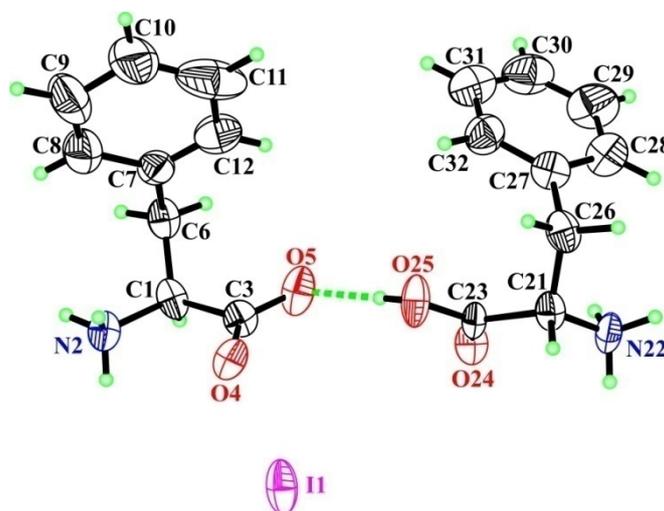


Рисунок 1 - Атомная модель структуры $C_{18}H_{23}N_2O_4I$ (эллипсоиды анизотропных тепловых колебаний нарисованы на уровне 50%-ой вероятности)

При этом две молекулы фенилаланина связываясь водородной связью O25-H25...O5 (Таблица 2) образуют димер ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) (Рисунок 1).

Таблица 2 – Водородные связи в структуре $2(C_9H_{11}NO_2) \cdot HI$

D	H	A	D-H	H-A	D-A	D-H-A
N2	H2A	O24	0.92(4)	1.87(4)	2.778(7)	168(5)
N2	H2B	I1	0.92(7)	2.81(8)	3.642(6)	151(7)
N2	H2C	I1	0.92(8)	2.79(8)	3.575(6)	144(8)
N22	H22B	O4	0.93(4)	1.83(4)	2.760(7)	173(3)
N22	H22A	I1	0.93(8)	2.77(8)	3.602(6)	149(7)
N22	H22C	I1	0.93(6)	2.75(8)	3.616(6)	158(7)
O25	H25	O5	0.88(9)	1.66(9)	2.423(6)	144(8)

В трехмерной упаковке кристаллической структуры димеры ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) образуют бесконечный двухмерный слой параллельно плоскости (001) за счёт водородных связей между аминогруппами и иодидом (Рисунок 2). В трехмерной постройке кристаллической структуры взаимодействие между слоями в основном описывается силами Ван-дер-Ваальса.

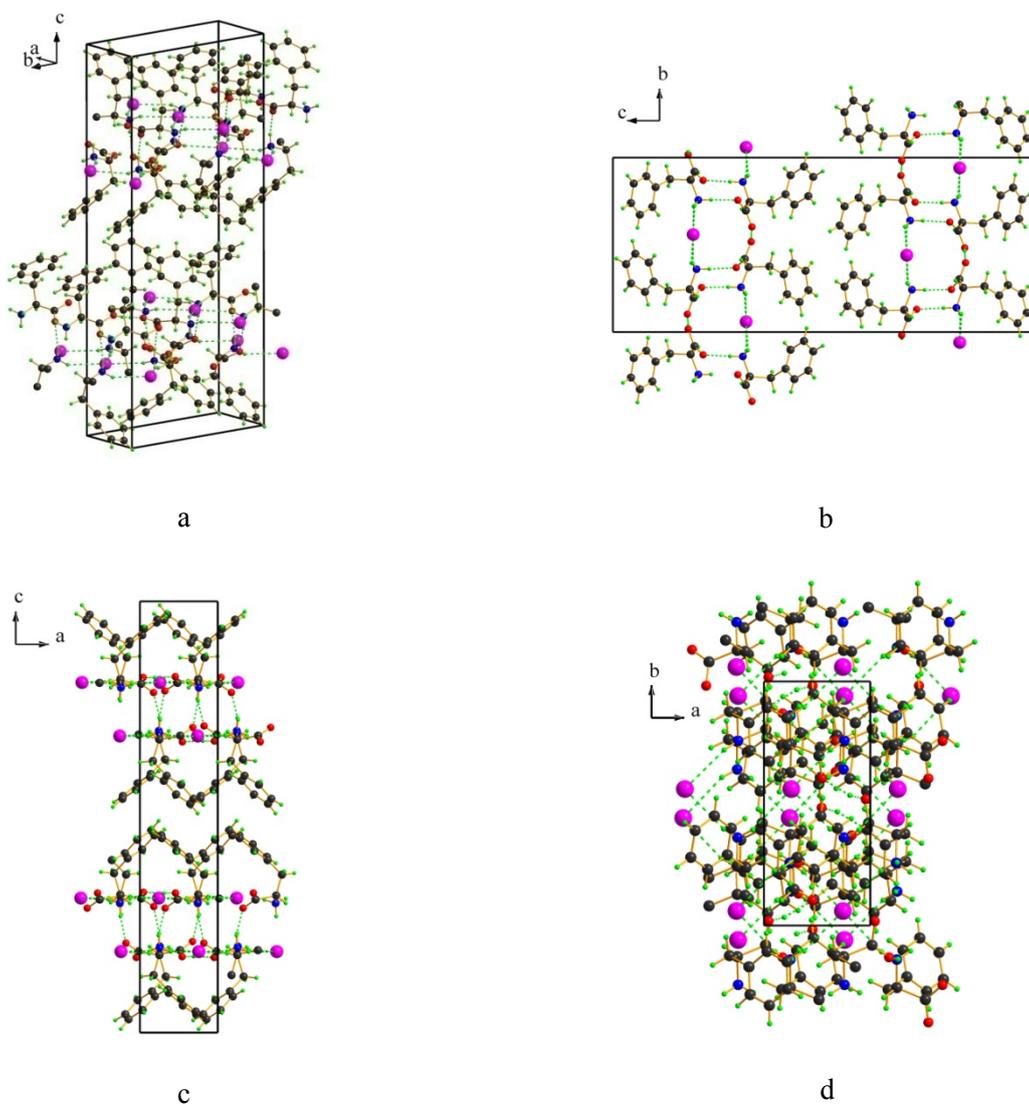
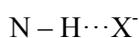


Рисунок 2 - Кристаллическая структура $C_{18}H_{23}N_2O_4I$, атомы иода пурпурного цвета, углерода – серые, азота – синие, кислорода – красные и водорода – зелёные, водородные связи показаны зелеными прерывистыми линиями: (a) - перспективный вид структуры; (b) – проекция структуры на (100); (c) - проекция структуры на (010); (d) проекция структуры на (001).

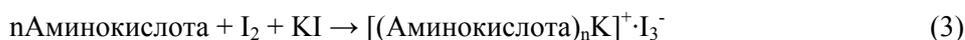
Таким образом, в реакции иода с фенилаланином в ацетоне образуется комплекс α,α' -диамино- β,β' -дифенилпропионовая кислота моноиодид. Атомы иода являются акцептором водородной связи, образованной с аминогруппами фенилаланинов по типу:



где, $X = F, Cl, Br$ и I

Усреднённая и нормализованная длина водородной связи $H \cdots X^-$ составляет 0.83 и, будучи меньше среднего значения 0.873 [13], рассчитанного по известным структурам, указывает на сильную водородную связь.

Полученный комплекс имеет отличие от других координационных соединений иода с аминокислотами [10] или другими биологически активными веществами [14] с переносом заряда по типу:



где, $n \geq 1$

Иодид способствует димеризации фенилаланинов инициируя образование водородной связи между парами молекул аминокислоты. Как известно, многомерные структуры, образованные водородными связями между биологическими молекулами, играют большую роль – от метаболических превращений до реализации генетической информации, закодированной в ДНК [15,16]. Велика роль ионов галогенов в стабилизации действия реактивного центра ферментов. Например, анион хлора активизирует α -амилазу животных и некоторых бактерий путем образования водородной связи с аминогруппой аргинина [17]. Аналогично действует хлорид на катепсин С [18]. Поэтому, интерес к галогенам, как к акцепторам водородной связи весьма высок.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hauskroft K, Konstelb Je. (2002) *Sovremennyj kurs obshhej himii*. Mir, Rossiya. ISBN 5-03-003310-6. (In Russian)
- [2] Küpper FC, Feiters MC, Olofsson B, Kaiho T, Yanagida S, Zimmermann MB, Carpenter LJ, Luther GW 3rd, Lu Z, Jonsson M, Kloo L. (2011) Commemorating two centuries of iodine research: an interdisciplinary overview of current research, *Angew Chem Int Ed Engl*, 50:11598-11620. DOI: 10.1002/anie.201100028
- [3] Bartashevich EV, Cirel'son VG. (2014) Vzaimnoe vliyanie nekovalentnyh vzaimodejstvij v kompleksah i kristallah s galogennymi svjazjami, *Uspehi himii*, 83:1181-1203. DOI: 10/RCR4440. (In Russian)
- [4] Mihalache V, Aldica GV, Miu D. (2007) Superconducting properties of iodine-intercalated Bi2Sr2Ca2Cu3O10+x, *J Supercond Nov Magn*, 20:261-272. DOI: 10.1007/s10948-006-0199-y
- [5] Yin Z, Wang QX, Zeng MH. (2012) Iodine release and recovery influence of polyiodide anions on electrical conductivity and nonlinear optical activity in an interdigitated and interpenetrated bipillared-bilayer metal-organic framework, *J Am Chem Soc*, 134:4857-4863. DOI: 10.1021/ja211381e
- [6] Refat MS, Al Didamony H, Abou El-Nour KM, El-Zayat L. (2010) Synthesis and spectroscopic characterization on the tri-iodide charge transfer complex resulted from the interaction between morpholine as donor and iodine sigma-acceptor, *J Saudi Chem Soc*, 14:232-330. DOI: 10.1016/j.jscs.2010.04.004
- [7] Blake AJ, Li WS, Lippolis V, Parsons S, Schröder M. (2007) Extended structures of polyiodide salts of transition metal macrocyclic complexes, *Acta Crystallogr B*, 63:81-92. DOI: 10.1107/S0108768106041668
- [8] Walbaum C, Pantenburg I, Junk P, Deacon GB, Meyer G. (2010) Bulky Cations and Four different Polyiodide Anions in [Lu(Db18c6)(H2O)3(thf)6]4(13)2(15)6(18)(112), *Z Anorg Allg Chem*, 636:1444-1446. DOI: 10.1002/zaac.201000112
- [9] Madhu S, Evans HA, Doan-Nguyen VV, Labram JG, Wu G, Chabinye ML, Seshadri R, Wudl F. (2016) Infinite polyiodide chains in the pyrroloperylene-iodine complex: insights into the starch-iodine and perylene-iodine complexes, *Angew Chem Int Ed Engl*, 55:8032-8035. DOI: 10.1002/anie.201601585
- [10] Mahmoud KR, Refat MS, Sharshar T, Adam MA, Manaaa El-SA. (2016) Synthesis of amino acid iodine charge transfer complexes in situ methanolic medium: Chemical and physical investigations, *J Mol Liq*, 222:1061-1067. DOI: 10.1016/j.molliq.2016.07.138
- [11] North ACT, Phillips DC, Mathews FS. (1968) *Acta Cryst*, A24:351-359.
- [12] Sheldrick GM. (2008) All programs beginning with SHELX, *Acta Cryst*, A64:112-122
- [13] Brammer L, Bruton EA, Sherwood P. (2001) Understanding the behavior of halogens as hydrogen bond acceptors, *Crystal Growth & Design*, 1:277-290. DOI: 10.1021/cg015522k
- [14] Solanki GK, Amin A, Padhiyar A, Ray AK, Oza AT. (2008) Polaron hopping in some biomolecular solids and their charge transfer complexes, *Indian J Biochem Biophys*, 45:421-429
- [15] Bissantz C, Kuhn B, Stahl M. (2010) *A Medicinal Chemist's Guide to Molecular Interactions*, *J Med Chem*, 53:5061-5084. DOI: 10.1021/jm100112j
- [16] Scholfield MR, Zanden CMV, Carter M, Ho PS. (2013) Halogen bonding (X-bonding): A biological perspective, *Protein Sci*, 22:139-152. DOI: 10.1002/pro.2201
- [17] Aghajari N, Feller G, Gerday C, Haser R. (2002) Structural basis of α -amylase activation by chloride, *Protein Sci*, 11:1435-1441. DOI: 10.1110/ps.0202602
- [18] Cigic B, Pain RH. (1999) Location of the binding site for chloride ion activation of cathepsin C, *Eur J Biochem*, 264:944-951

**С.Б. Бердібай^{1,2}, Н.А. Парецкая², А.Н. Сабитов², Р.А. Исламов²,
Р.А. Тамазян³, С.Ж. Токмолдин¹, А.И. Ильин², К.С. Мартиросян⁴**

¹Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық зерттеу университеті, Алматы, Қазақстан;

²Инфекцияға қарсы препараттар ғылыми орталығы, Алматы, Қазақстан;

³Перспективалық технологиялар зерттеу орталығы фонды, Ереван, Армения;

⁴The University of Texas Rio Grande Valley, Texas, USA

ИОД ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚҰРЫЛЫМЫМЕН ФЕНИЛАЛАЛИННІҢ КЕШЕНІ КОМПЛЕКС ФЕНИЛАЛАНИНА С ИОДОМ И ЕГО СТРУКТУРА

Аннотация. Мақалада ацетонда фенилаланин-иод кешенінің монокристаллды алу және синтезі сипатталады. Заттың кристалы ромбылық сингониясы болды және 25 °С температурада тұрақты болды. Нәтижесінде α, α' -ди-амино- β, β' -моноиодид дифенилпропионды қышқылының жаңа қосылысы алынды. Рентгендік құрылымдық зерттеулерімен фенилаланиннің молекулалар диметрлері ($C_{18}H_{23}N_2O_4$) карбоксил топтарының оттегі атомдар арасындағы сутектік байланыс салдарынан пайда болатынын көрсетті. Амин топтары мен иодид арасындағы сутектік байланыс параллель жазықтық қатпары пайда болып, осы молекулалар қатпарлары Ван-дер-Ваальс арқылы үш өлшемді құрылысын байланыстырады.

Түйін сөз. Фенилаланин, иод, галоген, сутектік байланыстар, иодпен амин қышқылы кешені.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 25 – 29

K.N. Dzhumagulova¹, T.S. Ramazanov¹, R.U. Masheyeva¹, Z. Donkó²

¹IETP, al Farabi, Kazakh National University, 71, al Farabi av., Almaty, 050040, Kazakhstan;
²Institute for Solid State Physics and Optics, Wigner Research Centre of the Hungarian Academy
of Sciences, H-1525 Budapest, P.O. Box 49, Hungary
e-mail: dzhumagulova.karlygash@gmail.ru

EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON DIFFUSION COEFFICIENTS OF THE THREE-DIMENSIONAL YUKAWA SYSTEMS

Abstract. In this paper the results of the theoretical investigations of the influence of the magnetic field on the diffusion coefficient. The method of molecular dynamics was used to solve the Newtonian equations of the motion. The external magnetic field introduces anisotropy into the system, as a result of which the diffusion of charged particles depends on the direction. We presented here the results of calculating the diffusion coefficient along and across the magnetic field. The results are obtained for wide ranges of the system parameters.

Key words: dusty plasma, diffusion coefficients, means squared displacements, magnetic fields

УДК 533.09.01

К.Н. Джумагулова¹, Т.С. Рамазанов¹, Р.У. Машеева¹, З. Донко²

¹НИИЭТФ, Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан;
²Институт физики твердого тела и оптики, Вигнеровский исследовательский центр
Академии наук Венгрии, H-1525 Будапешт, Венгрия

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ ТРЕХМЕРНОЙ ЮКАВА СИСТЕМЫ

Аннотация. В данной работе показаны результаты исследований коэффициента диффузии частиц трехмерной Юкава системы во внешнем однородном магнитном поле на основе компьютерного моделирования методом молекулярной динамики. Внешнее магнитное поле вносит анизотропию в систему, вследствие чего диффузия заряженных частиц зависит от направления. Мы представили здесь результаты вычислений коэффициента диффузии вдоль и поперек магнитному полю. Результаты получены в широком диапазоне изменения параметров системы.

Ключевые слова: пылевая плазма, коэффициент диффузии, среднее квадратичное смещение частиц, магнитное поле.

Введение.

Исследование влияния внешнего однородного магнитного поля на динамические и транспортные свойства ансамбля заряженных частиц является одной из важных задач для широкого спектра физических систем. Большой интерес представляет диффузия частиц сильно связанной системы, в которой энергия кулоновского взаимодействия превышает кинетическую энергию частиц. В астрофизике, например, коэффициент диффузии сильно связанных ионов напрямую влияет на оценки возраста белых карликов через временные шкалы гравитационного высвобождения энергии [1]. Недавние эксперименты с ионами, а также с пылевыми частицами в ловушках дали новые результаты по микроскопическому движению заряженных частиц в сильном магнитном поле.

Основной задачей данной работы является исследование влияния как сильной связи, так и сильного магнитного поля на транспортные свойства трехмерной Юкава системы. Коэффициент диффузии частиц данной системы был вычислен на основе метода среднеквадратичного смещения частиц, расположенных в трехмерном пространстве и подвергающихся влиянию внешнего однородного магнитного поля, которое направлено вдоль оси z . Компьютерное моделирование движения пылевых частиц было проведено с помощью решения уравнений движения Ньютона в рамках взаимодействия Юкава. Во второй части работы описывается метод, модель и процедура вычисления. Результаты представлены в третьей, а выводы в четвертой части работы.

Метод моделирования. Для исследования влияния магнитного поля на частицы плазмы сложного состава был использован метод молекулярной динамики. В качестве межчастичного потенциала взаимодействия частиц был взят потенциал Юкава:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r}, \quad (1)$$

где Q - заряд частиц и λ_D - Дебаевская длина экранировки. Соотношение межчастичной потенциальной энергий и тепловой энергий выражается через параметр связи:

$$\Gamma = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a k_B T}, \quad (2)$$

здесь T - температура, $a = (3/4\pi n)^{1/3}$ - трехмерный радиус Вигнера-Зейтца и n - плотность частиц.

Магнитное поле $\vec{B} = (0, 0, B)$ однородно, величина магнитного поля выражается с помощью безразмерного параметра:

$$\beta = \frac{\omega_c}{\omega_p}, \quad (3)$$

где $\omega_c = QB/m$ - циклотронная и $\omega_p = \sqrt{nQ^2/\epsilon_0 m}$ - плазменная частота. Параметр магнитного поля, параметр связи Γ и параметр экранировки $\kappa = a/\lambda_D$ полностью характеризуют систему.

Для реализации метода молекулярной динамики все пространство разбивается на равные ячейки (куб), и предполагается, что магнитное поле однородно и направлено перпендикулярно вдоль оси z . Одна из ячеек считается базовой, остальные – копии (реплики). Конфигурации частиц базовой ячейки повторяются во всех остальных ячейках. На базовую ячейку и на реплики были наложены периодические граничные условия [2-5], количество частиц в ячейке бралось равным $N = 1000$. Начальное распределение компонент координат и скоростей частиц берется случайным, однако компоненты скоростей должны быть распределены по гауссовскому закону с заданной температурой. На первом этапе моделирования система должна перейти в равновесное состояние, что происходит достаточно быстро. Так как моделирование проводится для канонического ансамбля, используется термостат для поддержания постоянной температуры. После того, как в системе достигается равновесие, начинается сбор данных о скоростях и координатах частиц, эти данные необходимы для дальнейших вычислений.

Сильное магнитное поле существенно меняет свойства диффузии слабо связанной плазмы. Из равновесной динамики системы вычисляется поперечный и параллельный коэффициент диффузии [6] с помощью соотношения Эйнштейна на основе среднеквадратичного смещения частиц:

$$D_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4t} \text{MSD}(t), \tag{5}$$

$$\text{MSD}(t)_{\perp} = \left\langle |\vec{x}_i(t) - \vec{x}_i(t_0)|^2 \right\rangle + \left\langle |\vec{y}_i(t) - \vec{y}_i(t_0)|^2 \right\rangle.$$

$$D_{\square} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \text{MSD}(t), \tag{6}$$

$$\text{MSD}(t)_{\square} = \left\langle |\vec{z}_i(t) - \vec{z}_i(t_0)|^2 \right\rangle.$$

Скобки $\langle \dots \rangle$ в уравнениях (6) и (5) означают усреднение по ансамблю всех частиц.

Результаты.

Результаты исследования влияния внешнего однородного магнитного поля и сильной связи на динамические свойства системы, а именно на среднеквадратичное смещение частиц представлено на рисунке 1. Как можно заметить, с увеличением параметра магнитного поля появляются осцилляции на кривых поперечного среднеквадратичного смещения, что свидетельствует о циклотронном движении частиц. Также с увеличением связи в системе уменьшается среднеквадратичное смещение частиц.

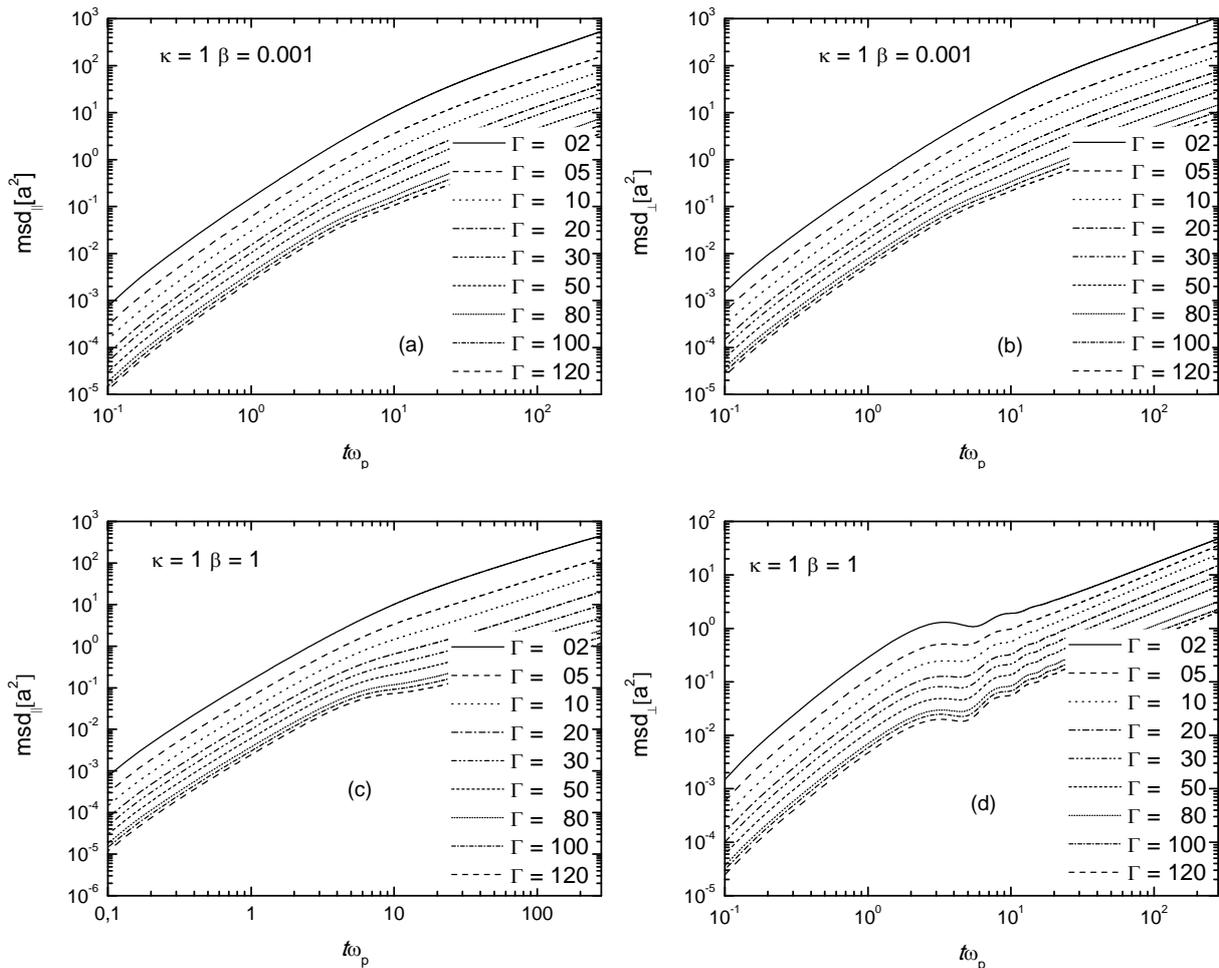


Рисунок 1 - Среднеквадратичное смещение частиц для разных значений параметра связи при $\kappa = 1, \beta = 1.0$

На рисунке 1 представлена зависимость коэффициента диффузии от параметра связи и от параметра магнитного поля при фиксированных параметрах системы. Как видно из рисунка осцилляции на кривых среднеквадратичного смещения частиц параллельно направлению магнитного поля не так сильно выражены, как в случае перпендикулярного направления.

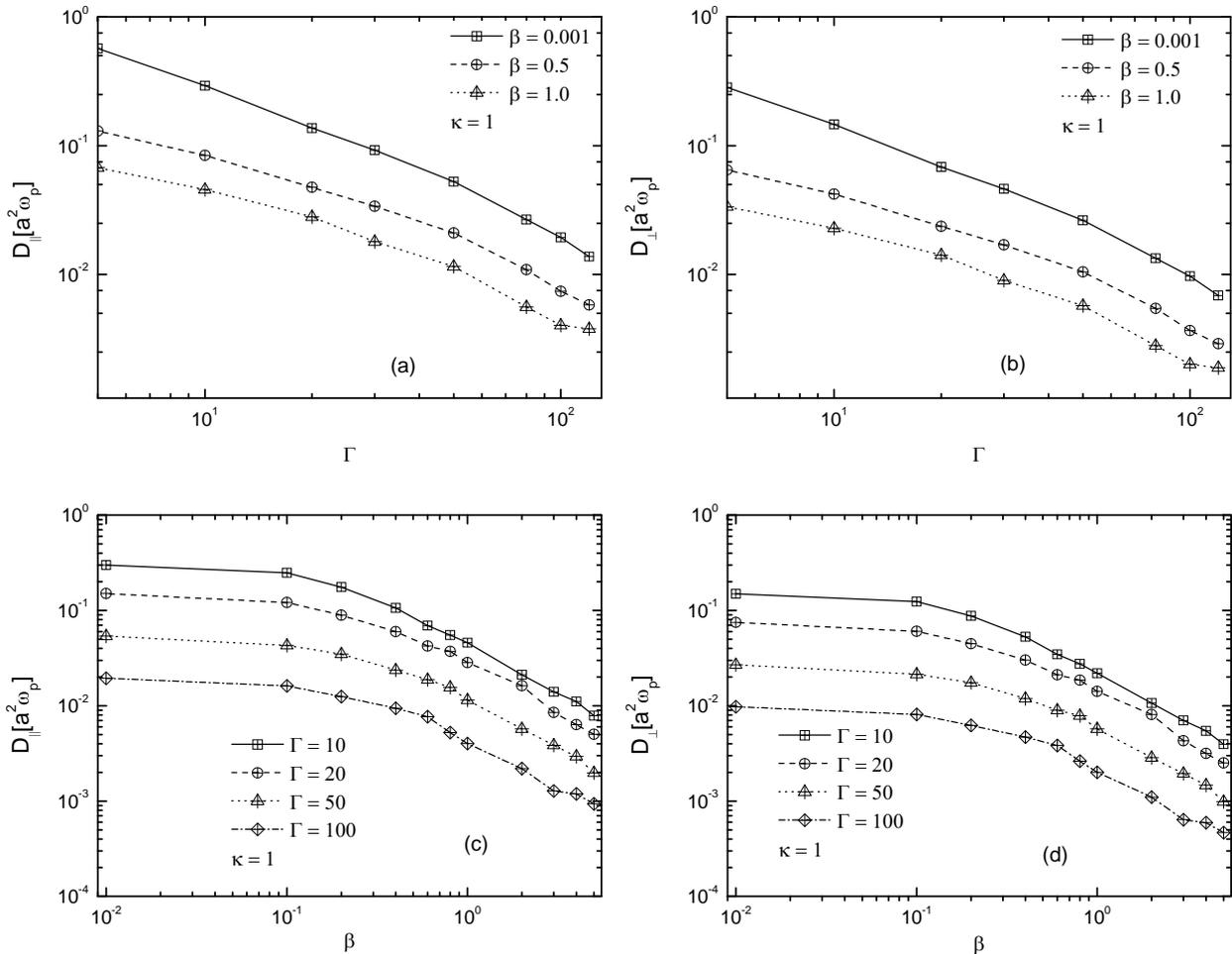


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента диффузии от параметра магнитного поля при разных значениях параметра магнитного поля

Рассматривая зависимость коэффициента диффузии от параметра связи при разных значениях параметра магнитного поля (рисунок 2 (с,d)) можно заметить что, увеличение параметра связи приводит к монотонному снижению как коэффициента диффузии как поперек, так и параллельно направлению магнитного поля, однако в первом случае снижение более сильное чем во втором. Это поведение можно также отметить на зависимостях коэффициента диффузии от параметра магнитного поля при разных значениях параметра связи (рисунок 2 (а,b)).

Заклучение.

Было исследовано влияние внешнего магнитного поля и сильной связи на среднеквадратичное смещение частиц и коэффициент диффузии трехмерной Юкава системы с помощью метода компьютерного моделирования молекулярной динамики. Показано, что с учетом влияния внешнего однородного магнитного поля на кривых среднеквадратичного смещения частиц появляются осцилляции, свидетельствующие о циклотронном движении частиц. Увеличение, как параметра связи, так и параметра магнитного поля приводит к монотонному снижению коэффициента диффузии, более выраженному в случае поперечного направления к магнитному полю по сравнению с параллельным направлением.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hughto J., Schneider A.S., Horowitz C.J. and Berry D.K. Phys. Rev. E 82, 066401 (2010).
 [2] Donko Z., and Nyiri B. Molecular dynamics calculation of the thermal conductivity and shear viscosity of the classical one – component plasma // Phys. Plasmas. – 2000 – Vol.7. - P. 45-50.
 [3] Donko Z. and Hartmann P. Thermal conductivity of strongly coupled Yukawa liquids // Phys.Rev.E. – 2004. – Vol. 69. – P. 016405.
 [4] Baimbetov F.B., Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Kadyrsizov E.R., Petrov O.F., Gavrikov A.V. Modelling of dusty plasma properties by computer simulation methods // J.Phys.A: Math. And Gen. - 2006. – Vol.39. - P. 4521–4525.
 [5] Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N. Shear viscosity of dusty plasma obtained on the basis of the Langevin dynamics // Contr. Plasma Phys. – 2008. - №4 (48). - P.357-360.
 [6] Dzhumagulova K. N., Ramazanov T. S., and Masheeva R. U. // Contr. Plasma Phys. 2013. - №20.- P. 113702-113702-4.

REFERENCES

- [1] J. Hughto, A.S. Schneider, C.J. Horowitz and D.K. Berry, Phys. Rev. E 82, 066401 (2010).
 [2] Donko Z., and Nyiri B. Molecular dynamics calculation of the thermal conductivity and shear viscosity of the classical one – component plasma // Phys. Plasmas. – 2000 – Vol.7. - P. 45-50.
 [3] Donko Z. and Hartmann P. Thermal conductivity of strongly coupled Yukawa liquids // Phys.Rev.E. – 2004. – Vol. 69. – P. 016405.
 [4] Baimbetov F.B., Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Kadyrsizov E.R., Petrov O.F., Gavrikov A.V. Modelling of dusty plasma properties by computer simulation methods // J.Phys.A: Math. And Gen. - 2006. – Vol.39. - P. 4521–4525.
 [5] Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N. Shear viscosity of dusty plasma obtained on the basis of the Langevin dynamics // Contr. Plasma Phys. – 2008. - №4 (48). - P.357-360.
 [6] Dzhumagulova K. N., Ramazanov T. S., and Masheeva R. U. // Contr. Plasma Phys. 2013. - №20.- P. 113702-113702-4.

Қ.Н. Жұмағұлова¹, Т.С. Рамазанов¹, Р.У. Машеева¹, З. Донко²

¹ЭТФҒЗИ, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Қазақстан;

²Қатты дене және оптика физикасы институты, Венгрияның ғылым академиясының
Вигнер атындағы зерттеу орталығы, Н-1525 Будапешт, Венгрия

ҮШ ӨЛШЕМДІ ЮКАВА ЖҮЙЕСІНІҢ ДИФФУЗИЯ КОЭФФИЦИЕНТІНЕ СЫРТҚЫ МАГНИТ ӨРІСІНІҢ ӘСЕРІ

Аннотация. Жұмыста үш өлшемді Юкава жүйесінің транспорттық қасиеттерін, жеке жағдайда, диффузия коэффициентін теориялық зерттеу нәтижелері көрсетілген. Есептеу барысында бөлшектердің қозғалыс теңдеуін шешу үшін молекулалық динамика әдісі қолданылды. Әсерлесу потенциалы ретінде Юкава потенциалы қолданылды. Нәтижелер жүйенің параметрлерінің өзгерісінің кең аумағында алынған.

Тірек сөздер: тозанды плазма, диффузия коэффициенті, бөлшектердің орташа ығысуы, магнит өрісі

Сведения об авторах:

Джумагулова Карлыгаш Нурмановна - заместитель декана по научно-инновационной работе и международным связям физико-технического факультета, домашний и служебный адрес: аль-Фараби 71, Телефоны: +7(707) 739 01 95, E-mail: dzhumagulova.karlygash@gmail.com;

Машеева Ранна Уытбаевна - КазНУ им. аль-Фараби, ассистент кафедры физики плазмы и компьютерной физики, домашний и служебный адрес: аль-Фараби 71, Телефоны: +7(775) 769 5714, +7(747) 787 7713, E-mail: ranna_m@mail.ru;

Рамазанов Тлеккабул Сабитович - КазНУ им. аль-Фараби, проректор по научно-инновационной деятельности, домашний и служебный адрес: аль-Фараби 71, Телефоны: +7 (727) 263 87 35, E-mail: Tlekkabul.Ramazanov@kaznu.kz;

Золтан Донко - Институт физики твердого тела и оптики, Вигнеровский исследовательский центр Академии наук Венгрии, профессор, Домашний и служебный адрес: Н-1525 Budapest, P.O.B. 49, Hungary, Телефоны: +36 1 392 2222 ext 1309, E-mail: donko.zoltan@wigner.mta.hu

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 30 – 37

E.A.Grushevskaya, I.A.Lebedev, A.T. Temiraliev, A.I. Fedosimova

Institute of Physics and Techonology, Almaty, Kazakhstan

**STUDY ON EVENTS WITH COMPLETE DESTRUCTION
OF PROJECTILE NUCLEUS IN INTERACTIONS
OF ASYMMETRIC NUCLEI**

Abstract. The characteristics of the events with the complete destruction of the projectile nucleus in the interactions of asymmetric nuclei are investigated. For the experimental study of nucleus-nucleus interactions, the method of nuclear emulsion is used. The search for the events with complete destruction of the projectile nucleus is based on an analysis of the distributions of secondary particles in terms of the number of interacted protons of the projectile nucleus. In the interactions of sulfur nuclei with heavy photoemulsion nuclei at 200 AGeV an anomalously high number of events with complete destruction of the projectile nucleus, is observed. They have the following distinctive features. The appearance of such events depends on the interaction energy (they are not found in the interactions of sulfur nuclei with the emulsion nuclei at 3.7 AGeV) and on the degree of asymmetry of the interacting nuclei (they are not found in interactions of heavy nuclei of gold and lead in interactions with nuclear emulsion). The events of complete destruction of the projectile nucleus are characterized by a high multiplicity of shower particles and narrow mean angular distribution at large angles (a narrow peak in the region of small values of mean pseudorapidity).

Key words: nucleus-nucleus interactions, multiparticle processes, fragmentation, nuclear emulsion, pseudorapidity distribution

УДК 539.12; 539.1

Е.А. Грушевская, И.А. Лебедев, А.Т. Темиралиев, А.И. Федосимова

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОБЫТИЙ ПОЛНОГО РАЗРУШЕНИЯ ЯДРА
СНАРЯДА ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ АСИММЕТРИЧЕСКИХ ЯДЕР**

Аннотация. Проведено исследование характеристик событий с полным разрушением ядра снаряда во взаимодействиях асимметрических ядер. Для экспериментального исследования ядро-ядерных взаимодействий в данной работе применен метод ядерной эмульсии. Поиск событий полного разрушения основан на анализе распределений вторичных частиц по числу провзаимодействовавших протонов ядра снаряда. Обнаружено, что во взаимодействиях ядер серы с тяжелыми ядрами фотоэмульсии при энергии 200 АГэВ наблюдается anomalously высокое количество событий полного разрушения ядра снаряда. Эти события имеют следующие отличительные особенности. Появление таких событий зависит от энергии взаимодействия (не обнаруживается во взаимодействиях ядер серы с ядрами фотоэмульсии при энергии 3.7 АГэВ) и степени асимметрии взаимодействующих ядер (не обнаруживается во взаимодействиях тяжелых ядер золота и свинца во взаимодействиях с ядерной эмульсией). События полного разрушения налетающего ядра характеризуются высокой множественностью ливневых частиц и усконаправленным средним угловым распределением на большие углы (узким пиком в области малых значений средней псевдобыстроты).

Ключевые слова: ядро-ядерные взаимодействия, множественные процессы, фрагментация, ядерная фотоэмульсия, псевдобыстротные распределения.

Введение

Поиск фазового перехода вещества из адронного состояния в кварк-глюонную плазму (КГП) составляет одну из ключевых проблем физики высоких энергий [1-4]. В ядерной материи в состоянии кварк-глюонной плазмы кварки и глюоны находятся в квазисвободном состоянии, то есть наблюдается процесс деконфайнмента. Экспериментально процесс деконфайнмента может быть обнаружен по общему признаку фазовых переходов – усилению флуктуаций параметров исследуемой системы вблизи точки ожидаемого фазового перехода. В частности фазовый переход кварк-глюонной фазы к адронной фазе приводит к существенным флуктуациям в распределениях вторичных частиц [5-6].

Сложность идентификации формирования кварк-глюонной плазмы связана главным образом с тем, что КГП образуется на большом фоне, обусловленном обычными процессами сильного взаимодействия [7].

В связи с этим, для поиска экспериментальных проявлений процессов деконфайнмента в первую очередь исследуются взаимодействия с характеристиками, существенно отличными от среднего: события с большими множественностями и с большими поперечными импульсами Вторичных частиц, с высокой плотностью частиц на единичный интервал распределения по псевдобыстроте, события полного разрушения ядра снаряда или ядра мишени и т.д. [8].

Неоднозначность начального состояния, о котором обычно очень мало прямой экспериментальной информации, также приводит к существенным особенностям в распределении фрагментов и множественности ливневых частиц [9].

В данной работе анализируются особенности распределений вторичных частиц в событиях полного разрушения налетающего ядра в терминах числа провзаимодействовавших протонов ядра снаряда.

Экспериментальные данные

Анализируемый набор включал экспериментальные данные EMU-01 коллаборации: взаимодействия ядер серы ^{32}S с энергией 200 А·ГэВ и 3.7 А·ГэВ, ядер золота ^{197}Au с энергией 10.7 А·ГэВ и ядер свинца ^{208}Pb с энергией 158 А·ГэВ с ядрами фотоэмульсии.

Стопки ядерной эмульсии *Em* типа NIKFI BR-2, размером (10 x 20 x 0.06) см³ облучались горизонтальным пучком 200 А·ГэВ ^{32}S и 158 А·ГэВ ^{208}Pb на ускорителе SPS в Европейском центре ядерных исследований (CERN), пучком 10.7 А·ГэВ ^{197}Au на ускорителе AGS Брукхевенской национальной лаборатории США (BNL) и пучком ^{32}S 3.7 А·ГэВ на синхрофазотроне ОИЯИ [10-12].

Метод ядерной эмульсии по сравнению с подходами, исследующими взаимодействия встречных пучков ядер, является наиболее информативным. Ядерная фотоэмульсия имеет высокую пространственную разрешающую способность, позволяет наблюдать акт соударения в 4□-геометрии эксперимента [13].

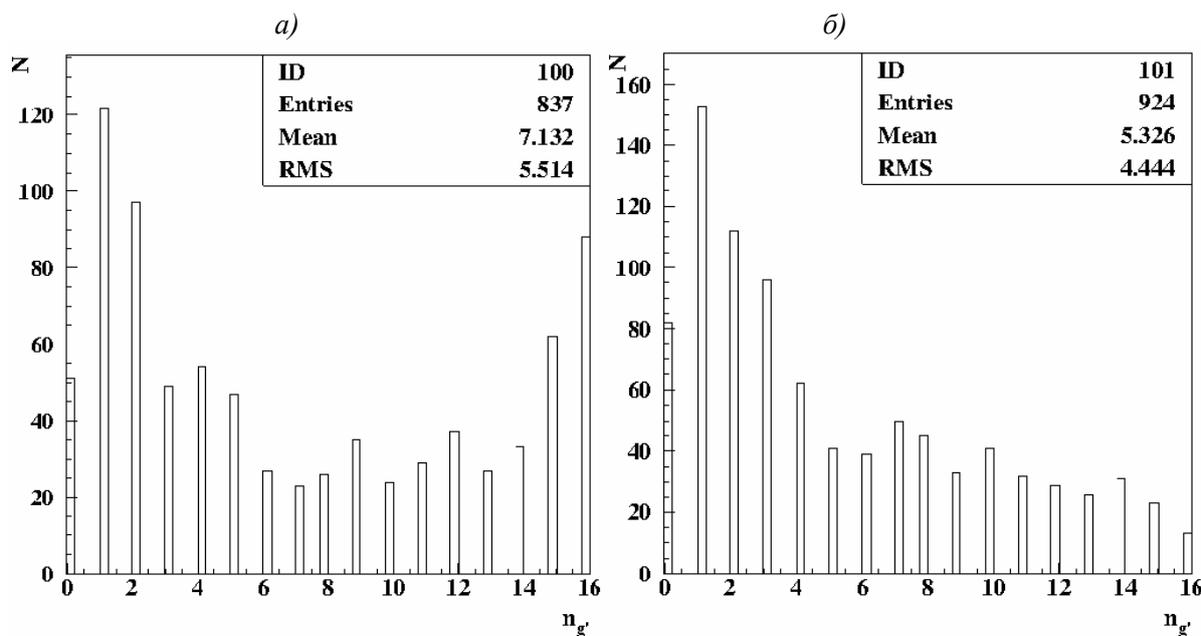
Классификация вторичных частиц проводилась согласно общепринятым в фотоэмульсионной методике критериям: *b*-частицы – фрагменты ядра мишени с кинетической энергией на нуклон $E_{кин} < 26$ МэВ и пробегом $R < 3$ мм; *g*-частицы – это в основном протоны отдачи с относительной ионизацией $J/J_0 > 1.4$ (где J_0 – минимальная ионизация, соответствующая однозарядным фрагментам ядра снаряда), с кинетической энергией $26 \leq E_{кин} \leq 400$ МэВ и пробегом $R > 3$ мм; *h*-частицами называется совокупность сильноионизирующих *g*- и *b*-частиц ($N_h = n_b + n_g$); *s*-частицы – ливневые частицы, в основном пионы и провзаимодействовавшие протоны ядра снаряда с относительной ионизацией $J/J_0 < 1.4$ и с кинетической энергией $E_{кин} > 400$ МэВ; *b'*-частицы – фрагменты ядра снаряда, треки которых находятся внутри конуса с углом раствора $\theta_{кр}$, удовлетворяющим соотношению $\sin \theta_{кр} = 0,2 \text{ ГэВ}/P_0$, где P_0 – первичный импульс на нуклон налетающего ядра.

Результаты и обсуждение

В центральных взаимодействиях по сравнению с периферическими в процессе взаимодействия участвует большее число нуклонов сталкивающихся ядер, и реализуются большие передачи энергии-импульса, что в свою очередь, приводит к образованию большего числа ливневых частиц

и уменьшения числа спектаторных фрагментов и их суммарного заряда. Для оценки числа провзаимодействовавших нуклонов ядра снаряда используется вспомогательная величина $\nu = A - A/n_p Q$, где A и n_p – атомный вес и число протонов ядра-снаряда, а $Q = \sum Z_f$ – сумма зарядов всех образовавшихся фрагментов налетающего ядра. Для оценки числа провзаимодействовавших протонов используется величина $n_{g'} = \nu \cdot n_p / A$.

На рисунке 1 представлено распределение неупругих событий по числу провзаимодействовавших протонов ядра снаряда для взаимодействий ядер серы с ядрами фотоэмульсии при энергии 200 А ГэВ и 3.7 А ГэВ.



а) – $S+Em$ 200 А ГэВ; б) – $S+Em$ 3.7 А ГэВ

Рисунок 1 – Распределение по числу провзаимодействовавших нуклонов ядра снаряда $n_{g'}$ для взаимодействий серы с ядрами фотоэмульсии при энергиях 200 А ГэВ и 3.7 А ГэВ с числом ливневых частиц $n_s > 0$.

Как видно из рисунка 1а, во взаимодействиях $S+Em$ 200 А ГэВ наблюдается корытообразное распределение с увеличенным числом событий в области как малых, так и больших значений $n_{g'}$. При этом, в области малых значений $n_{g'}$ увеличение вероятности событий объясняется существованием довольно большого количества периферических взаимодействий. В области больших $n_{g'}$ наблюдаются события полного разрушения налетающего ядра. Исследование характеристик таких событий и является целью данного исследования.

Прежде всего, хотелось бы обратить внимание, что событий полного разрушения ядра снаряда довольно много во взаимодействиях $S+Em$ 200 А ГэВ. Количество таких событий составляет около 18 процентов от общего числа взаимодействий. При этом в области $n_{g'} \geq 15$ наблюдается существенное увеличение числа событий по сравнению со средним значением в этой области.

Однако, при более низких энергиях во взаимодействиях серы с ядерной эмульсией ($S+Em$ 3.7 А ГэВ), как видно из рисунка 1б, никакого роста числа событий полного разрушения налетающего ядра не обнаруживается. Таким образом, вероятность появления таких событий критически зависит от энергии первичного ядра.

На рисунке 2 представлены распределения по числу провзаимодействовавших нуклонов ядра снаряда для взаимодействий золота Au с энергией 10.7 А ГэВ и ядер свинца Pb с энергией 158 А ГэВ с ядрами фотоэмульсии.

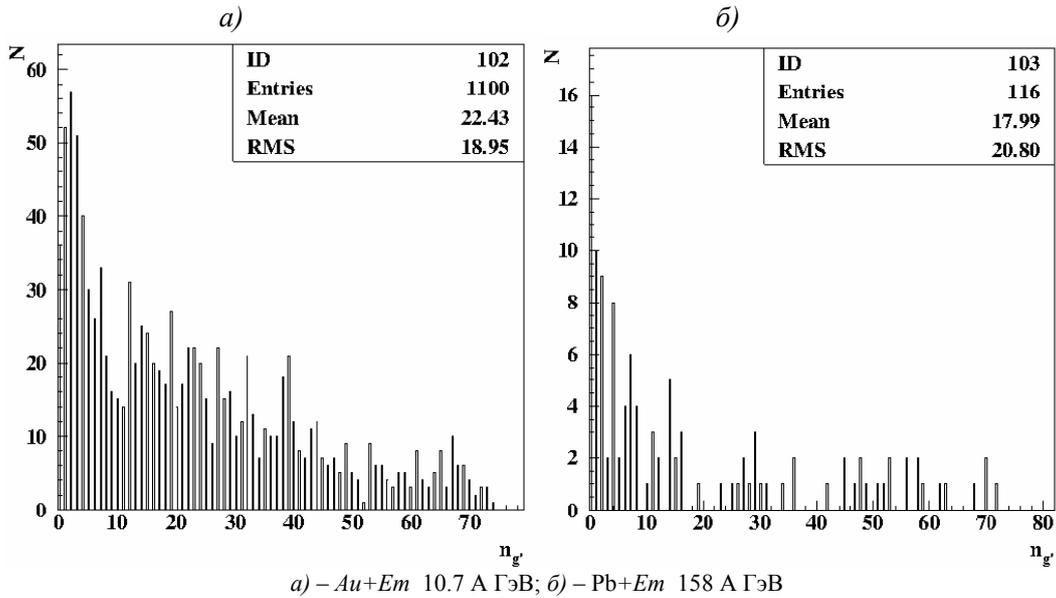


Рисунок 2 – Распределение по числу провзаимодействовавших протонов ядра снаряда n_g для взаимодействий ядер золота *Au* с энергией 10.7 A ГэВ и ядер свинца *Pb* с энергией 158 A ГэВ с ядрами фотоэмульсии

Как видно из рисунка 2, рост числа событий полного разрушения ядра снаряда не обнаруживается.

Таким образом, или критичным является различие энергии между энергией свинца 158 АГэВ и серы 200 АГэВ, или на рост вероятности появления событий полного разрушения ядра снаряда влияет не только энергия взаимодействия, но и размеры налетающего ядра. Для проверки этой гипотезы рассмотрим взаимодействие *S+Em* 200 A ГэВ более подробно. А именно, взаимодействие ядер серы с тяжелыми и легкими ядрами фотоэмульсии отдельно.

В рассматриваемых экспериментах EMU01-коллораации использовалась стандартная ядерная эмульсия типа BR-2. Она включает в себя водород (39.2%), ядра *CNO*-группы (35.3%) и ядра *AgBr* (25.5%).

Одним из наиболее оптимальных параметров для отделения событий с легкими и тяжелыми ядрами фотоэмульсии является зависимость числа фрагментов ядра-мишени и множественности n_s частиц. Эта корреляционная зависимость представлена на рисунке 3.

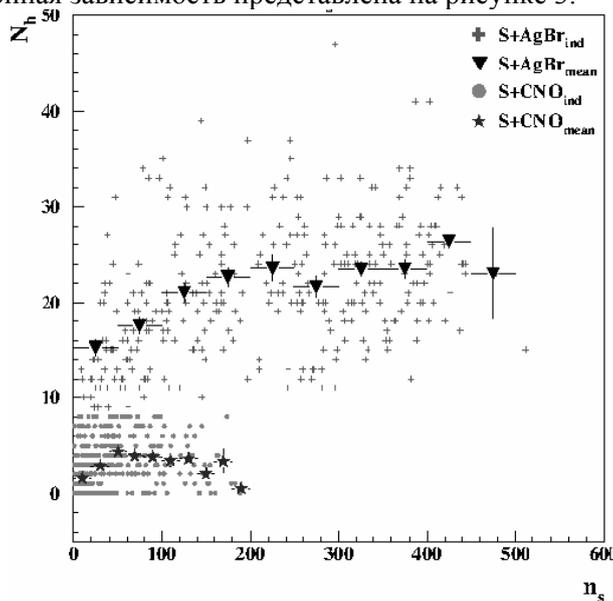


Рисунок 3 – Зависимость числа фрагментов ядра-мишени N_h и множественности n_s частиц для взаимодействий *S+Em* 200 АГэВ

Взаимодействия с легкими ядрами фотоэмульсии в данном случае ограничены условием $N_h \leq 8$, что соответствует заряду самого большого из легких ядер фотоэмульсии – ядра кислорода. Использование этого факта позволяет отделять большинство $Au+AgBr$ событий, от $Au+CNO$ событий.

Итак, для выяснения особенностей влияния параметров асимметричности (относительных размеров) взаимодействующей системы на вероятность появления событий полного разрушения налетающего ядра мы рассмотрели события с $N_h \leq 8$ и с $N_h > 8$.

Результаты анализа представлены на рисунке 4. Причем для сравнения представлены взаимодействия $S+Em$ и с энергией налетающего ядра 200 А ГэВ и с энергией 3.7 А ГэВ

Как видно из рисунка 4, в событиях с $N_h \leq 8$ распределения по n_g подобны вне зависимости от энергии. Существенное отличие обнаруживается в событиях взаимодействия серы S с тяжелыми ядрами фотоэмульсии $AgBr$. При более низких энергиях наблюдается почти флетообразное распределение, а при энергиях 200 АГэВ обнаруживается существенный пик в области больших значений n_g .

Для понимания отличительных особенностей событий полного разрушения налетающего ядра серы мы провели сравнительный анализ распределений вторичных частиц в событиях с $n_g \leq 14$ и $n_g \geq 15$.

Результаты сравнения по множественности линейных частиц n_s , множественности фрагментов ядра мишени N_h и средних псевдобыстротных распределений ливневых частиц представлены на рисунке 5.

Как видно из рисунка 5 все представленные графики критически отличаются друг от друга. Распределение по множественности линейных частиц для событий $n_g \leq 14$ сконцентрированы в области малых значений со средним значением $n_s = 66.83$. Средняя множественность событий с $n_g \geq 15$ почти в 5 раз выше.

Количество фрагментов ядра мишени в большинстве событий с $n_g \geq 15$ больше восьми. Таким образом, в основном такие события появляются во взаимодействиях серы с тяжелыми ядрами фотоэмульсии, что подтверждает результаты представленные на рисунке 4.

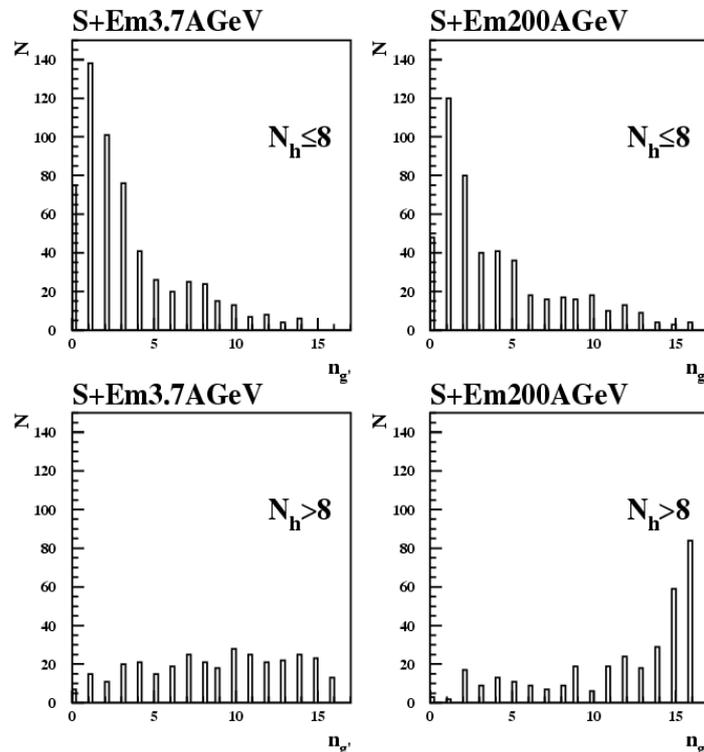


Рисунок 4– Распределение по числу провзаимодействовавших протонов ядра снаряда n_g для взаимодействий $S+Em$ 200 А ГэВ и $S+Em$ 3.7 А ГэВ с различным числом фрагментов ядра мишени N_h

В то же время необходимо отметить, что в событиях с $n_{g'} \leq 14$ присутствует довольно большая часть взаимодействий серы с тяжелыми ядрами фотоэмульсии. Таким образом, в данном случае нет жесткого разделения динамики развития процесса взаимодействия по параметру асимметрии взаимодействующих ядер.

Среднее псевдобыстротное распределение ливневых частиц в событиях с $n_{g'} \geq 15$ характеризуется узким пиком в области малых значений $\langle \eta \rangle$. Дисперсия распределения в данном случае в 2.5 раза меньше, чем для событий с $n_{g'} \leq 14$.

Заключение

В заключении суммируем вышеизложенное. Во взаимодействиях ядер серы с тяжелыми ядрами фотоэмульсии при энергии 200 АГэВ наблюдается аномально высокое количество событий полного разрушения ядра снаряда, имеющие следующие отличительные особенности.

Появление таких событий зависит от энергии взаимодействия (не обнаруживается во взаимодействиях ядер серы с ядрами фотоэмульсии при энергии 3.7 АГэВ) и степени асимметрии взаимодействующих ядер (не обнаруживается во взаимодействиях тяжелых ядер во взаимодействиях с ядерной эмульсией).

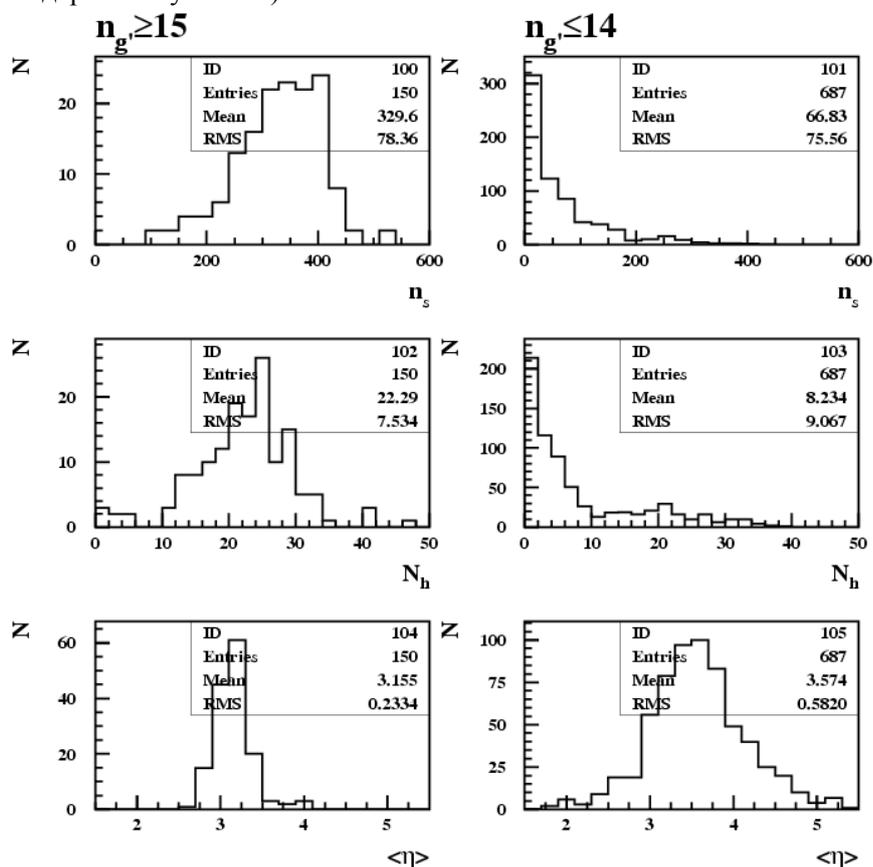


Рисунок 5 – Распределение по множественности ливневых частиц n_s , множественности фрагментов ядра мишени N_h и средних псевдобыстротных распределений $\langle \eta \rangle$ ливневых частиц для взаимодействий $S+Em$ 200 АГэВ с различным числом провазимодействовавших протонов ядра снаряда $n_{g'}$.

События полного разрушения налетающего ядра характеризуются высокой множественностью ливневых частиц и усконаправленным угловым распределением на большие углы (узким пиком в области малых значений средней псевдобыстроты $\langle \eta \rangle$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Foka P., Janik M.A. (2016) An overview of experimental results from ultra-relativistic heavy-ion collisions at the CERN LHC: Hard probes. Reviews in Physics 1, 172–194.
 [2] Mishra D.K. (2016) Experimental results on charge fluctuations in heavy-ion collisions. arXiv: 1607.05613v1 nucl-ex.

- [3] Zhou Y. (2016) Review of anisotropic flow correlations in ultrarelativistic heavy-ion collisions. *arXiv: 1607.05613v1 nucl-ex*.
- [4] Andronic A. (2014) An overview of the experimental study of quark-gluon matter in high-energy nucleus-nucleus collisions. *Int.J.Mod.Phys A*, V29, N22, Art. N143004.
- [5] Ivanov Yu.B. (2013) Baryon stopping as a probe of deconfinement on set in relativistic heavy-ion collisions. *Physics Letters B*, V721, P.123–130.
- [6] Stefanek G. et al. (2016) Recent results from the search for the critical point of strongly interacting matter at the CERN SPS. *Nucl.Part.Phys.Proc.*, V273-275, P. 2596-2598.
- [7] Kumar L. (2013) STAR Results from the RHIC Beam Energy Scan-I. *Nuclear Physics A*, V904–905, P.256–263.
- [8] Melkumov G.L. (2013) Exploration of the Phase Diagram of Strongly Interacting Matter at CERN SPS. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, V245, P.283.
- [9] Luzum M., Petersen H. (2014) Initial state fluctuations and final state correlations in relativistic heavy-ion collisions. *J.Phys.G: Nucl.Part.Phys.*, Code 063102, V41, N6.
- [10] Adamovich M.I. et al. (2000) Azimutal correlations of secondary particles in ^{32}S induced interactions with Ag(Br) nuclei at 4.5 GeV/c/nucleon. *Part. Nucl. Lett.*, N4(101), P.75-82.
- [11] Adamovich M.I. et al. (1989) Rapidity densities and their fluctuations in central 200 AGeV ^{32}S interactions with Au and Ag, Br nuclei EMU01 collaboration. *Phys. Lett. B*, V.227, P.285-290.
- [12] Stenlund E. et al. (1995) Particle production in gold and lead induced interactions at AGS and SPS. *Nucl.Phys. A*, V590, Iss.248, P.597-600.
- [13] Zarubin P.I. (2012) Clusters in Nuclei. *Lecture Notes in Physics*, V3, P.248.

REFERENCES

- [1] Foka P., Janik M.A. (2016) An overview of experimental results from ultra-relativistic heavy-ion collisions at the CERN LHC: Hard probes. *Reviews in Physics* 1, 172–194.
- [2] Mishra D.K. (2016) Experimental results on charge fluctuations in heavy-ion collisions. *arXiv: 1607.05613v1 nucl-ex*.
- [3] Zhou Y. (2016) Review of anisotropic flow correlations in ultrarelativistic heavy-ion collisions. *arXiv: 1607.05613v1 nucl-ex*.
- [4] Andronic A. (2014) An overview of the experimental study of quark-gluon matter in high-energy nucleus-nucleus collisions. *Int.J.Mod.Phys A*, V29, N22, Art. N143004.
- [5] Ivanov Yu.B. (2013) Baryon stopping as a probe of deconfinement on set in relativistic heavy-ion collisions. *Physics Letters B*, V721, P.123–130.
- [6] Stefanek G. et al. (2016) Recent results from the search for the critical point of strongly interacting matter at the CERN SPS. *Nucl.Part.Phys.Proc.*, V273-275, P. 2596-2598.
- [7] Kumar L. (2013) STAR Results from the RHIC Beam Energy Scan-I. *Nuclear Physics A*, V904–905, P.256–263.
- [8] Melkumov G.L. (2013) Exploration of the Phase Diagram of Strongly Interacting Matter at CERN SPS. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, V245, P.283.
- [9] Luzum M., Petersen H. (2014) Initial state fluctuations and final state correlations in relativistic heavy-ion collisions. *J.Phys.G: Nucl.Part.Phys.*, Code 063102, V41, N6.
- [10] Adamovich M.I. et al. (2000) Azimutal correlations of secondary particles in ^{32}S induced interactions with Ag(Br) nuclei at 4.5 GeV/c/nucleon. *Part. Nucl. Lett.*, N4(101), P.75-82.
- [11] Adamovich M.I. et al. (1989) Rapidity densities and their fluctuations in central 200 AGeV ^{32}S interactions with Au and Ag, Br nuclei EMU01 collaboration. *Phys. Lett. B*, V.227, P.285-290.
- [12] Stenlund E. et al. (1995) Particle production in gold and lead induced interactions at AGS and SPS. *Nucl.Phys. A*, V590, Iss.248, P.597-600.
- [13] Zarubin P.I. (2012) Clusters in Nuclei. *Lecture Notes in Physics*, V3, P.248.

ӘОЖ: 539.12; 539.1

Е.А. Грушевская, И.А. Лебедев, А.Т. Темиралиев, А.И. Федосимова

Физико-техникалық институты, Алматы қ., Қазақстан

АСИММЕТРИЯЛЫ ЯДРОЛАРДЫҢ ӨЗАРА ӘРЕКЕТТЕРІНДЕ СНАРЯДТЫҢ ЯДРОСЫНЫҢ ТОЛЫҚ ТАЛҚАНДАНУ ЖАҒДАЙЛАРЫНЫҢ СИПАТТАМАЛАРЫН ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Асимметриялы ядролардың өзара әрекеттерінде снарядтың ядросының толық талқандану жағдайларының сипаттамаларын зерттеу жүргізілді. Аталған жұмыста ядро-ядролық өзара әрекеттерді

эксперименттік зерттеу үшін ядролық эмульсия әдісі қолданылды. Ұшып келуші ядроны толық талқандау жағдайларындағы екінші ретті бөлшектердің жекелеген өзара әрекет-терінің үлестірімі салынды және екінші ретті бөлшектердің орташа сипаттамаларымен аналогия-лық үлестірімінің салыстырмалы талдауы жасалды. Күкірттің ядроларының фотоэмульсияның ауыр ядроларымен 200 АГЭВ энергиядағы өзара әрекеттерінде жалпы нормадан ауытқыған жоғары мөлшердегі снарядтың ядросының толық талқандау жағдайлары байқалады, олардың төмендегідей айрықша ерекшеліктері бар. Бұндай оқиғалардың пайда болуы өзара әрекет энергиясына (3.7 АГЭВ энергиясында күкірт ядроларының фотоэмульсия ядроларымен өзара әрекеттерінде байқалмайды) және өзара әрекет ететін ядролардың асимметрия дәрежесіне (ауыр ядролардың ядролық эмульсиямен өзара әрекеттерінде байқалмайды) тәуелді болады. Ұшып келуші ядроны толық талқандау жағдайлары нөсерлі бөлшектердің өте көптігімен және үлкен бұрыштарға еңсіз бағытталған бұрыштық үлестіріммен (орташа псевдожылдамдықтың жіңішке пигіндегі шағын мәндер аумағында) сипатталады.

Түйін сөздер: ядролардың өзара әрекеті, көптеген процестер, фрагментация, ядролық псевдожылдам үлестірімі.

Сведения об авторах:

Лебедев И.А. – д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Физико-технический институт, Алматы, Ибрагимова 11, тел.386-55-42, 8(777)3708643, e-mail: lebedev692007@yandex.ru, lebedev@sci.kz;

Темиралиев А.Т. – к.ф.-м.н., СИС, Физико-технический институт, Алматы, Ибрагимова 11, тел.386-55-42, e-mail: abzal@sci.kz;

Федосимова А.И. – инженер, Физико-технический институт, Алматы, Ибрагимова 11, тел.386-55-42, e-mail: ananastasia@list.ru;

Грушевская Е.А. – инженер, Физико-технический институт, Алматы, Ибрагимова 11, тел.386-55-42, e-mail: grushevskaiya@bk.ru

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 38 – 47

UDC:621.9

A. Askarova, A.S. Zhumakhanova, A. Kudaykulov, A.A.Tashev, G.S. Kaliyeva

RSE «ИКТ», Almaty;
KazATU named after S. Seyfullin, Almaty
"Kalieva G." <gulnara@ipic.kz>

**THE ENERGY METHOD IN THE STUDY OF STEADY-STATE
THERMOPHYSICAL CONDITION OF A ROD OF VARIABLE CROSS
SECTION IN THE PRESENCE OF HEAT FLOW, HEAT EXCHANGE
AND THERMAL INSULATION**

Abstract: Bearing elements of most strategic equipment are limited by length and of variable cross-section rods. Certain types of heat sources affect many of them. In order to ensure reliable operation of this equipment, it is necessary to know the temperature field along the length of the rod of variable cross section. The paper proposes a computational algorithm and method to determine the temperature field along the length of the rod of limited length and of variable cross-section. They are based on basic laws of energy conservation. Approximate analytical solution of the problem has been obtained.

Keywords: variable cross-section, cross section radius, heat source, rod length, rod volume, thermal conductivity, thermal exchange, convection.

УДК:621.9

А. Аскарова, А.С. Жумаханова, А. Кудайкулов, А.А. Ташев, Г.С. Калиева

РГП «ИИВТ», Алматы;
КазАТУ им. С. Сейфуллина, Алматы

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ИССЛЕДОВАНИИ
УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ
ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ**

Аннотация. Несущие элементы большинства стратегического оборудования являются стержнями ограниченной длины и переменного поперечного сечения. Многие из них испытывают воздействия определенных видов источников тепла. Для обеспечения надежной работы этого оборудования необходимо знать поле температуры по длине стержня переменного сечения. В работе предлагается вычислительный алгоритм и метод для определения поля температуры по длине стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения. Они основаны на фундаментальных законах сохранения энергии. Получено приближенно-аналитическое решение задачи.

Ключевые слова: переменное сечение, радиус сечения, источники тепла, длина стержня, объем стержня, теплопроводность, теплообмен, конвекция.

Введение. Определение законов распределения температуры по длине стержня ограниченной длины при воздействии разнородных видов тепла является основой исследования термо-напряжен-

ного деформированного состояния несущих стержневых элементов энергетических установок, двигателей внутреннего сгорания и водородных двигателей. Проблемой определения поля температур в твердых деформируемых телах занимаются многие видные ученые [1-3]. В [4-5] на основе метода конечных элементов определен закон распределения температуры по длине стержня ограниченной длины и постоянного сечения. В частности, в работе [5] рассматривается решение установившейся задачи по определению поля температуры по длине теплоизолированного по боковой поверхности горизонтального стержня ограниченной длины и постоянного поперечного сечения. При этом на площадь поперечного сечения с левого конца подводится поток тепла с постоянной интенсивностью, а на правом конце происходит конвективный теплообмен с окружающей средой.

При этом коэффициент теплообмена и температура окружающей среды считаются постоянными. В работе [6] рассмотрено влияние температуры на деформацию исследуемого элемента. Здесь же аналитически получен закон распределения температуры по длине стержня, когда боковая поверхность стержня теплоизолирована, левый конец находится под воздействием теплового потока, а на правом происходит теплообмен с окружающей средой. Кроме того, рассматривается задача определения поля температур по длине горизонтального стержня постоянного поперечного сечения. При этом на левый торец подается постоянная температура, а на оставшихся поверхностях стержня происходит теплообмен с окружающей средой. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в [7-9]. В [10] на основе закона сохранения энергии вариационным методом определяется процесс теплообмена между деформируемой оболочкой и окружающей жидкостью. В [11] на основе метода конечных элементов исследуется процесс теплопроводности в стержневых элементах ядерных энергетических установок. Там же приводится описание пакета прикладных программ, разработанных на базе современных инструментальных средств программирования, которые ориентированы на решение рассматриваемых задач. Действительно, разрабатываемый пакет в определенном смысле является универсальным, удобным для пользователей. В [12] исследуется нестационарное поле распределения температур в цилиндрических стержнях при воздействии лазерных источников тепла. Полученные в работе результаты можно использовать при исследовании нестационарных температурных процессов в стержне при наличии лазерных источников тепла. В [13-16] рассматриваются вычислительные методы, алгоритмы и пакет прикладных программ для исследования установившихся термо-напряженно-деформированного состояния стержня ограниченной длины и постоянного поперечного сечения при воздействии локальных тепловых потоков, температур, теплообменов, а также с учетом наличия локальных теплоизоляций. При этом для каждой рассматриваемой задачи выявлены соответствующие закономерности. Для некоторых задач определяются установившиеся поля температур, составляющие деформации и напряжения, а также поле перемещений. Получены выражения для вычисления величины удлинения и возникающего осевого сжимающего усилия. Там же, исследованы сходимость метода и точность полученных численных результатов. В отличие от вышеуказанных работ, в данной работе рассматривается разработка методов, вычислительных алгоритмов и программ, основанных на законе сохранения энергии для исследования установившегося термо-напряженно-деформированного состояния горизонтального стержня переменного сечения в виде круга. Радиус сечения уменьшается линейно по длине стержня начиная с левого конца. Боковая поверхность стержня тепло изолирована. На площадь поперечного сечения левого торца стержня подается тепловой поток с постоянной интенсивностью, а на правом конце происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. При этом коэффициент теплообмена и температура окружающей среды считаются постоянными величинами. Для этой задачи сначала определяется закон распределения температуры по длине стержня. Далее, в случае если один конец стержня жестко зашпемлен, а другой свободен, вычисляется его удлинение в зависимости от действующих источников тепла, физических и геометрических характеристик стержня с учетом наличия теплоизоляции. В случае зашпемления обоих концов исследуемого стержня, определяется величина возникающего осевого сжимающего усилия с учетом реальных факторов. При этом также определяется закон распределения всех составляющих деформаций, напряжения и поле перемещений. При исследовании выявлены некоторые закономерности процесса. Следует отметить, что разработанные программы на Python оказались эффективными и удобными для пользователя.

Постановка задачи. Рассмотрим горизонтальный стержень переменного поперечного сечения. Ось Ox направим слева направо по оси стержня. Предположим, что поперечным сечением стержня является круг. Радиус поперечного сечения стержня меняется линейно по его длине, т.е. $r(x) = ax + b$, $0 \leq x \leq l$, где l [см] – длина стержня, $a, b = const$. Радиус площади поперечного сечения левого конца обозначим через b [см], т.е. $r(x=0) = a \cdot 0 + b = b$ [см]. Тогда радиус поперечного сечения правого конца будет равен $r(x=l) = a \cdot l + b$ [см]. Площадь поперечного сечения стержня по его длине меняется по квадратичному закону, т.е. $F(x) = \pi r^2 = \pi(ax + b)^2$, $0 \leq x \leq l$. Далее, предположим, что боковая поверхность исследуемого стержня является теплоизолированной. На площадь поперечного сечения левого конца подведен тепловой поток q [$\frac{Вт}{см^2}$] с постоянной интенсивностью, в то время как через площадь поперечного сечения правого конца проходит конвективный теплообмен с окружающей средой. При этом температура окружающей среды постоянна, т.е. T_{oc} [$^{\circ}C$] = const. Коэффициент теплообмена между материалом стержня и окружающей средой h [$\frac{Вт}{см^2 \cdot ^{\circ}C}$]. Теплофизические свойства материала стержня характеризуются коэффициентом теплопроводности k_{xx} [$\frac{Вт}{см \cdot ^{\circ}C}$]. При таких воздействиях требуется определить закон распределения температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения. Расчетная схема рассматриваемой задачи приводится на рисунке 1.

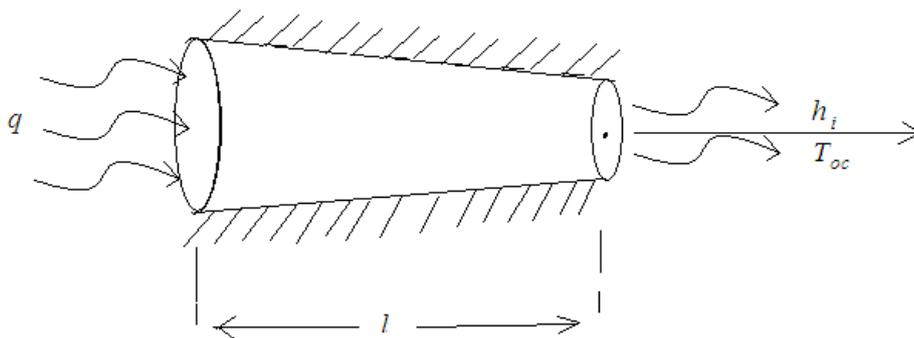


Рисунок 1 - Расчетная схема задачи

Решение проблемы. Для решения данной задачи, в соответствии с фундаментальным законом сохранения энергии [1] напишем функционал полной тепловой энергии для рассматриваемой задачи

$$I = \int_{S(x=0)} q T ds + \int_V \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dv + \int_{S(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds \quad (1)$$

где $S(x=0)$ - площадь поперечного сечения левого конца стержня куда подведен тепловой поток q ; $S(x=l)$ - площадь поперечного сечения правого конца стержня через который происходит конвективный теплообмен. V - объем исследуемого стержня. Теперь, учитывая, что исследуемый процесс установившийся и боковая поверхность стержня полностью тепло изолирована, а также $q, h, T_{oc} = const$, поле распределения температуры по длине стержня аппроксимируем полным полиномом второго порядка

$$T(x) = ax^2 + bx + c = \varphi_i(x) \cdot T_i + \varphi_j(x) T_j + \varphi_k(x) T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

где $a, b, c = const$;

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \\ \varphi_j(x) &= \frac{4lx - 4x^2}{l^2} \\ \varphi_k(x) &= \frac{2x^2 - lx}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$T_i = T(x=0); \quad T_j = T(x = \frac{l}{2}); \quad T_k = T(x=l);$$

Воспользуясь (2-3) можно определить градиент температуры

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} T_k = \\ &= \left(\frac{4x - 3L}{L^2} \right) T_i + \left(\frac{4L - 8x}{L^2} \right) T_j + \left(\frac{4x - L}{L^2} \right) T_k \end{aligned}$$

Кроме того функция (2) должна дать минимум к функционалу (1) полной тепловой энергии для стержня.

Сначала вычислим интегралы в (1) с учетом (2).

$$I_1 = \int_{S(x=0)} q T ds = F_0 q T_i \quad (4)$$

где $F_0 = F(x=0) = \pi(a \cdot 0 + b)^2 = \pi b^2$ - площадь поперечного сечения левого конца стержня, куда подведен тепловой поток - q .

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_V \frac{k_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 ds = \frac{k_{xx}}{2} \int_0^l F(x) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{k_{xx}}{2} \int_0^l (ax + b) \left[\frac{4x - 3l}{l^2} T_i + \frac{4l - 8x}{l^2} T_j + \frac{4x - l}{l^2} T_k \right]^2 dx = \\ &= \frac{k_{xx}}{12l} [(3al + 14b)T_i^2 + 16(al + 2b)T_j^2 + (11ab + 14b)T_k^2 - 8(al + 4b)T_i T_j + \\ &\quad + 2(al + 2b)T_i T_k - 8(3al + 4b)T_j T_k]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_3 = \int_{S(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 = \frac{F_l \cdot h}{2} (T_k - T_{oc})^2; \quad (6)$$

где $F_l = a \cdot l + b$.

Подставляя (4-6) в (1) находим интегральный вид функционала полной тепловой энергии для рассматриваемой задачи.

$$\begin{aligned} I &= bqT_i + \frac{k_{xx}}{12l} [(3al + 14b)T_i^2 + 16(al + 2b)T_j^2 + (11al + 14b)T_k^2 - 8(al + 4b)T_i T_j + \\ &\quad + 2(al + 2b)T_i T_k - 8(3al + 4b)T_j T_k] + \frac{(al + b)h}{2} (T_k - T_{oc})^2; \end{aligned} \quad (7)$$

В этом выражении $I = I(T_i, T_j, T_k)$. Минимизируя I по T_i, T_j и T_k получим систему разрешающих уравнений с учетом естественных граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0; \Rightarrow (3al + 14b)T_i - 4(al + 4b)T_j + (al + 2b)T_k &= -\frac{6bql}{k_{xx}} \\ \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; \Rightarrow -(al + 4b)T_i + 4(al + 2b)T_j - (3al + 4b)T_k &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial T_k} = 0; \Rightarrow (al + 2b)T_i - 4(3al + 4b)T_j + \\ + [(11al + 14b) + \frac{6l(al + b)h}{k_{xx}}]T_k &= \frac{6l(al + b)h}{k_{xx}}T_{oc} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

После небольшого упрощения, систему (8) можно переписать в следующем виде.

$$\left. \begin{aligned} a_1T_i - 4a_2T_j + a_3T_k &= b_1 \\ -a_2T_i + 4a_3T_j - a_4T_k &= 0 \\ a_3T_i - 4a_4T_j + a_5T_k &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $a_1 = (3al + 14b)$; $a_2 = (al + 4b)$; $a_3 = (al + 2b)$; $a_4 = 3al + 4b$;

$$a_5 = (11al + 14b) + \frac{6l(al + b)h}{k_{xx}}; \quad b_1 = \frac{6lq}{k_{xx}}; \quad b_2 = \frac{6l(al + b)h \cdot T_{oc}}{k_{xx}}; \quad (10)$$

Далее, решая систему (9) определим узловое значение температуры T_i, T_j и T_k .

$$T_k = \frac{C_1b_4 - b_3C_3}{C_1C_4 - C_2C_3}; \quad T_j = -\frac{C_2}{C_1}T_k + \frac{b_3}{C_1}; \quad T_i = \frac{4a_2}{a_1}T_j - \frac{a_3}{a_1}T_k + \frac{b_1}{a_1}; \quad (11)$$

где $C_1 = \frac{4(a_1a_3 - a_2^2)}{a_1}$; $C_2 = \frac{a_2a_3 - a_1a_4}{a_1}$; $C_3 = \frac{4(a_2a_3 - a_1a_4)}{a_1}$;

$$C_4 = \frac{a_1a_5 - a_3^2}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_2b_1}{a_1}; \quad b_4 = \frac{a_1b_2 - b_1a_3}{a_1}; \quad (12)$$

Тогда закон распределения температуры по длине исследуемого стержня можно определить как:

$$T(x, l, h, k_{xx}, T_{oc}, q, a, b) = \frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2}T_i + \frac{4lx - 4x^2}{l^2}T_j + \frac{2x^2 - lx}{l^2}T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (13)$$

Анализ полученных результатов. Рассмотрим решение задачи при следующих исходных данных:

$$l = 90 \text{ см}; \quad a = -\frac{1}{15}; \quad b = 12 \text{ см}; \quad q = -500 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}; \quad k_{xx} = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{C}}; \quad h = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}};$$

$$T_{oc} = 20^\circ\text{C}, \quad T_k = T(x=l) = 120^\circ\text{C}; \quad T_j = T\left(x = \frac{l}{2}\right) = 483,46^\circ\text{C}. \quad T_i = T(x=0) = 743,077^\circ\text{C}.$$

В этом случае, распределения температуры по длине исследуемого стержня согласно (13) имеет следующий вид

$$T(x, l, h, k_{xx}, T_{oc}, q, a, b) = -0,02564x^2 - 4,6154x + 743,077. \quad (14)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_i = 743,077^{\circ}C; \\ T(x=\frac{l}{2}) &= T(x=45) = T_j = 483,46^{\circ}C; \\ T(x=l) &= T(x=90) = 120^{\circ}C. \end{aligned}$$

Построим график поле распределения температуры по длине исследуемого стержня при принятых исходных данных (рисунок 2)

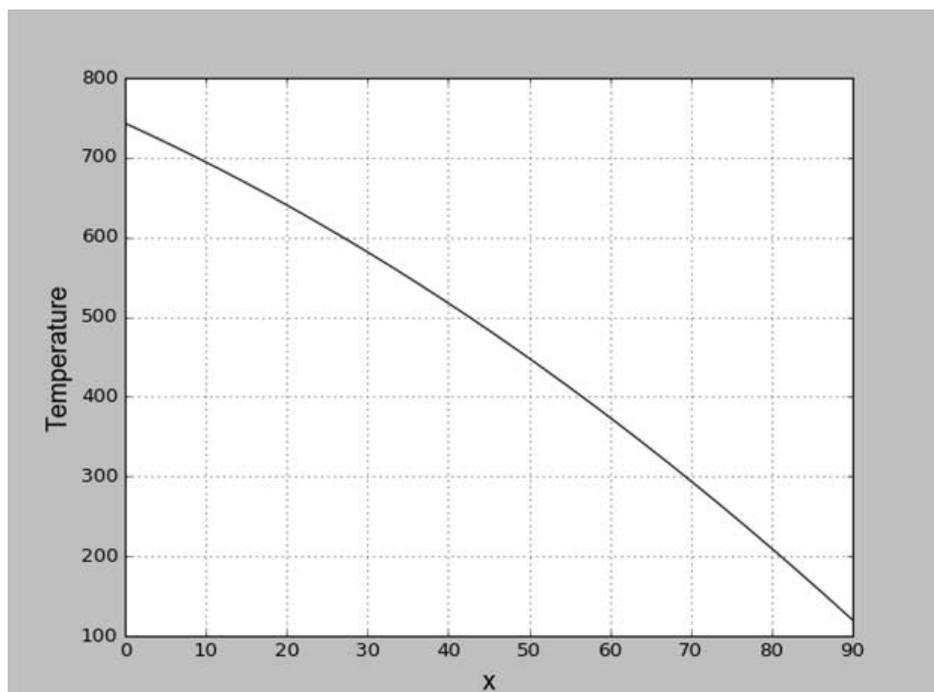


Рисунок 2 - Поле распределения температуры по длине стержня

Из рисунка видно, что закон распределения температур имеет слабо выраженный параболический характер. Это объясняется переменностью поперечного сечения стержня по его длине, которое изменяется по квадратичному закону, а радиус – по линейному закону.

Если один из концов стержня жестко зашпелен, а другой свободен, то из-за наличия источников тепла он удлиняется. Величина удлинения определяется на основе общих законов теплофизики:

$$\begin{aligned} \Delta l_T &= \int_0^l \alpha T(x) dx = \int_0^l \alpha (-0.02564x^2 - 4.6154x + 743.077) dx = \\ &= 0.0000125(-0.02564x^3 - 4.6154x^2 + 743.077x) \Big|_0^l = 0.524455 \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = 0.0000125 \left(\frac{1}{^{\circ}C} \right)$ - коэффициент теплового расширения материала стержня.

Если оба конца стержня жестко зашпелены, то из-за теплового расширения в стержне возникает осевое сжимающее усилие. Его значение определяется с использованием условия совместности деформации [13]. В нашем случае согласно [13] значение осевого усилия определяется формулой:

$$R = -\frac{EF\Delta T}{l} = -\frac{E\Delta T}{l} \int_0^l F(x)dx = \frac{EF_{cp}\Delta T}{l}.$$

Так как $E=2 \cdot 10^6$ и $F_{cp}=9$, то имеем $R=-3062209.933$. В этом случае возникает поле распределения термо-упругой составляющей напряжения в сечениях исследуемого стержня, которое определяется как:

$$\sigma(x) = \frac{-3062209.933}{\left(-\frac{1}{15}x + 12\right)^2}, \quad 0 \leq x \leq l = 90 \text{ см}$$

Закон распределения термо-упругой составляющей деформации определяется на основе законов теплофизики [13]:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}, \quad 0 \leq x \leq l = 90 \text{ см}$$

Пользуясь найденным законом распределения температуры (14) можно определить закон распределения температурной составляющей деформации:

$$\varepsilon_T(x) = \alpha T(x) = \alpha(0.02564x^2 + 4.6154x - 743.077), \quad 0 \leq x \leq l = 90 \text{ см}$$

Тогда в соответствии с обобщенным законом Гука определяется закон распределения температурной составляющей напряжения:

$$\sigma_T(x) = E\varepsilon_T(x) = 2 \cdot 10^6(0.02564x^2 + 4.6154x - 743.077), \quad 0 \leq x \leq l = 90 \text{ см}$$

Пользуясь (18-19), можно определить закон распределения упругих составляющих деформации:

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon(x) - \varepsilon_T(x), \quad 0 \leq x \leq l = 90 \text{ см}$$

Далее, на основании обобщенного закона Гука определяется закон распределения упругой составляющей напряжения:

$$\sigma_x(x) = \sigma(x) - \sigma_T(x), \quad 0 \leq x \leq l = 90 \text{ см}$$

На рисунке 3 приводится закон распределения трех составляющих деформации по длине стержня переменного сечения, защемленного с двух концов.

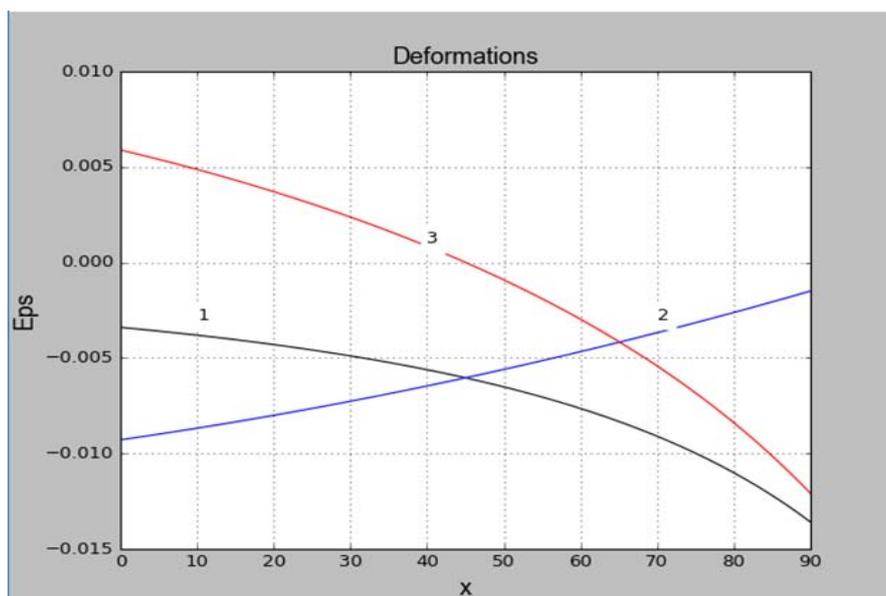


Рисунок 3 - Законы распределения деформации: 1 - $\varepsilon(x)$; 2 - $\varepsilon_T(x)$ и 3 - $\varepsilon_x(x)$

Из графика видно, что температурная и термо- упругая составляющие деформации имеют сжимающий характер по всей длине стержня. В то время как упругая составляющая деформации на участке $0 \leq x \leq l = 67\text{cm}$ имеет растягивающий, а на участке $67 \leq x \leq l = 90\text{cm}$ - сжимающий характер. Этот процесс обусловлен наличием большого теплового потока ($q = -500 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$) на левом конце стержня, где площадь поперечного сечения на левом конце в четыре раза больше, чем на правом конце.

На рисунке 4 приводятся законы распределения трех составляющих напряжения по длине стержня переменного сечения, зашпеленные с двух концов.

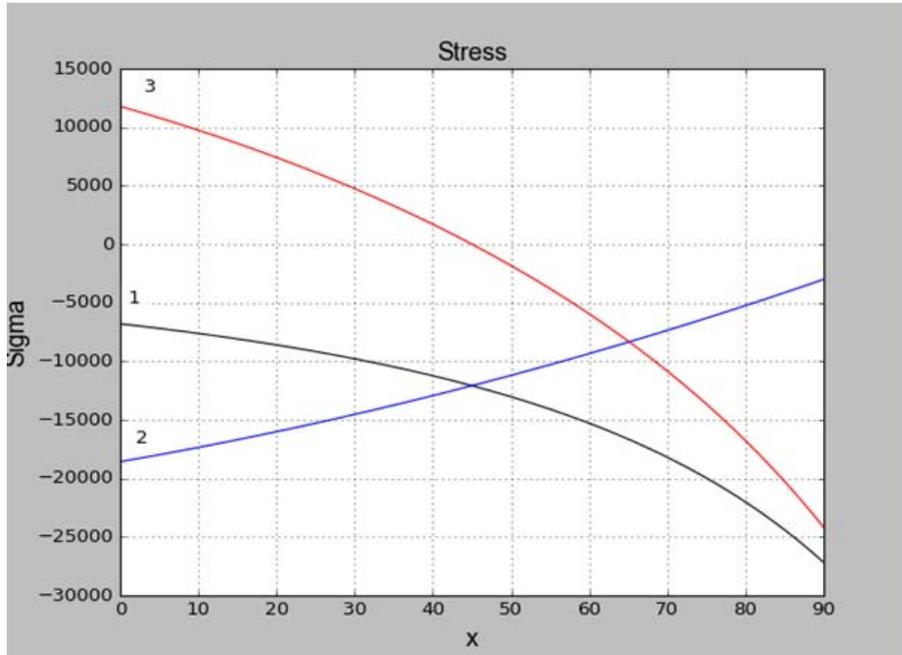


Рисунок 4 - Законы распределения напряжения: 1 - $\sigma(x)$; 2 - $\sigma_T(x)$ и 3 - $\sigma_x(x)$

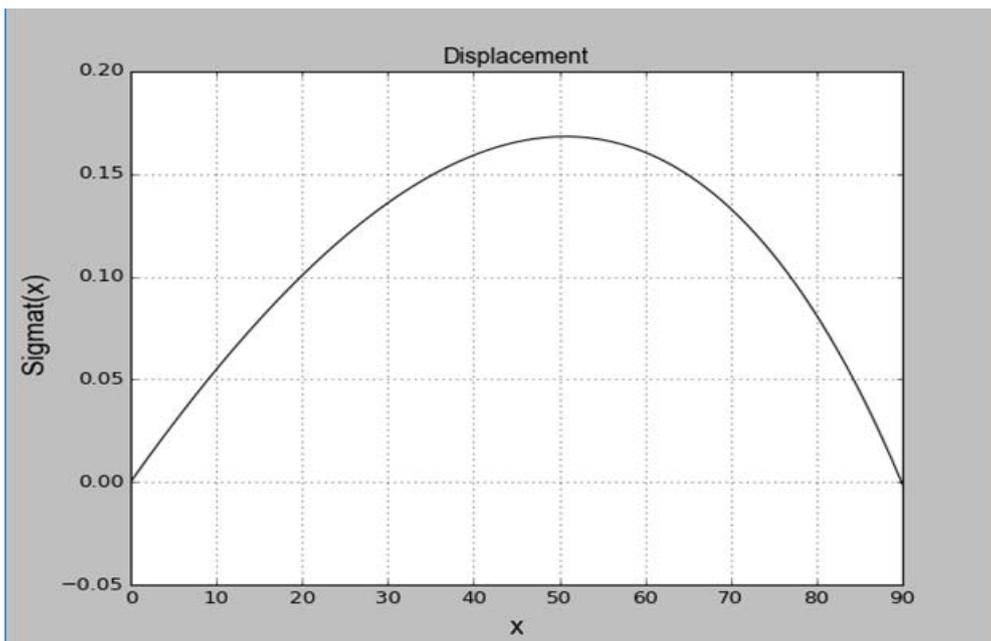


Рисунок 5 - Закон распределения перемещения сечений стержня

Из рисунка видно, что все составляющие напряжения имеют такой же характер, как и деформация.

На рисунке 5 представлен закон распределения перемещения сечений стержня.

Из рисунка видно, что все сечения перемещаются слева направо. Это также обусловлено наличием большого теплового потока на левом конце стержня. Наибольшее смещение соответствует сечению стержня с координатами $x=5l$ см, так как смещение на обоих концах стержня равно 0.

Заключение. Разработанные вычислительный алгоритм и метод, основанные на фундаментальном законе сохранения энергии позволяет решать множество прикладных инженерных задач с высокой точностью. Кроме того, они дают возможность решать множество прикладных инженерных задач теплопроводности с учетом наличия разнообразных видов локальных источников тепла.

Следует отметить, что предлагаемые алгоритм и метод позволяют одновременно определить законы распределения температуры, трех составляющих деформации и напряжения, а также перемещения. Наряду с этим определяются величины удлинения и возникающие осевые усилия. Полученные результаты позволяют провести глубокий анализ термо-напряжённого состояния стержня переменного сечения и ограниченной длины. С помощью разработанного подхода можно исследовать возникающие сложные термо-напряженно-деформированные состояния несущих элементов энергетических установок, двигателей внутреннего сгорания, реактивных и водородных двигателей, а также нефтеногревательных станций, применяемых при транспортировке высокопарафинистой нефти по трубопроводу.

Работа выполнена в рамках бюджетного грантового финансирования МОН РК на 2015-2017 годы (грант 3322/ГФ4). Название проекта: «Теоретические основы математического моделирования установившихся нелинейных, теплофизических процессов в жаропрочных сплавах». Регистрационный номер (РН) 0115РК00547.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Harr M.E. Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, N.Y., 1962
- [2] Fung Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965
- [3] Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed. Index Educational Publishers, N.Y., 1977
- [4] Huebner K.H. The Finite Element Method for Engineers, Wiley, N.Y., 1975
- [5] Harry J. Segerlind Applied Finite Element Analysis, N.Y., 1976
- [6] Visser W., Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AirForce Inst. of Technology Wrights Patterson Air Force base, Dayton, Ohio, 1965
- [7] Conte S.D., Elementary Numerical Analysis, McCray-Hill, N.Y. 1965
- [8] Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 3-rd ed., Wiley, N.Y., 1972
- [9] Williams P.W., Numerical Computation, Nelson, Don Mill, Can., 1972
- [10] Johnson C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
- [11] Gaspar Jr., Moreira M.L., Desampaio P.A.B. Temperature Distribution Fuel Rods: A study on the Effect of Eccentricity in the Position of UO₂ Pellets., 0-th International Conference «Nuclear Energy for New Europe» 2011
- [12] IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics (Volume: 18, Issue: 1, Jan-feb. 2012)
- [13] Timoshenko S, Goodier J.N. Theory of Elastic. N.Y., 1951.

REFERENCES

- [1] Harr M.E. Groundwater and Seepage, *McGraw-Hill*, N.Y., **1962**(in Eng).
- [2] Fung Y.C., Foundations of Solid Mechanics, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*, **1965**(in Eng).
- [3] Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed. *Index Educational Publishers, N.Y.*, **1977**(in Eng).
- [4] Huebner K.H. The Finite Element Method for Engineers, *Wiley, N.Y.*, **1975**(in Eng).
- [5] Harry J. *Segerlind Applied Finite Element Analysis, N.Y.*, **1976**(in Eng).
- [6] Visser W., Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology Wrights Patterson Air Force base, *Dayton, Ohio*, **1965** (in Eng).

- [7] Conte S.D., Elementary Numerical Analysis, *McCray-Hill, N.Y.* **1965**(in Eng).
[8] Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 3-rd ed., *Wiley, N.Y.*,**1972**(in Eng).
[9] Williams P.W., Numerical Computation, *Nelson, Don Mill, Can.*,**1972**(in Eng).
[10] Johnson C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, *Cambridge University Press, Cambridge*, **1987**(in Eng).
[11] Gaspar Jr., Moreira M.L., Desampaio P.A.B. Temperature Distribution Fuel Rods: A study on the Effect of Eccentricity in the Position of UO₂ Pellets., *0-th International Conference «Nuclear Energy for New Europe»***2011**(in Eng).
[12] *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*.**2012**, 18, 1, Jan-feb.(in Eng).
[13] Timoshenko S, Goodier J.N. *Theory of Elastic. N.Y.*, **1951** (inEng).

ЭОЖ:621.9

А. Асқарова, А.С. Жұмаханова, А. Құдайқұлов, А.А. Ташев, Г.С. Қалиева

РМК «АЕТИ», Алматы қ., Қазақстан;
С. Сейфуллина атындағы ҚазАТУ, Алматы қ., Қазақстан

**АЙНЫМАЛЫ ЖЫЛУ АҒЫНЫНЫҢ ҚАТЫСУЫМЕН КӨЛДЕНЕҢ ҚИМАСЫНЫҢ,
ЖЫЛУ ЖӘНЕ ЖЫЛУ ОҚШАУЛАУМЕН БӨЛЕК ТҰРАҚТЫ ЖЫЛУФИЗИКАЛЫҚ
ЖАЙ-КҮЙІН ЗЕРТТЕУ ЭНЕРГИЯСЫНЫҢ ӘДІСІ**

Аннотация. Көптеген стратегиялық құрылғылардың салмақ түсетін элементтері, ұзындығы шектеулі және айнымалы көлденең қиманың бағалалары болып табылады. Олардың көпшілігі жылу көздерінің жекелеген түрлерінің әсер етуі мүмкін. Жабдықтың сенімді жұмысын қамтамасыз ету үшін ауыспалы қима өзек ұзындығы бойымен температура өрісін білу қажет. Біз шектеулі ұзындығы өзек ұзындығы және айнымалы қимасы бойымен температура өрісін анықтау үшін есептеу алгоритмін және әдісін ұсынамыз. Олар энергияның сақталу заңдарына сәйкес негізделеді. Зерттеудің аналитикалық міндеттерінің шешімі алынды.

Түйін сөздер: айнымалы қима, қима радиусы, жылу көздері, бағана ұзындығы, жылу өткізгіштік, жылу алмасу, конвекция.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 48 – 52

M. Abishev¹, N. Kenzhebayev¹, S. Kenzhebayeva¹, A. Dzhanibekov¹

¹Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan
nurzat.kenzhebaev@gmail.com

CALCULATION OF ISOTOPIC COMPOSITION OF CATALYTIC MATERIAL UNDER RADIATION BY REACTOR NEUTRONS

Abstract. The purpose of this work is to calculate isotopic composition of the catalytic compound (hereinafter referred to as CC), irradiated with reactor neutrons, and compare it with the older results. In our previous works a stochastic method was used to calculate the isotopic composition of the CC in the equilibrium state. In this paper we preferred to use a deterministic method that gives a more accurate result in calculating the concentration change. Also now the scheme of the cycle was extended, since beta decays of some lead isotopes that had not been taken into account before were taken into account. We also calculated the CC heat densities for several neutron fluxes in the range 10^{13} - 10^{18} $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. This made it clear at what neutron flux the energy release of the CC would be the most optimal.

Key words: Catalytic composition, burnup equation, Padé approximation, s-process.

М.Абишев¹, Н.Кенжебаев¹, С.Кенжебаева¹, А.Джанибеков¹

¹КазНУ им. аль-Фараби, физико-технический факультет, г. Алматы, Республика Казахстан

РАСЧЕТ ИЗОТОПНОГО СОСТАВА КАТАЛИТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОБЛУЧЕНИИ РЕАКТОРНЫМИ НЕЙТРОНАМИ

Аннотация. Целью данной работы является расчет концентрации изотопов каталитического состава (далее КС) при облучении состава реакторными нейтронами, и сравнение его с результатами предыдущих исследований. В предыдущих наших работах для расчета изотопного состава КС при равновесном состоянии был применен стохастический метод, но в этой работе мы предпочли применить детерминистический метод, который дает более точный результат при расчете изменений концентраций. Также схема замкнутого цикла была расширена, поскольку были учтены бета-распады некоторых изотопов свинца, которые ранее не учитывались. Также мы рассчитали плотности выделяемой энергии КС для нескольких значений потоков нейтронов в диапазоне 10^{13} - 10^{18} $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$. Это дало возможность понять, при каком потоке нейтронов энерговыделение КС будет самым оптимальным.

Ключевые слова: каталитический состав, уравнение выгорания, аппроксимация Падэ, s-процесс.

Введение. Основной целью исследований каталитического состава является применение его в ядерных реакторах в качестве защиты от тепловых нейтронов и дополнительного источника энергии [1]. Поскольку изотопы каталитического состава не меняют свои концентрации при длительном облучении, то его срок эксплуатации будет дольше обычных конструктивных элементов. Энергия, выделяемая при превращении четырех нейтронов в одну альфа частицу, дает дополнительную энергию, что способствует увеличению КПД реактора.

В этой работе были проведены расчеты и моделирование с целью получения количественных данных, проясняющие более детально некоторые аспекты рассматриваемой нами задачи. Для этого заново были рассчитаны концентрации элементов каталитического состава, где предполагалось участие только восьми изотопов [2]. Далее была создана более расширенная модель состава, где в

реакциях участвуют пятнадцать изотопов. Поскольку концентрации изотопов состава сильно зависят от потока тепловых нейтронов, были получены результаты для нескольких уровней потока.

Для оценки энергии, выделяемой при облучении нейтронами, были сделаны расчеты по определению плотности тепла, испускаемого составом (heatdensity).

Основная часть. Выяснилось, что для расчета концентраций элементов лучше использовать детерминистический метод, чем метод Монте-Карло, поскольку стохастический метод не может обобщить поведение нескольких нейтронов на изменение концентрации элементов состава. Методом Монте-Карло удобно решать те задачи, которые определяют поток, размножение или функцию распределение нейтронов и т.д.

В этой работе для расчета концентрации изотопов использовался уравнение Бэйтмана или как часто называют *burnup equation* [4]:

$$\frac{d}{dt} N_i(t) = -\lambda_i N_i(t) - \sigma_i \phi N_i(t) + \sum_{i \neq j} \lambda_j P_{j \rightarrow i} N_j(t) + \sum_{i \neq j} \sigma_i \phi Q_{j \rightarrow i} N_j(t), \quad (1)$$

где σ – сечение (n, g) реакций при энергии 0.025 эВ, λ – постоянная распада, ϕ – нейтронный поток, $P_{i \rightarrow j}, Q_{i \rightarrow j}$, вероятности перехода от изотопа i к изотопу j при распадах и при захвате нейтрона.

Уравнение (1) можно написать в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}(t) = \mathbf{A} \mathbf{N}(t), \quad (2)$$

где \mathbf{N} – вектор концентраций изотопов $\mathbf{N}^T = (N_1, N_2 \dots N_I)$, а \mathbf{A} – матрица выгорания (*burnup matrix*). Решением уравнения (2) является экспоненциальное уравнение:

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(0) \exp(\mathbf{A}t). \quad (3)$$

Экспоненциальную матрицу $\exp(\mathbf{A}t)$ можно найти несколькими методами. В этой работе рассматривается метод *аппроксимации Паде* [3], который дает более точный результат, чем, например, метод разложения по ряду Тейлора [4]. Аппроксимация Паде для матричной экспоненциальной функции порядка $[p/q]$ определяется следующей формулой:

$$\exp(x) \approx \frac{N_{pq}(x)}{D_{pq}(x)}, \quad (4)$$

где,

$$N_{pq}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} x^k, \quad (5)$$

$$D_{pq}(x) = \sum_{k=0}^q \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} (-x)^k. \quad (6)$$

В равновесном состоянии выражение (2) должно равняться нулю:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}(t) = \mathbf{A} \mathbf{N}(t) = 0. \quad (7)$$

Собственное значение λ квадратной матрицы \mathbf{A} должно быть равно нулю. Найдя матрицу \mathbf{A} , т.е. решая систему линейных уравнений, находим концентрации элементов состава.

Есть и другой способ решения этой задачи: если в уравнении (2) время стремится к бесконечности ($t \rightarrow \infty$), то изначально заданный состав стремится к равновесному состоянию. В качестве начальной концентрации изотопов, когда $t = 0$, была взята природная смесь свинца (таб. 1).

Таблица 1 – Природный состав натурального свинца

Pb^{204}	1.4%
Pb^{206}	24.1%
Pb^{207}	22.1%
Pb^{208}	52.4%

Результаты расчетов. Для получения необходимых результатов была написана программа на языке C++ и были использованы ядерные данные из различных международных баз. Период полураспада и сечение поглощения нейтронов были взяты из оцененных дата файлов JEFF-3.1A, JEFF-3.2 и TENDL-2014 [5]. Программа в основном находит экспоненциальную матрицу $\exp(\mathbf{A}t)$ методом аппроксимации Паде [6,7], которая дает всю необходимую информацию.

Результаты были получены для двух моделей: упрощенной модели (а) и расширенной модели (б).

(а). В предыдущих работах [1,2], в упрощенной модели, участвовали только восемь изотопов $Pb^{206}, Pb^{207}, Pb^{208}, Pb^{209}, Bi^{209}, Bi^{210}, Po^{210}, Po^{211}$. В этой работе в упрощенную модель мы добавили еще два изотопа Pb^{204}, Pb^{205} поскольку они присутствуют в природной смеси свинца (таблица 1).

(б). В расширенной модели участвуют пятнадцать изотопов таллия, свинца, висмута и полония. Схема приведена ниже, в рис. 1:

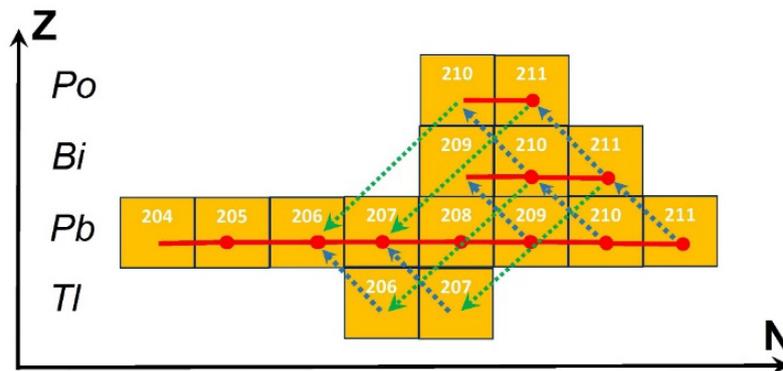


Рисунок 1 –Схема трансмутаций ядер в КС. Красные линии - это реакция радиационного захвата нейтрона, синие и зеленые линии - это альфа-распад и бета-распад соответственно.

В расширенной схеме добавлены все возможные каналы, взятые из базы данных ядерных реакций. Из рисунка видно, что весь цикл является замкнутым. Но надо иметь ввиду, что этот цикл будет замкнутым только при облучении тепловыми нейтронами, поскольку при энергии нейтронов выше 1 МэВ могут открыться другие каналы, которые приведут к неустойчивому состоянию.

Поскольку концентрация изотопов сильно зависит от потока нейтронов, результаты были получены для потоков нейтрона от 10^{13} до $10^{18} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$, а типичный нейтронный поток в современных реакторах лежит в диапазоне $5 \cdot 10^{13} - 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Рисунок 2 показывает зависимость необходимого времени облучения природного свинца до достижения равновесного состояния состава в зависимости от нейтронного потока для расширенной модели.

Видно, что при нормальном нейтронном потоке 10^{14} состав придет к равновесному состоянию только через 60,000 лет. Концентрации изотопов Pb^{204}, Pb^{205} резко уменьшаются после ста секунд облучения, это понятно, поскольку никакие изотопы не превращаются в эти ядра.

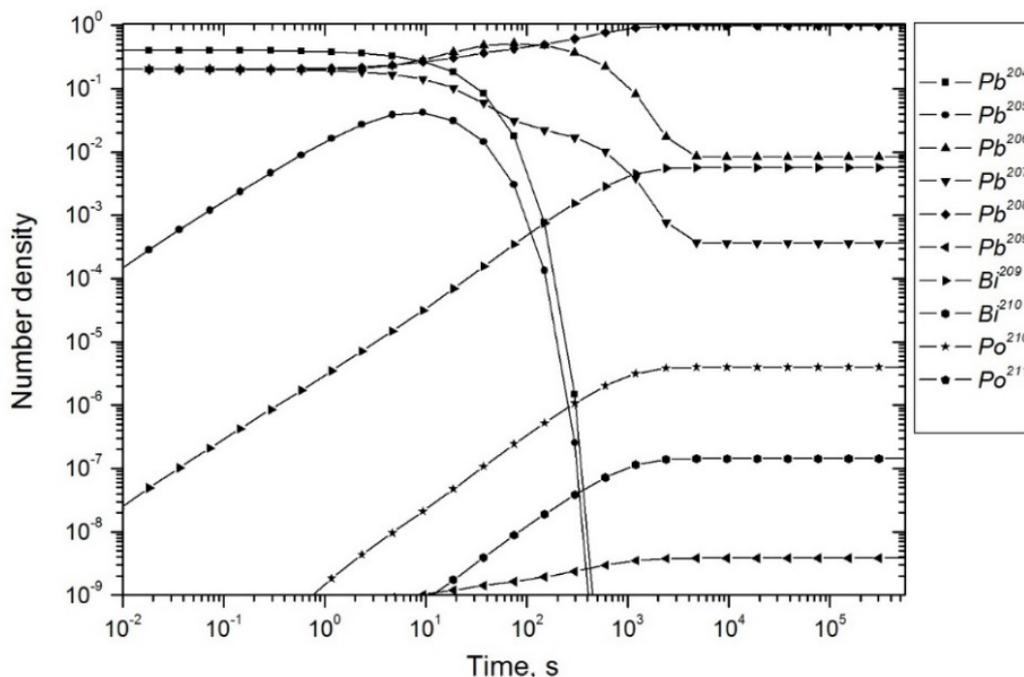


Рисунок 2 – Изменение концентрации изотопов в зависимости от времени при нейтронном потоке $10^{14} \text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$

Конечно, если мы сможем задать начальную концентрацию смеси (который должен состоять из 15 изотопов) как в равновесном состоянии, то концентрация не будет меняться во времени с начала облучения нейтронами.

На рисунке 3 приведена процентная доля каждого изотопа в каталитическом составе, при котором возможно равновесное состояние.

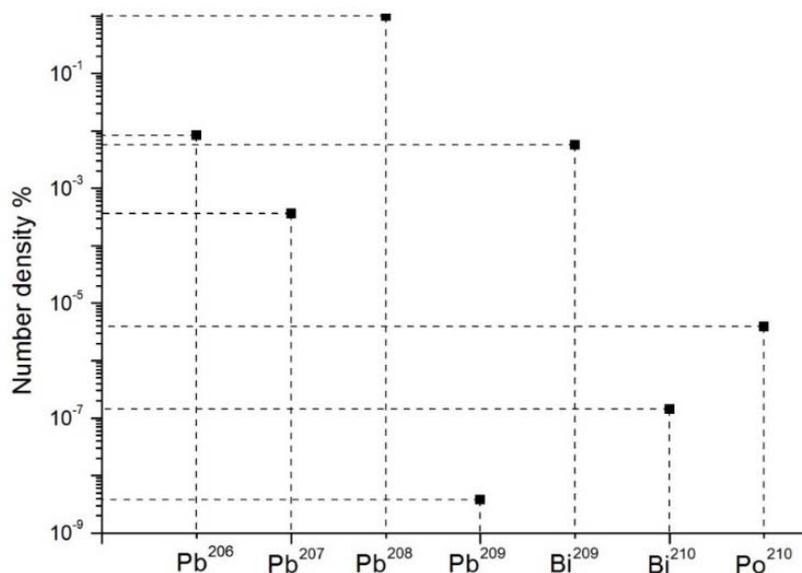


Рисунок 3 – Процентная доля изотопов КС при достижении равновесного состояния. Расчет был сделан с помощью детерминированного метода.

Заключение. В этой работе было получено время облучения, необходимое для перехода состава в равновесное состояние. Поскольку обогащение состава до равновесной концентрации очень дорогой процесс, было предложено в качестве начальной концентрации взять природную смесь свинца, который состоит из четырех изотопов Pb^{204} , Pb^{206} , Pb^{207} , Pb^{208} . Плотность энергии сос-

тава при облучении тепловыми нейтронами. При нормальном нейтронном потоке плотность энергии, выделяемой натуральном свинцом, очень мала по сравнению с урановым топливом даже в равновесном состоянии: энергия, выделяемая КС ниже 1 Вт/см³.

В следующих работах мы планируем использовать для расчетов потоки нейтронов термоядерного и импульсного реактора для получения более высокой энергии, где потоки нейтронов достигает до $10^{30} \text{ см}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М.Абишев, Н.Кенжебаев, С.Кенжебаева, А.Джанибеков. Расчет прохождения нейтронов через каталитический состав (Pb, Bi, Po) с помощью программного комплекса MCNP. //Известия НАН РК. – 2016. – №3. – С. 5-11.
- [2] М.Абишев, М.Хасанов, Н.Кенжебаев. О циклической реакции с участием тепловых нейтронов. // Вестник НАН РК. – 2013. – № 6. – С. 12.
- [3] E.Burbidge, G.R.Burbidge, W.A.Fowler, F.Hoyle. Synthesis of the Elements in Stars. //Reviews of Modern Physics 29. – 1957. – №4. – С.547.
- [4] Maria Pusa. Rational Approximations to the Matrix Exponential in Burnup Calculations//Nuclear Science and Engineering. – 2011. – №16. – С.155-167.
- [5] Otto Schwerer. EXFOR Formats Description for Users. – IAEA Nuclear Data Section, 2014. P 3.
- [6] H. Bateman. Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radio-active Transformations. // Proc. Cambridge Phil. Soc. IS. – 1910. – №423. – С.12-19.
- [7] P. Parvaresh, M. Sohrabpour. // Design and testing of a neutron porosity probe using MCNP code. // Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry. – 2004. – № 260. – PP 335-337.

REFERENCES

- [1] M.Abishev, N. Kenzhebayev, S.Kenzhebayeva, A.Dzhanybekov. Calculation of neutron passage through catalytic composition (Pb, Bi, Po) by MCNP program. *News of the NAS the RK*. 2016. 3. 5-11. (in Russ)
- [2] M.Abishev, M.Hasanov, N.Kenzhebaev. Cyclic reactions involving thermal neutrons. *Journal of National Academy of Sciences of Kazakhstan*. 2013. 6. 12-16.
- [3] E.Burbidge, G.R.Burbidge, W.A.Fowler, F.Hoyle. Synthesis of the Elements in Stars. *Reviews of Modern Physics*. 1957. 4. 547-554.
- [4] Maria Pusa. Rational Approximations to the Matrix Exponential in Burnup Calculations. *Nuclear Science and Engineering* 2011. 16. 155-167.
- [5] Otto Schwerer. EXFOR Formats Description for Users. *IAEA Nuclear Data Section*, 2014. 3-345.
- [6] H. Bateman. Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radio-active Transformations. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* IS. 1910. 423. 12-19.
- [7] P. Parvaresh, M. Sohrabpour. Design and testing of a neutron porosity probe using MCNP code. *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*. 2004. 260. 335-337.

М.Абишев, Н. Кенжебаев, С.Кенжебаева, А.Джанибеков

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

РЕАКТОРЛЫҚ НЕЙТРОНДАРМЕН ӘСЕРЛЕСУДЕГІ КАТАЛИЗДЫҚ ҚОСПАНЫҢ ИЗОТОПТЫҚ ҚҰРАМЫН ЖӘНЕ ЭНЕРГИЯ ШЫҒАРУЫН ЕСЕПТЕУ

Аннотация. Жұмыстың мақсаты реакторлық нейтрондармен әсерлесудегі катализдық қоспадан (ары қарай КҚ) шығатын энергияны және энергия тығыздығын есептеу мен ВВЭР және КВВР коммерциялық реакторлардағы уранның бөлінуінен шығатын энергиямен салыстыру. Алдыңғы жұмыстарымызда КҚ-ның қалыпты жағдайдағы изотоптық құрамын есептеу үшін стохастикалық әдіс қолданылған болатын, ал бұл жұмыста біз детерминистік әдіс қолданғанды жөн көрдік, өйткені бұл әдіс дәлірек нәтиже береді. Сонымен қатар тұйық цикл кескіні ұлғайтылды, өйткені алдыңғы жұмыста ескерілмеген кейбір қорғасын изотоптарының бета-ыдырауға ұшырауы ескерілді. Сонымен қатар біз КҚ-ның энергия тығыздығын бірнеше нейтрондар ағыны үшін есептедік $10^{13}-10^{18} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$. Бұл есептеу КҚ-ның энергия шығаруы қандай нейтрон ағынында ең оптималды болатынын түсінуге көмектесті.

Түйін сөздер: катализдік қоспа, жанып кету тенденуі, Падэ жуықтауы, s-процесі.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 53 – 56

UDC 342.7(574)

M. Abishev¹, M. Khassanov¹¹Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan
manas_khassanov@mail.ru**SIMULATION OF THE THERMAL NEUTRONS INTERACTION WITH
CATALYTIC COMPOSITION (Pb, Bi, Po) BY "IBUS" SOFTWARE**

Abstract. The purpose of this work is to simulate by the "IBUS" software the heat release during the interaction of thermal neutrons with catalytic composition which consist of isotopes Pb^{206} , Pb^{207} , Pb^{208} , Pb^{209} , Bi^{209} , Bi^{210} , Po^{210} . During the simulation the concentration of neutrons is constant and not depended by time.

For simulating the change of concentration process and for calculating the concentration of isotopes products the "IBUS" (Isotopes Burn Up Software) software was developed on C# using deterministic methods. Using this code we calculated heat density J/cm^3sec of catalytic composition (Pb,Bi,Po). The initial concentrations of each isotope of the catalytic composition were calculated in the work [1].

Key words: Catalytic composition, "IBUS" software, cyclic reaction.

УДК 342.7(574)

М.Абишев¹, М.Хасанов¹¹КазНУ им. аль-Фараби, физико-технический факультет, г. Алматы, Республика Казахстан**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОВЫХ
НЕЙТРОНОВ С КАТАЛИТИЧЕСКИМ СОСТАВОМ (Pb, Bi, Po)
С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА "IBUS"**

Аннотация. В работе приводятся результаты расчета количества тепла при взаимодействии тепловых нейтронов с элементами каталитического состава, состоящих из изотопов Pb^{206} , Pb^{207} , Pb^{208} , Pb^{209} , Bi^{209} , Bi^{210} , Po^{210} . в программном комплексе "IBUS". Концентрация нейтронов в среде считается постоянным и не зависит от времени.

Для моделирования процесса взаимодействия тепловых нейтронов с различными изотопами и для расчета изменения концентрации облучаемых изотопов в зависимости от времени, а также для расчета концентрации нарабатываемых продуктов и для многих других задач, связанных с облучением изотопов тепловыми нейтронами, был создан программный комплекс "IBUS" (Isotopes Burn Up Software) на языке программирования C# с применением детерминированного метода расчета. В данной работе с помощью программного комплекса "IBUS" было рассчитано количество тепла, испускаемого каталитическим составом (Pb, Bi, Po) в единичном объеме в единицу времени ($Дж/см^3с$). Начальные концентрации изотопов каталитического состава, задаваемые как начальные входные параметры для программного комплекса "IBUS", были найдены в наших предыдущих работах.

Ключевые слова: каталитический состав, программный комплекс "IBUS", циклическая реакция.

В настоящее время в ядерной физике задачи на определение изменения концентрации изотопов, определение продуктов реакции, определение выделяемой энергии и т.д. при облучении нейтронами материалов, состоящих из различных элементов и изотопов в различных интервалах времени имеют важное прикладное значение.

Если речь идет о нескольких изотопах, то, применяя уравнение Бэйтмана

$$N_n(t) = \sum_{i=1}^n \left[N_i(0) * \left(\prod_{j=i}^{n-1} \lambda_j \right) * \left(\sum_{j=i}^n \left(\frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{p=i, p \neq j} (\lambda_p - \lambda_j)} \right) \right) \right] \quad (1)$$

для каждого изотопа, можно построить систему дифференциальных уравнений и решить задачу аналитическим методом. Но если число изотопов достигает сотен или же когда число возможных продуктов реакций могут достигать сотен или тысяч, тогда процесс построения систем дифференциальных уравнений становится весьма затруднительным, не говоря уже о решении такой системы уравнений.

Для устранения этих трудностей нами был разработан программный комплекс "IBUS" (IsotopesBurnUpSoftware). Программный комплекс "IBUS" имеет очень удобный интерфейс (Рисунок1) и предоставляет возможность работать со всеми изотопами, которые определены в базе данных ENDF/BVII.1.

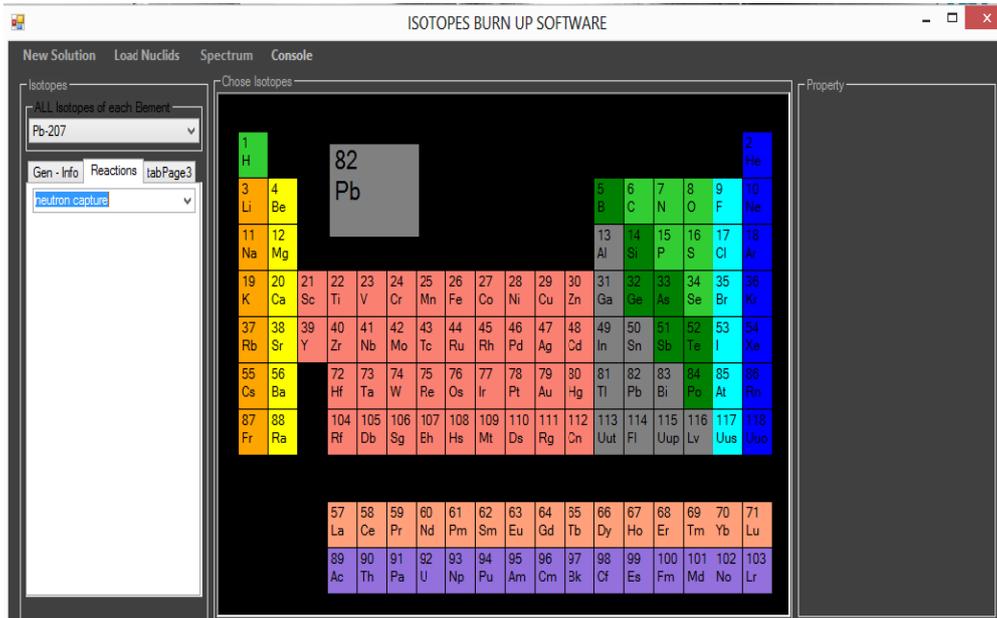


Рисунок 1 - Интерфейс программного комплекса "IBUS"

Данный программный комплекс предназначен для решения задачи определения изменения концентрации изотопов, для определения продуктов реакции под действием тепловых нейтронов. Для этого программный комплекс "IBUS" считывает данные из файлов ENDF/BVII.1.o всех существующих изотопов в базе данных и в автоматическом режиме строит матрицу сжигания (burnupmatrix) для всех изотопов (2).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - F\sigma_1 & \lambda_2 P_{2 \rightarrow 1} + Q_{2 \rightarrow 1} F\sigma_{2 \rightarrow 1} & \dots & \lambda_n P_{n \rightarrow 1} + Q_{n \rightarrow 1} F\sigma_{n \rightarrow 1} \\ \lambda_1 P_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2} F\sigma_{1 \rightarrow 2} & -\lambda_2 - F\sigma_2 & \dots & \lambda_n P_{n \rightarrow 2} + Q_{n \rightarrow 2} F\sigma_{n \rightarrow 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{1 \rightarrow n} + Q_{1 \rightarrow n} F\sigma_{1 \rightarrow n} & \lambda_2 P_{2 \rightarrow n} + Q_{2 \rightarrow n} F\sigma_{2 \rightarrow n} & \dots & -\lambda_n - F\sigma_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

После того как матрица сжигания построена, программа, пользуясь матричным уравнением (3) и используя метод PADE находит матрицу, элементы которой представляют концентрацию изотопов после облучения и концентрацию наработанных изотопов.

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}(0) \exp(\mathbf{A}t) \quad (3)$$

Также программный комплекс предоставляет возможность вычислять количество тепла, выделяемого при облучении изотопов нейтронами.

Расчет тепла, испускаемого каталитическим составом. В работе [1] были найдены и изучены наиболее подходящие элементы для каталитического состава и вычислены концентрации элементов для этого состава. В качестве входных параметров для программного комплекса "IBUS" были переданы начальные концентрации изотопов, обеспечивающие стационарный нейтронный катализ, процентное соотношение которых показано в таблице 1.

Таблица 1 – процентное соотношение изотопов

Изотоп	процентное содержание изотопов
Po^{210}	1,6 %
Pb^{206}	$0,0435 \cdot 10^{-7}\%$
Po^{211}	$0,0126 \cdot 10^{-7}\%$
Pb^{207}	0,0317 %
Pb^{208}	97,53 %
Pb^{209}	0,01898 %
Bi^{210}	0,673 %
Bi^{209}	0,07 %

После внесения входных параметров в программный комплекс "IBUS", программа была запущена для разных значений нейтронного потока, результаты которого приведены в рисунке 2.

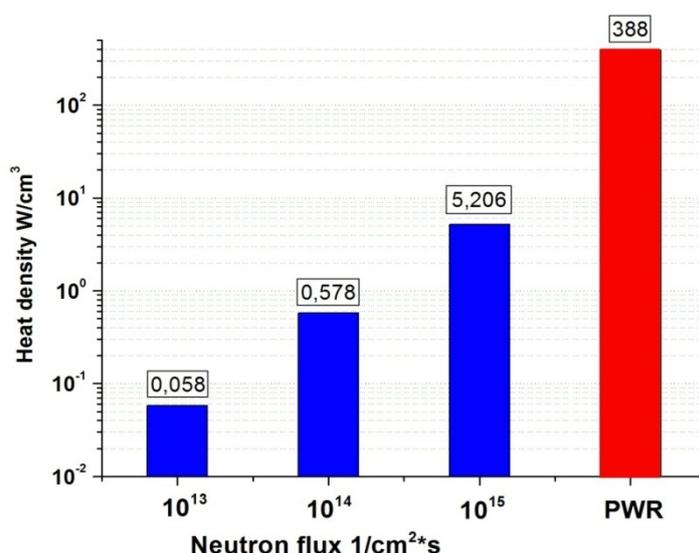


Рисунок 2 - Количество тепла, выделяемого каталитическим составом для различных значений потоков нейтрона

Как видно из Рис. 2, количество тепла, выделяемого каталитическим составом, растет линейным образом в зависимости от нейтронного потока. Также видно, что даже при потоке нейтронов 10^{15} количество тепла, выделяемого каталитическим составом, почти на два порядка меньше, чем тепло, выделяемое в реакторах типа PWR. Поэтому рассматриваемый нами каталитический цикл целесообразно использовать с более интенсивными источниками нейтронов, плотность потока нейтронов от которого должен быть порядка 10^{17} .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абишев М., Хасанов М., Кенжебаев Н. О циклической реакции с участием тепловых нейтронов // Вестник НАН РК. – 2013. – № 6. – С. 12.
 [2] Кунаков С., Кенжебаев Н. Моделирование накопления трития в бериллиевом материале при нейтронном облучении. // Известия НАН РК. – 2014. – №2. – С. 82-86.
 [3] Burbidge E., Burbidge G.R., Fowler W.A., Hoyle F. Synthesis of the Elements in Stars. // Reviews of Modern Physics 29. – 1957. – №4. – С.547.

[4] Хаустов И.Н., Тихомиров С.Т., Бейзин С.Д. Функция возбуждения и выходы изотопов висмута и свинца в реакции ^{203}Tl с ионами ^3He . //Известия АН КазССР. – 1990. – №2. – С.3.

[5] Bateman H. Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radio-active Transformations. // Proc. Cambridge Phil. Soc. IS. – 1910. – №423. – С.12-19.

[6] Otto Schwerer. EXFOR Formats Description for Users. – IAEA Nuclear Data Section, 2014. P 3.

REFERENCES

[1] Abishev M., Hasanov M., Kenzhebaev N. Cyclic reactions involving thermal neutrons. *Journal of National Academy of Sciences of Kazakhstan*. **2013**. 6. 12-16.

[2] S.Kunakov, N.Kenzhebaev. Modelling the accumulation of tritium in beryllium materials under neutron irradiation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Kazakhstan*. **2014**. 2. 82-86. (in Russ)

[3] E.Burbidge, G.R.Burbidge, W.A.Fowler, F.Hoyle. Synthesis of the Elements in Stars. *Reviews of Modern Physics*. **1957**. 4. 547-554.

[4] I.N. Khaustov, SV Tikhomirov, S.D.Baisin. The excitation function and outputs of bismuth and lead isotopes in ^{203}Tl reactions ^3He ions. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR*. **1990**. 2. 3-8.

[5] H. Bateman. Solution of a System of Differential Equations Occurring in the Theory of Radio-active Transformations. *Proc. Cambridge Phil. Soc. IS*. **1910**. 423. 12-19.

[6] Otto Schwerer. EXFOR Formats Description for Users. *IAEA Nuclear Data Section*, **2014**. 3-345.

ӘОЖ: 342.7(574)

М.Абишев, Н. Хасанов

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЖЫЛУЛЫҚ НЕЙТРОНДАРДЫҢ КАТАЛИЗДІК ҚОСПАМЕН (Pb, Bi, Po) ӘСЕРЛЕСУІН "IBUS" КОМПЬЮТЕРЛІК БАҒДАРЛАМАЛАУ КЕШЕНІМЕН ЖОБАЛАУ

Аннотация. Жұмыстың мақсаты жылулық нейтрондардың Pb^{206} , Pb^{207} , Pb^{208} , Pb^{209} , Bi^{209} , Bi^{210} , Po^{210} изотоптарынан тұратын катализдік қоспамен әрекеттесуі нәтижесінде бөлінетін жылуды "IBUS" компьютерлік бағдарламалау кешені арқылы есептеу. Бұл ортадағы нейтрондардың концентрациясы тұрақты және уақыттан тәуелсіз деп есептеледі. Нейтрондармен әрекеттесу нәтижесінде изотоптардың концентрациясының өзгерісін есептеу үшін және де әсерлесу нәтижесінде пайда болған жаңа изотоптардың концентрациясына есептеу жүргізу үшін C# бағдарламалау тілінде "IBUS" компьютерлік бағдарламалық кешені құрылды. Бастапқы мезеттегі катализдік қоспадағы әр изотоптың концентрациясы біздің бұрынғы жұмыстарымызда есептелген.

Түйін сөздер: катализдік қоспа, "IBUS" компьютерлік бағдарламалық кешені, циклдық реакция.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 57 – 63

T.M. Aldabergenova^{1,2}, G.Z. Ganeyev¹, S.B. Kislitsin¹, M.K. Dosbolaev²

¹Institute of Nuclear Physics, Ministry of Energy of the RK, Almaty, Kazakhstan,
²Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty

EFFECT OF PULSED PLASMA IRRADIATION ON THERMAL EROSION AND STRUCTURE OF GRAPHITE SURFACE

Abstract. The results of theoretical and experimental studies of graphite thermal erosion effects under pulsed plasma irradiation have been presented. Irradiation of graphite samples was performed on the pulsed plasma accelerator in the Al-Farabi KazNU. The samples were irradiated with 13 pulses $\sim 2 \mu\text{s}$ long with the surface energy release 10 J/cm^2 per pulse and the pulses $\sim 250 \mu\text{s}$ long with the surface energy release 8 J/cm^2 per pulse. Before and after irradiation, the weight of the samples was measured and the surface structure studies were performed using the methods of raster electronic and atomic force microscopy. The theoretical calculations were carried out according to the model based on determination of temperature distribution as a result of pulsed energy release and sublimation of the carbon atom from the surface.

As a result of the completed experimental studies we established that mass losses under pulsed plasma irradiation, with the energy parameters corresponding to the energy release in the ITER during plasma disruption, lead to thermal erosion of the graphite surface. In case of pulse period about several microseconds and the energy release of $\sim 10 \text{ J/cm}^2$, the mass loss is $\sim 0.1\text{-}0.2 \mu\text{g}$ per pulse. In case of pulse period greater two orders of magnitude, i.e. $250\text{-}300 \mu\text{s}$, but with a lower energy release $\sim 8 \text{ J/cm}^2$, the mass loss is $\sim 0.03 \mu\text{g}$. A comparison of the experimental results with the calculations for the presented model showed the satisfactory agreement between the theoretical and experimental data.

Key words: graphite, pulsed plasma irradiation, thermal erosion.

УДК 621.039.66(075), 533.924(075)

T.M. Алдабергенова^{1,2}, Г.З. Ганеев¹, С.Б. Кислицин¹, М.К. Досболаев²

¹Институт ядерной физики МЭ Республики Казахстан, Алматы, Казахстан;
²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

ВЛИЯНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА ТЕРМИЧЕСКУЮ ЭРОЗИЮ И СТРУКТУРУ ПОВЕРХНОСТИ ГРАФИТА

Аннотация. Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований эффектов тепловой эрозии графита при импульсном плазменном облучении. Облучение образцов графита выполнялось на импульсном плазменном ускорителе КазНУ им. аль-Фараби. Образцы облучались 13 импульсами длительностью $\sim 2 \text{ мкс}$ с энерговыделением на поверхности 10 Дж/см^2 за импульс и импульсами длительностью $\sim 250 \text{ мкс}$ с энерговыделением на поверхности 8 Дж/см^2 за импульс. До и после облучения измерялась вес образцов и выполнялись исследования структуры поверхности методами растровой электронной и атомно-силовой микроскопии. Теоретические расчеты проводились по модели, основанной на определении распределения температуры за счет импульсного выделения энергии и сублимации атом углерода с поверхности

В результате проведенных экспериментальных исследований установлено, что потери массы при импульсном плазменном облучении, с энергетическими параметрами, соответствующими энерговыделению

в ТЯР при срывах плазмы, приводят к тепловой эрозии поверхности графита. При длительности импульса порядка нескольких микросекунд и энергоснабжении ~ 10 Дж/см², потери массы составляют $\sim 0.1-0.2$ мкг за импульс. При длительности импульса на два порядка больше, т.е. 250-300 мкс, но с меньшим энергоснабжением ~ 8 Дж/см², потери массы составляют ~ 0.03 мкг. Сравнение полученных экспериментально результатов с расчетами по представленной модели показали, что наблюдается удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных данных.

Ключевые слова: графит, импульсное плазменное облучение, тепловая эрозия.

Введение

Среди материалов, перспективных для применения в качестве материалов защиты первой стенки термоядерных реакторов (ТЯР), приоритет отдается к материалам с низким атомным номером, высоким порогом физического распыления, высокой теплопроводностью, низкой химической активности к водороду, высокой термостойкостью и температурой плавления [1]. В соответствии с современной точкой зрения, материалы защиты первой стенки и пластин дивертора для токамаков должны быть основаны на углероде, бериллии и вольфраме [2]. Графит обладает перечисленными выше свойствами – высокой температурой плавления, термостойкостью высокой теплопроводностью и может рассматриваться как перспективный материал облицовки первой стенки ТЯР.

В этой связи, нами проведены экспериментальные исследования процессов тепловой эрозии графита марки АРВ при облучении импульсными потоками плазмы, моделирующими срыв плазмы в ТЯР, а также представлена модель и результаты расчетов потери массы при импульсном выделении энергии на поверхности графита, соответствующие выполненным экспериментам. Теоретическая модель расчетов величины тепловой эрозии основана на решении уравнения теплопроводности и определении распределения температур по глубине материала с учетом фазового превращения.

Экспериментальные исследования эффектов тепловой эрозии графита при облучении потоками импульсной плазмы

Для исследований был выбран графит марки АРВ, представляющий собой новое поколение графитов, широко использующийся в настоящее время в реакторостроении. Основные характеристики физико-механических свойств этой марки графита приведены в таблице 1. Подготовлено четыре образца поликристаллического графита, вырезанные из массивной полоски. Образцы имели форму параллелепипеда размерами 10 мм × 10 мм × 0.5 мм. После резки образцы подвергались шлифовке и механической полировке. До облучения импульсными потоками плазмы образцы взвешивали на аналитических весах ОНАУС, точность взвешивания составила ± 0.1 мг. Также были проведены исследования структуры и свойств этих образцов и определен элементный состав методом рентгенофлуоресцентного анализа (РФА). По данным РФА, углерод составляет 99.9 ат.%, содержание примесных элементов незначительно, так, содержание хрома не превышает 0.002 ат.%, меди - 0.02 ат.%, цинка – 0.005 ат.%. До облучения импульсными потоками плазмы проведено определение кристаллической структуры АРВ графита методом рентгеноструктурного анализа и установлено что он имеет гексагональную структуру. Отметим, что кристаллическая структура графита при облучении импульсными потоками плазмы изменяется незначительно.

Таблица 1 - Физико-механические свойства графита марки АРВ.

Физический параметр	Обозначение, единица измерения	Значение
Температура плавления,	$T_{пл}$, К	4000
Масса атома,	m_A , а.е.м	512
Плотность,	ρ , кг·м ⁻³	1.69×10^3
Теплопроводность	k , Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹	55
Энтальпия испарения	$\Delta H_{исп}$, Дж·кг ⁻¹	6.0×10^7
Степень черноты	ϵ , отн. ед.	0.86
Прочность на сжатие	σ_b , МПа	24.5-29.4 МПа
Модуль Юнга	E , МПа	7.8 ГПа

Для выявления эффектов плазменного облучения структура поверхности приготовленных образцов до облучения и после облучения исследовалась методами сканирующей электронной микроскопии на электронном микроскопе Quanta 3d 200i и атомно-силовой микроскопии на микроскопе Solver spectrum NT-MDT.

Наряду с исследованиями структуры поверхности до и после облучения импульсной плазмой измерялся вес образцов на аналитических весах, см. таблицу 2.

Облучение подготовленных образцов графита после исследования структуры поверхности и взвешивания выполнялось на импульсном плазменном ускорителе КазНУ им. аль-Фараби. Условия облучения образцов № 1-4 приведены в таблице 2. Образцы № 1 и № 2 облучены тринадцатью импульсами длительностью ~ 2 мкс каждый с интервалом между импульсами более 10 мин. Образцы № 3 и № 4 облучены 5 импульсами длительностью ~ 250 с, интервалы между импульсами также были не менее 10 мин. Существенным различием облучения образцов № 1-2 от облучения образцов № 3-4, помимо длительности импульса, является энерговыделение на поверхности за один импульс, см. таблицу 2.

Таблица 2 - Результаты взвешивания необлученных и облученных образцов графита и условия облучения импульсными потоками плазмы

№	Вес до облучения, г	U, кВ	Длительность импульса, мкс	P, мм рт.ст.	Q, Дж/см ²	Кол-во импульсов	Вес после облучения, г	Потери массы, г
1	0,772	5	2-3	2.7	10	13	0,768	0,004
2	0,811	5	2-3	2.7	10	13	0,810	0,001
3	0,865	12	250-300	2.7	8	4	0,865	0
4	0,844	12	250-300	2.9	8,3	4	0,844	0

Эффекты термической эрозии под действием импульсного плазменного облучения видны из результатов измерения веса образцов графита, приведенных в таблице 2. Как следует из данных таблицы для образцов облученных 13 импульсами длительностью ~ 2.5 мкс с энерговыделением на поверхности 10 Дж/см² потери веса составили 4 мг и 1 мг для образцов №1 и №2, соответственно. Различие в измеренных значениях потери веса, по-видимому, связаны с различиями исходной (после подготовки) структуры поверхности. Усредненное значение потери массы при облучении тринадцатью 2 мкс импульсами с энерговыделением 10 Дж/см² за импульс оставляет ~ 2.5 мкг.

Облучение пятью 250 мкс импульсами с энерговыделением на поверхности 8 Дж/см², как видно из таблицы 1, не привело к потере веса графита.

Исследования структуры поверхности графита до и после облучения импульсной плазмой образцов №1-4, см. рисунки 1 а-г, подтверждают результаты взвешивания.

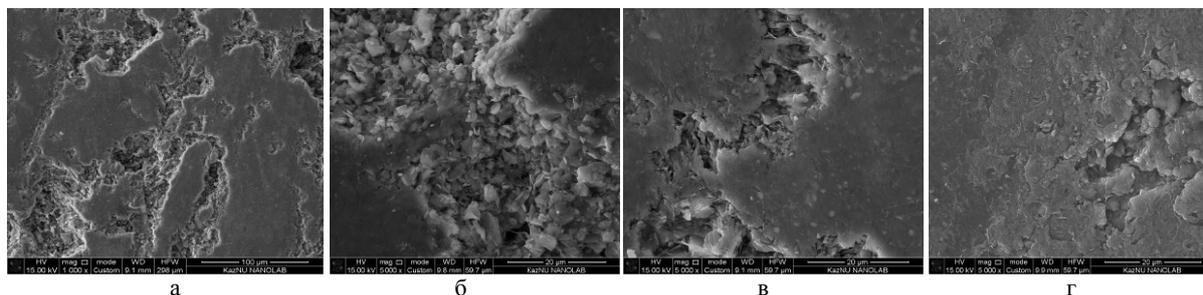


Рисунок 1 - РЭМ снимки поверхности графита: а – образец №1 до облучения, б – образец №1 после облучения 13 импульсами плазмы длительностью 2 мкс, в – образец №3 до облучения, г – после облучения 4 импульсами плазмы длительностью 250 мкс. Увеличение $\times 5000$

Как видно из сравнения изображений поверхности на рисунках 1а и 1б, облучение тринадцатью импульсами плазмы длительностью 2 мкс привело к существенному изменению структуры поверхности. На рисунке 1 б явно наблюдаются следы воздействия облучения, в то время как структура поверхности после облучения четырьмя импульсами длительностью 250 мкс мало

изменилась, см. рисунки 1 в и 1 г. По-видимому, энерговыделения 8 Дж/см^2 недостаточно для существенной сублимации атомов углерода с поверхности. Исследование методом АСМ поверхности графита, подвергнутого воздействию тринадцати импульсных потоков плазмы с энерговыделением 10 Дж/см^2 за импульс длительностью 2 мкс показали, что наблюдается сглаживание поверхности в результате сублимации атомов углерода с облучаемой поверхности, см. рисунки 2 а, б. Структура поверхности образца графита до и после облучения четырьмя импульсами плазмы длительностью 250 мкс и энерговыделением 8 Дж/см^2 практически не изменилась.

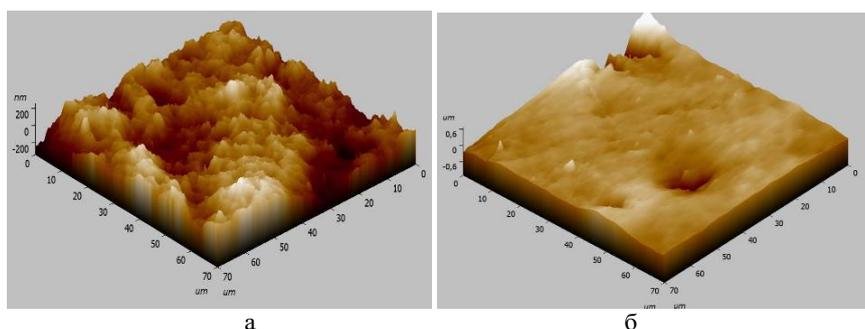


Рисунок 2 - АСМ изображения поверхности графита облучения: а – образец №1 до облучения, б – образец №1 после облучения 13 импульсами плазмы длительностью 2 мкс

Подводя итог экспериментальным исследованиям потерь массы и структуры поверхности, можно заключить, что облучение графита импульсными потоками плазмы может приводить к потерям массы и изменению структуры поверхности при определенном соотношении энерговыделения за импульс и количества импульсов. Так, при энерговыделении 10 кДж/см^2 за импульс, длительностью 2-3 мкс при 13 импульсах наблюдаются эффекты потери массы и сглаживания поверхности. При энерговыделении 8 Дж/см^2 за импульс длительностью ~ 250 с потери массы за 4 импульса не превышают 0.0001 мг (точность взвешивания), т.е. заметного испарения графита с облучаемой поверхности не происходит. СЭМ и АСМ исследования структуры поверхности подтверждают результаты взвешивания - заметные изменения структуры поверхности практически отсутствуют.

Теоретическая модель и расчет потери массы графита при облучении импульсными потоками плазмы

При облучении импульсными потоками плазмы потеря массы с облучаемой поверхности происходит за счет сублимации атомов графита [3]. Расчет потерь массы проводится в два этапа. На первом этапе решается уравнения теплопроводности с учетом фазового превращения (твердое тело - газ) и теплового излучения с облучаемой поверхности:

$$\rho \cdot C_p \cdot \partial T / \partial t = k \Delta T + (J + J_{ev} + \varepsilon \cdot \sigma_{SB} \cdot (T - T_{am})^4)_{\text{обл}}, \quad (1)$$

где ρ – плотность графита, C_p – удельная теплоёмкость, k – теплопроводность, J – поток энергии вносимый облучением, J_{ev} – поток энергии, уносимый с поверхности за счет сублимации, σ_{SB} – постоянная Стефана Больцмана, T – температура графита, T_{am} – температура окружающей среды. Отметим, что плавление графита в модели не учитывалось, т.к. в литературе отмечается, что плавление графита при воздействии потоков тепла зависит от условий нагрева и наблюдается достаточно редко.

По результатам численных расчетов методом конечных элементов для заданной геометрии облучаемого графита, соответствующей размерам образца в эксперименте по облучению импульсной плазмой (площадь облучаемой поверхности $10 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$, толщина 5 мм), определялось распределение температур по глубине материала в зависимости от времени.

Параметры, используемые в расчетах уравнения (1) для графита приведены в таблице 1.

Теплоёмкость графита C_p в твёрдой фазе задавалась выражениями [4]:

$$C_p(T) = 4.18 \cdot (0.44391 + 0.30795 \cdot 10^{-4} \cdot T - 61257/T^2 + 0.10795 \cdot 10^8/T^3), \text{ при } T \leq 3200\text{K} \quad (2)$$

$$C_p(T) = C_p(3200), \text{ при } T > 3200\text{K}.$$

Т.е. согласно (2), выше температуры 3200 К, теплоёмкость графита полагается постоянной.

На втором этапе рассчитывались потери массы в соответствии с полученным из решения уравнения (1) распределением температуры.

Равновесное значение давления сублимированного газа графита P_{eq} задавалось в соответствии с работой [5]:

$$P_{\text{eq}} = 6.77 \cdot 10^{12} \cdot 10^{(-36781/T)}. \quad (3)$$

Поток энергии J_{ev} , уносимой сублимированными с поверхности атомами, определялся выражением:

$$J_{\text{ev}} = 1/4 \cdot n \cdot v \cdot m_a \cdot \Delta H_{\text{исп}}, \quad (4)$$

где n – число атомов газа в единице объёма, m_a – масса атома, v – средняя скорость молекулы газа. В приближении идеального газа соотношение (4) примет вид:

$$J_{\text{ev}} = P_{\text{eq}} \times [m_a / (2kT\pi)]^{1/2} \Delta H_{\text{исп}}. \quad (5)$$

Соответственно, поток уносимой массы J_m :

$$J_m = J_{\text{ev}} / \Delta H_{\text{исп}}, \quad (6)$$

Результаты расчетов распределения температуры на поверхности образца в зависимости от времени приведены на рисунке 3.

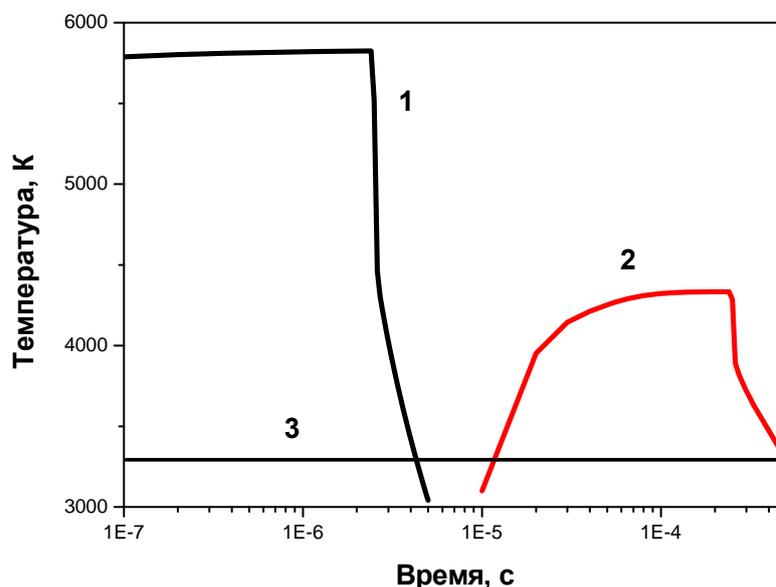


Рисунок 3 - Зависимость температуры на облучаемой поверхности графита от времени при импульсном облучении потоком плазмы; 1 – длительность импульса 2.5 мкс, энерговыделение 10 Дж/см²; 2 – длительность импульса 250 мкс, энерговыделение 8 Дж/см²; 3 - температура сублимации

Из рисунка 3 видно, что температура поверхности графита при импульсе длительностью 2.5 мкс и энерговыделением 10 Дж/см² за импульс (кривая 1) почти на 2 порядка выше температуры поверхности при воздействии импульса длительностью 250 мкс с энерговыделением 8 Дж/см² (кривая 2).

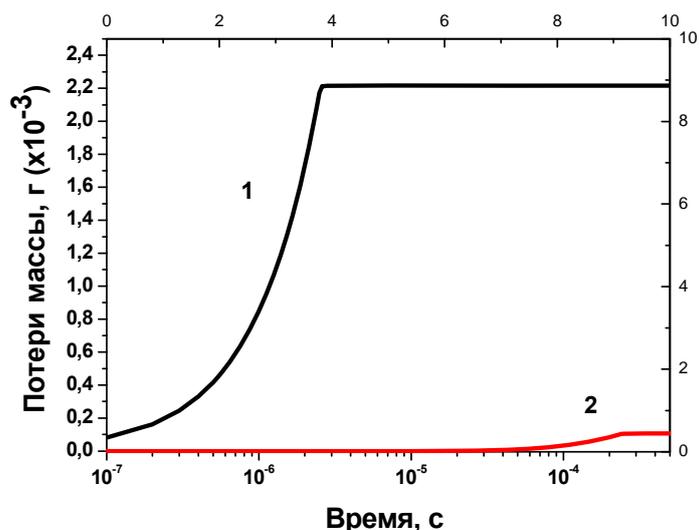


Рисунок 4 - Зависимость потери массы графита от времени облучения импульсными потоками плазмы;
 1 – 13 импульсов длительностью 2.5 мкс с энерговыделением 10 Дж/см²;
 2 – 4 импульса длительностью 250 мкс с энерговыделением 8 Дж/см²

Несмотря на то, что длительность импульса во втором случае также на два порядка выше, сублимация атомов графита и, соответственно, потери массы в первом случае более чем на порядок выше, см. рисунок 4. На рисунке 4 приведены зависимости потери массы образцом графита за 13 импульсов длительностью 2.5 мкс и потоке энергии 10 Дж/см² (кривая 1) и за 4 импульса длительностью 250 мкс и потоке энергии 8 Дж/см² (кривая 2). Поскольку экспериментально определялась суммарная потеря массы графитом за 4 и 13 импульсов (см. таблицу 2), то на рисунках 4 приведен результат расчета, соответствующий эксперименту. Расчетные значения суммарной потери массы за тринадцать 2.5 с с выделением энергии 1 Дж/см² составило 2.16 мкг, для импульсов длительностью 250 мкс и потоке энергии 8 Дж/см² – 0.11 мкг, что соответствует точности измерений веса с помощью аналитических весов ОНАУС. Как видно из сравнения результатов расчетов потери массы с экспериментально измеренными значениями (таблица 2), наблюдается удовлетворительное согласие экспериментальных данных с теоретическими оценками.

Заключение

В результате проведенных экспериментальных исследований установлено, что потери массы при импульсном плазменном облучении, с энергетическими параметрами, соответствующими энерговыделению в ТЯР при срывах плазмы, приводят к тепловой эрозии поверхности графита. При длительности импульса порядка нескольких микросекунд и энерговыделении ~ 10 Дж/см², потери массы составляют $\sim 0.1-0.2$ мкг за импульс. При длительности импульса на два порядка больше, т.е. 250-300 мкс, но с меньшим энерговыделением ~ 8 Дж/см², потери массы составляют ~ 0.03 мкг. Сравнение полученных экспериментально результатов с расчетами по представленной модели показали, что наблюдается удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных данных.

Как показал анализ расчетных данных, потери массы зависят от соотношения параметров облучения (энерговыделения и длительности импульса) и физических свойств облучаемого материала – теплопроводности, энергии сублимации, равновесного давления газа. Для материалов с высокой теплопроводностью интенсивный отвод тепла с облучаемой поверхности препятствует локальному плавлению поверхности и испарению, что снижает потери массы.

На основе полученных в работе результатов можно заключить, что представленную модель можно использовать для оценочных расчетов эрозии поверхности графита при импульсном выделении энергии на его поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мазуль И.В. Идеология выбора материалов защиты первой стенки и дивертора ТЯР. Конструкционные материалы для КТМ. Тезисы Международного семинара «Экспериментальные возможности токамака КТМ и программа исследований». Астана, 10-12 октября 2005. С. 33-35.

[2] Айрапетов А.А., Беграмбеков Л. Б., Вергазов С.В., Кузьмин А.А., Смирнов В.М., Шигин П. А.. Захват и удержание дейтерия в углеродных материалах, облучаемых в плазме // Известия РАН. Серия физическая. - 2010. - Т. 74, N 2. - С.248-253.

[3] Hassane A.M., Kulcinski G.L. and Wolfer W.G. Vaporization and melting of materials in fusion devices // J.Nucl. Mater. - 1981. - V. 103&104. - P.321-326.

[4] Физические величины / Справочник под ред. И.С. Григорьевой, Е.З. Мелихова. -М.: Энергоиздат, 1991. - 1232 с.

[5] Properties and characteristics of graphite. For industrial applications. Special materials. POCO GRAPHITE INC. January 2015. <http://poco.com/Portals/0/Literature/Semiconductor/IND-109441-0115.pdf>

REFERENCES

[1] Mazul I.V. The ideology of selecting the materials for protection of ITER first wall and divertor. Structural materials for KTM. Abstracts of the International Seminar "Experimental Opportunities of Tokamak KTM and Research Program". Astana, 10-12 October, 2005. P. 33-35.

[2] Airapetov A.A., Begrambekov L.B., Vergazov S.V., Kuzmin A.A., Smirnov V.M., Shigin P.A. Capture and retention of deuterium in carbon materials irradiated in plasma // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Physical series. - 2010. - V. 74, N 2. - P.248-253.

[3] Hassane A.M., Kulcinski G.L. and Wolfer W.G. Vaporization and melting of materials in fusion devices // J.Nucl. Mater. - 1981. - V. 103&104. - P.321-326.

[4] Physical quantities/Handbook under revision of Grigorieva I.S., Melikhova E.Z.- M: Energoizdat, 1991. - 1232 p.

[5] Properties and characteristics of graphite. For industrial applications. Special materials. POCO GRAPHITE INC. January 2015. <http://poco.com/Portals/0/Literature/Semiconductor/IND-109441-0115.pdf>

ӘОЖ: 621.039.66(075), 533.924(075)

Т.М. Алдабергенова^{1,2}, Г.З. Ганеев¹, С.Б. Кислицин¹, М.К. Досболаев²

¹Ядролық физика институты, Алматы қ., Қазақстан;

²әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы қ., Қазақстан.

ГРАФИТ БЕТІНІҢ ТЕРМИЯЛЫҚ ЭРОЗИЯСЫ МЕН ҚҰРЫЛЫМЫНА ИМПУЛЬСТІК ПЛАЗМАЛЫҚ СӘУЛЕЛЕНДІРУДІҢ ЫҚПАЛЫ

Аннотация. Импульстік плазмалық сәулелендіру кезінде графиттің жылудық эрозиясы эффектілерінің теориялық және эксперименттік зерттеу нәтижелері ұсынылған. Графит үлгілерін сәулелендіру әл-Фараби атындағы ҚазҰУ импульстік плазмалық үдеткішінде өткізілді. Үлгілер импульсіне 10 Дж/см² бетте энергияның бөлінуімен ұзақтығы ~ 2 мкс болатын 13 импульспен және импульсіне 8 Дж/см² бетте энергияның бөлінуімен ұзақтығы ~ 250 мкс болатын импульстермен сәулелендірілді. Сәулелендіруге дейін және кейін үлгілердің салмағы өлшенді және растрлы электрондық және атом-күштік микроскопия әдістері арқылы бет құрылымына зерттеулер орындалды. Теориялық есептеулер импульстік энергияның бөлінуі және беттен көміртегі атомының сублимациясы есебінен температураның үлестірілуін анықтауға негізделген модель бойынша жүргізілді.

Өткізілген эксперименттік зерттеулер нәтижесінде плазманың үзілуі кезінде ТЯР энергия бөлулерге сәйкес энергетикалық параметрлермен импульстік плазмалық сәулелендіруде массаның шығыны графит бетінің жылудық эрозиясына әкелетіні анықталды. Импульстің ұзақтығы бірнеше микросекунд және энергияның бөлінуі ~ 10 Дж/см² болғанда, масса шығыны импульсіне ~ 0.1-0.2 мкг құрайды. Екі есе көп импульс ұзақтығында, яғни 250-300 мкс, бірақ энергияның бөлінуі аз ~ 8 Дж/см² болғанда, масса шығыны ~ 0.03 мкг құрайды. Алынған эксперименттік нәтижелерді ұсынылған модель бойынша есептеумен салыстыру теориялық және эксперименттік деректердің қанағаттанарлық келісімі байқалатынын көрсетті.

Түйін сөздер: графит, импульстік плазмалық сәулелендіру, жылудық эрозиясы.

Сведения об авторах:

Алдабергенова Тамара Мустафаевна, ведущий инженер сотрудник, ИЯФ МЭ РК, 050032, Казахстан, Алматы, ул. Ибрагимов, 1. tamaraalga@mail.ru;

Кислицин Сергей Борисович, к.ф.-м.н., нач. Отдела радиационной физики твердого тела, ИЯФ МЭ РК, 050032, Казахстан, Алматы, ул. Ибрагимов, 1. skislitsin@inp.kz;

Ганеев Гелий Закирович, к.ф.-м.н., Ведущий научный сотрудник, ИЯФ МЭ РК, 050032, Казахстан, Алматы, ул. Ибрагимов, 1. ganeev@inp.kz

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 64 – 80

К.В. Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: jakupovKB@mail.ru

**GENEALOGY OF THE STOKES AND NAVIER EQUATIONS.
DEGREE RHEOLOGICAL LAWS AND EQUATIONS**

Abstract. A physical substantiation of Newton's law of friction and Navier's equations is given. The falsity of the Stokes conjecture and the Stokes equations is shown. The asymmetry of the stress tensor of a continuous medium in the general case is established. To simulate the flow of viscous fluids, the use of power friction laws with odd exponents is physically justified; accordingly, asymmetric strain tensors and equations of dynamics are derived. The models thus obtained do not contain semi-empirical constants. It is shown that the law of Newton's friction and the Navier equation of viscous fluid dynamics follow as a special case with exponent equal to unity. Numerical calculations of flow past a plate, flow in a tube of circular cross section are given. Comparisons with known experimental results of flows in the tube showed a satisfactory agreement of the solutions obtained from equations with power-law friction laws and the divergence of the solutions of the Navier equations. Difference schemes are used to solve equations in velocity-pressure variables. The adequacy of numerical experiments is provided by approximation of convective terms on five-point patterns, which excludes the influence on the result of "circuit viscosity".

Keywords: equations, tensor, friction, degree.

УДК 519.6, 532.516

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**ГЕНЕАЛОГИИ УРАВНЕНИЙ СТОКСА и НАВЬЕ.
СТЕПЕННЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ**

Аннотация. Дано физическое обоснование закона трения Ньютона и уравнений Навье. Показана фальшивость гипотезы Стокса и уравнений Стокса. Установлена несимметричность тензора напряжений сплошной среды в общем случае. Для моделирования течений вязких жидкостей физически обосновано использование степенных законов трения с нечетными показателями степеней, соответственно выведены несимметричные тензоры напряжений и уравнения динамики. Полученные таким образом модели не содержат полуэмпирических констант. Показано, что закон трения Ньютона и уравнения Навье динамики вязкой жидкости вытекают как частный случай при показателе степени, равном единице. Приведены численные расчеты обтекания пластины, течения в трубе круглого сечения. Сопоставления с известными экспериментальными результатами течений в трубе показали удовлетворительное совпадение решений, полученных из уравнений с степенными законами трения, и расхождение решений уравнений Навье. Применены разностные схемы для решения уравнений в переменных скорость-давление. Адекватность численных экспериментов обеспечена аппроксимацией конвективных членов на пятиточечных шаблонах, что исключает влияние на результат «схемной вязкости».

Ключевые слова: уравнения, тензор, трение, степень.

Введение

Уравнения динамики вязкой жидкости впервые построены в 1821г. французским ученым *Рене Навье*

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Примечательно, что уравнения Навье полностью соответствуют закону трения Ньютона

$P_{ji(n)} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Уравнения динамики вязкой жидкости также выводили французские ученые

Пуассон в 1831г., Сен-Венан в 1843г.

В 1845г. английский физик Стокс заменил закон трения Ньютона на сумму

$P_{ji(c)} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ и с тех пор используются уравнения Стокса [1]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right], i=1,2,3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \rho c_v \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot \lambda \nabla T + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 - p \operatorname{div} \mathbf{v} - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \mathbf{v})^2$$

Ставится вопрос: какая из данных систем является адекватной моделью динамики вязкой жидкости? Уравнения Стокса принимают вид уравнений Навье только для несжимаемых жидкостей $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ при постоянном коэффициенте вязкости $\mu = \text{const}$, но при этом закон трения Стокса не переходит в закон трения Ньютона. Даже при идентичности по написанию

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla p = \rho \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{v}, i=1,2,3, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

тензоры вязких напряжений Ньютона и Стокса в них будут различными. И обратное: уравнения Навье не переходят в уравнения Стокса, как и закон трения Ньютона не переходит в формулу трения Стокса.

Различие в законах трения привело к различным уравнениям баланса энергий. Следовательно, уравнения Навье и уравнения Стокса различны по своей реологической сути. Тем ни менее, в механике вязкой жидкости принято объединенное название – уравнения Навье-Стокса, что в корне является несправедливым по отношению к Навье.

1. Генеалогия уравнений Навье.

Несимметричность тензора напряжений Ньютона

В [1-7] и др. закон трения Ньютона выводится, как правило, для сдвиговых течений.

Например, в [7] (гл. IX) модуль силы трения

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{du}{dy} \right| S = \pm \mu \frac{du}{dy} S \quad (1.1)$$

в вязкой жидкости доказывается для линейной зависимости скорости от координаты $u = \alpha y$ (аналогично в [1-6]). Но в этом случае согласно (1.1) касательное напряжение по закону трения Ньютона равно

$$p_{yx} = \frac{F_{mp}}{S} = \mu \left| \frac{du}{dy} \right| = \pm \mu \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

Очевидно, из-за **линейной** зависимости скорости от пространственных координат получается, что 2-я производная равна 0:

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial y} = \pm \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (1.3)$$

Полагая нормальные напряжения равными $p_{xx} = -p + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$, получаем уравнения динамики **вязкой** жидкости в **парадоксальной** форме:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \nabla p = \rho F_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}, i=1,2,3, \quad (1.4)$$

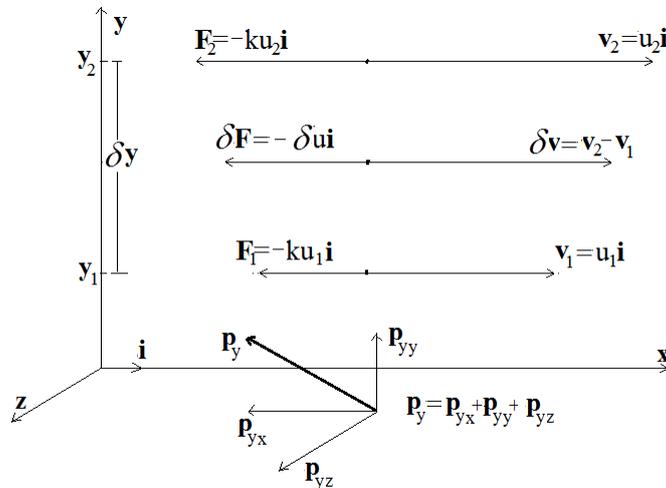
если руководствоваться выводами закона трения Ньютона, данными в [1-7]. (В (1.4) не производится суммирование по повторяющемуся индексу). Уравнения динамики (1.4) **отличаются от уравнений** Навье отсутствием 6 вязких членов, конкретно производных от касательных напряжений. В (1.4) присутствуют только производные от вязких нормальных напряжений.

Преодолению такого рода парадоксов служит закон трения для малых скоростей [7] $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$, по которому строго, без предположения о линейной зависимости, физически обоснован закон трения Ньютона.

Теорема 1. Касательное напряжение по Ньютону $p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ есть следствие линейного закона трения для малых скоростей $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$.

Доказательство. В самом деле, по закону трения на движущуюся со скоростью \mathbf{V}_i частицу m_i действует сила $\mathbf{F}_{mpi} = -k\mathbf{v}_i$, поэтому в индивидуальном объеме $\delta\tau$ среднemasсовая сила трения равна

$$\mathbf{F}_{mp} = \sum_i \mathbf{F}_{mpi} m_i / \sum_i m_i = - \sum_i k\mathbf{v}_i m_i / \sum_i m_i = -k\mathbf{v}, \quad \mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$$



Пусть течение вязкой жидкости происходит со скоростью $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ так, что $u > 0$. Сила трения $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$ в проекциях на оси координат есть сумма $\mathbf{F}_{mp} = \mathbf{F}_{(x)} + \mathbf{F}_{(y)} + \mathbf{F}_{(z)}$. На плоскости y_1 сила трения $\mathbf{F}_{(x)}$ равна $\mathbf{F}_1 = -ku_1\mathbf{i}$ и $\mathbf{F}_2 = -ku_2\mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$. Образуются приращения сил и скоростей: $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta u = u_2 - u_1 > 0$, $\delta\mathbf{F} = -k\delta u\mathbf{i}$, $\delta\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$.

Вводится линейная плотность $\mathbf{f} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta y}$, $\delta\mathbf{F} = \delta y\mathbf{f}$. По определению средний вектор касательного напряжения $\mathbf{p}_{yxcp} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta x\delta z}$ параллелен и одинаково-во направлен с силами трения $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{f}$.

Коэффициент пропорциональности приводит к равенствам $\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}$, $k' > 0$, $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$, $k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y = -k\delta u\mathbf{i}$.

Скалярное произведение на орт \mathbf{i} : $k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y \cdot \mathbf{i} = -k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$.

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{yxcp} \cdot \mathbf{i}\delta y = k'|\mathbf{p}_{yxcp}||\mathbf{i}|\delta y \cos 180^\circ = k'p_{yxcp} \cdot 1 \cdot \delta y \cdot (-1) = -k'p_{yxcp}\delta y,$$

$$-k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k\delta u|\mathbf{i}||\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k\delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k\delta u$$

Таким образом, из равенств $-k'p_{yxcp}\delta y = -k\delta u$, $p_{yxcp} = \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta y}$

в пределе вытекает закон трения Ньютона

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

$\mu = \frac{k}{k'}$ - традиционный коэффициент динамической вязкости, ч.т.д..

Обобщения полученной формулы путем перестановок индексов и переменных дают касательные напряжения по другим осям координат

$$p_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, p_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, p_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, p_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, p_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

В **теореме 1** дано строгое физическое обоснование закона трения Ньютона без предположения о сдвиговости течения.

Вывод вязких составляющих нормальных напряжений

Аналогично устанавливается формула вязкой составляющей \mathbf{p}_{xx}^0 нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx} = -p\mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$. Пусть силы трения равны: $\mathbf{F}_1 = -ku_1\mathbf{i}$ на плоскости x_1 и $\mathbf{F}_2 = -ku_2\mathbf{i}$ на плоскости $x_2 = x_1 + \delta x$, $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta\mathbf{F} = -k\delta u\mathbf{i}$, $\delta u = u_2 - u_1 > 0$, при этом $\delta\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность силы $\mathbf{f} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta x}$, $\delta\mathbf{F} = \delta x\mathbf{f}$. По определению

средний вектор нормального вязкого напряжения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta y\delta z}$ параллелен и одинаково

направлен с силами трения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\uparrow \mathbf{f}$. Коэффициент пропорциональности образует равенства $\mathbf{f} = k''\mathbf{p}_{xxcp}^0$, $k'' > 0$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow\downarrow \mathbf{i}$, $k'\mathbf{p}_{xxcp}^0\delta x = -k\delta u\mathbf{i}$.

Скалярное умножение на орт: $k'\mathbf{p}_{xxcp}^0\delta x \cdot \mathbf{i} = -k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$.

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i}\delta x = k'|\mathbf{p}_{xxcp}^0| |\mathbf{i}| \delta x \cos 180^\circ = k' p_{xxcp}^0 \cdot 1 \cdot \delta x \cdot (-1) = -k' p_{xxcp}^0 \delta x,$$

$$-k\delta u\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k\delta u |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k\delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k\delta u$$

Равенства $-k' p_{xxcp}^0 \delta x = -k\delta u$, $p_{xxcp}^0 = \frac{k}{k'} \frac{\delta u}{\delta x}$, в пределе дают вязкий член

нормального напряжения

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k}{k''} \frac{\delta u}{\delta x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mu = \frac{k}{k''}$$

Обобщения полученной формулы перестановками нижних индексов дают соответствующие

нормальные напряжения $p_{yy}^0 = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$, $p_{zz}^0 = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$.

Полные нормальные напряжения являются суммой давления и вязких составляющих

$$p_{xx} = -p + p_{xx}^0 = -p + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, p_{yy} = -p + p_{yy}^0 = -p + \mu \frac{\partial v}{\partial y}, p_{zz} = -p + p_{zz}^0 = -p + \mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Таким образом, дано физическое обоснование **несимметричного** тензора напряжений Ньютона $p_{ji} = -p\delta_{ji} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, которому соответствуют уравнения Навье (1).

2. Тензор напряжений сплошной среды не симметричен

В теореме 1 доказана несимметричность тензора напряжений Ньютона. Тензор напряжений используется широко, в частности, в теории упругости.

Теорема 2. Тензор напряжений сплошных сред не симметричен в общем случае.

Доказательство. В частном случае не симметричность доказана, исходя из закона трения

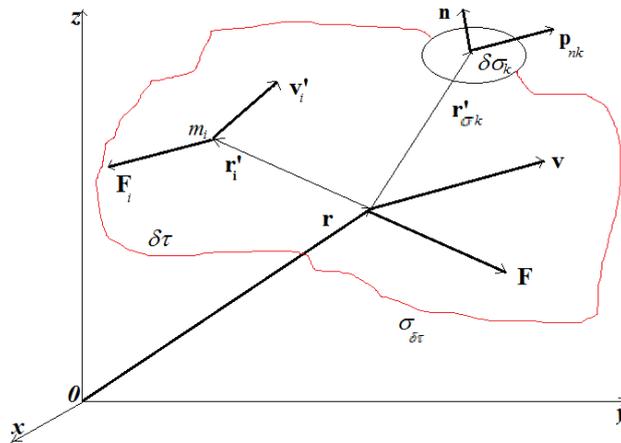
$\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$. В механике сплошной среды более 170 лет устоялось мнение, что тензор напряжений **симметричен** всегда.

Симметричность тензора напряжений, например в [1-5], выводится интегрированием по произвольному объему сплошной среды момента импульса, что дает фальшивые формулы

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} = 0, \quad p_{ji} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Фальшивость заключается в том, что левая часть (2.1) на самом деле не равна нулю

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \neq 0$$



Доказательство исходит из фундаментальной теоремы физики об изменении момента импульса

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$$

Данный общий закон трансформируется в теорему об изменении моментов импульсов для индивидуального объема $\delta\tau$ сплошной среды:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k} \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k, \quad (2.2)$$

Между радиус-вектором \mathbf{r} в (1.10.1) и векторами \mathbf{r}_i , $\mathbf{r}_{\sigma k}$ в (2.2) имеет место естественная связь $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_i$, $\mathbf{r}_{\sigma k} = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_{\sigma k}$, откуда вытекает связь и между скоростями

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i$$

Подставляя их в (2.2), найдем

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') = \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k (\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\sigma k}') \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \quad (2.3)$$

Прделаем необходимые преобразования в левой части:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') &= \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \\ + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' &= \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \delta m \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \\ + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i', \delta m &= \sum_i m_i = \rho \delta \tau \end{aligned}$$

Имея в виду $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \operatorname{div} \mathbf{v}$, исполним преобразования

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \delta m \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \delta m \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d\delta m}{dt} \mathbf{v} = \\ = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \delta \tau \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d(\rho \delta \tau)}{dt} \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\delta\tau}{dt} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} \right) \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \mathbf{r} \times \left(\rho \delta \tau \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} \right) \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

Здесь использованы $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \delta \tau \mathbf{v} = 0$, $(\rho \delta \tau \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt}) = 0$.

Окончательно найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') &= \mathbf{r} \times \rho \delta \tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' & \quad (2.4) \end{aligned}$$

Далее в правой части (2.3):

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathbf{r} + \mathbf{r}_i') \times m_i \mathbf{F}_i &= \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i = \\ = \mathbf{r} \times \delta m \mathbf{F} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho \delta \tau + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i, \end{aligned}$$

$$\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k (\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\sigma k}') \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k,$$

где по теореме *Остроградского-Гаусса* и теореме о среднем для элементарного объема $\delta\tau$ имеют место

$$\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \mathbf{r} \times \sum_k \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n \delta\sigma = \iiint_{\tau} \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \delta\tau = \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \delta\tau$$

В результате совершенных преобразований (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{r} \times \rho \delta\tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' = \\ & = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho \delta\tau + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i + \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \delta\tau + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \end{aligned}$$

Поделив на $\delta\tau$, получаем правую часть

$$\begin{aligned} & \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} = \\ & = -\frac{1}{\delta\tau} \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' \right\} + \\ & + \frac{1}{\delta\tau} \left\{ \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подведем итоги. В учебниках [1-5] и др. тем или иным способом получено **известное выражение (2.1)**:

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j}{\partial x_j} = 0,$$

т.е. левая часть (2.5) равна нулю во всех точках потока всегда и, следовательно, тензор напряжений **симметричен**:

$$p_{23} = p_{32}, p_{31} = p_{13}, p_{12} = p_{21}$$

В логически полученном выражении (2.5) правая часть

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\delta\tau} \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i' + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' \right\} + \\ & + \frac{1}{\delta\tau} \left\{ \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{F}_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \mathbf{r}_{\sigma k}' \times \mathbf{p}_{nk} \delta\sigma_k \right\} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

в общем случае **не равна нулю**, т.к. во-первых, числитель дроби составлен из алгебраических величин 1-го и 2-го порядков малости, а в знаменателе стоит 3-го порядка малости $\delta\tau \rightarrow 0$, во-

вторых, элементарный объем $\delta\tau$ движется вместе с потоком и выбирается совершенно произвольно. Собственно говоря, если в какой-либо точке потока выражение (2.6) будет равно нулю, это будет означать, что в данной точке тензор сплошной среды симметричен и частица не вращается.

В раскрытом виде левая часть (2.5) по уравнению динамики сплошной среды в напряжениях равна выражению:

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_j = \mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \times \mathbf{p}_j = \mathbf{r} \times \mathbf{0} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \times \mathbf{p}_j = -\mathbf{i}_j \times \mathbf{p}_j = -(p_{23} - p_{32})\mathbf{i} - (p_{31} - p_{13})\mathbf{j} - (p_{12} - p_{21})\mathbf{k},$$

из которого в силу (2.6) следует неравенство

$$(p_{23} - p_{32})\mathbf{i} + (p_{31} - p_{13})\mathbf{j} + (p_{12} - p_{21})\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

что является доказательством **несимметричности** тензора напряжений сплошной среды, так как для *неравенства* нулю вектора необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из неравенств:

$$p_{23} \neq p_{32}, p_{31} \neq p_{13}, p_{12} \neq p_{21},$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, выражение (2.1), которое применяется в учебниках Лойцянского [1] и Седова [2] в качестве теоремы об изменении момента импульса, **фальшивое**. Очевидно из (2.5), что в формуле (2.1) Лойцянского [1] и Седова [2] не может стоять знак равенства.

3. Генеалогия закона трения Стокса и уравнений Стокса

По всей вероятности, указанный факт (1.2) о выводе закона трения Ньютона для **линейной** зависимости скорости от координат и вследствие этого равенство нулю 6 вторых производных в (1.4) был известен Стоксу. Кроме этого, установленная интегральным (дедуктивным) методом ложная *симметричность* тензора напряжений сплошной среды послужила основой *симметричного* закона трения Стокса $p_{yx(c)} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, для вывода которого не используется линейная зависимость скорости от координат, но были использованы элементы симметричного тензора деформации скоростей $\dot{\mathbf{S}}$ из первой теоремы Гельмгольца.

Симметричный тензор деформации скоростей $\dot{\mathbf{S}}$ связывают с тензором деформаций, имеющим двоякий вид [2, 4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}_j + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}_k \cdot \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}^k \right],$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k \right],$$

которые симметризируются путем *отбрасывания* множества произведений

$$\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}_k \cdot \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}^k \quad \text{и} \quad \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k.$$

В результате получаются симметричные тензоры

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}_i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_j], \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j] \quad (3.1)$$

Пренебрежение произведениями производных, обосновывается тем, что рассматриваются бесконечно малые относительные перемещения [2-4], что незаконно, так как производные

$$\hat{\nabla}_i \hat{w}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k, \quad \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_k \cdot \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k \text{ могут быть конечными величинами.}$$

В самом деле, пусть $w = \varepsilon F(\cos \alpha z)$, где $\alpha = \text{const} \gg 1$ очень большое но конечное число, ε - малый параметр, обеспечивающий бесконечную малость функции w , F -ограниченная дифференцируемая функция. Очевидно, производная

$$\frac{dw}{dz} = -\varepsilon F' \alpha \sin \alpha z \text{ будет конечным числом, достаточно положить}$$

$$\alpha = \varepsilon^{-1} \cdot \text{const}. \text{ Следовательно, симметричности тензоров деформаций (2.1) фальшивые.}$$

Тензоры деформаций (3.1) являются следствием фальшивых формул дифференциалов в [2]:

$$d\mathbf{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i \text{ и } d\mathbf{r}' = d\xi^i \vec{\partial}_i^* \quad (3.2)$$

В книге Седова [2] указывается положение «...О зависимости векторов

базиса $\hat{\partial}_i, \vec{\partial}_i^*$, сопутствующей системы от времени», следовательно, дифференциалы должны учитывать зависимость ортов координат от времени и иметь правильный вид

$$d\mathbf{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i + \xi^i d\hat{\partial}_i, \quad d\mathbf{r}' = d\xi^i \vec{\partial}_i^* + \xi^i d\vec{\partial}_i^* \quad (3.3)$$

Формулы тензоров деформаций, изложенные в [2-4] основаны на фальшивой формуле (3.2), поэтому они не имеют места для правильных дифференциалов (3.3). Следовательно, теория деформаций [2,4] должна быть основательно пересмотрена и отвергнута полностью.

Закон трения Стокса линейной зависимости напряжений от скоростей деформаций, основан на фальшивых формулах теории деформаций (3.1), конкретно с первыми четырьмя членами ряда Тейлора, старшими членами ряда пренебрегается (первая теорема Гельмгольца в [1]):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z,$$

в эквивалентную запись которого входит симметричный тензор скоростей деформаций:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \dot{S} \delta\mathbf{r} + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \delta\mathbf{r} \quad (3.4)$$

Данную формулу необходимо представить в раскрытом виде

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta x_j, \quad i=1,2,3, \quad (3.5)$$

Первая половина (3.5) есть компоненты тензора скоростей деформаций

$$\dot{S}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

вторая половина (3.5) с компонентами ротора скорости $\frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r}$ просто не принимается во внимание, что конечно парадоксально! Потому что, они одинаковой размерности и отличаются только знаками «плюс-минус».

Закон трения Стокса $p_{yx(c)} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ получается умножением (3.6) на 2, то есть

откровенной подгонкой к закону трения Ньютона, что отражено в подробной записи симметричного тензора напряжений Стокса:

$$p_c = - \left[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \text{div} \mathbf{v} \right] E + 2 \mu \dot{S},$$

$$p_{ji(c)} = - \left\{ p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \text{div} \mathbf{v} \right\} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

Закон трения Стокса и симметричный тензор напряжений лауреат Нобелевской премии Л.Д.Ландау объявил гипотезой. Таким образом, гипотеза Стокса является фальшивой, так как не соответствует закону трения $\mathbf{F}_{mp} = -k\mathbf{v}$, генеалогией гипотезы являются первые 4 члена ряда Тейлора, следовательно, уравнения Стокса (2) являются фальшивыми [10].

3. Степенные законы трения и уравнения

Доказанная теорема 2 о несимметричности тензора напряжений сплошных сред создает возможности для конструирования широкого спектра новых реологических законов, из которых можно выбирать подходящие модели для данного физического процесса соответственно скорости течения и физическим свойствам среды.

Пусть $u > 0$ и рассмотрим пропорциональные степени скорости силы трения: $\mathbf{F}_{mp} = -k_u u^{m_u} \mathbf{i} - k_v v^{m_v} \mathbf{j} - k_w w^{m_w} \mathbf{k}$, проекции которой на ось x равны: $\mathbf{F}_1 = -k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости y_1 и $\mathbf{F}_2 = -k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$. Образуются приращения силы и скорости: $\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta \mathbf{F} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$, $\delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0$, причем $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность силы $\delta \mathbf{F}$ как отношение $\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta y}$, $\delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$. По определению

вектор $\mathbf{p}_{yxcp} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x \delta z}$ касательного напряжения параллелен и одинаково направлен с силами трения $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}, \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

Через коэффициент пропорциональности имеем равенства $\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{yxcp}$, $k' > 0$, $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$, $k' \mathbf{p}_{yxcp} \delta y = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$.

Данное выражение умножается на орт: $k' \mathbf{p}_{yxcp} \delta y \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$.

В результате получаются

$$k' \mathbf{p}_{yxcp} \cdot \mathbf{i} \delta y = k' \left| \mathbf{p}_{yxcp} \right| \left| \mathbf{i} \right| \delta y \cos 180^\circ = k' p_{yxcp} \cdot 1 \cdot \delta y \cdot (-1) = -k' p_{yxcp} \delta y,$$

$$-k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \left| \mathbf{i} \right| \left| \mathbf{i} \right| \cdot \cos 0^\circ = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$$

Равенства $-k' p_{yxcp} \delta y = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$, $p_{yxcp} = \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k' \delta y}$, в пределе дают

касательное напряжение $p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k' \delta y} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}$, $\mu_{m_u} = \frac{k_{m_u}}{k'}$

Обобщения полученной формулы путем перестановок нижних индексов дают соответствующие касательные напряжения

$$p_{xy} = \mu_{m_v} \frac{\partial v^m}{\partial x}, p_{zx} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^m}{\partial z}, p_{xz} = \mu_{m_w} \frac{\partial w^m}{\partial x}, p_{yz} = \mu_{m_w} \frac{\partial w^m}{\partial y}, p_{zy} = \mu_{m_v} \frac{\partial v^m}{\partial z} \quad (3.5.1)$$

Формулы (3.5.1) выведены, ради простоты, для $u > 0, v > 0, w > 0$ и нечетных показателей степени $m = 1; 3; 5; 7; 9 \dots$. Для нечетных показателей получается такой же результат.

Вывод вязких составляющих нормальных напряжений

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей \mathbf{p}_{xx}^0 нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx} = -p \mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$. Пусть силы трения равны: $\mathbf{F}_1 = -k_u u_1^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскостит x_1 и $\mathbf{F}_2 = -k_u u_2^{m_u} \mathbf{i}$ на плоскости $x_2 = x_1 + \delta x$, $\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, $\delta \mathbf{F} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$, $\delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0$, причем $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность силы $\delta \mathbf{F}$: $\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x}$, $\delta \mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}$.

По определению вектор нормального вязкого напряжения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta y \delta z}$ параллелен и одинаково направлен с силами трения $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \mathbf{f}$.

Через коэффициент пропорциональности имеем $\mathbf{f} = k'' \mathbf{p}_{xxcp}^0$, $k'' > 0$, $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \downarrow \mathbf{i}$, $k' \mathbf{p}_{xxcp}^0 \delta x = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i}$. Данное выражение умножается на орт: $k' \mathbf{p}_{xxcp}^0 \delta x \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$. В результате получаются

$$k' \mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i} \delta x = k' \left| \mathbf{p}_{xxcp}^0 \right| \left| \mathbf{i} \right| \delta x \cos 180^\circ = k' p_{xxcp}^0 \cdot 1 \cdot \delta x \cdot (-1) = -k' p_{xxcp}^0 \delta x,$$

$$-k_{m_u} \delta u^{m_u} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$$

Равенства $-k' p_{xxcr}^0 \delta x = -k_{m_u} \delta u^{m_u}$, $p_{xxcr}^0 = \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k' \delta x}$, в пределе дают вязкий член нормального напряжения

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_{m_u} \delta u^{m_u}}{k'' \delta x} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, \mu_{m_u} = \frac{k_{m_u}}{k''}$$

Обобщения полученной формулы путем перестановок нижних индексов дают напряжения

$$p_{yy}^0 = \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial y}, p_{zz}^0 = \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial z}.$$

Полные нормальные напряжения являются суммой давления и вязких составляющих

$$P_{xx} = -p + \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, P_{yy} = -p + \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial y}, P_{zz} = -p + \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial z}$$

Таким образом, из законов трения с нечетными показателями степеней

$$\mathbf{F}_{mp} = -k_{m_v} v^{m_v} \mathbf{e}_v, v = |\mathbf{v}|, \mathbf{v} = v \mathbf{e}_v, m_v = 1; 3; 5; 7; 9 \dots$$

вытекают касательные и нормальные напряжения и уравнения

$$p_{ji} = -p \delta_{ji} + \frac{\alpha \mu}{m_i^{m_i-1}} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\alpha \mu}{m_i^{m_i-1}} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3,$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{v} + Q_\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha \mu}{m_i^{m_i-1}} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q, \alpha = 1 \left(\frac{cek}{m} \right)^{m-1}, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

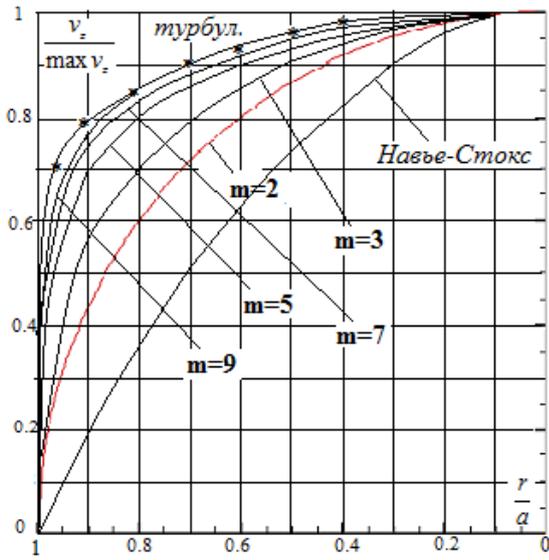
Здесь μ — ньютоновская динамическая вязкость с масштабом μ_* . Показатели степеней нечетные целые положительные числа.

На фиг.1 представлены профили осевой скорости течения вязкой жидкости в трубе круглого сечения радиуса "а", насчитанные из краевой задачи для показателей степени $m = 1; 3; 5; 7; 9$:

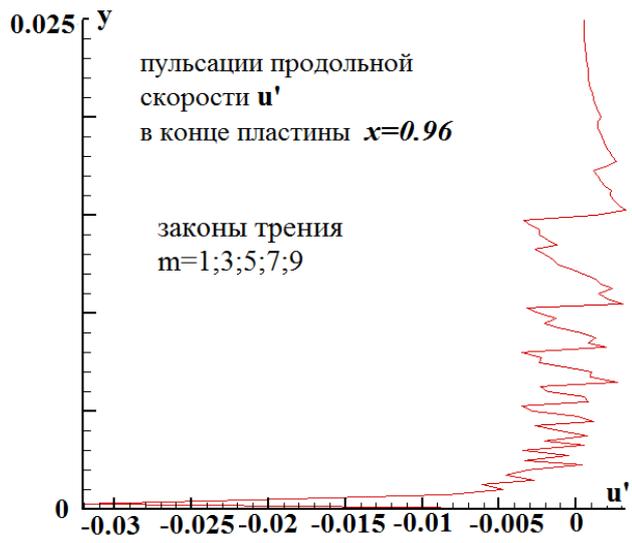
$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu_m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z^m}{dr} \right), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{dp}{dz} = \operatorname{const} < 0,$$

с решением

$$V_z^m = -\frac{1}{4\mu_m} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{V_z}{\max V_z} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{m}}$$



Фигура 1



Фигура 2

Степень $m = 1$ соответствует уравнению Навье-Стокса, т.е. закону трения Ньютона. Профиль осевой скорости при степени $m = 9$ почти сливается с экспериментальным профилем, который отмечен точками.

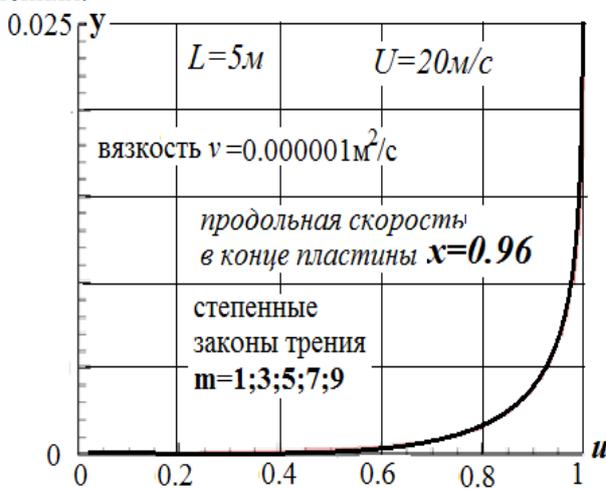
На фиг. 2, 3, 4 приведены расчеты на сетке 200×150 продольного обтекания пластины. На фиг. 2 приведено распределение пульсаций продольной скорости в конце пластины, рассчитанное

по формуле $u'_{ij}^n = u_{ij}^n - \bar{u}_{ij}^n$, где $\bar{u}_{ij}^n = (\sum_{k=n_0}^n u_{ij}^k) / (n - n_0)$ - осредненная продольная

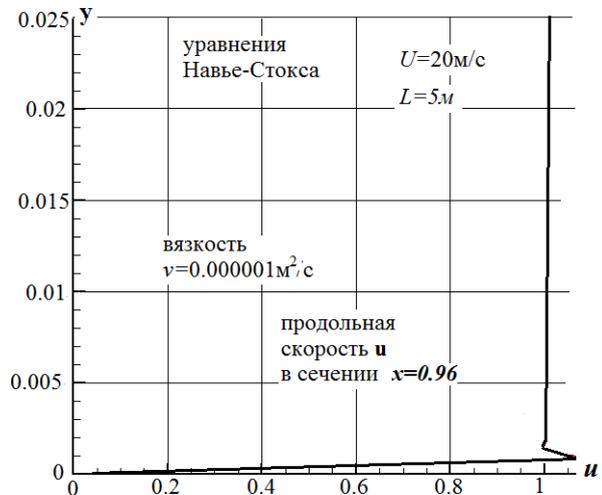
скорость на момент времени $t_n = 0.0001n, n - n_0 = 10^5, n_0 = 1502590$.

На фиг. 3 представлена продольная скорость в конце пластины, полученная численным решением уравнений динамики со степенными законами трения. При тех же параметрах получено решение уравнений Навье.

Профиль фиг.4 продольной скорости в конце пластины, полученный численным решением уравнений Навье $m = 1$, резко отличается от профиля фиг. 3. Тем самым численно подтверждается эффективность степенных законов трения и непригодность уравнений Навье в высокоскоростных течениях.



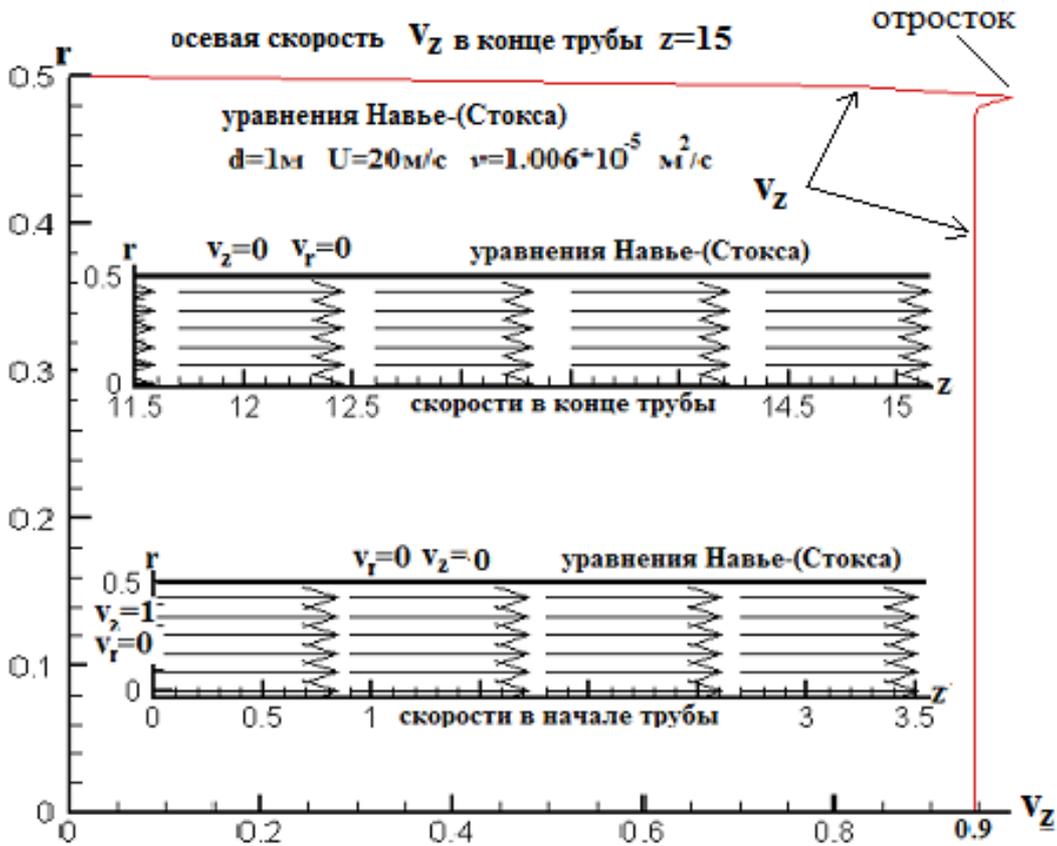
Фигура 3



Фигура 4

На фиг. 2 приведено распределение пульсаций продольной скорости в конце пластины, рассчитанное по формуле $u_{ij}^n = u_{ij}^n - \bar{u}_{ij}^n$, где $\bar{u}_{ij}^n = (\sum_{k=n_0}^n u_{ij}^k) / (n - n_0)$ - осредненная продольная скорость на момент времени $t_n = 0.0001n, n - n_0 = 10^5, n_0 = 1502590$.

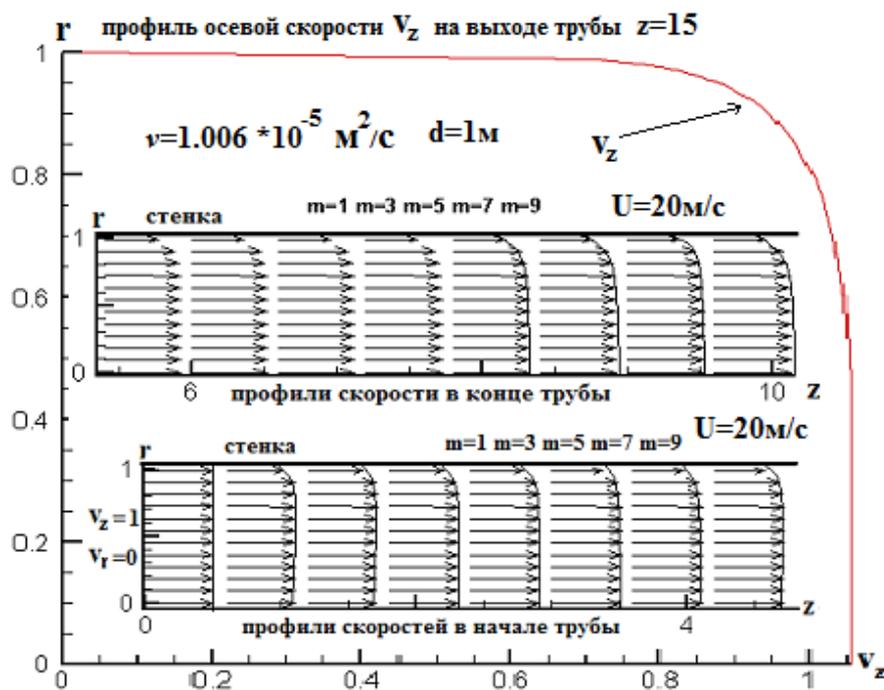
На фиг. 5 представлены профили осевой скорости в начале и в конце трубы с диаметром 1м, полученные численным решением уравнений Навье на сетке 100x400. Около стенки трубы в пограничном слое образуется отросток. Несжимаемая жидкость с кинематической вязкостью $\nu = 1.006 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ втекает в трубу со скоростью $U = 20 \text{ м} / \text{с}$. Течение стационарное.



Фигура 5

На фиг. 5 представлены профили осевой скорости в начале и в конце трубы с диаметром 1м, полученные численным решением на сетке 100x400 уравнений с нечетными степенными законами трения. Профиль осевой скорости в конце трубы характерен с профилем $m=9$ на фиг. 1. Отросток не образуется.

Из распределений скоростей в различных сечениях трубы, длина которой равна 15 калибрам, видно, что уравнения Навье с законом трения Ньютона при одних и тех же данных не реагируют на вязкость жидкости, пограничный слой практически отсутствует. Расчеты проведены по схеме без «аппроксимационных вязкостей» (без схемной диффузии) для конвективных членов. Фиг. 6 наглядно демонстрирует, что профили скоростей, полученные решением уравнений со степенными законами трения, идентичны результатам экспериментов фиг. 1, видно образование пограничного слоя у стенки трубы.



Фигура 6

ВЫВОДЫ

Уравнения Навье являются моделью низкоскоростных течений. Гипотеза Стокса ошибочна, поэтому уравнения Стокса являются фальшивыми. Уравнения со степенными законами трения показали совпадение с известными экспериментальными результатами. Очевидными достоинствами данных уравнений является естественный вывод из законов физики и полное отсутствие каких-либо полуэмпирических констант, коих изобилие в полуэмпирических моделях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: "Наука", 1973г.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды.- Т.1. М.: "Наука", 1973г.
- [3] Лыков А.В.Тепломассобмен. - М.: «Энергия»,1972г. С.560.
- [4] George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 1970.
- [5] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: «Мир», 1973г.
- [6] Шлихтинг Г.Теория пограничного слоя. - М.. Изд-во "Наука", 1974г.
- [7] Савельев И.В.Курс общей физики.- Т.1. М.: "Наука", 1977г.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: "Наука", 1973г.
- [9] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.-М.:Изд-во МГУ, 1978г.
- [10] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - А: Типография «Гылым ордасы», 2016. С.418.
- [11] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат., 1(293), январь-февраль 2014г.с.51-55.
- [12] Джакупов К.Б. Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь-декабрь 2016 г.с.80-88.
- [13] Джакупов К.Б. О $k - \varepsilon$, LES, Рейнольдси и степенных моделях // Известия НАН РК, серия физ.-мат.,1(311) январь-февраль 2017 г.с.144-159.
- [14] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.
- [15] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
- [16] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
- [17] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
- [18] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1

- [19] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
[20] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

REFERENCES

- [1] Loitsyanskii LG Fluid Mechanics. TH.: "SCIENCE" 1973.
[2] Sedov L.I. Mechanics of a continuous medium. M.: "Nauka", 1973.
[3] Lykov A.V. *Teplomassobmen*. - M.: "Energy", 1972. S.560.
[4] George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 197
[5] Batchelor J. Introduction to the dynamics of fluid. M.: "World", 1973.
[6] Schlichting G. Theory of the boundary layer. - M.: Publishing house "Science", 1974.
[7] Saveliev I.V. Course general physics.- T.I. M.: "Nauka", 1977r. P.414.
[8] Landau LD, Lifshits EM Hydrodynamics. - Moscow: "Nauka", 1973.
[9] Ilyushin AA Mechanics of a continuous medium. -M.: Izd. MGU, 1978.
[10] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes.- Almaty "Gylym. Ordasy", 2016.P.417.
[11] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Proceedings of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, ser.fiz.-mat., 1 (293), January-February 2014, p.51-55.
[12] Jakupov K.B. Modeling of thermobarodiffusion with chemical reactions in Fluids and gases // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 6 (310), November-December,2016 g.80-88.
[13] Jakupov K.B. About, LES, Reynolds and power models // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 1 (311) January-February 2017, p.144-159.
[14] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.
[15] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
[16] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
[17] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
[18] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
[19] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
[20] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

ӘОЖ: 519.6, 532.516

К.Б. Жақып

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

СТОКСА ЖӘНЕ НАВЬЕ ТЕНДЕУЛЕРІНІҢ ГЕНЕАЛОГИЯЛАРЫ. ДӘРЕЖЕЛІК РЕОЛОГИЯЛЫҚ ЗАҢДАР ЖӘНЕ ТЕНДЕУЛЕР

Аннотация. Ньютон үйкеліс заңына және Навье теңдеулеріне физикалық негіздеу берілген. Стокс гипотезасының және Стокс теңдеулерінің жалғандығы көрсетілген. Тұтас ортаның кернеулер тензорының жалпы жағдайда беттеспегендігі орнатылған. Тұтқырлы сұйықтықтардың ағыстарын модельдеу үшін дәрежелік үйкеліс заңдарын дәрежелері тақ көрсеткішті пайдалану физикалық негізделінген, сәйкес беттеспеген кернеулер тензоры жасалған және қозғалыс теңдеулері шығарылған. Осылай салынған модельдерде жарытылай эмпирикалық тұрақтылықтар жоқ. Ньютон үйкеліс заңы және тұтқырлы сұйықтықтардың қозғалысының Навье теңдеулері дәреже көрсеткіші бірге тең болғандағы жеке дербес жағдайы екені көрсетілген. Жайманы ағып өту және дөңгелек кесіндікті құбырдағы ағыстардың сандық нәтижелері келтірілген. Дәрежелік үйкеліс заңдары бар теңдеулердің шешімдерін белгілі құбырдағы ағыстардың эксперименттік нәтижелерімен салыстырғандық қанағатты қалыптасулық және Навье теңдеулерінің шешімдерінің олардан шалқақтауы көрсетілген. Жылдамдық-қысым айнаымалдарындағы теңдеулерді шешуге айырымдық схемалар қолданылған. Сандық эксперименттердің адалдығы конвективтік мүшелерді беснүктелі шаблонда аппроксимация жасауымен қамтылған, сондықтан нәтижелерге «схемалық тұтқырлықтың» әсерлігі жойылады.

Түйін сөздер: теңдеулер, тензор, үйкеліс, дәреже.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 81 – 85

UDC 539.1.074.3

S.A. Zhaugasheva¹, D.S.Valiolda¹, D.M.Janseitov^{1,2},
N.K.Zhussupova¹, Zh.Serikov¹, F.Aitzhan¹

¹Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan ²Institute of nuclear physics, Almaty, Kazakhstan
e-mail: valiolda.dinara@gmail.com

THEORETICAL STUDY OF THE COULOMB BREAKUP OF THE HALO NUCLEI ¹¹Be, ¹⁵C

Abstract. The aim is to study the Coulomb breakup of halo nuclei in the framework of a non-stationary quantum-mechanical approach. Coulomb breakup of nuclei is one of the main tools in the study of the halo nuclei. Theoretical study of the halo nuclei with relevant planned experiments for the study of light nuclei in radioactive beams.

Among the halo nuclei, the ¹¹Be nucleus is of particular importance, since the relative simplicity of its structure allows for more accurate theoretical studies. In fact, the bound states of the ¹¹Be nucleus can be described quite well as a ¹⁰Be nucleus and a weakly bound neutron. With good approximation, decay can be regarded as a transition from a two-particle bound state to a continuum due to a changing Coulomb field. In this paper, a numerical scheme for the expansion of the nonstationary Schrödinger equation into angular and radial grids was applied to the decay of the ¹¹Be nucleus on a ²⁰⁸Pb target at energies of about 70 MeV / Nucleon.

Key words: Coulomb breakup, halo nucleus, neutron halo, the probability of breakup, the cross section of breakup, time-dependent Schrödinger equation

ӘОЖ: 539.1.074.3

С.А. Жаугашева¹, Д.С. Валиолда¹, Д.М. Джансейтов^{1,2},
Н.К. Жусупова¹, Ж. Сериков¹, Ф. Айтжан¹

¹әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан;
²Ядролық физика институты, Алматы қ., Қазақстан

¹¹Be, ¹⁵C ГАЛО ЯДРОЛАРЫНЫҢ КУЛОНДЫҚ КҮЙРЕУІН ТЕОРИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Жұмыстың мақсаты гало ядролардың кулондық күйреу процесін бейстационар квант-механикалық тәсілмен теориялық зерттеу. Ядролардың кулондық күйреуі гало ядроларды зерттеуші негізгі құралдардың бірі болып табылады. Гало ядролардың кулондық күйреуін теориялық зерттеу радиоактивті ядролар шоғырында жеңіл ядроларды зерттеуші тәжірибелерді жоспарлау және іске асыру үшін өзекті болып табылады.

Гало ядролардың арасында ¹¹Be ядросы ерекше мәнге ие, себебі оның құрылымының қарапайымдылығы неғұрлым дәл теориялық зерттеулер жүргізуге мүмкіндік береді. Шындығында, ¹¹Be ядросының байланысқан күйлерін ¹⁰Be ядросы мен әлсіз байланысқан нейтрон ретінде сипаттауға болады. Жақсы жуықтауда, ыдырау процесін айналымы Кулондық өріс салдарынан қос бөлшектік байланысқан күйлерден континуумға ауысуы ретінде қарастыруға болады. Бұл жұмыста бейстационар Шредингер теңдеуін радиалдық және бұрыштық торда сандық шешу тәсілдері энергиясы шамамен 70 МэВ/Нуклон ¹¹Be ядросының ²⁰⁸Pb нысанасынан күйреуіне қолданылды.

Түйін сөздер: кулондық күйреу, гало ядро, нейтрондық гало, күйреу ықтималдығы, күйреу қимасы, Шредингердің бейстационар теңдеуі.

Кіріспе. Гало ядролар өзекті кванттық жүйелердің бірі болып табылады. Осы ядроларда кейбір нуклондардың орташа орбиталық радиусы басқа нуклондардың ядролық өзараәсерлесу диапазонынан артық болуы мүмкін. Гало ядролардың күйреуі олардың қасиеттерін зерттеу үшін маңызды құралдарының бірі болып табылады. Бұл реакциялардаснарядтың фрагменттерге жіктелінуі жайлы ақпарат гало бөлшектердің толқындық функцияларының қасиеттері туралы тұжырым жасауға пайдаланылуы мүмкін. Кулондық күйреу ерекше қызығушылық тудыру себебі-снаряд пен нысана арасындағы өзара ядролық әсерлесуінің толық анықталмағандығы маңызды [1]. Сондықтан да күйреу реакцияларының қимасын дәл анықтау үшін реакция механизмін дәл сипаттау маңызды.

Гало ядролардың арасында ^{11}Be және ^{15}C ядролары ерекше қызығушылық тудырады. Олардың құрылымының қарапайымдылығына байланысты тәуелсіз екі дененің күйреуін сипаттау үшін қажетті толқындық функциялары арасындағы анықталмағандықты ескеруге қажетті күрделі есептеулерсіз зерттеуге болады. Шынында да, олардың байланысқан күйін нейтронмен әлсіз байланысқан қабат (кора) ретінде сипаттауға болады. Күйреуді байланысқан күйдегі екі бөлшектің кулон өрісі салдарынан континуумға көшу процесі деп жуықтауға болады [1]. Бұл ядролар кулондық күйреудің жуықталған теорияларын тексеру үшін жақсы негіз болып табылады.

Соңғы жылдары, кулондық күйреуді зерттеу үшін бірқатар әдістер әзірленді: ұйытқу теориясы [2-5], адиабаталық жуықтау [6,7], дискреттелген континуумдармен байланысқан каналдар [8-11] және Шредингердің үш өлшемді бейстационар теңдеуінсандық шешу әдістері [12-18]. Мұнда біз соңғы әдіске тоқталамыз, яғни снаряд классикалық траекториямен қозғалады және оның өзара әрекеттесуі нысананың айналасында Кулондық және ядролық әрекеттесулерінің өзгешілігінің нәтижесінде дамиды деп болжаймыз. Негізгі болжам моделі ретінде снаряд қозғалысының жартылай классикалық сипаттамасы және снарядтың ішкі құрылымын сипаттайтын басқа да моделдердің ортақ жинақталған сипаттамасы қолданылады.

Бұл жұмыста энергиялары 70 МэВ/нуклон шамасындағы ^{11}Be және ^{15}C гало ядроларының кулондық күйреуі жартылай классикалық бейстационар Шредингер теңдеуін бұрыштық және радиалдық торда сандық әдіспен шешу арқылы сипатталады. Күйреу процесінде снарядтың толқындар шоғырының уақыттық эволюциясы көрсетіледі. Нысана мен снаряд арасындағы ядролық әсерлесулердің рөлі кулондық күйреудің көздеу параметрімен әрекетінің нәтижесінде талданады және бағаланады. Күйреу мен серпімсіз шашырау қимасы тәжірибелік мәліметтермен салыстырылып, талданады.

Кулондық күйреуінің бейстационар әдісінің сипаттамасы. Нысана (массасы m_t және заряды $Z_t e$) мен екі денеден тұратын снарядтың әсерлесуі кезіндегі күйреуін қарастырамыз. Снаряд нүктелік қабат (кора) (массасы m_c және заряды $Z_c e$) пен нүктелік фрагменттен (массасы m_f және заряды $Z_f e$) құралған. Тыныштықта тұрған снаряд үшін Шредингердің уақытқа тәуелді теңдеуін жазсақ:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = H(t) \psi(r, t) = [H_0(r) + V(r, t)] \psi(r, t) \quad (1)$$

Снарядтың гамильтонианы келесі түрде жазылады:

$$H_0(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V_{cf}(r) \quad (2)$$

μ -ядро мен фрагменттің келтірілген массасы, $\mathbf{r} = (\Omega, r)$ олардың арасындағы салыстырмалы координатасы және V_{cf} – ядро мен снаряд фрагменті арасындағы ішкі әсерлесу. Бұл кулондық және спин-орбиталдық бөліктен тұратын шынайы потенциал:

$$V_{cf}(r) = V_0(r) + \mathbf{L}V_{LI}(r) \quad (3)$$

Мұндағы \mathbf{L} -орбиталды момент, \mathbf{I} -фрагмент спині. Ядроның спинін I_c нөлгетек деп жуықтайтын болсақ, онда фрагмент спині I тұрақты болады.

Уақытқа тәуелді потенциал келесі түрде беріледі:

$$V(r, t) = V_{cT}(r_{cT}) + \frac{Z_c Z_T e^2}{r_{cT}} + V_{fT}(r_{fT}) + \frac{Z_f Z_T e^2}{r_{fT}} - \frac{(Z_c + Z_f) Z_T e^2}{R} \quad (4)$$

мұндағы $\mathbf{R}(T)$ – нысананың снаряд массаларорталығына қатысты, уақытқа тәуелді орны. Ядро-нысана және фрагмент-нысана координаттары сәйкесінше:

$$r_{cT}(t) = R(t) + m_f r / M \quad (5)$$

$$r_{cT}(t) = R(t) - m_c r / M \quad (6)$$

мұндағы $M = m_c + m_f$ снарядтың массасы. Комплексті оптикалық потенциал V_{cT} және V_{fT} ядро-нысана мен фрагмент-нысанасы әсерлесуінің нақты ядролық бөлігін сипаттайды.

Есепті жеңілдету үшін, (4)-теңдеуде нүктелік кулондық әсерлесулер нақты көрсетіледі. Ядро-нысанамен фрагмент-нысанасының кулондық әсерлесулерін ядролардың ақырғы өлшемдерін ескеріп, қосымша қиындықсыз шынайы форм-факторға ауыстыруға болады. Снаряд тыныштық күйде тұрған кезде, нысана классикалық траекториямен қозғалады. Бұл траектория түзу сызық немесе Кулон траекториясы болуы мүмкін. Сонымен қатар бұл ядролық әсерлерді ескеретін траектория болуы мүмкін, бірақ бұл жағдайда оны қолданбағанымыз жөн. Бастапқы жылдамдықты және көздеу параметрін бөлеп белгілейміз.

Парциалды толқындық функция l_j үшін снарядтың меншікті күйлері (байланысқан және шашыратылған күйлері) былай анықталады:

$$H_0 \phi_{Ljm}(E, r) = E \phi_{Ljm}(E, r) \quad (7)$$

Снарядтың бұрыштық моменті j фрагменттің орбиталдық моменті L мен спинін I қосу арқылы табуға болады. Теріс энергетикалық күйлер нормаланған және оларне снарядтың физикалық байланысқан күйін немесе Паули принципі бойынша тыйым салынған күйлерді сипаттайды. Оң энергетикалық күйлер ядро – фрагментінің шашырауына сәйкес келеді. Бұлар жүйедегі ақырғы күйлерді талдау үшін қажет. Шашырауға сәйкес толқындық функциясының радиалдық бөлігі келесі түрде нормаланған:

$$R_{lj}(E, r) \rightarrow r^{-1} [\cos \delta_l(E) F_l(E, r) + \sin \delta_l(E) G_l(E, r)] \quad (8)$$

мұндағы F_l , G_l стандартты жүйелі және жүйесіз Кулондық функциялары және δ_l – фазалық ығысу [19].

Бастапқы шарт бойынша $t = -\infty$ үшін жүйе негізгі күйде $l_0 j_0 m_0$ және энергиясы $E_0 < 0$, сонда сәйкес толқындық функция:

$$\psi^{(m_0)}(r, -\infty) = \phi_{l_0 j_0 m_0}(E_0, r) \quad (9)$$

Уақытқа тәуелді $\psi^{(m_0)}(\mathbf{r}, t)$ толқындық функциясы m_0 шамасының әртүрлі мәндері үшін есептелуі тиіс. Сонымен қатар, сандық мәні белгіліб көздеу параметрінен де тәуелді болады. Энергия бірлігінде күйреудің ықтималдылығы келесі түрде анықталады:

$$\frac{dP}{dE}(E, b) = \frac{2\mu}{\pi \hbar^2 k} \frac{1}{2j_0 + 1} \sum_{m_0} \sum_{ljm} |\langle \phi_{ljm}(E, r) | \psi^{(m_0)}(r, +\infty) \rangle|^2 \quad (10)$$

мұндағы k толқындық сан. [20]. Толқындық сан снаряд меншікті күйінің шашыратылуының толық бұрмалануын да сипаттайды. Кулондық күйреу қимасы:

$$\frac{d\sigma_{bu}}{dE}(E) = 2\pi \int_0^\infty \frac{dP}{dE}(E, b) b db \quad (11)$$

Қозған nlj байланысқан күйге серпімсіз шашырау қимасы былай есептеледі:

$$\sigma_{nlj}(E) = 2\pi \int_0^\infty P_{nlj}(b) b db, \quad (12)$$

мұндағы:

$$P_{nlj}(b) = \frac{1}{2j_0 + 1} \sum_{m_0} \sum_m |\langle \phi_{nljm}(E_{nlj}, r) | \psi^{(m_0)}(r, +\infty) \rangle|^2 \quad (13)$$

Нақты кулондық күйреуінің ықтималдығы:

$$\sum_{nlj} P_{nlj}(b) + \int_0^\infty \frac{dP}{dE}(E, b) dE = 1 \quad (14)$$

Нәтижелер. Күйреудің көлденең қимасы ^{11}Be снаряды үшін ^{208}Pb нысанасында есептеледі. $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$ нейтрондарды көшіру реакциясы қозған ядролары бар моделдермен үйлесетін кималарды қамтамасыз етеді [20]. Зерттеу барысында нейтрондардың ^{11}Be ядросынан ^9Be ядросына көшуі негізгі күйдің шамамен 20% сәйкес келеді. ^{11}Be және ^{15}C ядроларының екеуі де тек қос байланысқан күйлері бар әлсіз байланысқан гало ядролар болып табылады. Бұл байланысқан күйлер кеңейтілген нейтронды орбиталарға ие. ^{11}Be және ^{15}C ядроларының айырмашылығы-байланысқан күйлер ^{11}Be ядросында теріс жұптылыққа және ^{15}C ядросында оң жұптылыққа ие болады. Сондықтан бұл ядролардың Кулондық қозулары басқаша болады.

Кулондық қозу ықтималдықтары ^{15}C ядросының $5/2^+$ күйі үшін ^{11}Be ядросының $1/2^-$ күйіне қарағанда аз болады, өйткені үстем ауысу $E2$ мультиполине, ал ^{11}Be үшін $E1$ ауысуына сәйкес келеді. Басқа айырмашылықтар ядролық эффекттерге қатысты. ^{11}Be үшін оптикалық потенциалдар көмегімен алынған ықтималдықтар барлық көздеу параметрлері кезіндегі таза кулондық әсерлесумен алынған ықтималдықтарға қарағанда әлдеқайда аз. ^{15}C үшін аз Кулондық ықтималдықтар шамамен 10 фм кесу кезіндегі ядролық күшпен айтарлықтай күшейеді.

Оптикалық потенциал көмегімен алынған күйреудің толық көлденең кималары ^{11}Be үшін энергиялары 72 МэВ/нуклон кезінде 0.690b тең. ^{15}C үшін қима энергиялары 68 МэВ/нуклон кезінде 0.0164b тең. Екі гало ядросының күйреуінің көлденең кималары серпімсіз кималарға қарағанда мәні бойынша айтарлықтай жақын, өйткені екі ядро да $E1$ ауысуы басым болады. Дегенмен, ^{11}Be қимасы осы ядроның байланыс энергиясының аз болуынан көбірек болады. Осы себептен қиманың максимум мәні төмен энергиялар кезінде болады [17].

Қорытынды. Уақыттан тәуелді Шредингер теңдеуі әртүрлі квазиклассикалық жуықтаудағы нысанасы бар ядролық және кулондық әсерлесудегі снарядтың ыдырауын бейнелейді. Бұл теңдеуді бұрыштық және радиалды торда шешудің сандық әдісі энергиялары шамамен 70 МэВ /нуклон кезіндегі ^{11}Be гало ядросының күйреуіне қолданылған.

Кеңейтілген радиалды торлар нысанамен әсерлескеннен кейінгі үлкен қашықтықтардағы толқындық функцияларды жақсы бейнелеу үшін қажет. ^{11}Be ядросының ^{208}Pb ядросына күйреуінің көлденең қимасы снаряд пен нысана арасындағы әсерлесудің ядролық бөлігін жақсы сипаттайтын оптикалық потенциалдар көмегімен есептеледі [18].

^{11}Be және ^{15}C үшін серпімсіз кималар қозған күйлердің жұптылығының әсерінен әртүрлі болады. Күйреудің көлденең қималары ^{15}C үшін ^{11}Be қарағанда байланыс энергиясының көптігіне байланысты біршама аз болады.

Гало ядролардың күйреуінің нақты сипаттамасы бейстационар Шредингер теңдеуін сандық шешу жолымен алынуы мүмкін, бірақ айтарлықтай шектеулермен. Бұл жұмыста бір нейтронды гало ядроларды сипаттайтын моделдер теориялық зерттелді және болашақта бұл әдісті стационар емес тәсілде екі нейтронды гало ядролардың күйреуін зерттеу үшін қолдану жоспарлануда.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Capel P., Baye D., Melezhik V.S. Phys. Rev. C **68**, 2003, P.014612.
- [2] Typel S. and Baur G. Phys. Rev. C **50**, 1994, P.2104.
- [3] Esbensen H. and Bertsch G.F. Nucl. Phys. A **600**, 1996, P.37.
- [4] Typel S., Wolter H.H. and Baur G. Nucl. Phys. A **613**, 1997, P.147.
- [5] Typel S. and Baur G. Phys. Rev. C **64**, 2001, P.024601.
- [6] Tostevin J.A., Rugmai S. and Johnson R.C. Phys. Rev. C **57**, 1998, P.3225.
- [7] Banerjee P. and Shyam R. Phys. Rev. C **61**, 2000, P.047301.
- [8] Kamimura M., Yahiro M. et al, Prog. Theor. Phys. Suppl. **89**, 1986, P.1.
- [9] Austern N., Iseri Y., Kamimura M. et al, Phys. Rep. **154**, 1987, P.125.
- [10] Tostevin J.A., Nunes F.M. and Thompson I.J. Phys. Rev. C **63**, 2001, P.024617.
- [11] Mortimer J., Thompson I.J. and Tostevin J.A. Phys. Rev. C **65**, 2002, P.064619.
- [12] Kido T., Yabana K. and Suzuki Y. Phys. Rev. C **50**, 1994, R1276.
- [13] Kido T., Yabana K. and Suzuki Y. Phys. Rev. C **53**, 1996, P.2296.
- [14] Esbensen H. and Bertsch G.F. Phys. Rev. C **59**, 1999, P.3240.
- [15] Typel S., Wolter H.H. and Naturforsch. Z. A: Phys. Sci. **54**, 1999.
- [16] Melezhik V.S. and Baye D. Phys. Rev. C **59**, 1999, P.3232.
- [17] Melezhik V.S. and Baye D. Phys. Rev. C **64**, 2001, P.054612.
- [18] Typel S. and Shyam R. Phys. Rev. C **64**, 2001, P.024605 (in Eng.).
- [19] Melezhik V.S. and Schmelcher P. Phys. Rev. Lett. **84**, 2000, P.1870 (in Eng.).
- [20] Capel P., Baye D. and Melezhik V.S. Phys. Lett. B **552**, 2003, P.145 (in Eng.).

REFERENCES

- [1] Capel P., Baye D., Melezhik V.S. Phys. Rev. C **68**, 2003, P.014612 (in Eng.).
- [2] Typel S. and Baur G. Phys. Rev. C **50**, 1994, P.2104 (in Eng.).
- [3] Esbensen H. and Bertsch G.F. Nucl. Phys. A **600**, 1996, P.37 (in Eng.).
- [4] Typel S., Wolter H.H. and Baur G. Nucl. Phys. A **613**, 1997, P.147 (in Eng.).
- [5] Typel S. and Baur G. Phys. Rev. C **64**, 2001, P.024601 (in Eng.).
- [6] Tostevin J.A., Rugmai S. and Johnson R.C. Phys. Rev. C **57**, 1998, P.3225 (in Eng.).
- [7] Banerjee P. and Shyam R. Phys. Rev. C **61**, 2000, P.047301 (in Eng.).
- [8] Kamimura M., Yahiro M. et al, Prog. Theor. Phys. Suppl. **89**, 1986, P.1 (in Eng.).
- [9] Austern N., Iseri Y., Kamimura M. et al, Phys. Rep. **154**, 1987, P.125 (in Eng.).
- [10] Tostevin J.A., Nunes F.M. and Thompson I.J. Phys. Rev. C **63**, 2001, P.024617 (in Eng.).
- [11] Mortimer J., Thompson I.J. and Tostevin J.A. Phys. Rev. C **65**, 2002, P.064619 (in Eng.).
- [12] Kido T., Yabana K. and Suzuki Y. Phys. Rev. C **50**, 1994, P.1276 (in Eng.).
- [13] Kido T., Yabana K. and Suzuki Y. Phys. Rev. C **53**, 1996, P.2296 (in Eng.).
- [14] Esbensen H. and Bertsch G.F. Phys. Rev. C **59**, 1999, P.3240 (in Eng.).
- [15] Typel S., Wolter H.H. and Naturforsch. Z. A: Phys. Sci. **54**, 1999 (in Eng.).
- [16] Melezhik V.S. and Baye D. Phys. Rev. C **59**, 1999, P.3232 (in Eng.).
- [17] Melezhik V.S. and Baye D. Phys. Rev. C **64**, 2001, P.054612 (in Eng.).
- [18] Typel S. and Shyam R. Phys. Rev. C **64**, 2001, P.024605 (in Eng.).
- [19] Melezhik V.S. and Schmelcher P. Phys. Rev. Lett. **84**, 2000, P.1870 (in Eng.).
- [20] Capel P., Baye D. and Melezhik V.S. Phys. Lett. B **552**, 2003, P.145 (in Eng.).

**С.А. Жаугашева¹, Д.С. Валиолда¹, Д.М. Джансейтов^{1,2},
Н.К. Жусупова¹, Ж. Сериков¹, Ф. Айтжан¹**

¹ Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

² Институт ядерной физики, Алматы, Казахстан

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КУЛОНОВСКОГО РАЗВАЛА ГАЛО ЯДЕР ¹¹Be, ¹⁵C

Аннотация. Целью работы является теоретическое исследование процессов кулоновского развала гало ядер в рамках нестационарного квантово-механического подхода. Кулоновский развал ядер является одним из основных инструментов в изучении гало ядер. Теоретическое исследование гало ядер актуальны с планируемыми экспериментами по изучению легких ядер на радиоактивных пучках.

Среди гало ядер, ядро ¹¹Be имеет особое значение, так как относительная простота его структуры позволяет более точные теоретические исследования. В самом деле, связанные состояния ядра ¹¹Be можно достаточно хорошо описать как ядро ¹⁰Be и слабосвязанный нейтрон. С хорошим приближением, распад можно рассматривать как переход от двухчастичного связанного состояния к континууму из за изменяющегося Кулоновского поля. В данной работе численная схема разложения нестационарного уравнения Шредингера на угловые и радиальные сетки были применены к развалу ядра ¹¹Be на мишени ²⁰⁸Pb при энергиях около 70 МэВ/Нуклон.

Ключевые слова: кулоновский развал, гало ядро, нейтронное гало, вероятность развала, сечение развала, нестационарное уравнение Шредингера.

Авторлар жайында мәліметтер:

Жаугашева Сауле Аманбаевна - физика-математика ғылымдарының кандидаты, теориялық және ядролық физика кафедрасының профессор м.а., Физика-техникалық факультеті, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

Валиолда Динара Салаватқызы - теориялық және ядролық физика кафедрасының PhD докторанты және оқытушысы, Физика-техникалық факультеті, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Байланыс телефоны: +7707 392 92 62, e-mail: Valiolda.dinara@gmail.com;

Джансейтов Данияр Маралович - PhD, теориялық және ядролық физика кафедрасының оқытушысы, Физика-техникалық факультеті, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ; Ядролық физика институтының кіші ғылыми қызметкері;

Жусупова Назым Кайрхановна - теориялық және ядролық физика кафедрасының жетекші маманы, Физика-техникалық факультеті, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

Сериков Жандос - теориялық және ядролық физика кафедрасының 5 курс студенті, Физика-техникалық факультеті, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

Айтжан Фариза - теориялық және ядролық физика кафедрасының 5 курс студенті, Физика-техникалық факультеті, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 86 – 94

S.A. Zhaugasheva, G.G. Saidullaeva,
G.S. Nurbakova, N. Khabyl, M.M. Turarbekova

Al-Farabi Kazakh National University. Almaty, Kazakhstan
sazh_74@mail.ru guzch_08@mail.ru nuigui@mail.ru makosya..93@mail.ru

**DETERMINATION PROPERTIES OF HEAVY DECAY
IN THE B(B_s) MESON IN THE FRAMEWORK
OF THE RELATIVISTIC CHARACTER OF THE INTERACTION**

Abstract. Considering the surge of great interest to the problem of CP violation recently observed in a $B_s - \bar{B}_s$ system, decays of B_s to $D - \bar{D}_s$ and color suppressed decay $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ attracted the attention of both theorists and experimentalists. Using the available experimental data on two-particle radiative decays of pseudoscalar and vector mesons, made a global fit and the parameters of the model.

Key words: $B_s - \bar{B}_s$ system, mesons, global fit, decays of B_s , radiative decays of pseudoscalar and vector mesons.

С.А. Жаугашева, Г.Г. Сайдуллаева,
Г.С. Нурбакова, Н. Хабыл, М.М. Турарбекова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ТЯЖЕЛОГО В (BS) - МЕЗОНА
В РАМКАХ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Аннотация. В свете интереса к CP-нарушению в системе $B_s - \bar{B}_s$ которое экспериментально наблюдается, а также связанными с этой проблемой нелептонные распады B_s -мезона в $D - \bar{D}_s$ -пары и подавленный по цвету распад $B_s \rightarrow J/\psi\phi$, изучены свойства B_s -мезона в развитом подходе. Используя имеющиеся экспериментальные данные по двухчастичным радиационным распадам псевдоскалярных и векторных мезонов, выполнен глобальный фит и определены параметры модели.

Ключевые слова: B_s -мезоны, $D - \bar{D}_s$ -пары, мезоны, векторные мезоны, нелептонные распады, двухчастичные радиационные распады, псевдоскалярные мезоны.

В данной работе исследовали редкие распады тяжелых мезонов. Тяжелый распад В-мезонов является одной из важных исследований при изучении новых экзотических состояний, нарушении CP-инвариантности и т.д. Одной из актуальных проблем современных исследований микромира является изучение структуры квантовых систем. В 20-ом веке в этом направлении проведено много исследований. Практически каждое открытие в данной области нашло практическое применение и дало возможность создания современных высоких технологий. Так, например, открытие структуры атома стало толчком в развитии микроэлектроники, а открытие структуры ядра и понимание взаимодействия нуклонов привело к созданию атомной электростанций, т.е. к новому источнику энергии. В настоящий момент в международных крупных научных центрах мира, интенсивно изучают структуру, образование и взаимодействие адронов. Появились

многочисленные международные коллаборации по этим направлениям. В частности, Большой адронный коллайдер (БАК) в ЦЕРНе (Женева, Швейцария) работает именно над изучением структуры адронов, природы их взаимодействия и над проверкой предсказаний стандартной модели. В связи с возросшей точностью измерений, возрос интерес к изучению редких распадов тяжёлых адронов-адронов, имеющих в своём составе один или два тяжёлых кварка ("bottom" и/или "charm"). Их изучение позволит определить значения параметров стандартной модели, таких как матричные элементы матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава и параметры CP-нарушения. Интригующим моментом экспериментальных исследований является также поиск возможных проявлений новой физики, лежащей за пределами стандартной модели. В частности, для этой цели весьма интересными оказались редкие распады B и B_s мезонов, идущие с изменением b —флэйвора.

Основная сложность при теоретическом описании свойств адронов и тем, более экзотических состояний состоит в необходимости использования непertурбативных методов, т.е. выхода за рамки теории возмущений квантовой хромодинамики (КХД). Как правило, данные методы сводятся к построению моделей, которые, с одной стороны, отражают основные свойства КХД, а с другой стороны позволяют производить расчёты матричных элементов реальных физических процессов в непertурбативной области.

Данная статья посвящена теоретическому изучению свойств B_s – мезона расчёту матричных элементов и ширин редких распадов нейтральных странных B -мезонов в рамках релятивистской модели кварков.

1 Релятивистский характер взаимодействия

Ковариантная модель кварков является эффективным квантовополевым подходом к адронным взаимодействиям, основанным на лагранжиане взаимодействия адронов с их составляющими кварками. Знание соответствующего интерполирующего кваркового тока позволяет вычислять самосогласованным образом матричные элементы физических процессов. Отличительной особенностью данного подхода является то, что многокварковые состояния, такие как барионы (три кварка), тетракварки (четыре кварка) и т.д., могут быть рассмотрены и описаны на том же уровне строгости, как и простейшие кварк-антикварковые системы (мезоны). Константы связи адронов с их интерполирующими кварковыми токами определяются из условия связности $Z_H = 0$, предложенного в [1, 2] и в дальнейшем используемого во многих разделах физики частиц [3]. Здесь Z_H есть константа перенормировки волновой функции адрона. Матричные элементы физических процессов определяются набором кварковых диаграмм, которые строятся в соответствии с $1/N_c$ – разложением.

В ковариантной модели кварков эффективным образом вводится инфракрасное обрезание в пространстве параметров Фока – Швингера, по которым проводится интегрирование в выражениях для матричных элементов. Такая процедура позволяет устранить все пороговые сингулярности, соответствующие рождению кварков, и тем самым гарантировать конфайнмент кварков. В модели отсутствуют ультрафиолетовые расходимости, благодаря вершинным адрон-кварковым формфакторам, которые описывают нелокальную структуру адронов. Ковариантная модель кварков содержит несколько свободных параметров: массы конституэнтных кварков, параметр инфракрасного обрезания, который характеризует область конфайнмента, и параметры, которые описывают эффективный размер адронов.

Основной идеей теоретических исследований в области тяжелых кварков является отделение вклада малых расстояний, описание которых возможно в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД), от вкладов больших расстояний, для описания которых необходимо привлекать непertурбативные методы. Наиболее популярным и простым методом является так называемая *наивная* факторизация, основанная на выводе эффективных слабых гамильтонианов, которые описывают слабые переходы кварков и лептонов. Эффективные гамильтонианы слабых взаимодействий представляют собой набор локальных кварк-кварковых и кварк-лептонных

операторов, умноженных на так называемые коэффициенты Вильсона [4]. Коэффициенты Вильсона характеризуют динамику малых расстояний и могут быть оценены пертурбативными методами с помощью операторных разложений. При вычислении матричных элементов локальных операторов между начальными и конечными состояниями требуется использовать непertурбативные методы. При этом, необходимо знать, каким образом адроны построены из кварков. Технически, любой матричный элемент локального оператора может быть выражен через набор лоренцевых структур, умноженных на скалярные функции, которые зависят от кинематических переменных. Данные скалярные функции называются формфакторами.

Помимо наивной факторизации существуют более продвинутые методы отделения вкладов малых и больших расстояний. Это так называемая КХД факторизация и эффективная теория SCET (Soft-Collinear Effective Theory). Эти подходы выводят теоремы факторизации, которые позволяют дать систематическое описание того или иного процесса в терминах "мягких" и "жестких" матричных элементов [5-8].

Существует достаточно много теоретических подходов для вычисления необходимых адронных формфакторов. Упомянем некоторые из них. Считается, что наиболее модельно-независимым подходом является подход правил сумм КХД на световом конусе [9-10]. В рамках правил сумм на световом конусе можно вычислить формфакторы лишь в области достаточно малых переданных импульсов (или больших отдач). Вычисленные формфакторы затем экстраполируются в область больших переданных импульсов (или малых отдач) с помощью полных аппроксимаций. В [11] был разработан систематический подход для описания редких распадов $B \rightarrow K^* l^+ l^-$ в области малых отдач с помощью эффективной теорией тяжелых кварков. Подробный анализ распадов с малой отдачей с использованием данного подхода позднее был проделан в работе [12,13].

Приведем несколько модельных подходов для вычисления форм-факторов, основанных на иных принципах, нежели подход правил сумм на световом конусе. Это:-

- уравнения Дайсона-Швингера в КХД [14];
- модель конституэнтных кварков с использованием дисперсионных соотношений [15-16];
- релятивистская кварковая модель с использованием потенциалов [17];
- релятивистская потенциальная модель КХД [18, 19];
- правила сумм КХД [20, 21];

Следует подчеркнуть, что в рамках ковариантной кварковой модели адронные формфакторы могут быть вычислены во всей кинематической области импульсных переменных.

1.1 Эффективный лагранжиан, условие связанности и инфракрасный конфейнмент.

Взаимодействие мезона $H(q_1 \bar{q}_2)$ с его составными кварками q_1 и q_2 описывается эффективным лагранжианом [22]

$$L_{\text{int } H_{qq}}(x) = g_H H(x) \int dx_1 \int dx_2 F_H(x, x_1, x_2) \cdot \bar{q}_2(x_2) \Gamma_H q_1(x_1) + H.c. \quad (1.1)$$

Γ_H - матрицы Дирака или строки матрицы Дирака, которые проектируется на спиновое квантовое число мезонного поля $H(x)$. В данном случае, структура Дирака для псевдоскалярного мезона γ^5 для векторного мезона γ^μ . Функция F_H связано со скалярной частью амплитуды Бете-Солпитера и характеризует ограниченный размер мезона. Чтобы удовлетворить трансляционной инвариантности скалярная функция F_H должен удовлетворить соотношения $F_H(x+a, x_1+a, x_2+a) = F_H(x, x_1, x_2)$ для любых четырех векторов a . Конкретные формы, которая удовлетворяет трансляционной инвариантности записывается в виде

$$F_H(x, x_1, x_2) = \delta(x - w_1 x_1 - w_2 x_2) \Phi_H((x_1 - x_2)^2) \quad (1.2)$$

где, Φ_H корреляционная функция двух конституэнтных кварков с массами m_{q_1}, m_{q_2} и

$$\text{отношения масс } w_i = \frac{m_{q_i}}{m_{q_1} + m_{q_2}}.$$

Константа связи в формуле (1.1) ограничена так называемым условием связанности, использовался в работе [22]. Для выполнения условия связанности необходимо равенство нулю константа перенормировки элементарного мезонного поля $H(x)$:

$$Z_H = 1 - \frac{3g_H^2}{4\pi^2} \tilde{\Pi}'_H(m_H^2) = 0 \quad (1.3)$$

где $\tilde{\Pi}'_H$ - производная от массового оператора мезона. Чтобы выяснить физический смысл условия связанности в формуле (1.3), для начала напомним, что константа перенормировки $Z_H^{1/2}$ может также интерпретироваться как матричный элемент между физическим и соответствующий ему «голым» состоянием. Условие $Z_H = 0$ означает, что физическое состояние не содержит «голых» состояний и соответственно описывается как связанное состояние. Лагранжиан взаимодействия уравнения (1.1) и соответствующие свободные части лагранжиана описать как составляющих (кварков) и физических частиц (адронов), которые рассматриваются как связанные состояния кварков. В результате взаимодействия, физические частицы «одет», т.е. его масса и волновая функция должна быть перенормирована.

В более знакомой обстановке, условие связанности $Z_H = 0$ гарантирует правильную нормировку заряда заряженных частиц при нулевой передаче импульса. В этом можно убедиться с помощью идентичности, касающиеся производной свободно-кваркового пропагатора (с петлевым импульсом $k + p$) с электромагнитной γ_μ связью к тому же пропагатору в точке с импульсом равной нулю. Идентичность записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{m_q - k - p} = \frac{1}{m_q - k - p} \gamma^\mu \frac{1}{m_q - k - p} \quad (1.4)$$

Левая сторона уравнения (1.4) нормируется в связи с условием связанности, следовательно, правая сторона также нормирована.

Условие $Z_H = 0$ также эффективно исключает конституэнтные степени свободы из пространства физических состояний. Конституэнты существуют только в виртуальных состояниях. Одним из следствий условия связанности является отсутствие прямого взаимодействия «одетых» заряженных частиц с электромагнитным полем. Принимая во внимание так трехуровневой диаграммы, как и диаграммы с вставками собственной энергии во внешние концы (т.е. деревообразная диаграмма $Z_H - 1$) дает общий фактор Z_H , который равен нулю.

В случае псевдоскалярных и векторных мезонов, производная массового оператора мезона, входящий в уравнение (1.3) может быть вычислена из однопетлевой двухточечной функции, заданной

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}'_P(p^2) &= \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{d}{dp^\alpha} \int \frac{d^4k}{4\pi^2 i} \tilde{\Phi}_P^2(-k^2) \text{tr}[\gamma^5 S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_1(k - w_1 p)] \\ &= \frac{1}{2p^2} \int \frac{d^4k}{4\pi^2 i} \tilde{\Phi}_P^2(-k^2) \{w_1 \text{tr}[\gamma^5 S_1(k + w_1 p) p \gamma^5 S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_2(k - w_2 p)]\} \\ &\quad - w_2 \text{tr}[\gamma^5 S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_2(k - w_2 p) p S_2(k - w_2 p)]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}'_V(p^2) &= \frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{d}{dp^\alpha} \int \frac{d^4 k}{4\pi^2 i} \tilde{\Phi}_V^2(-k^2) \text{tr}[\gamma^\mu S_1(k + w_1 p) \gamma^\nu S_2(k - w_2 p)] \\ &= \frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{2p^2} \int \frac{d^4 k}{4\pi^2 i} \tilde{\Phi}_P^2(-k^2) \{ w_1 \text{tr}[\gamma^\mu S_1(k + w_1 p) p S_1(k + w_1 p) \gamma^\nu S_2(k - w_2 p)] \} \\ &\quad - w_2 \text{tr}[\gamma^\mu S_1(k + w_1 p) \gamma^\nu S_2(k - w_2 p) p S_2(k - w_2 p)] \}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\tilde{\Phi}_H(-k^2)$ фурье-образ вершинной функции $\Phi_H((x_1 - x_2)^2)$, $S_i(k)$ пропагатор свободных кварков выражается в следующем виде

$$S_i(k) = \frac{1}{m_{q_i} - \not{k}} \quad (1.6)$$

и m_{q_i} эффективная конституентная масса кварка.

Для удобства в вычислениях, выберем простую гауссовскую форму вершинной функции

$$\bar{\Phi}_H(-k^2) = \exp(k^2 / \Lambda_H^2) \quad (1.7)$$

где параметр Λ_H характеризует размер соответствующего связанного состояния мезона H . Поскольку k^2 превращается в $-k_E^2$ в евклидовом пространстве, форма (1.8) имеет соответствующий спад поведения в евклидовой области. Подчеркнем, что любой выбор для H является соответствующим, если он падает достаточно быстро, в ультрафиолетовой области евклидова пространства, чтобы сделать соответствующую диаграмму Фейнмана ультрафиолетово-конечным.

Технические детали одно-петлевой интеграции, например, в формуле (1.6) можно найти в работе. [10]. Отметим, что мы используем представление Швингера, чтобы написать локальный пропагатор кварков

$$S(k) = (m + \not{k}) \int_0^\infty d\beta e^{-\beta(m^2 - k^2)} \quad (1.8)$$

В показателе появился импульс петли, который позволяет очень эффективно бороться с тензорным петлевым интегралом путем преобразования петлевого импульса в производные

$$k_i^\mu e^{2kr} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_{i\mu}} e^{2kr} \quad (1.9)$$

Мы написали программу FORM [23], которая дает возможность достичь необходимой коммутации дифференциальных операторов эффективным способом.

После выполнения петлевой интеграции, получим

$$\Pi = \int_0^\infty d^n \beta F(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad (1.10)$$

для данной диаграмм Фейнмана Π , где F обозначает всю структуру данной диаграммы. Массовый оператор в уравнении (1.5), имеет три пропагатора, и, таким образом, имеется три параметра Швингера $\beta_i (i = 1, 2, 3)$. Для переходных форм факторов, которые будут обсуждаться в дальнейшем, нужны еще три пропагатора ведущих снова к $n = 3$.

Далее, вкратце опишем, как инфракрасный конфайнмент реализован [22] для кварковых петель. Во-первых, отметим, что набор параметров Швингера β_i могут быть превращены в

симплексы введением дополнительного t интегрирования

$$1 = \int_0^{\infty} dt \delta(t - \sum_{i=1}^n \beta_i) \quad (1.11)$$

который приводит к

$$\Pi^c = \int_0^{\infty} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n).$$

В данном случае есть в целом n численного интегрирования: $(n-1)$ – интегрирования по параметрам α и интегрирование по размерному параметру t . Очень большая t область соответствует области, где начинают появляться сингулярности диаграммы с локальным кварковым пропагатором. Однако, как описано в работе [22], если ввести инфракрасный обрез на верхнем пределе t интегрирования, все сингулярности исчезают, так как интеграл в данном случае является аналитической при любом значении кинематических переменных. Мы отрезали верхнее интегрирование в $1/\lambda^2$ и получили

$$\Pi^c = \int_0^{1/\lambda^2} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n). \quad (1.12)$$

Вводя инфракрасное обрезание, мы сняли все возможные пороги в кварк-петлевой диаграмме, т.е. кварки никогда не выходят за пределы, таким образом, фактический выполняется принцип конфайнмента. Параметр обрезания λ выбирается таким, чтобы он был одинаков для всех физических процессов, то есть инфракрасный параметр является универсальным. Численные вычисления интегралов было сделано с помощью программы, написанная на Фортране.

1.2. Формфакторы переходов P-P, P-V

Прежде всего мы дадим определение формфакторов переходов псевдоскаляр-псевдоскаляр и псевдоскаляр-вектор:

$$\begin{aligned} \langle P'_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) | \bar{q}_2 O^\mu q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle &= N_c g_P g_{P'} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k+w_{13})^2) \tilde{\Phi}'_{P'}(-(k+w_{23})^2) \\ \times \text{tr}[O^\mu S_1(k+p_1) \gamma^5 S_3(k) \gamma^5 S_2(k+p_2)] &= F_+(q^2) P^\mu + F_-(q^2) q^\mu, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \langle P'_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) | (\bar{q}_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu) q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle &= N_c g_P g_{P'} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k+w_{13})^2) \tilde{\Phi}_{P'}(-(k+w_{23})^2) \\ \times \text{tr}[\sigma^{\mu\nu} q_\nu S_1(k+p_1) \gamma^5 S_3(k) \gamma^5 S_2(k+p_2)] &= \frac{i}{m_1 + m_2} (q^2 P^\mu - q \cdot P q^\mu) F_T(q^2), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \langle V(p_2, \epsilon_2)_{[\bar{q}_3 q_2]} | \bar{q}_2 O^\mu q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle &= N_c g_P g_V \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k+w_{13})^2) \tilde{\Phi}_V(-(k+w_{23})^2) \\ \times \text{tr}[O^\mu S_1(k+p_1) \gamma^5 S_3(k) \not{\epsilon}_2^+ S_2(k+p_2)] &= \frac{\epsilon_v^+}{m_1 + m_2} (-g^{\mu\nu} P \cdot q A(q^2) + P^\mu P^\nu A_+(q^2) \\ + q^\mu P^\nu A_-(q^2) + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta V(q^2)), \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
 & \langle V(p_2, \epsilon_2)_{[\bar{q}_3 q_2]} | \bar{q}_2 (\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle \\
 &= N_c g_P g_V \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k + w_{13})^2) \tilde{\Phi}_V(-(k + w_{23})^2) \\
 & \times \text{tr}[(\sigma^{\mu\nu} q_1 (1 + \gamma^5)) S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \not{\epsilon}_2^+ S_2(k + p_2)] = \epsilon_2^+ (-g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2) P \cdot q a_0(q^2) \\
 & + (P^\mu P^\nu - q^\mu P P^\nu \cdot q / q^2) a_+(q^2) + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta g(q^2).
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Используем обозначения $P = p_1 + p_2$ и $q = p_1 - p_2$. Для векторных мезонов на массовой поверхности $\epsilon_2^+ \cdot p_2 = 0$. И для всех мезонов $p_i^2 = m_i^2$. Поскольку имеются три вида кварков, участвующих в переходе, мы ввели два индекса: $w_{ij} = \frac{m_{qj}}{m_{qi} + m_{qj}}$, ($i, j = 1, 2, 3$) так, что $w_{ij} + w_{ji} = 1$. Формфакторы в уравнении (1.17) удовлетворяют условию $a_0(0) = a_+(0)$, которые гарантирует, что кинематическая сингулярность не возникает в матричном элементе при $q^2 = 0$. Для полноты картины мы даем связь наших формфакторов с определениями, используемыми в ряде других работ, [10]. Эти соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 F_+ &= f_+, \quad F_- = -\frac{m_1^2 + m_2^2}{q^2} (f_+ - f_0), \quad F_T = f_T, \quad A_0 = \frac{2m_2(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)} A_1, \\
 A_+ &= A_2, \quad A_- = \frac{2m_2(m_1 + m_2)}{q^2} (A_3 - A_0), \quad V = V, \quad a_0 = T_2, \\
 g &= T_1, \quad a_+ = T_2 + \frac{q^2}{m_1^2 - m_2^2} T_3.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Форм факторы (1.18) удовлетворяют следующие ограничения

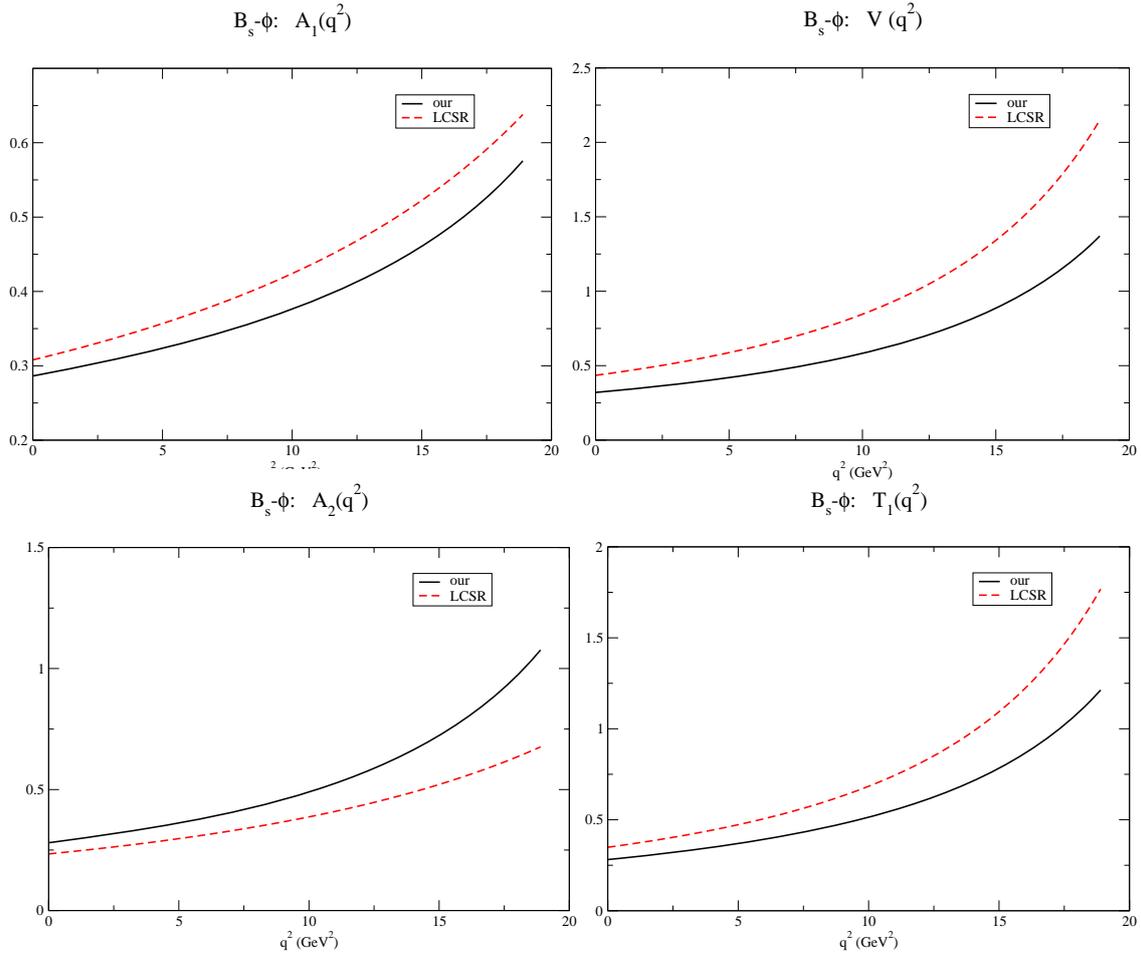
$$A_0(0) = A_3(0), \quad 2m_2 A_3(q^2) = (m_1 + m_2) A_1(q^2) - (m_1 - m_2) A_2(q^2). \tag{1.19}$$

На рис. 11-а,б,с,д мы проводим поведение формфакторов, вычисленных в рамках ковариантной кварковой модели во всей кинематической области $0 \leq q^2 \leq q_{\max}^2$.

Как было предложено в работах [8, 9], можно проверить насколько хорошо формфакторы, вычисленные в ковариантной кварковой модели, удовлетворяют трем соотношениям при малой отдаче, полученными в работе [11] для трех пар формфакторов (T_1, V) , (T_2, A) , (T_3, A_2) .

$$R_1 = \frac{T_1(q^2)}{V(q^2)}, \quad R_2 = \frac{T_2(q^2)}{A_1(q^2)}, \quad R_3 = \frac{q^2 T_3(q^2)}{m_B^2 A_2(q^2)}, \tag{1.20}$$

Эти соотношения в пределе симметрии тяжелых кварков и при малой отдаче све должны быть порядка $1 - (2\alpha / (3\pi)) \ln(\mu / m_b)$, т.е. близко к 1. Из рисунков 1, 2 следует, что также как и экстраполированные формфакторы в правилах сумм на световом конусе, фромфакторы, полученные в ковариантной кварковой модели, удовлетворяют достаточно хорошо в случае R_1 и R_2 . Согласие на очень хорошее в случае отношения R_3 .



внениями (1.14) и (1.15). Левая панель для $B - \pi$ перехода, правая панель для $B - K$ перехода. Для сравнения приведены кривые работы по LCSR [9]

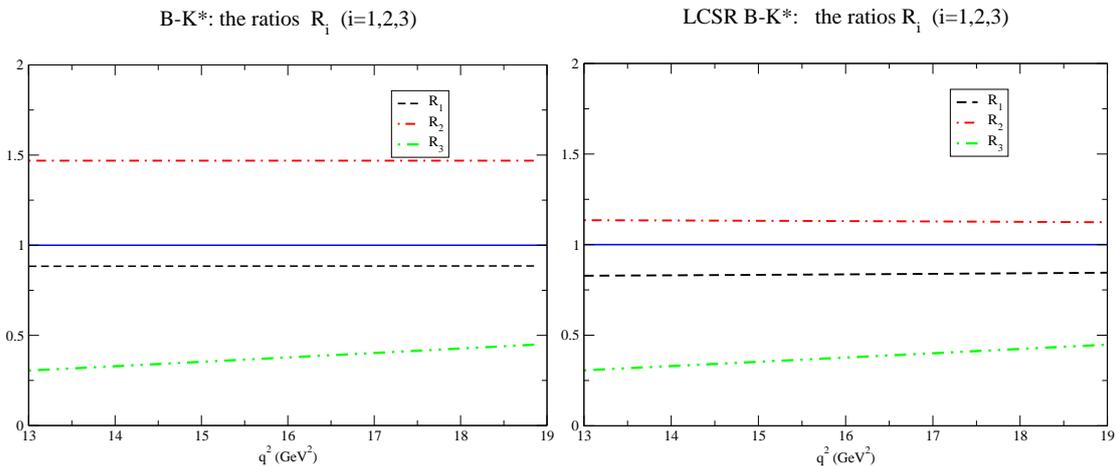


Рисунок 2 - Результаты для отношений формфакторов, определенных в уравнении (1.20) для $B - K^*$ перехода

Заключение

Используя имеющиеся экспериментальные данные по двухчастичным радиационным распадам псевдоскалярных и векторных мезонов, а так же имеющиеся экспериментальные данные, так и результаты решеточных вычисления для констант лептонных распадов, был выполнен глобальный фит. Затем вычислили формфакторы переходов $B(B_s) \rightarrow P(V)$ во всей кинематической области квадрата переданого импульса.

REFERENCES

- [1] Salam A. *Nuovo Cim.* **1962**, 25, 224 (in Eng).
 [2] Weinberg S. *Phys. Rev.* **1963**, 130, 776 (in Eng).
 [3] Hayashi K. et al. *Fort. Phys.* **1967**, 15, 625 (in Eng).
 [4] Buchalla G., Buras A. J., Lautenbacher M. E. Weak decays beyond leading logarithms *Rev. Mod. Phys.* **1996**, 68, 1125-1144.
 [5] Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C. T. QCD factorization for $B \rightarrow \pi \pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit *Phys. Rev. Lett.* **1999**, 83., 1914.
 [6] Beneke M., Neubert M. QCD factorization for $B \rightarrow PP$ and $B \rightarrow PV$ decays. *Nucl. Phys. B.* **2003**, 675, 333-415.
 [7] Feldmann T. Soft-Collinear Effective Theory: Recent Results and Applications. *PoS CONFINEMENT 8 007*, 2008.
 [8] Bauer C. W., Fleming S., Pirjol D., Stewart I. W. An Effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays. *Phys. Rev. D.* **2001**, 63, 114020.
 [9] Ball P. and Zwicky R. *Phys. Rev. D.* **2005**, 71, 014029.
 [10] Khodjamirian A., Mannel T. et al. *Phys. Rev. D.* **2007**, 75, 054013.
 [11] Grinstein B., Pirjol D. Exclusive rare $B \rightarrow K l^+ l^-$ decays at low recoil: Controlling the long-distance effects. *Phys. Rev. D.* **2004**, 70, 114005.
 [12] Bobeth C., Hiller G., van Dyk D. The Benefits of $B \rightarrow K l^+ l^-$ Decays at Low Recoil. *Journal of High Energy Physics.* **2010**, 1007, 098.
 [13] Bobeth C., Hiller G., van Dyk D. More Benefits of Semileptonic Rare B Decays at Low Recoil: CP Violation. *Journal of High Energy Physics.* **2011**, 1107, 067.
 [14] Ivanov M. A., Körner J. G., Kovalenko S. G., Roberts C. D. B- to light-meson transition form-factors. *Phys. Rev. D.* **2007**, 76, 034018.
 [15] Melikhov D., Nikitin N. and Simula S. Rare exclusive semileptonic $b \rightarrow s$ transitions in the standard model. *Phys. Rev. D.* **1998**, 57, 6814.
 [16] Melikhov D. Dispersion approach to quark-binding effects in weak decays of heavy mesons. *Eur. Phys. J. direct C.* **2002**, 4, 1.
 [17] Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O. New analysis of semileptonic B decays in the relativistic quark model. *Phys. Rev. D.* **2007**, 75, 074008.
 [18] Ladisa M., Nardulli G., Santorelli P. Semileptonic and rare B meson decays into a light pseudoscalar meson. *Phys. Lett. B.* **1999**, 455, 283-290.
 [19] Colangelo P., De Fazio F., Ladisa M., Nardulli G., Santorelli P. and Tricarico A. Semileptonic and rare B meson transitions in a QCD relativistic potential model *Eur. Phys. J. C.* **1999**, 8, 81.
 [20] Colangelo P., De Fazio F., Santorelli P., Scrimieri E. QCD sum rule analysis of the decays $B \rightarrow K l^+ l^-$ and $B \rightarrow K^* l^+ l^-$ *Phys. Rev. D.* **1996**, 53, 3672-3686.
 [21] Colangelo P., Santorelli P. Dependence of the form-factors of $B \rightarrow \pi$ lepton neutrino on the heavy quark mass *Phys. Lett. B.* **1994**, 327, 123-128.
 [22] Vermaseren J. A. M. The FORM project *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **2008**, 183, 19.
 [23] Ivanov M. A., Körner J. G. and Santorelli P. The Semileptonic decays of the Bc meson *Phys. Rev. D.* **2001**, 63, 074010.
 [24] Ivanov M. A., Körner J. G. and Pakhomova O. N. Exclusive semileptonic and nonleptonic decays of the Bc meson *Phys. Rev. D.* **2006**, 73, 054024.
 [25] Ivanov M. A., Körner J. G. and Santorelli P. Semileptonic decays of Bc mesons into charmonium states in a relativistic quark model *Phys. Rev. D.* **2005**, 71, 094006; *Erratum-ibid. D.* **2007**, 75, 019901.
 [26] Nakamura K. et al. Particle Data Group Collaboration. *J. Phys. G G.* **2010**, 37, 075021.
 [27] Altmannshofer W., Ball P., Bharucha A., Buras A. J., Straub D. M., Wick M. Symmetries and Asymmetries $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$ Decays in the Standard Model and Beyond *J. of High Energy Phys.* **2009**, 0901, 019.
 [28] Faller S., Fleischer R., Mannel T. Precision Physics with $B_0 \rightarrow J/\psi \phi$ at the LHC: The Quest for New Physics *Phys. Rev. D.* **2009**, 79, 014005.
 [29] Bobeth C., Misiak M., Urban J. Photonic penguins at two loops and $m(t)$ dependence of $BR[B \rightarrow X(s) lepton^+ lepton^-]$ *Nucl. Phys. B.* **2000**, 574, 291-330.

С.А. Жаугашева, Г.Г. Сайдуллаева, Г.С. Нурбакова, Н. Хабыл, М.М. Турарбекова

әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы

**В(Bs) МЕЗОННЫҢ АУЫР МЕЗОНДАРҒА ЫДЫРАУ ҚАСИЕТІН
РЕЛЯТИВИСТІК ӘСЕРЛЕСУІН ЕСКЕРЕ ОТЫРЫП АНЫҚТАУ**

Аннотация. Тәжірибеде байқалған $B_s - \bar{B}_s$ жүйедегі CP-бұзылуы және лептондық емес B_s -мезонның $D - \bar{D}_s$ - жұпқа және түспен басылған ыдырауы $B_s \rightarrow J/\psi \phi$ қазіргі таңда қызығушылық танытуда, B_s -мезонның ыдырауы релятивистік кварктық модельде зерттелген. Псевдоскалярлы және векторлық мезондардың радиациялық екібөлшекке ыдырау нәтижелерін тәжірибеден ала отырып ғаламдық фит жасалынды және моделдің параметрлері анықталды.

Түйін сөздер: B_s -мезондар, $D - \bar{D}_s$ -косақтар, мезондар, векторлық мезондар, бейлептондық ыдыраулар, ғаламдық фит, псевдоскалярлы және векторлық мезондар.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 95 – 102

B.D. Koshanov, J. Nurikenova

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru, zhibek.nurikenova@mail.ru

ON SOLVABILITY OF THE GENERALIZED DIRICHLET-NEIMAN PROBLEM FOR A HIGH ORDER ELLIPTIC EQUATION

Abstract. For the elliptic equation $2l$ – th order with constant (and only) real coefficients considered boundary value problem of the job normal derivatives the $(k_j - 1)$ – order, $j = 1, \dots, l$ where $1 \leq k_1 < \dots < k_l$. When $k_j = j$ it moves to the Dirichlet problem, and when $k_j = j + 1$ - in the Neumann problem. The sufficient condition of the Fredholm tasks and present a Formula for its index.

Keywords: elliptic equation of high order, normal derivative, Dirichlet -- Neumann problem, solvability of problem.

MSC 34B705, 35J25, 47E05.

УДК 517.951

Б.Д. Кошанов, Ж.С. Нуриkenова

Институт математики и математического моделирования, Алматы

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ - НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для эллиптического уравнения $2l$ -го порядка с постоянными (и только старшими) вещественными коэффициентами рассмотрена краевая задача, заключающаяся в задании нормальных производных $(k_j - 1)$ -го порядка, $j = 1, \dots, l$, где $1 \leq k_1 < \dots < k_l$. При $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j + 1$ – в задачу Неймана. Получено достаточное условие фредгольмовости этой задачи и приведена формула ее индекса.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, нормальные производные, задача Дирихле-Неймана, разрешимость задачи.

MSC 34B705, 35J25, 47E05.

Постановка задачи. Рассмотрим в области D на плоскости эллиптическое уравнение $2l$ -го порядка

$$Lu = f \quad (1)$$

с дифференциальным оператором

$$L = \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \leq r \leq k \leq 2l-1} a_{rk}(x) \frac{\partial^k}{\partial x^{k-r} \partial y^r}$$

с коэффициентами $a_r \in R$ и $a_{rk} \in C^\mu(\bar{D})$, $0 < \mu < 1$.

Область D предполагается односвязной и ограниченной гладким контуром Γ класса $C^{2l,\mu}$. Условие эллиптичности заключается в том, что $a_{2l} \neq 0$ и корни характеристического многочлена $\chi(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{2l}z^{2l}$ не лежат на вещественной оси. Таким образом,

$$\chi(z) = a_{2l} \prod_{k=1}^m (z - v_k)^{l_k} \prod_{k=1}^m (z - \bar{v}_k)^{l_k}, \quad (2)$$

где корни v_i попарно различны, лежат в верхней полуплоскости и их суммарная кратность $l_1 + \dots + l_m$ равна l .

Обобщенная задача Дирихле - Неймана заключается в отыскании решения $u(x, y)$ уравнения (1) в области D по краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad (3)$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq 2l - 1$ и $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Нормальная производная k -го порядка здесь понимается как граничный дифференциальный оператор

$$\left(n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^k u = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} n_1^r n_2^{k-r} \frac{\partial^k u}{\partial x^r \partial y^{k-r}}.$$

При $k_j = j$ эта задача отвечает задаче Дирихле, а при $k_j = j + 1$ ее естественно назвать обобщенной задачей Неймана. Для полигармонического уравнения последняя задача была изучена А.В. Бицадзе [1]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А.Дезиным [2]. При $a_{kr} = 0$ и $f = 0$ задача (1), (3) была рассмотрена в работе [3].

Поскольку по предположению $\Gamma \in C^{2l,\mu}$, функции n_1, n_2 и, значит, коэффициенты граничных дифференциальных операторов (3) принадлежат классу $C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^{2l,\mu}(\bar{D})$, соответственно его правая часть f должна принадлежать $C^\mu(\bar{D})$, а функции g_j в краевом условии (3) - классу $C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma)$.

С уравнением (1) свяжем $2l \times 2l$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_{2l,2} & \dots & -a_{2l-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

которая представляет собой так называемую фробениусовую нормальную форму [4] и ее жорданова нормальная форма полностью определяется своим характеристическим многочленом (2). Более точно, ее жорданова матрица \tilde{J} имеет блочно-диагональную структуру $\tilde{J} = \text{diag}(J, \bar{J})$, $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$ с клетками Жордана

$$J_k = \begin{pmatrix} \nu_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu_k & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_k \end{pmatrix} \in C^{l_k \times l_k}.$$

Матрицу $\tilde{B} \in C^{2l \times 2l}$, приводящую A к жордановой форме \tilde{J} , можно описать явно. С этой целью удобно ввести следующее обозначение. Пусть некоторый n - вектор $g(z) = (g_1(z), \dots, g_n(z))$ аналитичен в окрестности точек ν_1, \dots, ν_m . Тогда исходя из разбиения $l = l_1 + \dots + l_m$, фигурирующего в (2), можем ввести блочную $n \times l$ - матрицу $W_g(\nu_1, \dots, \nu_m) = (W_g(\nu_1), \dots, W_g(\nu_m))$, где матрица $W_g(\nu_k) \in C^{n \times l_k}$ составлена из вектор-столбцов

$$g(\nu_k), g'(\nu_k), \dots, \frac{1}{(l_k - 1)!} g^{(l_k - 1)}(\nu_k).$$

Применим это обозначение к $2l$ - столбцу $h(z) = (1, z, \dots, z^{2l-1})$, полагая

$$B = W_h(\nu_1, \dots, \nu_m) \in C^{2l \times l} \tag{6}$$

Утверждается, что блочная матрица $\tilde{B} = (B, \bar{B})$ обратима и имеет место равенство

$$\tilde{B}^{-1} A \tilde{B} = \tilde{J}. \tag{7}$$

В самом деле, по определению (6) матрицу \tilde{B} можно записать в виде $W_h(\nu_1, \dots, \nu_m, \bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_m)$ и ее определитель, известный как обобщенный определитель Вандермонда, отличен от нуля [5]. Что касается равенства (7), то оно равносильно соотношению

$$A W_h(\nu_1, \dots, \nu_m) = W_h(\nu_1, \dots, \nu_m) J,$$

или, в терминах столбцов матрицы W , соотношениям

$$A h(\nu_k) = \nu_k h(\nu_k), \quad A h^{(j)}(\nu_k) = \nu_k h^{(j)}(\nu_k) + j h^{(j-1)}(\nu_k), \quad 1 \leq j \leq l_k - 1.$$

Из определения (4) видно, что действие матрицы A на вектор $h(z)$ дает вектор $\tilde{h} = Ah$ с компонентами

$$\tilde{h}_1(z) = z, \dots, \tilde{h}_{2l-1}(z) = z^{2l-1}, \tilde{h}_{2l}(z) = -\sum_{j=0}^{2l-1} a_{2l,j} z^j.$$

Согласно (2) имеем равенства $\chi^{(j)}(\nu_k) = 0, 0 \leq j \leq l_k - 1$, так что

$$\tilde{h}^{(j)}(\nu_k) = [zh(z)]^{(j)} \Big|_{z=\nu_k}, \quad 0 \leq j \leq l_k - 1,$$

откуда соотношения (7) получаются непосредственно.

Обозначим $e(t) = e_1(t) + i e_2(t) \in C^{2l-1, \mu}(\Gamma)$ единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t , связанный с вектором $n(t)$ внешней нормали равенством $e = in$, и введем $l \times 2l$ матрицу- функцию $C = (C_{jk})$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l} C_{jk} z^{k-1} = (e_1 + e_2 z)^{2l-k_j} (-e_2 + e_1 z)^{k_j-1}, \quad 1 \leq j \leq l, \quad (8)$$

Основной результат. Сформулируем теперь основной результат о фредгольмовой разрешимости рассматриваемой задачи. Как обычно, под фредгольмовостью и индексом задачи понимаются аналогичные понятия для отвечающего ей оператора

$$C^{2l,\mu}(\bar{D}) \rightarrow C^\mu(\bar{D}) \times \prod_{j=1}^l C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma). \quad (9)$$

Напомним, что определенные выше прямоугольные матрицы C и B имеют размеры, соответственно, $l \times 2l$ и $2l \times l$, так что можно ввести $l \times l$ матрицу – функцию $G(t) = C(t)B$, $t \in \Gamma$.

Теорема 1. *В предположении*

$$\det[C(t)B] \neq 0, \quad t \in \Gamma,$$

задача (1), (3) фредгольмова в пространстве $C^{2l,\mu}(\bar{D})$ и ее индекс \wp дается формулой

$$\wp = -\frac{1}{\pi} [\arg \det(CB)] \Big|_{\Gamma} + 2l^2, \quad (11)$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на контуре Γ осуществляется против часовой стрелки.

Доказательство. Пусть условие (10) выполнено. Покажем, что тогда оператор (9) исходной задачи фредгольмов и в обозначениях (10) его индекс \wp дается формулой (11).

Теперь обратимся к матрице CB . Напомним, что $2l \times l$ матрица B , фигурирующая в (10), определяется равенством (6) по отношению к $2l$ - вектору $h(z) = (1, z, \dots, z^{2l-1})$. Из определения (8) элементов матрицы $C(t)$ видно, что она зависит только от единичного касательного вектора $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ в точке $t \in \Gamma$, этот факт можно записать в виде $C(t) = C_0[e(t)]$. Когда точка t пробегает контур Γ , вектор $e(t)$ описывает единичную окружность Γ_0 против часовой стрелки, поэтому условие (10) равносильно

$$\det[C_0(t)B] \neq 0, \quad e \in \Gamma_0, \quad (12)$$

и, соответственно, для величины \wp в (11) имеем выражение

$$\wp = -\frac{1}{\pi} [\arg \det(C_0 B)] \Big|_{\Gamma_0} + 2l^2 \quad (13)$$

Из утверждения а) леммы, приведенной в [5], следует, что матрица $C_0(e)W_h(v_1, \dots, v_m)$ совпадает с $W_p(v_1, \dots, v_m)$, где $p = C_0(e)h$. Таким образом, l - вектор p представляет собой многочлен $p(e, z)$, составленный из компонент (2.11), и следовательно,

$$C_0 B = W_p(v_1, \dots, v_m), \quad p_j(e, z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1} \left(\frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z} \right)^{k_j-1}. \quad (14)$$

Таким образом, условие (12) фредгольмовости задачи (1), (3) не зависит от контура Γ и определяется только характеристическим уравнением (2) и набором $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq 2l$ натуральных чисел.

Утверждения б), с) леммы [5] позволяют связать определитель матрицы W с некоторыми операциями.

Лемма 1. (а) Пусть вектор - функция $g = (g_1, \dots, g_l)$ и скалярная функция φ аналитичны в окрестности точек v_1, \dots, v_m . Тогда

$$\det W_{\varphi g}(v_1, \dots, v_m) = \prod_{j=1}^m [\varphi(v_j)]^{l_j} \det W_g(v_1, \dots, v_m).$$

(б) Пусть скалярная функция ω аналитична в окрестности точек v_1, \dots, v_m , причем $\omega'(v_j) \neq 0$, $1 \leq j \leq m$, и $\omega'(v_i) \neq \omega'(v_j)$ при $i \neq j$. Пусть вектор- функция $h = (h_1, \dots, h_l)$ аналитична в окрестности точек $\omega(v_1), \dots, \omega(v_m)$. Тогда

$$W_{h \circ \omega}(v_1, \dots, v_m) = \prod_{j=1}^m [\omega'(v_j)]^{l_j(l_j-1)/2} W_h[\omega(v_1), \dots, \omega(v_m)].$$

Полагая

$$\omega(e, z) = \frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z}, \quad g_j(\zeta) = \zeta^{k_j-1}, \quad 1 \leq j \leq l, \quad (15)$$

представим многочлены (14) в виде $p_j(e, z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1} g[\omega(e, z)]$. Тогда на основании леммы 1

$$\det W_p = \prod_{j=1}^m (e_1 + e_2 v_j)^{l_j(2l-l_j)} \det W_g \circ \omega.$$

Так что условие (12) равносильно

$$\det W_g[\omega(e, v_1), \dots, \omega(e, v_m)] \neq 0, \quad e \in \Gamma_0 \quad (16)$$

и равенство (13) переходит в

$$\wp = -\frac{1}{\pi} [\arg \det W_g \circ \omega] \Big|_{\Gamma_0} + 2l^2 - \sum_{j=1}^m \frac{l_j(2l-l_j)}{\pi} \arg(e_1 + v_j e_2) \Big|_{\Gamma_0}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \arg(e_1 + v_j e_2) \Big|_{\Gamma_0} = 1, \quad (17)$$

отсюда окончательно

$$\wp = -2 \left[\frac{1}{2\pi} \arg \det W_g[\omega(e, v_1), \dots, \omega(e, v_m)] \Big|_{\Gamma_0} + l^2 - \sum_{j=1}^m l_j^2 \right]. \quad (18)$$

С помощью предложения d) леммы [5] определитель матрицы W_g в (15), (16) и величину $\wp(g)$ можно вычислить явно в каждом из следующих двух случаев:

$$(a) \quad k_{j+1} - k_j = 1, \quad 1 \leq j \leq l,$$

$$(b) \quad m = 1, v_1 = v. \quad (19)$$

Случай (а) означает, что $k_j = k_1 + j - 1$, а случай (б) соответствует одному корню $v_1 = v$ в (2).

Теорема 2. В каждом из случаев (19) задача (1), (3) фредгольмова и ее индекс равен нулю.

Доказательство. Из предложения d) леммы [5] непосредственно следует, что

$$\det W_g(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \prod_{j=1}^m \zeta_j^{(k_1-1)l_j} \prod_{i>j} (\zeta_i - \zeta_j)^{l_i l_j}$$

в случае (a) и

$$\det W_g(\zeta) = c \zeta^s, \quad s = \sum_{j=1}^l (k_j - j)$$

в случае (b) с некоторой постоянной $c \neq 0$. В обозначениях (15) для $\omega_i = \omega(s, \nu_i)$ разность

$$\omega(e, \nu_i) - \omega(s, \nu_j) = \frac{\nu_i - \nu_j}{(e_1 + e_2 \nu_i)(e_1 + e_2 \nu_j)},$$

поэтому условие (16) выполнено в обоих случаях. С учетом (17) и очевидного равенства

$$\arg[\omega(e, \nu_j)]_{\Gamma_0} = 0$$

приходим к выражению

$$\frac{1}{2\pi} \arg \det W_g[\omega(e, \nu_1), \dots, \omega(e, \nu_m)]_{\Gamma_0} = -2 \sum_{i>j} l_i l_j = -l^2 + \sum_{j=1}^m l_j^2$$

в случае (a) и $\wp(g) = 0$ в случае (b). Поскольку $l_1 = l$ при $m = 1$, предыдущее равенство можно использовать для обоих случаев, что совместно с (18) приводит к $\wp = 0$.

Удобно от матрицы W_g в (16) перейти к аналогичной матрице W_q , где q связан с вектором g в (15) соотношением $g(\omega) = \omega^{k_1-1} q(\omega)$. В явном виде

$$q_j(\omega) = \omega^{s_j}, \quad s_j = k_j - k_1, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (20)$$

Согласно лемме 1 (a) определители этих матриц связаны равенством

$$\det W_q = \prod_{j=1}^m \omega_j^{l_j(k_1-1)} \det W_g,$$

так что в формулах (16), (18) можно g заменить на q .

Теорему 2 дополним случаем $m = 2$, $\nu_2 = -1/\nu_1$. С этой целью обозначим $\Gamma_0(\nu)$ образ единичной окружности Γ_0 при отображении $e \rightarrow \omega(e, \nu)$, где $1 \neq \text{Im} \nu > 0$. Очевидно, при $\nu = i$ этот образ состоит из одной точки $\zeta = i$, поэтому можно считать $\nu \neq i$. Полагая $t = e_2/e_1$ и переходя к дробно-линейной функции

$$\zeta = \frac{-t + \nu}{1 + t\nu} \quad (21)$$

убеждаемся, что $\Gamma_0(\nu)$ является окружностью, лежащей в верхней полуплоскости. Эта окружность проходит через точки ν , $-1/\nu$ и имеет своим центром точку

$$\zeta_0 = i \frac{|\nu|^2 + 1}{2 \text{Im} \nu} \quad (22)$$

Важно отметить, что эта окружность всегда охватывает точку $\zeta = i$.

В самом деле, как показывает прямая проверка, при $\nu = \alpha + i\beta$, $1 \neq \beta > 0$, разность

$$|\zeta_0 - \nu|^2 - |\zeta_0 - i|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) + 1 - [\alpha^2 + (\beta - 1)^2]^2$$

совпадает с положительной величиной $4\beta[\alpha^2 + (\beta - 1)^2]$.

Теорема 3. Пусть $m = 2$, $\nu_1 = \nu$, $\nu_2 = -1/\nu_1$ и натуральное r выбрано столь большим, что

$$P_s(\zeta) = (-\zeta)^r \det W_q(\zeta, -1/\zeta), \quad s = (s_1, \dots, s_{l-1}), \quad (23)$$

является многочленом. Тогда условие (16) равносильно тому, что

$$P_s(\zeta) \neq 0, \quad \zeta \in \Gamma(\nu). \quad (24)$$

При выполнении этого условия индекс \wp задачи дается формулой

$$\wp = 4[n_s(\nu) - l_1 l_2], \quad (25)$$

где $n_s(\nu)$ есть число корней многочлена P_s (с учетом их кратности), лежащих внутри окружности $\Gamma_0(\nu)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что преобразование ω коммутирует с $\nu \rightarrow -1/\nu$, т.е. $\omega(e, -1/\nu) = -1/\omega(e, \nu)$. Поэтому

$$\det W_q[\omega(e, \nu_1), \omega(e, \nu_2)] = \det W_q[\omega(e, \nu), -1/\omega(e, \nu)],$$

В соответствии с (23) отсюда следует, что условие (16) равносильно $P_s[\omega(e, \nu)] \neq 0$, $e \in \Gamma_0$, т.е. отсутствию корней ζ_j многочлена P_s на окружности $\Gamma_0(\nu)$. При выполнении этого условия

$$\frac{1}{2\pi} \arg \det W_q[\omega(e, \nu_1), \omega(e, \nu_2)] \Big|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2\pi} \arg P_s \Big|_{\Gamma_0(\nu)}. \quad (26)$$

Запишем далее $P_s(\zeta)$ в произведение линейных множителей $\zeta - \zeta_j$ и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \arg[\omega(e, \nu) - \zeta_j] \Big|_{\Gamma_0} = \begin{cases} -2, & \zeta_j \in D_0(\nu), \\ 0, & \zeta_j \notin D_0(\nu), \end{cases}$$

где $D_0(\nu)$ означает открытый круг с границей $\Gamma_0(\nu)$.

В самом деле, при возрастании $t \in R$ точка ζ в (21) обходит окружность $\Gamma_0(\nu)$ по часовой стрелке. Поскольку $t = e_2/e_1$ не меняется от замены e на $-e$, отсюда заключаем, что при обходе $e \in \Gamma_0$ против часовой стрелки точка $\zeta = \omega(e, \nu)$ двукратно обходит окружность $\Gamma_0(\nu)$ по часовой стрелке.

Суммируя равенства (26) по всем j , приходим к заключению, что левая часть (26) совпадает с $c - 2n_s(\nu)$. Поэтому для $l = l_1 + l_2$ формула (18) переходит в (25), что завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24, № 5. - С. 825-831.
 [2] Дезин А.А. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве W_2^m // Докл. АН СССР. - 1954. - Т. 96, №5. - С. 901-903.
 [3] Малахова Н.А., Солдатов А.П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. - 2008. - Т. 44, № 8. - С. 1077-1083.

- [4] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры, М., Москва, 1970.
[5] Солдатов А.П. Эллиптические системы высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. - Т. 25, № 1. - С. 136-144.
[6] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
[7] Ващенко О.В., Солдатов А.П. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами // Науч. Вестн. БелГУ, сер. информ. и прикл. мат. – 2006. - Вып. 6, №1 (21). - С. 3-6.
[8] Soldatov A.P. Hyperanalytic functions and their applications // J. Math. Scien. – 2004. - V.17. - P. 1-111.
[9] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. - М.: Мир, 1970.
[10] Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. Обобщенная задача Дирихле -- Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №12. - С. 1666-1681.
[11] Абаполова Е.А., Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Науч. Вестн. БелГУ, сер. информ. и прикл. мат. – 2010. - Вып. 18, №5 (76). - С. 6-20.

REFERENCES

- [1] Bitsadze A.V. Some Properties of Polyharmonic Functions // Differential Eq. – 1988. - V. 24, № 5. - P. 825-831.
[2] Dezin A.A. The Second Boundary Problem for the Polyharmonic Equation in the Space W_2^m // Dokl. Akad. Nauk. – 1954. - V. 96, № 5. - P. 901-903.
[3] Malakhova N.A., Soldatov A.P. On a Boundary Value Problem for a Higher-Order Elliptic Equation // Differential Eq. – 2008. - V. 44, № 8. - P. 1077-1083.
[4] Mal'tsev A.I. Foundations of Linear Algebra. - Moscow, 1970.
[5] Soldatov A.P. Higher-Order Elliptic Systems // Differential Eq. – 1989. - V. 25, № 1. - P. 136-144.
[6] Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. - Moscow, 1968.
[7] Vashchenko O.V., Soldatov A.P. Integral Representation of Solutions of Beltrami Generalized System // Nauch. Vedom. Belgorod Univ. Ser. Inform., Appl. Math. – 2006. - Vyp. 6, № 1(21). - P. 3-6.
[8] Soldatov A.P. Hyperanalytic Functions and Their Applications // J. Math. Scien. – 2004. - V. 17. - P. 1-111.
[9] Palais R.S. Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem, Princeton: Princeton Univ. Press, 1965.
[10] Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane // Differential Eq. – 2016. – V. 52, № 12. – P. 1594-1609.
[11] Abapolova E.A., Soldatov A.P. On the theory of singular integral equations on a smooth contour // Nauch. Vedom. Belgorod Univ. Ser. Inform., Appl. Math. – 2010. - Vyp. 18, №5 (76). – P. 6-20.

Б.Д. Қошанов, Ж.С. Нұрыкенова

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН ЖАЛПЫЛАҒАН ДИРИХЛЕ - НЕЙМАН ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Тұрақты нақты коэффициентті $2l$ - дәрежелі эллиптикалық теңдеу үшін, $(k_j - 1)$ -шы дәрежелі нормал туындысы бар шеттік есеп қарастырылды, мұндағы $j = 1, \dots, l$, $1 \leq k_1 < \dots < k_l$. $k_j = j$ болған кезде Дирихле есебіне көшеді, ал $k_j = j + 1$ болғанда Нейман есебіне көшеді. Осы есептің фредгольмдылығының жеткілікті шарты алынды және оның индексінің формуласы көрсетілді.

Түйін сөздер: эллиптикалық теңдеулер, нормал туындылар, Дирихле-Нейман есебі, есептің шешілуі.
MSC 34B705, 35J25, 47E05.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 103 – 111

УДК 531.2:622.7

Z.K. Kuralbaev, A.R. Orazaeva, Z.M. Rahimzhanova

Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty
oar_is@mail.ru

**MECHANICAL-MATHEMATICAL MODEL OF KINEMATICS
IN THE ASTHENOSPHERE UNDER THE INFLUENCE
OF RISING MANTLE SUBSTANCES**

Abstract. The article considers a model investigation of tectonic processes occurring in the peripheral layers of the Earth under the influence of magmatic substances, rising from the lower layers along the so-called "narrow" channels formed in the Earth crust interior. A mechanical-mathematical model of tectonic movements is proposed in which asthenosphere substances and rising magmatic substances are considered as strong-viscosity liquids for which Reynolds numbers are sufficiently small. The corresponding mathematical formulas which form a mathematical model of the problem under consideration, have been obtained; A mathematical formulation of the problem is presented. On the basis of the obtained mathematical model, the following mathematical problem is posed, as a result of which a solution must be determined:

- the law of the change in the region formed by the liquid emerging from the "narrow" channel;
- movement of substances that make up the asthenosphere;
- stressed state of the overlying lithosphere.

Keywords: tectonic movements, asthenosphere, lithosphere, magmatic substances, strong viscosity fluid, mathematical model.

З.К. Куралбаев, А.Р. Оразаева, З.М. Рахимжанова

Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЙ
В АСТЕНОСФЕРЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОДНИМАЮЩИХСЯ
МАНТИЙНЫХ ВЕЩЕСТВ**

Аннотация. В статье рассматривается модельное исследование тектонических процессов, происходящих в периферийных слоях Земли, под воздействием поднимающихся из нижних слоев магматических веществ по так называемым «узким» каналам, образованных в недрах Земли. Предлагается механико-математическая модель тектонических движений, в которой вещества астеносферы и поднимающиеся магматические вещества рассматриваются как сильновязкие жидкости, для которых числа Рейнольдса являются достаточно малыми. Получены соответствующие математические формулы, которые образуют математическую модель рассматриваемой задачи; сформулирована математическая постановка задачи. На основе полученной математической модели поставлена следующая математическая задача, в результате решения которой должны быть определены:

- закон изменения области, образованной вытекающей из «узкого» канала жидкостью;
- движения веществ, составляющих астеносферу;
- напряженное состояние вышележащей литосферы.

Ключевые слова: тектонические движения, астеносфера, литосфера, магматические вещества, сильновязкая жидкость, математическая модель.

Актуальность данного научного направления общеизвестна и она связана с тем обстоятельством, что процессы, происходящие в периферийных слоях Земли, оказывают существенное влияние на структурообразующие процессы, происходящие в земной коре. Результаты многочисленных геологических и геофизических исследований в этом направлении показали [1-10], что в этих структурообразующих процессах важная роль принадлежит тектоническим движениям, происходящим в астеносферном слое. Известно, что эти тектонические движения являются причиной изменения структуры земной коры, возникновения таких явлений как землетрясение, вулканические процессы, поднятие и опускание земной поверхности и т.д. [1-3,9,10]. Важность этих процессов в жизнедеятельности человечества не вызывает сомнения.

Одной из проблем, возникающей при модельном исследовании тектонических процессов, происходящих в недрах Земли, является количественный анализ движений магматических веществ, поднимающихся из нижних ее слоев. При этом возникает необходимость определения причин возникновения тектонических движений, происходящих в астеносфере. На основе исследований этой проблемы были заложены научные гипотезы о процессах, происходящих в мантии Земли, предложены различные возможные причины, которые оказывают воздействие на процессы в астеносфере [13].

По одной из гипотез о возможных причинах тектонических движений рассматривается поднятие разогретых мантийных веществ по так называемым «узким каналам», имеющимися в недрах Земли, под астеносферой [3,9,10]. Поднимающиеся мантийные вещества создают определенное напряженное состояние в астеносферном, а также в литосферном слоях. Для постановки и решения данной проблемы методами моделирования выдвинута идея о том, что процесс поднятия магматических веществ по «узким каналам» рассматривать как истечение сильновязкой жидкости из некоторого «источника», находящегося под астеносферным слоем [6-10].

Для осуществления этой идеи, необходимо разбить эту достаточно большую и сложную задачу на несколько этапов; на первом этапе предлагается сформулировать постановку задачи о рассматриваемом процессе и создать ее механико-математическую модель. Впоследствии решить математическую задачу, полученную в результате ее моделирования. Разработка механико-математической модели рассматриваемого процесса потребует определенные данные о свойствах данного объекта исследования.

Из литературных источников по геологическим и геофизическим исследованиям могут быть получены эти данные. В работах Walcott R.J. [4], Bills Bruce G., Gurrey Donald R., Marshall Grant A. [6], De Bremacher J.-C [7], Harper J.F. [8], Ranalli G. [5], Добрецова Н.Л., Кирдяшкина А.А., Кирдяшкина А.Г. [2,3], Кузьмина М.И., Ярмолюка Б.Б. [9], Лобковского Л.И. [10], и многих других предложены следующие данные о свойствах веществ мантии, астеносферы и литосферы. Например, «... для астеносферы при температуре около 1500°C динамический коэффициент вязкости равен $\mu = 10^{19} \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, для нижней мантии $\eta = 10^{21} \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, для разных частей литосферы $10^{23} - 10^{27} \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ » [4].

Исходя из этих данных, для модельного исследования рассматриваемого процесса предполагается, что движение магматических веществ, поднимающихся из нижележащих областей, а также движение веществ астеносферного слоя рассматриваются как движение сильновязкой жидкости при очень малых числах Рейнольдса [11]. Математическая модель подобных течений сильновязкой жидкости была ранее успешно использована для других задач [13].

Постановка задачи. Рассматривается задача о движениях сильновязкой несжимаемой жидкости, вытекающей в вертикальном направлении из круглой щели радиуса r , расположенной на некоторой горизонтальной (подастеносферной) поверхности. Пусть предполагается, что скорость истечения жидкости из щели задана в виде функции $w(x, t)$. Кроме этого считается, что известны плотность вытекающей жидкости ρ и динамический коэффициент ее вязкости μ . Под воздействием движения вытекающей из щели жидкости возникают движения в астеносфере и появляется «избыточное» давление из-за ограниченности верхней ее поверхности.

Как было отмечено выше, движение в астеносферном слое также рассматривается как движение сильновязкой жидкости; ее плотность равна ρ_a , а динамический коэффициент вязкости

μ_a . Считается, что астеносфера ограничена сверху некоторой твердой поверхностью, т.е. граница между литосферой и астеносферой считается неподвижной. Средняя толщина (мощность) астеносферы предполагается равной H .

Итак, рассматривается движение сильновязкой жидкости в ограниченном сверху в астеносферном слое под воздействием движения менее вязкой жидкости ($\mu_a > \mu$), вытекающей из щели, находящейся на нижней поверхности этого слоя.

Некоторые допущения и предположения. Для простоты постановки и решения данной задачи, она может рассматриваться для двумерного случая. Такое допущение не уменьшает ценность результатов решения задачи в такой постановке. Тогда параметр r определяет половину ширины рассматриваемой щели. В принципе, механизм происходящего процесса может быть описан и для трехмерного случая; в этом случае r может рассматриваться как радиус круглой щели, конца «узкого канала».

С учетом этих допущений, данная задача рассматривается в прямоугольной системе координат xOz , где x – горизонтальная и z – вертикальная оси координат (Рисунок 1). Вертикальная координатная ось z направлена обратно направлению вектора силы тяжести \vec{g} .

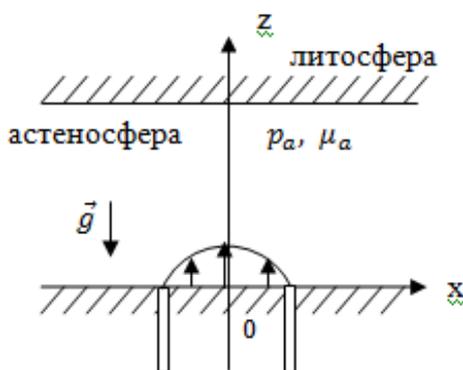


Рисунок 1 – Система координат и конец «узкого канала»

Предполагается, что, исходя из данных геологических исследований магматические вещества, движение которых рассматривается в данной работе, считаются сильновязкими, т.е. динамический коэффициент вязкости для которых очень большими. Из-за такого большого значения динамических коэффициентов вязкости рассматриваемых жидкостей, а также медленность рассматриваемого процесса безразмерное число Рейнольдса (Re) для них будут малы. Известно, что число Рейнольдса обратно пропорционально динамическому коэффициенту вязкости μ . Такие движения сильновязких жидкостей в литературе по механике называются «ползущими» течениями [11]. Известно, что такие предположения позволяют использовать упрощенные уравнения Навье - Стокса.

Тогда, с учетом таких упрощающих предположений, векторное уравнение таких движений записывается в следующем виде [11]:

$$-\text{grad } p + \rho \cdot \vec{g} + \mu \cdot \Delta \vec{u} = 0, \quad (1)$$

где p – гидродинамическое давление, $\vec{u} = \{u_x, u_z\}$ – вектор скорости, \vec{g} – вектор силы тяжести, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Во многих исследованиях обычно пренебрегается сжимаемостью рассматриваемой жидкости, и она считается неразрывной. Тогда условие неразрывности такой жидкости записывается в виде следующего известного уравнения [11]:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2)$$

Еще одним допущением, которое будет сделано, касается относительно вертикальных размеров вытекшей жидкости. Предполагается, что вытекающая жидкость из «узкого канала», т.е. из щели, растекается по горизонтальным направлениям под собственным весом и давлением, оказываемым сверху более вязкой жидкостью астеносферы; область, которую она будет занимать, будет иметь малый вертикальный размер в сравнении с горизонтальным ее размером.

Такое же допущение можно сделать относительно движений сильновязкой жидкости в астеносфере, так как вертикальные размеры астеносферы (H) значительно меньше предполагаемых горизонтальных размеров (L). Такие предположения упрощают уравнения движения (1) для обоих рассматриваемых жидкостей. В механике жидкости такое предположение называется допущением «мелкой воды» [13]. Допуская такое предположение о малости вертикального размера можно считать, что давление в жидкости совпадает с гидростатическим давлением [13]; т.е. имеет следующий вид для областей, куда вытекающая жидкость не достигла:

$$p = q(x, t) + \rho_a \cdot g(H - z), \text{ если } -y(t) \leq x \leq y(t); \quad (3)$$

и для области, куда вытекающая жидкость достигла:

$$p = q(x, t) + \rho_a \cdot g \cdot (H - \xi) + \rho \cdot g \cdot (\xi - z), \\ \text{если } -\infty < x < -y(t) \text{ и } y(t) < x < \infty. \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$q(x, t)$ – некоторое «избыточное» давление, возникающее из-за движений в астеносфере, когда ее верхняя граница ограничена неподвижной поверхностью; $z = \xi(x, t)$ – функция, описывающая верхнюю границу области, занятой вытекшей жидкостью; эта граница меняется с течением времени t ; $y(t)$ – функция, определяющая изменение точки пересечения верхней границы вытекающей жидкости $\xi(x, t)$ с горизонтальной поверхностью (точка M на рисунке 1); она удовлетворяет условию $\xi(y, t) = 0$.

Математическое моделирование. Использование перечисленных выше допущений и предположений позволяют упростить уравнения движений (1) для рассматриваемых жидкостей.

Уравнения движений для вытекающей из щели жидкости записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[\frac{\partial q}{\partial x} + (\rho - \rho_a) \cdot g \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]; \quad (5) \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0.$$

Уравнение неразрывности для этой жидкости имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Уравнения для астеносферы будут записаны соответственно в виде следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu_a} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}; \quad (7) \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0;$$

и

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

В формулах (5) = (8) введены следующие обозначения:

$u = \{u_x, u_z\}$ – скорость движения жидкости, вытекающей из щели; $v = \{v_x, v_z\}$ – скорость движения жидкости в астеносфере.

Полученные уравнения (5)-(8) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных; здесь функции $u = u(x, z, t)$, $v = v(x, z, t)$, $z = \xi(x, t)$ являются неизвестными.

Граничные условия. Для решения этих уравнений должны быть определены граничные условия, которые будут сформулированы из физических условий данной задачи.

На выходе из щели (канала), при $z = 0$, предполагается, что скорость истечения жидкости из щели задана и равна $w(x, t)$; и она направлена вертикально вверх по направлению оси z . Вытекающая из «узкого» канала жидкость образует определенную массу, занимая некоторую область в астеносфере. Поверхность этой области, занимаемой вытекшей жидкостью, описывается некоторой функцией $z = \xi(x, t)$, изменяющейся (увеличивающейся) с течением времени t . Эта функция $z = \xi(x, t)$ определяет подвижную границу между вытекшей из щели жидкостью и жидкостью астеносферы.

Пусть вначале рассматриваются граничные условия для области, образованной вытекающей из щели жидкости.

1. На нижней границе, при $z = 0$, выполняются следующие кинематические условия:

$$u_x(x, 0, t) = 0;$$

$$u_z(x, 0, t) = \begin{cases} w(x, t), & x \in [-y(t), y(t)]; \\ 0, & x \notin [-y(t), y(t)]. \end{cases} \quad (9)$$

2. На границе между областью, занимаемой вытекшей из щели жидкостью, и астеносферой $z = \xi(x, t)$ для отрезка $-y(t) \leq x \leq y(t)$ выполняются следующие условия:

- кинематические условия о равенстве скоростей

$$u_x(x, \xi, t) = v_x(x, \xi, t);$$

$$u_z(x, \xi, t) = \frac{d\xi}{dt} = v_z(x, \xi, t). \quad (10)$$

- динамическое условие о равенстве касательных напряжений

$$\mu \cdot \left[\frac{\partial u_x(x, \xi, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(x, \xi, t)}{\partial x} \right] = \mu_a \cdot \left[\frac{\partial v_x(x, \xi, t)}{\partial z} + \frac{\partial v_z(x, \xi, t)}{\partial x} \right]. \quad (11)$$

3. На верхней границе астеносферы (на границе с твердой литосферой), где $z = H$, выполняется условие равенства нулю компонентов скорости:

$$v_x(x, H, t) = 0,$$

$$v_z(x, H, t) = 0. \quad (12)$$

Начальное условие. Можно предположить, что в начальный момент времени (при $t = 0$) начинается процесс истечения жидкости. Тогда при $t=0$ выполняется следующее начальное условие:

$$t = 0, \quad \xi(x, 0) = 0. \quad (13)$$

Считается, что в начальный момент времени отсутствует область, образованная вытекающей из щели жидкости. Область, образованная излившейся из канала жидкости, расширяется не только в вертикальном направлении, а также в горизонтальных направлениях из-за растекания в горизонтальных направлениях. Поэтому должны быть заданы условия на горизонтальных границах этой области, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$x = \pm y(t), \quad \xi(\pm y(t), t) = 0. \quad (14)$$

Здесь $x = \pm y(t)$ - горизонтальные границы области, занятой вытекшей жидкостью. Очевидно, в начальный момент времени эта граница совпадает с границей «канала», откуда вытекает магматические вещества, т.е.

$$y(0) = \pm r. \quad (15)$$

Очевидно, что с течением времени происходит изменение функции $z = \xi(x, t)$, которая определяет границу области, занимаемой вытекающей из щели жидкости, а также ее объем в зависимости от времени. Отсюда может быть определена зависимость между функциями $\xi(x, t)$ и $y(t)$. Эту зависимость можно получить из баланса «расхода» жидкости, вытекающей из «канала» и изменения ее объема над поверхностью. Следует заметить, что здесь рассматривается двумерная задача, поэтому количество жидкости определяется одномерным интегралом.

Количество накапливаемой жидкости, поступающей по «узкому» каналу за время t может быть определено (с учетом симметрии) в виде следующего определенного интеграла:

$$Q = 2 \cdot \int_0^{y(t)} \xi(x, t) \cdot dx. \quad (16)$$

Расход жидкости из «канала» за это же время t равен этой же величине Q , и определен следующим двойным интегралом:

$$Q = 2 \cdot \int_0^t \int_0^r w(x, t) dx dt. \quad (17)$$

Из равенства этих двух формул (16) и (17) следует следующее равенство:

$$\int_0^{y(t)} \xi(x, t) dx = \int_0^t \int_0^r w(x, t) dx dt. \quad (18)$$

Итак, в результате математического моделирования и выводов формул согласно условиям поставленной здесь задачи получена совокупность математических формул (5)-(18).

В этих формулах неизвестными являются следующие переменные величины:

u_x, u_z – компоненты скорости движения жидкости, вытекшей из «узкого» канала; v_x, v_z – компоненты скорости движения жидкости в астеносфере; $\xi(x, t)$ – функция, определяющая границу между вытекшей жидкостью и астеносферой; $y(t)$ – функция, которая определяет точку пересечения границы $z = \xi(x, t)$ с горизонтальной осью x ; $q(t)$ – «избыточное» давление.

Как видно, получена совокупность большого количества разнообразных формул. Для удобства формулировки математической задачи необходимо провести определенные преобразования.

Переход к безразмерным параметрам. Перед тем как приступить к преобразованию формул, целесообразно осуществить переход к безразмерным переменным. Для этого вначале должны быть выбраны так называемые характерные величины [13]. В качестве таких величин выбраны следующие параметры:

L – горизонтальный размер; H – вертикальный размер; U – скорость движения по горизонтальному направлению; V – скорость движения по вертикальному направлению; $P = \rho \cdot g \cdot H$ – гидродинамическое давление.

Теперь необходимо произвести замену переменных; для этого используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= L \cdot \bar{x}, & z &= H \cdot \bar{z}, & \xi &= H \cdot \bar{\xi}, & y &= H \cdot \bar{y}, & t &= T \cdot \bar{t}, \\ u_x &= U \cdot \bar{u}_x, & v_x &= U \cdot \bar{v}_x, & w &= V \cdot \bar{w}, & u_z &= V \cdot \bar{u}_z, & v_z &= V \cdot \bar{v}_z, \\ p &= P \cdot \bar{p}, & r &= H \cdot \bar{r}, & q &= P \cdot \bar{q}. \end{aligned} \quad (19)$$

Использование замены по формулам (19), а затем оценка порядка величин в этих формулах позволяет упростить формулы (5) и (6), и записать их в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = ER \cdot \left[\frac{\partial q}{\partial x} + \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]; \quad (20)$$

и

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

Здесь введено обозначение безразмерного параметра: $ER = \frac{\rho g H^3}{\mu U L}$.

Следует заметить, что в формулах (20) и (21) черточки над безразмерными параметрами опущены, и в дальнейшем они будут считаться безразмерными величинами.

Аналогичным образом можно получить следующие формулы из формул (7) и (8):

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = ER \cdot \frac{\mu}{\mu_a} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \quad (22)$$

и

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (23)$$

Теперь должны быть преобразованы граничные и начальные условия. Формулы (9), (10) и (12) - (19) в результате перехода к безразмерным величинам не меняют свои формы записи. Только формула (11) будет переписана с некоторыми изменениями:

$$\frac{\mu}{\mu_a} \cdot \left[\frac{\partial u_x(x, \xi, t)}{\partial z} \right] = \frac{\partial v_x(x, \xi, t)}{\partial z}. \quad (24)$$

Следующим этапом преобразования формул является интегрирование безразмерных уравнений (20) – (23).

Вначале производится интегрирование формулы (21) по переменной z в пределах от 0 до $\xi(x, t)$. В результате будет получено следующее выражение:

$$u_z(x, \xi, t) - u_z(x, 0, t) = - \int_0^\xi \frac{\partial u_x}{\partial x} dz.$$

Используя граничные условия (9) и (10), после простейших преобразований можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\xi u_x dz + \begin{cases} w(x, t), & x \in [-y(t), y(t)], \\ 0, & x \notin [-y(t), y(t)]. \end{cases} \quad (25)$$

Интегрирование уравнения (23) по переменной z от $\xi(x, t)$ до H , и используя граничных условий (10) и (13), можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \int_\xi^H v_x dz. \quad (27)$$

Интегрирование уравнений (20) и (22), а затем использование граничных условий (9) – (12) в безразмерных формах, позволяют получить следующие формулы для определения горизонтальных составляющих скоростей движений в рассматриваемых жидкостях:

$$u_x = A \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z}{2 \cdot [\xi + k(H - \xi)]} \cdot \{A \cdot [\xi^2 + 2k\xi(H - \xi)] + B \cdot (H - \xi)^2\}, \quad (28)$$

где
$$A = ER \cdot \left[\frac{\partial q}{\partial x} + \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]; \text{ и}$$

$$v_x = B \cdot \frac{z^2 - H^2}{2} + \frac{z - H}{2 \cdot [\xi + k(H - \xi)]} \cdot \{A \cdot k \cdot \xi^2 - B \cdot [2\xi^2 + k(H^2 - \xi^2)]\}, \quad (29)$$

где
$$B = ER \cdot \frac{\mu}{\mu_a} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}.$$

В результате выполненных преобразований получены формулы (13)-(15), (18), и (25)-(29), которые описывают тектонические движения в астеносферном слое, куда проникают магматические вещества, поступающие из нижних слоев Земли по так называемым «узким» каналам. Эти формулы составляют математическую модель рассматриваемого здесь процесса.

На основе полученной математической модели ставится следующая математическая задача, в результате решения которой должны быть определены:

- закон изменения области, образованной вытекающей из «узкого» канала жидкостью;
- движения веществ, составляющих астеносферу;
- напряженное состояние вышележащей литосферы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хаин В.Е. Основные проблемы современной геологии. М.: Научный мир, 2003. 348 с.
- [2] Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Глубинная геодинамика. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео», 2003. 420 с.
- [3] Добрецов Н.Л. Крупнейшие магматические провинции Азии (250 млн лет): Сибирские и Эмейшаньские траппы (платобазальты) и ассоциирующие гранитоиды // Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео». Геология и геофизика. 2005, т.46. № 9. С. 870-890.
- [4] Walcott R.J. Flexural rigidity, thickness and viscosity of the lithosphere //Journal of Geophysical Research. 1970b. Vol. 75. P.3941-3954.
- [5] Ranalli G. Viscosity of the asthenosphere // Nature (Gr. Br.). 1993. Vol. 361, 6409. P.231.
- [6] Bill Bruce G., Gurrey Donald R., Marshall Grant A. Viscosity estimates for the crust and upper mantle from of lacustrine shoreline deformation in the Eastern Great Basin //Journal of Geophysical Research.B. 1994, 99. Vol. 11. P. 46-58.
- [7] De Barmacher J-C. Is the oceanic lithosphere elastic or viscous //Journal of Geophysical Research. 1977. Vol.82, 14. P. 234- 245.
- [8] Harper J.F. Asthenosphere flow and plate motion // Geophysical Roy. Astron. Soc. 1978. Vol. 5, № 1. P. 123- 134.
- [9] Кузьмин М.И., Ярмолюк Б.Б. Тектоника плит и мантийные плюмы – основа эндогенной тектонической активности Земли последние 2 млрд лет // Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео». Геология и геофизика. 2016. Т.57, №1. С. 11-30.
- [10] Лобковский Л.И. Тектоника деформируемых литосферных плит и модель региональной геодинамики применительно к Арктике и Северо-Восточной Азии. // Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео». Геология и геофизика. 2016. Т.57, №3. С. 11-30.
- [11] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [12] Савельева Г.Н., Соболев А.В., Батанова В.Г., Суслов П.В., Брюгманн Г. Структура каналов течения расплавов в мантии // Геотектоника. 2008. № 6, -С. 25-45.
- [13] Куралбаев З.К. Модельное исследование влияния локального поднятия мантийных веществ на тектоносферу //Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2005ю №1(19). С. 37-49.
- [14] Karato S.-I., Jung H., Katayama I., SkemerPh. Geodynamic significance of seismic anisotropy of the upper mantle: new insights from laboratory studies //Annu. Rev. Earth Planet. Sci. 2008. Vol.36. P.59-95.
- [15] Kyung H.M., Chongyoun K. Simulation of Particle Migration in Free-Surface Flows //AIChE Journal. 2010, N.10. Vol.56. P. 2539-2550.
- [16] Lassak T.M., McNamara A.K., Edward J., Garner E.J., Zhong S. Core–mantle boundary topography as a possible constraint on lower mantle chemistry and dynamics // Earth and Planetary Science Letters. 2010. V. 289. P. 232-241.
- [17] Трубицын В.П. Реология мантии и тектоника литосферных плит // Физика Земли. 2012. №6. С. 3-22.

REFERENCES

- [1] V.E. Hain. The main problems of modern geology. M.: The scientific world, 2003. 348 s.
- [2] Dobretsov NL, Kirdyashkin AG, Kirdyashkin A.A. Deep geodynamics. Novosibirsk: SB RAS Publishing, Geo Branch, 2003. 420 s.
- [3] Dobretsov N.L. The largest magmatic provinces of Asia (250 million years old): Siberian and Emeiashan traps (plateau basalts) and associated granitoids //Novosibirsk: Izdatel'stvo SB RAS, Geo branch. Geology and Geophysics. 2005. Vol. 46. No.9. P. 870-890.

- [4] Walcott R.J. Flexural rigidity, thickness and viscosity of the lithosphere // Journal of Geophysical Research. 1970. Vol. 75. P.3941-3954.
- [5] Ranalli G. Viscosity of the asthenosphere // Nature (Gr. Br.). 1993. Vol. 361. 6409. P.231.
- [6] Bill Bruce G., Gurrey Donald R., Marshall Grant A. Viscosity estimates for the crust and upper mantle from of lacustire shoreline deformation in the Eastern Great Basin // Journal of Geophysical Research.B. 1994. Vol. 99. No.11. P. 46-58.
- [7] De Bremacher J-C. Is the oceanic lithosphere elastic or viscous //Journal of Geophysical Research. 1977. Vol.82. No.14. P. 234- 245.
- [8] Harper J.F. Asthenosphere flow and plate motion //Geophysical Roy. Astron. Soc. 1978. Vol. 5. No.1. P. 123- 134.
- [9] Kuzmin M.I., Yarmolyuk B.B. Tectonics of plates and mantle plumes - the basis of endogenous tectonic activity of the Earth for the last 2 billion years // Novosibirsk: Izdatel'stvo SB RAS, Geo branch. Geology and geophysics. 2016. Vol.57. No.1. P. 11-30.
- [10] Lobkovsky L.I. Tectonics of deformable lithospheric plates and a model of regional geodynamics applied to the Arctic and North-East Asia // Novosibirsk: Izdatel'stvo SB RAS, branch "Geo". Geology and geophysics. 2016. Vol.57. No.3. P. 11-30.
- [11] Loitsyansky LG Mechanics of fluid and gas: Proc. For universities. M.: Drofa, 2003. 840 s.
- [12] Savelieva G.N., Sobolev A.V., Batanova V.G., Suslov P.V., and Bryugmann Struktura kanalov techeniya rasplavov v mantii [Structure of the melt flow channels in a mantle] //Geotektonika. 2008. No.6. P. 25-45.
- [13] Kuralbaev Z.K. A Model Study of the Influence of Local Elevation of Mantle Substances on the Tectonosphere //Scientific Bulletin of the Novosibirsk State Technical University. 2005. No. 1(19). P. 37-49.
- [14] Karato S.-I., Jung H., Katayama I., SkemerPh. Geodynamic significance of seismic anisotropy of the upper mantle: new insights from laboratory studies //Annu. Rev. Earth Planet. Sci. 2008. Vol.36. P.59-95.
- [15] Kyung H.M., Chongyoup K. Simulation of Particle Migration in Free-Surface Flows //AIChE Journal. 2010. Vol.56. No.10. P. 2539-2550.
- [16] Lassak T.M., McNamara A.K., Edward J., Garnero E.J., Zhong S. Core-mantle boundary topography as a possible constraint on lower mantle chemistry and dynamics // Earth and Planetary Science Letters. 2010. V. 289. P. 232-241.
- [17] Trubitsyn V.P. Reologiya mantii i tektotnika litosfernykh plit [Mantle rheology and tectonics of the lithospheric plates] // Fizika Zemli. 2012. No.6. P.3-22.

З.Қ. Құралбаев, А.Р. Оразасва, З.М. Рахимжанова

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы қ.

ЖОҒАРЫ КӨТЕРІЛГЕН МАГМА ЗАТТАРЫНЫҢ ӘСЕРІНЕН БОЛАТЫН АСТЕНОСФЕРАДАҒЫ ҚОЗҒАЛЫСТЫҢ МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Аннотация. Мақалада Жердің төменгі қабаттарында пайда болып, «тар арналар» деп аталынатын жер қойнауындағы жарықтар арқылы жоғары көтерілетін магма заттарының әсерінен болатын сыртқы қабаттардағы тектоникалық процестерді модельдеу арқылы зерттеуге арналған. Мұнда астеносфера мен магма заттары Рейнольдс саны аса кіші болатын жоғары тұтқырлы сұйық ретінде қарастырылып, тектоникалық қозғалыстың механика-математикалық моделі ұсынылған. Қарастырылып отырған есептің математикалық моделін құрайтын математикалық формулалар келтірілген; математикалық есеп қойылған. Алынған математикалық модельдің негізінде шешімі табылған жағдайда келесілер анықталатын математикалық есеп қойылған:

- «тар» арнадан ағып шығатын, түзілген сұйықтықтың облысының өзгеру заңы;
- астеносфераны құрайтын заттардың қозғалысы;
- жоғары жатқан литосфераның шиеленіскен жағдайы.

Түйін сөздер: тектоникалық қозғалыстар, астеносфера, литосфера, магма заттары, аса тұтқырлы сұйық, математикалық модель.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 112 – 119

К.М. Mukashev¹, V.V. Kazachenok², M.E. Alieva³

¹Kazakh National University Al-Farabi, Kazakhstan, Almaty, e-mail: kanat-kms@mail.ru;

²Belarusian State University, Belarus, Minsk, e-mail: Kazachenok@bsu.by ;

³Kazakh National Pedagogical University Abay, Kazakhstan, Almaty. e-mail: moldir-2008@mail.ru

ABOUT NEW LOOK AT THE PARADIGM OF STUDY FUNDAMENTAL PROBLEMS OF PHYSICS OF COSMIC THE EXAMPLE OF ORIGIN

Abstract. In Europe and in North America the study of cosmic rays taken new forms in recent years. The new systems use a network of detectors that are installed on large areas. It is unique in that the detector is set not only in research centers, but also in schools. This achieves the implementation of several extremely important issues. The first is to study the physics of cosmic particles with extremely high energies. The second - in search of large areas coinciding cosmic-ray flares Detect-living source of these rays. The third is to awaken in pupils and students a keen interest in basic research of ultrahigh-energy particles. For the purpose of distribution to educational institutions of Kazakhstan and attract talented young people to basic research, it has developed and patented an experimental setup made for the registration of cosmic origin of the particles. The device operates in real time and allows you to connect it to the global network.

Keywords: cosmic rays, ultra high energy particles, registration, detectors, network system, learning paradigm.

УДК 530.1; 551.521.64(0353)

К.М. Мукашев¹, В.В. Казаченок², М.Е. Алиева³

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан. г. Алматы;

²Беларусский государственный университет, Беларусь, г. Минск;

³Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Казахстан, г. Алматы.

О НОВЫХ ВЗГЛЯДАХ НА ПАРАДИГМУ ОБУЧЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ НА ПРИМЕРЕ ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Аннотация. В Европе и в Северной Америке изучение космических лучей за последние годы приобрело новые формы. В новых системах используются сети детекторов, установленных на больших площадях. Уникальным в ней является то, что детекторы устанавливаются не только в исследовательских центрах, но и в учебных заведениях. Тем самым достигается реализация нескольких, крайне важных проблем. Первая заключается в том, чтобы изучать физику космических частиц экстремально высоких энергий. Вторая - через поиск на больших площадях совпадающих вспышек космических лучей обнаружить источника этих лучей. Третья состоит в том, чтобы пробудить у школьников и студентов живой интерес к фундаментальным исследованиям частиц ультравысоких энергий. С целью распространения среди учебных заведений Казахстана и привлечения большого числа талантливой молодежи к фундаментальным исследованиям, разработана запатентованная экспериментальная установка для регистрации космических частиц ультравысокой энергии. Установка работает в реальном масштабе времени и допускает связать ее с мировой сетью.

Ключевые слова: космические лучи, частицы ультравысокой энергии, регистрация, детекторы, сети, системы, парадигма обучения.

Введение. 15 октября 1991 года заряженная частица космического излучения с самой высокой когда-либо зарегистрированной энергией вошла с земную атмосферу, в десяти километрах над пустыней штата Юта. Столкнувшись с атмосферой, ядро на мгновение осветило ночное небо и исчезло. Детектор «Fly's Eye», чье название можно перевести как «Глаз мухи», расположенный на испытательном полигоне в штате Юта, зарегистрировал световой след в виде каскада вторичных частиц, образованных при столкновении, которые и привели к свечению атмосферы. Эту вспышку интенсивности космических лучей окрестили «OMG -событием» (от английского сокращения «Боже мой!»). По данным детектора «Fly's Eye» энергия этой частицы составила 320 эксаэлектронвольт (ЭэВ), или $3,2 \cdot 10^{20}$ эВ. В единицах системы СИ эта частица, скорее всего, протон, врезалась в атмосферу с общей кинетической энергией порядка 6 Дж. Это поистине макроскопическая энергия для микроскопической частицы. Она вполне достаточна, чтобы поднять массу в 1 кг на полметра в условиях гравитации ($1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.). 3 декабря 1993 г. в другом конце света Большая ливневая установка «AGASA» в Японии зафиксировала еще одно «OMG -событие» с энергией в 200 ЭэВ. В этом случае вспышка космических лучей была зарегистрирована с помощью сети детекторов, установленной на большой территории для измерения широких атмосферных ливней (ШАЛ), являющихся результатом взаимодействия первичных космических лучей с атмосферой.

После этих первых зарегистрированных вспышек было зафиксировано еще более десятка «OMG -событий», что и подтвердило их как физическое явление, и озадачило физиков. Считалось, что частицы, чьи энергетические показатели превышают 50 ЭэВ, не могут достичь Земли с каких-либо возможных источников во Вселенной за более чем 100 миллионов парсеков (астрономическая единица расстояния в 1 парсек (пк) = 3,26 светового года, или 30,8366 триллиона километров. С расстояния в 1 пак радиус земной орбиты вокруг Солнца виден под углом 1 секунда дуги). Считалось, что они должны быстро потерять энергию при столкновении с реликтовым излучением от Большого взрыва с температурой в 2,7 К (так называемый предел ГЗК - Грейзена-Зацепина-Кузьмина). Хотя и было предложено много различных объяснений, практические эксперименты пока не могут расшифровать сообщение этих высокоэнергетических посланцев, и существование «OMG-событий» стало большой загадкой. Теперь за этими событиями, характеризующимися ультравысокой энергией, следит еще один наблюдатель, расположенный на западе Аргентины. Обсерватория имени Пьера Оже, располагающая непревзойденными регистрирующими мощностями, начала изучать космические лучи в самом высоком энергетическом диапазоне.

Однако признаки вселенной экстремальных энергий могут проявляться и по-другому – не в виде единичных «OMG - событий», а как серия событий с более скромными энергетическими показателями. Так, например, 20 января 1981 г., возле г. Виннипег в Канаде в течение пяти минут наблюдался кластер широкого атмосферного ливня со средней энергией, оцененной в $3 \cdot 10^3$ ТэВ (тераэлектронвольт, Smith *et al.* 1983). По идее, такое событие должно было быть одиночным. Наблюдение было уникальным в своем роде в ходе эксперимента, который зафиксировал 150 тысяч ливней в течение 18 месяцев. В том же году группа исследователей из Ирландии сообщила о необычном одновременном повышении частоты атмосферных ливней на двух регистрирующих станциях, разделенных расстоянием в 250 км (Fegan *et al.* 1983). Событие, зафиксированное в 1975 г., длилось 20 секунд, и было единственным в своем роде в течение последующих трех лет наблюдений.

Возможно ли объединение усилий? Каким бы образом вселенная высоких энергий не проявлялась на Земле, ее признаки наблюдаются достаточно редко, и для такого наблюдения требуется большое количество детекторов, установленных на больших площадях, чтобы обеспечить адекватный сигнал. Обнаружение одной «OMG-частицы» требует плотных ливневых установок и/или детекторов атмосферного свечения, расположенных с частотой не менее 1 детектор/км², как в Обсерватории имени Пьера Оже. Обнаружение явлений космических лучей, взаимосвязанных на очень больших площадях, требует еще больших пространств, что на данном этапе является экономически целесообразным. В то же время технология системы глобального позиционирования (GPS) позволяет осуществить точный отсчет времени на очень больших площадях, и, таким образом, установить несколько сетей обнаружения как одну большую

установку. Примером является крупномасштабная ливневая установка *Large Area Air Shower array* (Япония), которая начала регистрировать данные с середины 90-х годов прошлого века. Она включает в себя около 10 компактных ливневых установок и образует рассеянную сеть обнаружения с беспрецедентной площадью охвата в 30 тысяч км².

Однако сейчас открылось новое в исследованиях космических лучей. В 1998 г. в г. Альберте (США) начал регистрацию данных первый узел рассеянной сети детекторов космических лучей на очень большой площади [1]. Сеть была создана на основе проекта, выдвинутого в 1995 году. Инновационным аспектом крупномасштабной установки с системой определения совпадений по времени, названной *ALTA*, является то, что она размещена в обычных общеобразовательных школах. Примерно в это же время вашингтонская крупномасштабная ливневая установка (*WALTA*), также с системой определения совпадений по времени, начала свои первые измерения.

Проекты *ALTA*, *CROP* и *WALTA* имеют вполне определенную задачу – наладить связь между двумя на первый взгляд не связанными, но одинаково важными целями. Первая цель это изучение вселенной экстремальных энергий через поиск временных совпадений вспышек космических лучей на больших пространствах и их источников; вторая же цель – пробудить в школьниках старших классов и учителях живой интерес к фундаментальным исследованиям. Эти «учебные» установки, имеющие серьезные исследовательские задачи, позволяют накопить уникальный академический опыт. Данная парадигма распространилась на многие другие научные центры Северной Америки. Системы обнаружения и регистрации в данном случае достаточно просты, но вполне эффективны. Они используют GPS для точного определения времени совпадения с другими узлами в сети или локальными установками на большой площади. Сегодня установки проектов *ALTA*, *CROP* и *WALTA* размещены в более 60 школах. Помимо них действуют еще три установки в составе Калифорнийской школьной обсерватории космических лучей (*CHICOS*). Установка *CHICOS* является крупнейшей наземной установкой в Северном полушарии. Ее детекторы установлены на крышах более 70 школ на площади в 400 км² в г. Лос-Анджелесе.

Над чем работает Старый свет? По другую сторону Атлантического океана, школы во многих европейских странах также привлекаются к изучению вселенной экстремальных энергий [2]. В 2001 году физики из Вуппертальского университета (Германия) предложили инициативу «*Sky View*» – первый европейский проект, в котором была предложена установка детекторов космических лучей в школах. Данный проект предполагает создать установку, охватывающую обширную площадь в 5000 км², близкую по масштабам обсерватории имени Пьера Оже, с участием тысяч университетов, колледжей, школ и других учреждений в зоне Северный Рейн – Вестфалия. Примерно год спустя Европейская организация по ядерным исследованиям (ЦЕРН) также начала участие в этой области.

Также в 2002 году к европейской инициативе присоединился проект астрофизических исследований для школ (*HiSPARC*), запущенный физиками Университета г. Нейменген, Нидерланды [3]. Сейчас проект *HiSPARC* включает в себя пять региональных кластеров детекторов в городах Амстердаме, Гронингене, Лейдене, Нейменгене и Утрехте. В этом проекте принимают участие около 40 школ и их количество быстро растет. В марте 2005 года установка *HiSPARC* зарегистрировала энергетическое событие с показателями в $8 \cdot 10^{19}$ эВ в области энергетического спектра космических лучей с ультравысокими показателями. В Финляндии инициировали и развивают проект школьной физики (*School Physics Project*). Тем временем во Франции запускается проект «Школы в исследовании космических лучей» (*RELYC*). Планируется установить детекторы в более 30 местных школах. В разработке находятся проекты по установке телескопов исследования космических лучей с системой GPS в португальских школах, в Великобритании и Италии.

Реальна ли всемирная сеть? Большая часть крупных исследовательских групп в Канаде и США выстроили взаимное сотрудничество – Североамериканские крупномасштабные установки временного определения событий (*NALTA*), располагающая более чем 100 станциями обнаружения по всей Северной Америке. Европейские группы также развивают аналогичное сотрудничество под названием «*Eurocosmics*». Очевидно, что следующим естественным шагом станет объединение североамериканской и европейской сетей во всемирную сеть, которая может сделать значительный

вклад в понимание вселенной экстремальных энергий. Такая сеть может поддерживать и объединять усилия по всему миру, включая инициативы в развивающихся странах, где она сможет обеспечить естественную площадку для глобальной научной культуры. Целью этого сотрудничества является не просто международный, а всемирный обмен образовательными ресурсами и информацией в области исследования одного из самых загадочных явлений природы - физики космических частиц ультравысокой энергии и связанных с ними волновых процессов.

Чем можем ответить мы? Галактика и Солнце являются мощными источниками космических лучей и возмущенного солнечного ветра. При этом они активно воздействуют на магнитосферу Земли и ее радиационные пояса. Изучение солнечных космических лучей все более приобретает огромное научное и практическое значение, так как солнечно-земные связи оказывают влияние на климат и погоду, на здоровье людей, работающих в космосе и на Земле, а возможно, и на сейсмическую активность отдельных районов Земли [4,5]. Потoki пионов и мюонов в результате последующих взаимодействий с атмосферой Земли рождают новые каскады электронов и фотонов, которые в значительной степени влияют на напряженность электрического поля атмосферы Земли в зависимости от сезона [6,7].

В свете выше изложенной проблемы, задачей данной работы является представление разработанной и запатентованной компактной установки автоматической регистрации пионно-мюонной и электронно-фотонной компонент космических лучей в реальном масштабе времени с целью последующего распространения ее среди различных учебных заведений Республики и для решения отдельных задач астрофизики [8,9]. Дело в том, что из-за хаотичной конфигурации галактического магнитного поля космические лучи низких энергий долго блуждают по Галактике и, доходя до Земли, уже не «помнят», откуда и когда они были испущены. Однако траекторию частиц с энергией выше 10^{19} эВ межзвездные магнитные поля практически не искривляют. Поэтому, регистрируя направление прихода таких частиц, можно установить положение источников космических лучей на небесной сфере и попытаться связать их с уже известными астрономическими объектами. Установка относится к экспериментальным средствам автоматической регистрации и обработки интенсивностей и вариации потока заряженных частиц в составе гигантских каскадов, порождаемых в атмосфере первичными частицами космических лучей сверхвысокой энергии, называемых широкими атмосферными ливнями (ШАЛ), в течение длительного времени.

Поэтому ключевые задачи на таких установках обычно связаны с методикой регистрации космических лучей. Отличительной особенностью данного проекта является принципиально иной подход к размещению детектирующих устройств космических лучей, что позволяет использовать их в качестве материальной базы при изучении студентами дисциплин «Физика и астрофизика космических лучей и волновые явления, связанные с ними», а также для демонстрации теоретически известных явлений физики высоких энергий и волновых процессов. Анализируя в реальном масштабе времени одновременно полученные сигналы нескольких таких систем, построенных в различных местах, можно не только выделять совпадающие по времени отклики, вызванные приходом ШАЛ, но и восстанавливать его направление. Поскольку на развитие ШАЛ оказывает влияние состояние атмосферы, информация о нем может быть соотнесена с сигналами данной системы. Сама идея дать школьникам и студентам возможность практически иметь дело с распределенной системой регистрации космических лучей позволяет максимально приблизить их к новейшим достижениям самой современной науки XXI века – Проблемы физики космоса, состояние окружающей нашу Землю среды и космического полета на другие планеты. Все данные, регистрируемые установкой, сохраняются и доступны для последующего анализа через Интернет. Для этого экспериментальная установка регистрации интенсивностей и вариации космических лучей в реальном масштабе времени оснащена ионизационными счетчиками типа СИ-5Г, соединенными с аналоговыми усилителями на транзисторах, с формирователями сигналов на элементах цифровой микросхемы, связанными через суммирующее устройство и устройство совпадений с многоканальными пересчетными модулями Advantect PCI – 1780U, соединенными с устройством накопления и обработки информации.

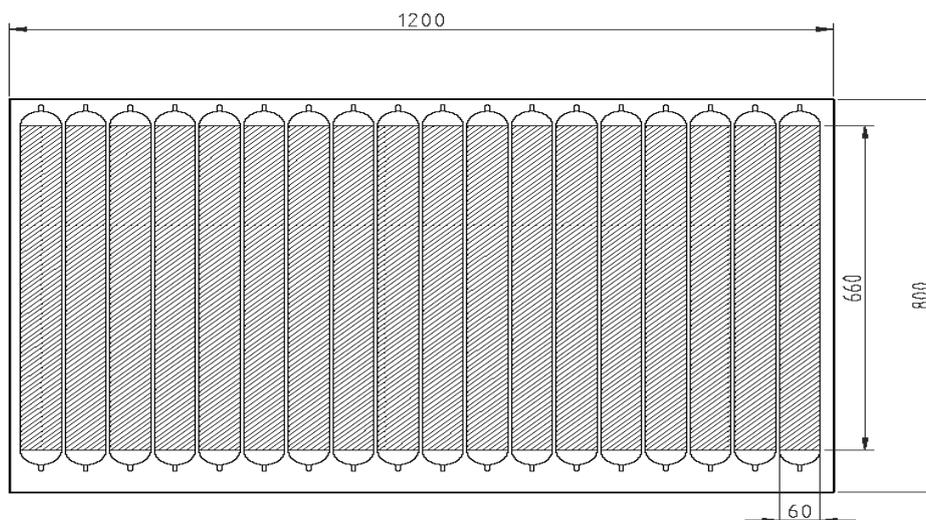


Рисунок 1 - Внутреннее устройство одного детекторного модуля со счетчиками СИ5Г

Конструктивно детектор построен из отдельных модулей, внутреннее устройство которых показано на рисунке 1. Каждый из модулей представляет собой годоскоп, в котором находятся 18 ионизационных счетчиков типа СИ5Г- 1. Детектор работает в счетном режиме и регистрирует отдельные импульсы, которые генерируются энергичными элементарными частицами при попадании внутрь чувствительной области счетчиков. Счетчик чувствителен к гамма – и рентгеновскому излучению с энергией квантов свыше 20-30 кэВ и релятивистским заряженным частицам с энергией свыше 3-4 МэВ. Длина чувствительной к прохождению частиц зоны такого счетчика составляет 660 мм, а его диаметр равен 60 мм. Таким образом, площадь чувствительной поверхности счетчика СИ5Г-1 равна 0,12 м². Выходные сигналы всех счетчиков одного модуля, после усиления и формирования, объединяются в логическую схему - дизъюнктор (суммирующее устройство), что позволяет рассматривать каждый годоскоп как единый детектор частиц с суммарной чувствительной площадью 2,2 м².

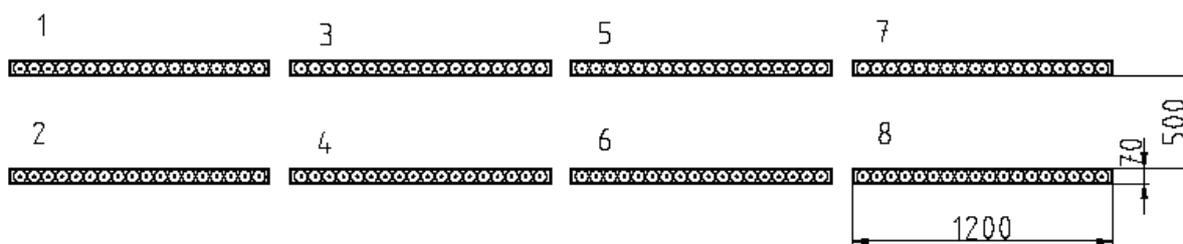


Рисунок 2 - Взаимное расположение модулей детектирования

Общее число модулей, составляющих детектор, равняется восьми (рис. 2). Модули установлены в двух горизонтальных рядах, образуя четыре пары располагающихся друг под другом годоскопов со счетчиками так, что расстояние между последовательными рядами счетчиков составляет 0,5м (рис. 2). Регистрация сигналов совпадения между различными комбинациями в верхнем и нижнем рядах модулей позволяет исследовать вариации потока частиц, движущихся под определенным углом к горизонту. Так, сигналы совпадения между импульсами от модулей, находящихся прямо друг над другом (пары 1-5, 2-6, 3-7 и 4-8) соответствуют частицам, которые летят приблизительно в вертикальном направлении. Резкое различие в эффективности регистрации гамма-излучения и заряженных релятивистских частиц, характерное для счетчиков СИ5Г, позволяет выделить сигналы от электронной компоненты космических лучей в общем потоке импульсов, которые регистрируются детектором, по сигналам совпадения между расположенными друг под другом парами модулей (рис.3).



Рисунок 3 – Внешний вид экспериментальной установки для регистрации космических лучей

В режиме работы, который используется в детекторе, ионизационные счетчики СИ5Г вырабатывают импульсные сигналы в широком диапазоне амплитуд от 0,1 В до 2-3 В. Это обуславливает необходимость стандартизации этих сигналов перед передачей их на систему регистрации. Для этой цели была разработана специальная схема формирующей ячейки. Вырабатываемые формирующими ячейками стандартные цифровые импульсы со

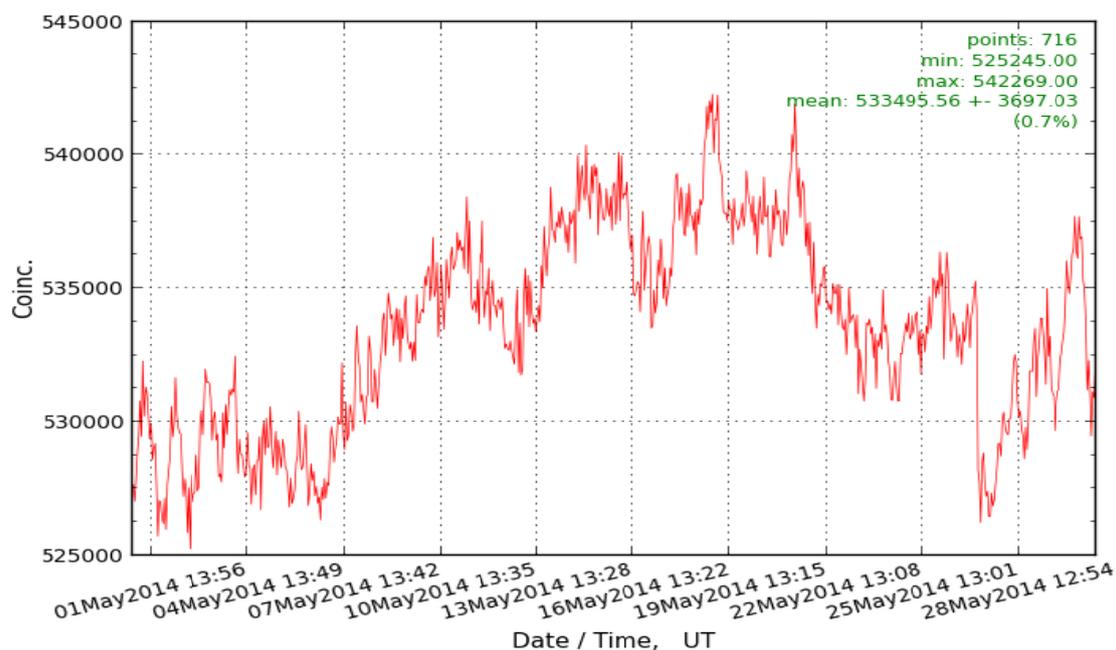


Рисунок 4 - Динамика накопления интенсивности космических лучей в течение одного месяца

счетчиков СИ5Г детекторного модуля поступают на входы суммирующего устройства – дизъюнктора. Выходные сигналы суммирующей схемы после дополнительного усиления используются для формирования сигналов совпадения.

Сигналы совпадения детекторов по модулям вырабатываются с помощью схемы, собранной на логических инверторах и конъюнкторах. Результаты обработки сигналов совпадения направ-

ляются на входы системы сбора данных детекторов, построенной на базе универсальных многоканальных пересчетных модулей Advantect PCI-1780U-6, которые устанавливаются в системном блоке стандартного персонального компьютера. Последний используется в качестве накопителя поступающей информации. Помимо суммирующей схемы, выходные сигналы формирующих ячеек модуля подключены к плате индикации работы системы.

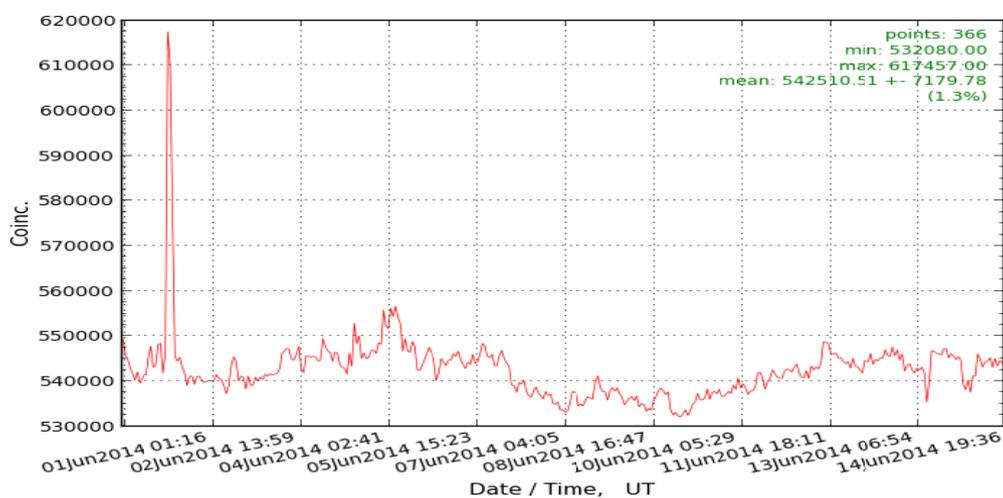


Рисунок 5 – Появление в спектре всплеска интенсивности космических лучей, связанной, вероятно, с регистрацией частицей ультравысокой энергией

Управление процессом измерения обеспечивается с помощью специальной библиотеки на языке C++. В свою очередь, на базе этой библиотеки построена программа *kll*, которая служит для непрерывного считывания количества импульсных сигналов, поступающих от отдельных модулей детектора в течение фиксированных временных интервалов (экспозиции) и записи этой информации на жесткий диск персонального компьютера. Результаты измерений интенсивности, полученные с помощью программы *kll*, автоматически заносятся в базу данных, построенную на основе системы управления базами данных (СУБД). Доступ к информации из этой базы данных возможен как по локальной сети, так и по сети Интернет посредством любого стандартного WEB – браузера. Регистрация интенсивностей компонент космических лучей осуществляется как в отдельности по модулям, так и по совпадению между ними в виде таблиц и графического материала (рис. 4). Интенсивности излучений могут претерпевать заметные изменения во времени в виде «всплесков» как следствие регистрации аномальных физических явлений (рис. 5). Во избежание возможных погрешностей, каждый раз в таких случаях необходима тщательная проверка результатов регистрации множества аналогичных систем, размещенных в различных местах, с целью установления истинной картины процесса.

Выводы. С учетом растущей потребности в исследованиях космических лучей и с целью привлечения к фундаментальным исследованиям большое число участников, а также распространения среди учебных заведений Республики Казахстан, разработан, изготовлен и проходит успешные испытания запатентованная экспериментальная установка для регистрации вариации и интенсивности космических лучей ультравысокой энергии в реальном масштабе времени, подготовленная к подключению к всемирной сети и имеющая высокую надежность и широкие перспективы использования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] <http://csr.phys.ualberta.ca/nalta>.
- [2] www.nikhef.nl/extern/eurocosmics.
- [3] Timmermans C. HiSPARC Collaboration 2005. 29-th Proceedings of the 29-th International Cosmic Ray Conference, Pune, India. P.104.
- [4] Жантаев Ж.Ш., Бреусов Н.Г., Мукашев К.М. и др. Мюоны в космических лучах и процессы в земной коре // Известия НАН РК, серия физ.-мат. №4 (302), 2015. С. 54-63

[5] Мукашев К.М., Чечин Л.М., Алиева М.Е. Об одном методическом аспекта категории взаимодействия в контексте темы «Космические лучи» // Журнал проблемы эволюции открытых систем. Изд. КазНУ. Том.18, вып.1. 2016. С.133-137.

[6] Мукашев К.М., Вильданова Л.И., Садыков Т.Х., Чубенко А.П. Атмосферное электричество и излучения, возникающие при грозовых явлениях. Монография – Алматы. 2012. 259 с. ISBN 978-601-232-510-2.

[7] Mukashev K.M., Chubenko A.P., Shepetov A.L. Registration of cosmic particles at the underground neutron calorimeter which is located at a height of 3340 m above sea level // Вестник КазНПУ им. Абая, сер. ф.-м. науки. 2010. №1 (29). С. 240-243.

[8] Мукашев К.М., Чубенко А.П. Экспериментальная установка для регистрации интенсивности и вариации космических лучей в реальном масштабе времени. Инновационный патент РК на изобретение. № 31382. 29-07-2016. Бюллетень №8.

[8] Мукашев К.М., Садыков Т.Х., Жуков В.В., Новолодская О.А. Прикладные исследования физики космических лучей. Монография. Ч.1. – Алматы: изд.дом КазНУ им.Аль-Фараби. 2016. 287 с. ISBN 978-601-04-2572-9.

К.М. Мұқашев¹, В.В. Казаченок², М.Е. Алиева³

¹ Әл-Фараби ат-ы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.;

² Беларус мемлекеттік университеті, Беларуссия, Минск қ.;

³ Абай ат-ы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы қ.

ҒАРЫШТЫҚ БӨЛШЕКТЕР ТҰРҒЫСЫНАН ФИЗИКАНЫҢ ІРГЕЛІ ПРОБЛЕМАЛАРЫН ОҚЫТУДЫҢ ПАРАДИГМАСЫ ТУРАЛЫ ЖАҢА КӨЗҚАРАСТАР

Аннотация. Соңғы жылдары Еуропа мен Солтүстік Америкада ғарыштық сәулелерді зерттеудің жаңа тәсілдері орын алуда. Сол үшін мейлінше кең аудандарға орналастырылған детекторлар желісі қолданылуда. Мұндай детекторлар тек зерттеу орталықтарын ғана емес, көптеген білім мекемелерін де қамтуда. Нәтижесінде маңызы ерекше бірнеше мәселелер жүзеге асырылуда. Бірінші орында энергиясы айрықша жоғары ғарыш сәулелерінің физикасын зерттеу мәселесі тұр. Келесі кезекте үлкен аймақтарда біртегізде байқалған процестерді тіркеу арқылы ғарыштық сәулелердің табиғаты мен шығу тегін анықтау болса, үшінші орында сол арқылы орта және жоғары білім ордаларының оқушылары мен студенттерінің көңілін іргелі ғылым саласына, әсіресе ультражоғары энергиялық зарядталған бөлшектердің физикасын зерттеуге бұру. Осындай маңызы зор мәселелерді шешу үшін және Қазақстан аумағында барлық білім ордаларына тарату арқылы іргелі ғылым саласына талантты жастарды тарту мақсатымен патентпен қорғалған баламасы жоқ эксперименталдық қондырғы құрылды. Қондырғы реалды уақыт бірлігінде жұмыс істеуге және ғаламдық желілер жүйесіне қосуға арналған.

Тірек сөздер: ғарыш сәулелері, ультражоғары энергиялық бөлшектер, тіркеу, детекторлар, желілер, жүйелер, оқыту парадигмасы.

Сведения об авторах:

Мукашев Канат Мукашевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, г.Алматы, моб.: 8-7013739283. e-mail: kanat-kms@mail.ru;

Казаченок Виктор Владимирович, доктор педагогических наук, профессор, Беларусский государственный университет, г. Минск. e-mail: kazachenok@bsu.by;

Алиева Молдир Е. – докторант PhD, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы. моб.: 8-7476952081, e-mail: moldir-2008@mail.ru.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 120 – 126

T.R. Myrzakul, A.S. Taukenova, F.B. Belisarova, S.R. Myrzakul

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
tmyrzakul@gmail.com, aliya_tauken@gmail.com,
farida.belisarova@kaznu.kz, shynaray1981@gmail.com

INFLATION MODEL OF k -ESSENCE FOR NON MINIMALLY COUPLED GAUSS-BONNET INVARIANT

Abstract. Inflation scenarios for the Horndeski model are discussed for a nonminimal coupling of the scalar field with the Gauss-Bonnet invariant. Examples of the canonical scalar field and k - essence are considered for maintaining early acceleration. The output of e -fold number, which measure the magnitude of inflation is shown. The contribution of Gauss-Bonnet in the dynamics of inflation is derived. It is shown that in this case the field moves faster and at the end of inflation the Gauss-Bonnet contribution disappears at small curvatures of the Friedman universe.

Key words: Gauss-Bonnet invariant, Horndeski inflation, k - essence

УДК 524.8

Т.Р. Мырзақұл, А.С. Таукенова, Ф.Б. Белисарова, Ш.Р. Мырзақұл

Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

ИНФЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ k -ЭССЕНЦИИ ПРИ НЕМИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗИ С ИНВАРИАНТОМ ГАУССА-БОННЭ

Аннотация. Обсуждается инфляционный сценарии для модели Хорндески для не минимальной связи скалярного поля с инвариантом Гаусса-Боннэ. Рассматриваются примеры канонического скалярного поля и k -эссенции для поддержания раннего ускорения. Показан вывод чисел e - сгиба, которые измеряют величину инфляции. Выведен вклад Гаусса-Боннэ в динамике инфляций. Показано, что в этом случае поле движется быстрее и, что в конце инфляций вклад Гаусса-Боннэ исчезает при малых искривлениях Вселенной Фридмана.

Ключевые слова: инвариант Гаусса-Боннэ, инфляция Хорндески, k -эссенция.

Введение

Космологическая инфляция, предложенная Аланом Гутом [1], подразумевает ускоренное расширение в ранней эпохе эволюции нашей Вселенной, которое произошло после Большого взрыва. В рамках общей теории относительности была построена модель с космологической константой, которая хорошо описывала динамику Вселенной, однако появились вопросы такие как плоскость наблюдаемой Вселенной, проблема горизонта и проблема магнитных монополий, на которые не было ответов. Ученые предложили альтернативную гипотезу, согласно которой помимо вещества и излучения существует скалярное поле, создающее отрицательное давление. В расширяющейся среде отрицательное давление способно породить элементарные частицы и кванты. Затем, в рамках Вселенной Фридмана-Леметра расширение происходит экспоненциально. При данном раскладе динамики Вселенной, приведенные выше проблемы исчезают.

А. Линде [2] предложил теорию хаотической инфляции, согласно которой распределение вещества и излучения в пространстве после инфляции становится однородным, за исключением следов первичных квантовых возмущений плотности, которые со временем дали начало галактическим скоплениям наблюдаемой крупномасштабной структуры Вселенной. На основе данных теории, было построено большое количество инфляционных моделей [3-6] и др.

В конце прошлого тысячелетия группа астрономов наблюдая за сверхновыми звездами типа Ia [7,8], обнаружили ускоренное расширение Вселенной. На основе данного открытия появились модифицированные теории гравитации, описывающие динамику Вселенной в целом. Однако Лагранжиан модифицированной гравитации принимает более сложный вид в сравнении с общей теорией относительности, и приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. В 1974 году Хорндески [9] нашел самый общий класс скалярно-тензорных теорий (где скалярное поле связано с гравитацией), которые обладают стандартным Лагранжианом, как в теории Эйнштейна. Гравитация Хорндески является довольно популярной и рассматривается во многих работах, особенно в контексте инфляционной космологии (см. некоторые из них [10-12]). Кроме того, один интересный подкласс гравитации Хорндески представлен в виде не минимальной связи поля с четырёхмерным топологическим инвариантом Гаусса-Боннэ (см., например, работу [13]), так как инвариант Гаусса-Боннэ строго связан с теорией струн и следовой аномалией и может играть важную роль в расширении в начальное время нашей Вселенной.

В настоящей работе рассмотрено скалярное поле, поддерживающее инфляцию, связанную с инвариантом Гаусса-Боннэ. Теория может быть выведена как частный случай гравитации Хорндески. Сначала исследуем простую модель, где инфлатон идентифицируется как k -эссенция с каноническим скалярным полем. Лагранжиан k -эссенции содержит кинетический член [14] нестандартного высшего порядка.

В работе используются следующие единицы $\kappa_B = c = \hbar = 1$ и $8\pi / M^2 = 1$, где M - Планковская масса.

Модель

Рассмотрим класс моделей со скалярным полем связанным с инвариантом Гаусса-Боннэ, действие которого имеет следующий вид

$$I = \int_M dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + p(\varphi, X) + \xi(\varphi)G \right], \quad X = -\frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{2}, \quad (1)$$

где M является пространственно-временным многообразием, g – определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$, R – скаляр Риччи действия Гильберта-Эйнштейна общей теории относительности (ОТО), $p(\varphi, X)$ – функция скалярного поля φ и его кинетической энергией X , $\xi(\varphi)$ является функцией только поля, а G – четырехмерный топологический инвариант Гаусса-Боннэ, а именно

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\zeta}R^{\mu\nu\sigma\zeta}, \quad (2)$$

$R_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu\sigma\zeta}$ – тензор Риччи и тензор Римана, соответственно.

Лагранжиан в (1) представляет собой частный случай гравитации Хорндески. Модель Хорндески [9] является наиболее общей скалярно-тензорной теорией с уравнениями поля второго порядка (например, в ОТО) и предполагает общий следующий вид (в вакууме),

$$I = \int_M dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + L_H \right], \quad L_H = \sum_{i=2}^5 L_i, \quad (3)$$

где L_H содержит лагранжиан скалярного поля φ и поправки высокого порядка к ОТО в сочетании с самим полем,

$$L_2 = P(\varphi, X) \\ L_3 = -G_3(\varphi, X)W\varphi$$

$$L_4 = G_4(\phi X)R + G_{4,X}[(W\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)], \quad (4)$$

$$L_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - \frac{1}{6}G_{5,X}[(W\phi)^3 - 3(W\phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \phi)(\nabla^\alpha \nabla_\beta \phi)(\nabla^\beta \nabla_\mu \phi)].$$

Здесь $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ обычный тензор Эйнштейна, тогда как $P(\phi, X)$ и $G_i(\phi, X)$ с $i = 3, 4, 5$ функции скалярного поля ϕ и его кинетической энергии X , W – оператор Даламбера. Если зададим вид функции как в работе [10]

$$\begin{aligned} P(\phi, X) &= p(\phi, X) + 8 \frac{d^4 \xi(\phi)}{d\phi^4} X^2 (3 - \log X), \\ G_3(\phi, X) &= 4 \frac{d^3 \xi(\phi)}{d\phi^3} X (7 - 3 \log X), \\ G_4(\phi, X) &= 4 \frac{d^2 \xi(\phi)}{d\phi^2} X (2 - \log X), \\ G_5(\phi, X) &= -4 \frac{d\xi(\phi)}{d\phi} \log X, \end{aligned} \quad (5)$$

то после интегрирования по частям можно получить уравнение (1). Делая простой выбор $p(\phi, X) = X$, находим гравитацию Эйнштейна-дилатон-Гаусса-Боннэ (ЭдГБ). Отметим также, что если $\xi(\phi) = \text{const}$, то вклад Гаусса-Боннэ исчезает.

В целом, ϕ можно идентифицировать с полем k -эссенции, чей тензор энергии-импульса определяется следующим выражением [14]

$$T_{(\phi)\nu}^\mu = (\rho(\phi, X) + p(\phi, X))u^\mu u_\nu + p(\phi, X)\delta_\nu^\mu, \quad u_\nu = \frac{\partial_\nu \phi}{\sqrt{2X}}, \quad (6)$$

так, что $p(\phi, X)$ является эффективным давлением k -эссенций и $\rho(\phi, X)$ ее плотность энергии

$$\rho(\phi, X) = 2X \frac{\partial p(\phi, X)}{\partial X} - p(\phi, X). \quad (7)$$

Каноническое скалярное поле соответствующее $p(\phi, X) = X - V(\phi)$, $V(\phi)$ является только функцией поля, но Лагранжиан k -эссенций допускает кинетический член высокого порядка. Будем работать с плоской метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ).

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2, \quad (8)$$

где $a \equiv a(t)$ масштабный фактор, зависящий от космологического времени. Таким образом

$$X = \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \quad (9)$$

и уравнения движения даны в [10]

$$3H^2 = \rho(\phi, X) - 24H^3 \dot{\phi} \frac{d\xi(\phi)}{d\phi}, \quad (10)$$

$$-(2\dot{H} + 3H^2) = p(\phi, X) + 8H^2 \frac{d^2 \xi(\phi)}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 + 8 \frac{d\xi(\phi)}{d\phi} (2H^3 \dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + H^2 \ddot{\phi}), \quad (11)$$

где точка означает производную по времени. Уравнение непрерывности k -эссенций следует из уравнения движения как,

$$\dot{\rho}(\phi, X) + 3H(\rho(\phi, X) + p(\phi, X)) = 24 \frac{d\xi(\phi)}{d\phi} \dot{\phi} H^2 (\dot{H} + H^2). \quad (12)$$

Заметим, что $\rho(\phi, X) + p(\phi, X) = 2Xp_x(\phi, X)$, и в пространстве-времени ФРУ $G=24H^2(H^2 + \dot{H})$. Введем число e -сгибов относительно данного времени t_0 , а именно:

$$N = \log \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right], \quad (13)$$

и принимая во внимание, что $dN = -Hdt$, имеем из системы уравнений движения (10) и (12),

$$3H^2 = \rho(\phi, X) + 24H^4 \phi' \frac{d\xi(\phi)}{d\phi}, \quad (14)$$

$$-\rho'(\phi, X) + 3H^2 \phi'^2 (p_x(\phi, X)) = 24 \frac{d\xi(\phi)}{d\phi} \phi' H^3 (H' - H), \quad (15)$$

где штрихованный индекс обозначает производную по N и $X = H^2 \phi'^2 / 2$. e -сгиб является полезным параметром в инфляционной космологии и, если его идентифицировать со временем t_0 , когда ускорение заканчивается, оно измеряет скорость расширения Вселенной в разное время $t < t_i$.

Инфляция

Ускорение раннего времени реализовано в квази-де Ситтеровском пространстве-времени, когда параметр Хаббла почти постоянен и поле движется медленно. В таком случае уравнения (14), (15) будут читаться как, в приближении медленного сворачивания с $|H'/H| \ll 1$, $|\phi'| \ll 1$ и $|\phi''| \ll |\phi'|$,

$$3H^2 \cong \rho(\phi, X), \quad \rho'(\phi, X) - 3H^2 \phi'^2 p_x(\phi, X) \cong 24 \frac{d\xi(\phi)}{d\phi} \phi' H^4. \quad (16)$$

Взяв время t_0 в (13) как время в конце инфляций и предполагая, что когда начинается ускоренное расширение, то $0 \ll N$, поведение поля может быть объяснено следующим образом: когда $0 \ll N$, то $\phi \ll 0$, в то время когда $N = 0$, $\phi \cong 0$, так как $\phi' < 0$. Когда параметр Хаббла уменьшается и стремится к нулю, тогда N стремится к нулю, $0 < \rho'(\phi, X)$, во то время как $X' < 0$, позволяющий изящный выход из инфляций.

Введем параметр медленного сворачивания:

$$\varepsilon = \frac{H'}{H}, \quad (17)$$

который положителен и мал во время ускоренной фазы и порядка единицы когда ускорение заканчивается приводя к общему числу e -сгиба $N \equiv N(a(t_i))$, t_i начальное время инфляции, достаточно большое, чтобы объяснить термализацию наблюдаемой Вселенной. Если более конкретизоваться, оно должно быть в промежутке $55 < N < 65$.

Рассмотрим пример простой модели, воспроизводящий инфляцию в рамках рассматриваемой работы.

k -эссенция с каноническим скалярным полем

Определим k -эссенцию с каноническим скалярным полем, выдавая как

$$p(\phi, X) = X - V(\phi), \quad \rho(\phi, X) = X + V(\phi), \quad (18)$$

где $V(\phi)$ является функцией только скалярного поля и кинетический член является стандартным. Во время инфляций, для больших и отрицательных значений поля, оно должно быть как

$$X \ll V(\phi \rightarrow -\infty), \quad (19)$$

в то время как в конце, когда поле стремится к исчезновению

$$V(\phi \rightarrow 0^-) \ll X. \quad (20)$$

Рассмотрим следующий вид параметра Хаббла

$$H^2 = H_0^2(N + 1), \quad \varepsilon \cong \frac{1}{2(N + 1)}, \quad (21)$$

где H_0 значение параметра Хаббла в конце инфляции. Можно увидеть, что ε параметр медленного сворачивания мал, когда $1 \ll N$, а именно когда H почти постоянный. Принимая во внимание, что $-dN/dt = H$, с точки зрения космологического времени решение соответствует

$$H^2 = \frac{H_0^4}{4}(t_0 - t)^2, \quad (22)$$

где t_0 общее время инфляций и $t = 0$ в начале ускоренной фазы. Таким образом, путем использования уравнений в [10] с приближением медленного сворачивания $|H'/H| \ll 1$ и $|\phi''| \ll |\phi'|$, находим

$$V(\phi) \cong 3H_0^2(N + 1), \quad \phi' \cong \frac{-24\xi_\phi(\phi)H^4 + V_\phi(\phi)}{3H^2}. \quad (23)$$

Из второго уравнения мы получим

$$\phi'^2 \cong \frac{-24\xi'(\phi)H_0^4(N + 1)^2 + 3H_0^2}{3H_0^2(N + 1)}. \quad (24)$$

Не минимальная связь $\xi(\phi)$ между полем и Гауссом-Бонне определяет вид поля и следовательно, механизм выхода из инфляций. Так как поле должно двигаться медленно, реалистичный сценарий может быть дан как

$$\xi'(\phi) = \frac{\xi_0}{(N + 1)^{2+\lambda}}, \quad \xi(\phi) = -\frac{1}{(1 + \lambda)(N + 1)^{1+\lambda}}, \quad -1 < \lambda, \quad (25)$$

с $|\xi_0| \sim 1/H_0^2$ общей постоянной и λ число больше чем минус один. Как следствие,

$$\begin{aligned}\phi &\cong \phi_0 - \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)(N+1)^{\frac{1-\lambda}{2}} \sqrt{-8\xi_0 H_0^2}, \quad -1 < \lambda < 0, \\ \phi &\cong \phi_0 - 2\sqrt{1+N} \sqrt{-8\xi_0 H_0^2 + 1}, \quad 0 = \lambda, \\ \phi &\cong \phi_0 - 2\sqrt{1+N}, \quad 0 < \lambda,\end{aligned}\tag{26}$$

где $\phi_0 < 0$ является значением поля в конце ускоренной фазы, и требуется, чтобы $\xi_0 < 0$. Точное восстановление потенциала приводит к

$$\begin{aligned}V(\phi) &\cong 3H_0^2 \left[\left(\frac{2}{1-\lambda}\right) \sqrt{-8\xi_0 H_0^2} \right]^{\frac{2}{\lambda-1}} (\phi_0 - \phi)^{\frac{2}{1-\lambda}}, \quad -1 < \lambda < 0, \\ V(\phi) &\cong 3H_0^2 \left[2\sqrt{-8\xi_0 H_0^2 + 1} \right]^2 (\phi_0 - \phi)^2, \quad 0 = \lambda, \\ V(\phi) &\cong \frac{3H_0^2}{4} (\phi - \phi_0)^2, \quad 0 < \lambda,\end{aligned}\tag{27}$$

в то время как отношение между потенциалом и связью

$$\xi(\phi) = -\frac{\xi_0}{(1+\lambda)} \left[\frac{3H_0^2}{V(\phi)} \right]^{1+\lambda},\tag{28}$$

и получается явный вид функций Лагранжа. Видно, что вклад Гаусса-Боннэ значителен в динамике инфляций только при $-1 < \lambda < 0$. В этом случае ϕ' больше по отношению к классическому случаю без поправок к ОТО и поле движется быстрее. Отметим, что в конце инфляций $\xi(\phi) \cong -\xi_0/(1+\lambda) \sim 1/H_0^2$, и при $H < H_0$, вклад Гаусса-Боннэ исчезает при малых искривлениях Вселенной Фридмана.

Заключение

В данной работе были исследованы решения для инфляции в модели Хорндески, где скалярное поле, представляющее инфляцию, связано с инвариантом Гаусса-Боннэ. Было рассмотрено каноническое скалярное поле со стандартным кинетическим членом и k -эссенцией, где присутствовало скалярное поле с более высоким порядком кинетического члена. Интерес к такому роду теорий в контексте ранней инфляций мотивирован тем, что можно ожидать, при высоких искривлениях ОТО, эффекты модифицируют теорию Эйнштейна. В частности, инвариант Гаусса-Боннэ играет важную роль в теории струн и входит в следовую аномалию [15,16]. Тем более k -эссенция, это одна из возможных теории описывающая инфляцию [14,17]. Преимуществом работы с моделью Хорндески является то, что несмотря на сложную форму Лагранжиана, уравнения движения остаются второго порядка как в общей теории относительности.

Проанализирована модель поведения параметра Хаббла для раннего ускорения, используя технику реконструкции для вывода Лагранжиана исходя из данных решений. Эта процедура довольно проста, если выражает все величины в виде чисел e -сгиба, которые измеряют величину инфляции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Guth H. (1981) Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, Physical Review D, 23: 347. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- [2] Linde A. (1983) Chaotic inflation, Physics Letters B,129:177-181. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90837-7.
- [3] Nojiri S., Odintsov SD, Oikonomou VK, (2015) Singular inflation from generalized equation of state fluids, Physics Letters B, 747:310. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.06.016.
- [4] De Laurentis M, Paoletta M, Capozziello S. (2015) Cosmological inflation in F(R,G) gravity, Physical Review D, 91:083531. DOI : 10.1103/PhysRevD.91.083531.

- [5] Myrzakul S, Myrzakulov R, Sebastiani L. (2016) $f(\phi)$ R-models for inflation, International Journal of Modern Physics D, 25.2:1650041. DOI: 10.1142/S0218271816500413.
- [6] Myrzakul S., Myrzakulov R., Sebastiani L.(2015) Chaotic inflation in higher derivative gravity theories, The European Physical Journal C, 75:111. DOI:10.1140/epjc/s10052-015-3332-x.
- [7] Perlmutter S. et al. (1999) Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, Astrophysical Journal, 517:565- 586. DOI : 10.1086/307221.
- [8] Reiss AG et al. (1998) Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, The Astronomical Journal, 116:1009- 1038. DOI: 10.1086/300499.
- [9] Horndeski GW (1974) Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space, International Journal of Theoretical Physics, 10:363. DOI: 10.1007/BF01807638
- [10] Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J. (2011) Generalized G-Inflation-Inflation with the Most General Second-Order Field Equations, Progress of Theoretical Physics, 26:511. DOI.org/10.1088/0264-9381/28/10/103001
- [11] Myrzakulov R., Sebastiani L. (2016) Scalar tensor Horndeski models: simple cosmological applications, Astrophysics and Space Science, 361:62. DOI: 10.1007/s10509-016-2846-5.
- [12] Cognola G., Myrzakulov R., Sebastiani L., Vagnozzi S., Zerbini S. (2016) Covariant Hořava-like and mimetic Horndeski gravity: cosmological solutions and perturbations, Classical and Quantum Gravity, 33:22. DOI:10.1088/0264-9381/33/22/225014.
- [13] Nojiri S, Odintsov SD, Sasaki M. (2005) Gauss-Bonnet dark energy // Physical Review D, 71:123509. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.123509.
- [14] Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Damour T. (1999) k -Inflation, Physics Letters B, 458 : 209. DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6.
- [15] Myrzakulov R., Odintsov S., Sebastiani L. (2015) Inflationary universe from higher-derivative quantum gravity // Physical Review D. - Vol.91. - P.083529. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.083529.
- [16] Bamba K., Myrzakulov R., Odintsov SD, Sebastiani L. (2014) Trace-anomaly driven inflation in modified gravity and the BICEP2 result, Physical Review D. 90.4:043505. DOI:10.1103/PhysRevD.90.043505.
- [17] Sebastiani L., Cognola G., Myrzakulov R., Odintsov SD, Zerbini S. (2014) Nearly Starobinsky inflation from modified gravity, Physical Review D, 89.2: 023518. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.023518.

Т.Р. Мырзақұл, А.С. Таукенова, Ф.Б. Белисарова, Ш.Р. Мырзақұл

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

ГАУСС-БОННЭ ИНВАРИАНТЫМЕН МИНИМАЛДЫ ЕМЕС БАЙЛАНЫС КЕЗІНДЕГІ k - ЭССЕНЦИЯНЫҢ ИНФЛЯЦИЯЛЫҚ МОДЕЛІ

Аннотация. Гаусс-Боннэ инвариант пен скаляр өрісі арасында минималды емес байланыс кезінде Хорндески моделі үшін инфляциялық сценарий талқыланды. Ерте кездегі үдетуді сақтау үшін каноникалық скаляр өрісі және k -эссенция мысалдары қарастырылды. Инфляцияны өлшейтін e -қайырлу санын есептедік. Инфляция динамикасындағы Гаусс-Боннэ үлесі көрсетілді. Бұл жағдайда өріс жылдам қозғалатыны және инфляцияның соңында Фридман әлемінің шағын бұрмалануы кезінде Гаусс-Боннэ үлесі жоғалатыны көрсетілді.

Тірек сөздер: Гаусс-Боннэ инварианты, Хорндески инфляциясы, k -эссенция.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 127 – 133

UDC 532.133, 371.62, 372.8.002

**G. SH. Omashova, R.S. Spabekova, K. A. Kabylbekov,
P. A. Saidakhmetov, KH. K. Abdrakhmanova, A. S. Arysbaeva**

M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
gauhar_omashova@mail.ru

**INDEPENDENT DESIGNING OF TASKS FOR PERFORMANCE
OF COMPUTER LABORATORY WORK ON THE INVESTIGATION
OF THE ISOPHORIC PROCESS**

Abstract. There are encouraged to self-design of tasks to a form of computer laboratory worksorganization on the study of the isochoric process on a computer model. Brief facts from the theory discussed issues to check the readiness of the students to the work, introductory exercises with the computer model, tasks and then reviewing the answers in the computer experiment, experimental, research and creative activities were proposed.

In short, the information theory gives the definition of isochoric process and the conditions of its implementation. Expression of the first law of thermodynamics for isochoric process is given. The introductory exercises with the computer model include questions related to the ability to change the process parameters and their implementation in computer experiments. Experimental and research assignments involve the implementation conditions of computational experiment on the set parameters, the initial and final temperature and their difference, the change in internal energy, checking on the implementation of the equation, isochoric process with the analysis result of the experiment, and the formulation of the output, correspondence of results to the first law of thermodynamics.

The tasks are given abundantly. Accomplishment of them all by one student is optional. The teacher, taking into account students' abilities, can find exercises or offer other similar tasks. Special attention should be paid to the implementation of research and creative tasks. At the end of the lesson, students fill their forms and send by e-mail or pass to the teacher. The proposed tasks were tested in Nazarbayev intellectual school of physics and mathematics in Shymkent, in "Daryn" regional school for gifted children and school named after M.Auezov, in Arys. Most students carried out assignments with great interest.

Key words: isochoric process diagram, pressure, volume, temperature, heat, work, internal energy, the first law of thermodynamics.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**Г.Ш. Омашова, Р.С. Спабекова, К.А. Кабылбеков,
П.А. Саидахметов, Х.К. Абдрахманова, А.С. Арысбаева**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Казахстан.

**САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ ДЛЯ
ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ИЗОХОРОННОГО ПРОЦЕССА**

Аннотация. Предлагается самостоятельное конструирование заданий для бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изохорного процесса на компьютерной модели. Приводятся краткие сведения из теории, обсуждаемые вопросы для проверки готовности учащихся к

выполнению работы, ознакомительные задания с компьютерной моделью, задачи с последующей проверкой ответов по компьютерному эксперименту, экспериментальные, исследовательские и творческие задания.

В кратких сведениях из теории дается определение изохорного процесса и условия его реализации. Выражения первого закона термодинамики для изохорного процесса.

Ознакомительные задания с компьютерной моделью включают вопросы связанные с умением менять параметры процесса и их реализации в компьютерном эксперименте.

Экспериментальные и исследовательские задания предусматривают реализацию условий компьютерного эксперимента по заданным параметрам, определения начальной и конечной температуры и их разности, изменения внутренней энергии, проверку на выполнение уравнения изохорного процесса с анализом результата эксперимента и формулировкой вывода, соответствие результатов первому закону термодинамики.

Задания даны с избытком. Выполнение их всех одному ученику необязательно. Преподаватель может с учетом способности учащихся подобрать задания или предложить другие подобные задания. Особое внимание надо обратить выполнению исследовательских и творческих заданий. По окончании урока учащиеся заполняют свои бланки и отправляют по электронной почте или непосредственно сдают учителю. На следующем уроке преподаватель обсуждает ответы и оценивает работы. Предложенные задания апробированы в Назарбаев интеллектуальной школе физико-математического направления г.Шымкент, областной школе «Дарын» для одаренных детей и в школе-гимназии им. М.Ауэзова г.Арысь. Большинство учащихся с большой заинтересованностью выполняли все задания.

Ключевые слова: изохорный процесс, диаграмма, давление, объем, температура, теплота, работа, внутренняя энергия, первый закон термодинамики.

Президент Республики Казахстан Н. Назарбаев в Послании народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» - новый политический курс состоявшегося государства» обозначив приоритеты в сфере образования сказал: «Нам предстоит произвести модернизацию методик преподавания и активно развивать он-лайн-системы образования, создавая региональные школьные центры. Мы должны интенсивно внедрять инновационные методы, решения и инструменты в отечественную систему образования, включая дистанционное обучение и обучение в режиме он-лайн, доступные для всех желающих» [1].

Для реализации поставленных задач кафедра «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. Ауэзова МОН РК с 2013 года внедрила в учебный процесс дисциплины «Информационные технологии в образовании», «Информационные технологии в преподавании физики», «Методика использования электронных учебников», «Компьютерное моделирование физических процессов» программы которых предусматривает освоение и использование современных информационных технологий в преподавании физики.

Методика конструирования заданий для компьютерных моделей приведена в брошюре «Методические аспекты преподавания физики с использованием компьютерного курса «Открытая физика» [2]. В качестве примера в ней приведены бланки заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы с использованием компьютерных моделей «Движение с постоянным ускорением» и «Упругие и неупругие соударения». Такие же материалы размещены в компакт-диске «Открытая физика 2.5», в сайтах «Открытый колледж» и на страницах сетевого объединения методистов (СОМ) [3,4]. В них даются два вида лабораторных бланков:

- бланк для внесения ответов обучающимися;
- бланк для учителя в котором имеются ответы тестов и заданий для удобства их проверки.

Созданы новые компьютерные модели, обучающие программы, базы данных и методика их использования в преподавании физики в школах, колледжах, лицеях и ВУЗ [5-20].

Одной из трудных задач внедрения этих результатов в учреждениях образования является недостаточное практическое умение преподавателей школ использования компьютерных моделей физических явлений для организации проведения лабораторных работ. От организации компьютерных лабораторных работ во многом зависит активизация, мотивация и в конечном счете эффективность обучения.

Мощным средством обучения физике, по мнению многих отечественных и зарубежных специалистов является продукция компании «Физикон» [2]. Используя этот ресурс, нами разработана модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию адиабатного процесса.

Тема работы: Исследование изохорного процесса на компьютерной модели.

Цель работы: Определение конечных значений давления и температуры газа при их изохорном нагревании и охлаждении с помощью компьютерного эксперимента.

Класс..... ФИО ученика.....

Краткие сведения из теории.

Изохорным называется процесс квазистатического нагревания и охлаждения тела (идеального газа) при ($V=const.$) постоянном объеме.

В P-T диаграмме изохорный процесс при различных значения объема описывается прямыми линиями, начинающиеся с $T=0$ под разными углами наклона (Закон Шарля) в зависимости от количества вещества, содержащегося в объеме. Для одного моля идеального газа $\frac{P}{T} = \frac{R}{V} = const.$, где $R=8.31$ Дж/(моль К) – универсальная газовая постоянная.

При изохорном процессе газ не совершает работу $A = 0$ и вся теплота сообщенная газу расходуется на повышение его внутренней энергии, т.е. на нагревание газа.

Для изохорного процесса первое начало термодинамики записывается следующим выражением:

$$Q = U(T_2) - U(T_1) = \Delta U,$$

где $U(T_2), U(T_1)$ – внутренние энергии газа в конечном и начальном состояниях, Q-сообщенная газу теплота. При изохорном нагревании газа теплота ($Q>0$) поглощается и его внутренняя энергия повышается и при изохорном охлаждении газ отдает теплоту внешней среде ($Q<0$) и его внутренняя энергия уменьшается, т.е. температура газа понижается.

Вопросы обсуждаемые с учениками.

- Какой процесс называется изохорным? Ответ:.....
- Изобразите изохорный процесс в VT, PT и PV диаграммах. Ответ:.....
- Напишите выражение первого начала термодинамики для изохорного процесса.

Ответ:

- При каком изохорном процессе тепло поглощается? Ответ:.....
- При каком изохорном процессе тепло выделяется? Ответ:.....
- Как изменится температура газа, если его давление увеличить в 2 раза? Ответ:.....
- Как изменится температура газа, если его давление уменьшить в 2 раза? Ответ:.....
- Как изменится давление газа, если его температуру увеличить в 3 раза? Ответ:.....
- Как изменится температура газа, если его давление уменьшить в 3 раза? Ответ:.....
- Приведите примеры изохорного процесса из жизни. Ответ:.....

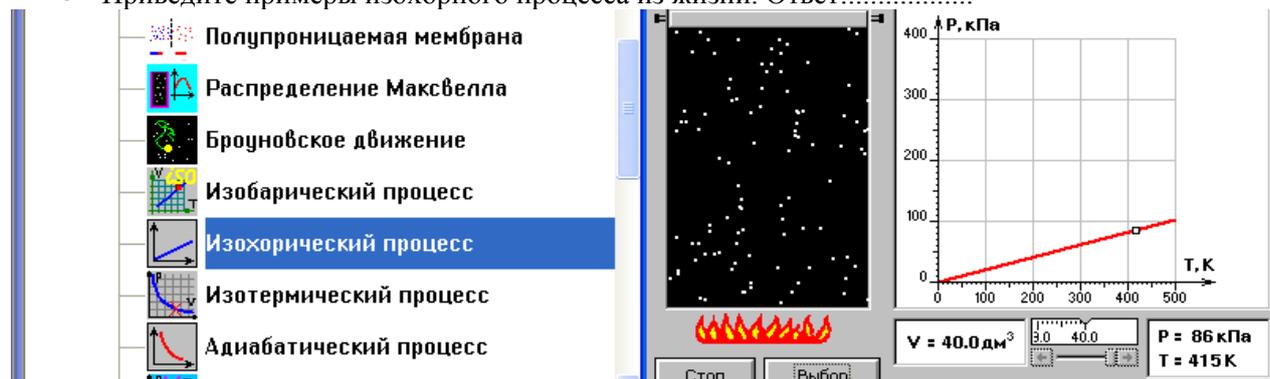


Рисунок 1

1.Ознакомительные задания с компьютерной моделью(Рис.1).

- 1.1. В каких пределах можно задать объем газа . Ответ:.....
- 1.2. В каких пределах можно менять температуру газа . Ответ:.....
- 1.3. Провести наблюдение ихохорное нагревание газа от 100К до 350К при различных объемах и сделайте заключение. Заключение:.....

1.4. Газ в объеме $V=10 \text{ дм}^3$ изохорно нагревается от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$. Каково давление газа при T_2 ? Ответ:.....

1.5. Газ в объеме $V=20 \text{ дм}^3$ изохорно нагревается от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$. Каково давление газа при T_2 ? Ответ:.....

1.6. Газ в объеме $V=30 \text{ дм}^3$ изохорно нагревается от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$. Каково давление газа при T_2 ? Ответ:.....

1.7. Газ в объеме $V=40 \text{ дм}^3$ изохорно нагревается от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$. Каково давление газа при T_2 ? Ответ:.....

1.8. По результатам заданий 1.4-1.7 построить VT, PT және PV диаграммы. Ответ:.....

2. Экспериментальные задания.

2.1. Реализовать на компьютерной модели следующий процесс: Газ занимающий объем $V=10 \text{ дм}^3$ изохорически нагреть от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$ и определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Сравнить результаты эксперимента с вычислениями. Результаты:.....

2.2. Реализовать на компьютерной модели следующий процесс: Газ занимающий объем $V=20 \text{ дм}^3$ изохорически нагреть от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$ и определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Сравнить результаты эксперимента с вычислениями. Результаты:.....

2.3. Реализовать на компьютерной модели следующий процесс: Газ занимающий объем $V=30 \text{ дм}^3$ изохорически нагреть от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$ и определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Сравнить результаты эксперимента с вычислениями. Результаты:.....

2.4. Реализовать на компьютерной модели следующий процесс: Газ занимающий объем $V=10 \text{ дм}^3$ изохорически нагреть от $T_1=100 \text{ К}$ до $T_2=450 \text{ К}$ и определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Сравнить результаты эксперимента с вычислениями. Результаты:.....

3. Исследовательские задания.

3.1. По результатам заданий 2.1-2.4 проверить выполнение первого закона термодинамики и сделайте заключение. Заключение:

3.2. Температуру газа с заданной массой при постоянном объеме повышают температуру на $\Delta T=40 \text{ К}$, при этом его давление увеличивается на $\Delta P/P=10\%$. Определить начальную температуру газа. Реализовать такой эксперимент на компьютерной модели. Определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Проверить выполнение первого закона термодинамики. Ответы:.....

3.3. Температуру газа с заданной массой при постоянном объеме повышают температуру на $\Delta T=60 \text{ К}$, при этом его давление увеличивается на $\Delta P/P=10\%$. Определить начальную температуру газа. Реализовать такой эксперимент на компьютерной модели. Определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Проверить выполнение первого закона термодинамики. Ответы:.....

3.4. Температуру газа с заданной массой при постоянном объеме повышают температуру на $\Delta T=80 \text{ К}$, при этом его давление увеличивается на $\Delta P/P=10\%$. Определить начальную температуру газа. Реализовать такой эксперимент на компьютерной модели. Определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Проверить выполнение первого закона термодинамики. Ответы:.....

3.5. Температуру газа с заданной массой при постоянном объеме повышают температуру на $\Delta T=100 \text{ К}$, при этом его давление увеличивается на $\Delta P/P=10\%$. Определить начальную температуру газа. Реализовать такой эксперимент на компьютерной модели. Определить количество поглощенной теплоты, изменение внутренней энергии и работу газа. Проверить выполнение первого закона термодинамики. Ответы:.....

4. Творческие задания.

4.1. Придумайте несколько собственных экспериментальных заданий и реализуйте их на компьютерной модели. Задания и результаты:.....

Количество выполненных заданий	Количество ошибок	Оценка

Задания в бланке даны с избытком. Ученику необязательно их всех выполнять. Учитель может с учетом их способности подобрать каждому необходимые или самостоятельно дать другие. Предложенная модель бланка апробирована в Назарбаев интеллектуальной школе физико-математического направления г.Шымкент, областной школе «Дарын» для одаренных детей и в школе-гимназии им. М.Ауэзова г.Арысь. Большинство учащихся с большой заинтересованностью выполняли все задания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.
- [2] CDдиск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.
- [3] Кавтрев А.Ф. http://www.college.ru/metod_phys.html
- [4] Кавтрев А.Ф. «Лабораторные работы к компьютерному курсу «Открытая физика».Равномерное движение. Моделирование неупругих соударений». — Газета «Физика», №20, 2001 — с. 5–8.
- [5] Кабылбеков К.А.,Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ, конф.с междунар. участием. Томск 2011г., С210-215.
- [6] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С Оқушылардың өз бетінше атқаратын компьютерлік зертханалық жұмыс бланкісінің үлгісі. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [7] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е. Абдураимов Фотозффект, комптонэфекті заңдылықтарын оқытуда компьютерлік үлгілерді қолданудың әдістемесі, компьютерлік зертханалық жұмыс атқаруға арналған бланкі үлгілері. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [8] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А.,Турганова, Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Жинағыш және шашыратқыш линзаларды үлгілеу тақырыбына сабақ өткізу үлгісі. Известия НАН РК, серия физ-мат.№2, Алматы, 2014, С 286-294.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П. А, Рүстемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Жарықтың дифракциясын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі Изв. НАН РК, серия физ-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева, Э.М.,Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Зарядталған бөлшектердің магнит өрісінде қозғалысын және масс-спектрометр жұмысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 80-87..
- [11] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А, Саидахметов, П А., Байгулова З.А.,Байдуллаева Л.Е. Ньютон сақиналарын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [12] Кабылбеков К.А.,Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И.Жарықтың интерференция құбылысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136
- [13] Кабылбеков К.А.,Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Допплер эффектісін зерттеуге арналған компьютерлік жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, секция физ-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [14] Кабылбеков К.А. Физикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру. Оқу құралы. Шымкент қ., 2015, 284с.
- [15] Кабылбеков К.А. АширбаевХ.А.,Арысбаева А.С.,Джумагалиева А.М.Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4,Москва, 2015,С 40-43:
- [16] Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы.по исследованию работы селектора скорости.Современные наукоемкие технологии,№6,Москва, 2015,С19-21.
- [17] Кабылбеков К.А.,СаидахметовП. А., Омашова Г.Ш.Серикбаева Г.С. Сүйерқұлова Ж.Н. Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН серия физ. мат №2 2016, С84-91.

[18] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш. Нуруллаев, М.А. Артыгалин Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя совершающего цикл Карно. Изв. НАН серия физ мат №2 2016г. С98-103.

[19] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е., Исследование работы газа на компьютерной модели. Вестник НАН №2 2016, С83-88.

[20] Кабылбеков К.А., Саидахметов А.А. Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И. Қозыбақова Г.Н. Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв НАН серия физ. мат №2 2016, С92-97.

REFERENCES

[1] Nazarbayev H.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012г.

[2] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1". 2001.

[3] Kavtrev A.F. /www.college.ru/metod_phys.html

[4] Kavtrev A.F. «Laboratory operations to a computer course» Open physics ». The uniform motion. Modelling of inelastic collisions». - the Newspaper of "Physicist", №20, 2001 - P 5-8.

[5] Kabyzbekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011г., P.210-215.

[6] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P82-89.

[7] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P114-121.

[8] Abylbekov K.A., Saidahmetov P. A., Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P286-294.

[9] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P71-77.

[10] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva SH.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), 2015, P80-87.

[11] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Saidahmetov P.A., Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, № 1 (299), 2015, P14-20.

[12] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, 2015, P131-136

[13] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, 2015, P155-160.

[14] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. 2015, 284 p.

[15] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, 2015. P40-43.

[16] Kabyzbekov K.A., Models of the form of the organisation of computer laboratory work on research of the selector of speeds. Modern high technologies. №6, Moscow, 2015, P19-21.

[17] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Omashova G.SH, Serikbaeva G.S., Sujerkulova ZH. N. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P84-91.

[18] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P98-103.

[19] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Ashirbaev H. A, Abdubaeva PH.I, Doskanova A.E. Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN PK №2 2016г. P83-88.

[20] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P92-97.

**Г.Ш. Омашова, Р.С. Спабекова, К.А.Қабылбеков,
П.А. Саидахметов, Х.К.Абдрахманова, А.С. Арысбаева**

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ., Қазақстан

**ИЗОХОРАЛЫҚ ПРОЦЕСТІ ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН КОМПЬЮТЕРЛІК
ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ БЛАНКІ ҮЛГІСІНІҢ
ТАПСЫРМАЛАРЫН ӨЗ БЕТІНШЕ ҚҰРАСТЫРУ**

Аннотация. Изохоралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісінің тапсырмаларын өз бетінше құрастыру ұсынылады. Теориядан қысқаша мәліметтер, оқушының жұмысты орындауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары, компьютерлік моделмен танысу тапсырмалары, тәжірибелік, зерттеулік және шығармашылық тапсырмалар берілген. Теориядан қысқаша мәліметтерде изохоралық процестің анықтамасы және оны іске асыру шарттары келтірілген. Термодинамиканың бірінші заңының изохоралық процесс үшін жазылуы берілген. Компьютерлік модельмен танысу тапсырмаларында компьютерлік тәжірибе параметрлерін өзгерту изохоралық процесті іске асыру қарастырылған.

Тәжірибелік және зерттеулік тапсырмаларда тәжірибе шарттарындағы параметрлерді компьютерлік модельде іске асырып, бастапқы және соңғы температураларды анықтау және термодинамиканың бірінші заңының орындалуын тексеру қарастырылған.

Тапсырмалар саны артығымен берілген. Бір оқушының олардың барлығын орындауы шарт емес. Оқытушы оқушылардың шамасына қарай тапсырмаларды іріктеп, таңдап бере алады немесе ұқсас тапсырмалар ұсынуына болады. Зерттеулік және шығармашылық тапсырмаларды орындау аса маңызды. Сабақ соңында оқушылар өздерінің бланкілерін толтырып электронды пошта арқылы немесе оқытушыға тапсырады. Келесі сабақта оқытушы жауаптарды сараптап оқушылардың жұмыстарын бағалайды. Ұсынылған тапсырмалар Шымкент қ. физика математика бағытындағы Назарбаев зияткерлік мектебінде, дарынды балаларға арналған облыстық «Дарын-1» мектебінде және Арыс қ. М.Әуезов атындағы мектеп-гимназиясының 10-11 сыныптарында физика сабақтарында қолданылды. Оқушылардың басым көпшілігі тапсырмаларды аса қызығушылықпен орындады.

Түйін сөздер: изохоралық процесс, диаграмма, қысым, көлем, температура, жылу, жұмыс, ішкі энергия, термодинамиканың бірінші заңы.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 134 – 137

Yu.A. Ryabikin, B.A. Rakymetov, T. Aitmukan

LLP Physico-Technical Institute, 050032, Almaty

E-mail: yuar-39@mail.ru

ON THE POSSIBILITY OF DETERMINATION OF PARAMAGNETIC CHARACTERISTICS OF FLAME OF SOLID FUEL ON THE BASIS OF EPR-DATA CARBON FILMS

Abstract. The possibility of determining the free radical structure of a solid fuel flame by measuring the paramagnetic characteristics of thin carbon films obtained by sucking from various parts of a flame through a capillary of combustion products to substrates is considered. The parameters of the EPR spectrum determined in this way in different parts of the flame make it possible to conclude on its structure.

Key words: carbon film, electron paramagnetic resonance (EPR), intensity, line width, g-factor.

УДК535.34

Ю.А. Рябикин, Б.А. Рақыметов, Т. Айтмукан

ТОО Физико-технический институт, Алматы, 050032

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАМЕНИ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА НА ОСНОВЕ ЭПР-ДАНЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПЛЕНОК

Аннотация. В работе рассмотрена возможность определения свободно-радикальной структуры пламени твердого топлива по измерению парамагнитных характеристик тонких углеродных пленках, получаемых путем отсоса из различных частей пламени через капилляр продуктов горения на подложки. Определенные таким образом параметры спектра ЭПР в различных частях пламени позволят сделать заключение о его структуре.

Ключевые слова: углеродная пленка, электронный парамагнитный резонанс (ЭПР), интенсивность, ширина линии, g-фактор.

Метод ЭПР широко используется для изучения разреженных пламен (3-5 мм рт.ст.) с использованием стандартных спектрометров ЭПР, работающих в 3-х сантиметровом диапазоне длин волн [1-5]. Небольшие размеры кварцевых трубок и кювет, используемых в этом диапазоне ЭПР-спектроскопии, несколько ограничивают его возможности из-за гибели активных центров на стенках кварцевых реакторов. Представляет интерес попытка использования спектрометров ЭПР, работающих на более низких частотах, с резонаторами больших размеров, что приводит к значительному увеличению размеров кварцевых реакторов и, соответственно, к уменьшению гибели на их стенках активных центров [6].

Тем не менее, впервые изучение практически при атмосферном давлении горячего пламени при его получении в резонаторе было проведено на 3-х сантиметровом спектрометре в кварцевой трубке, проходящей через резонатор. При этом методом ЭПР регистрировались атомы водорода [7].

Неоднородно уширенные линии спектра ЭПР зачастую содержат большую и полезную информацию как об изучаемых парамагнитных центрах (ПЦ) как таковых, так и о структуре изучаемого

объекта, в состав которого они входят. Рассмотрению природы неоднородно уширенных линий ЭПР и их анализу посвящен ряд работ теоретического и экспериментального плана, например [1-3]. К сожалению, на основании использования этих работ не всегда удается получить полную и однозначную информацию о природе парамагнитных центров, входящих в состав изучаемого объекта, в частности, значений g -факторов и относительного их вклада в суммарный спектр ЭПР. К тому же эти методы требуют проведения дополнительных непростых экспериментов, связанных с насыщением спектра ЭПР микроволновой мощностью при различных ее уровнях. А обработка полученных результатов - чрезвычайно кропотливая работа, занимающая много времени.

В данной статье предлагается простой и информативный метод анализа неоднородно уширенных линий ЭПР, уширение которых обусловлено сложением отдельных линий ЭПР изучаемого образца, имеющих различные значения интенсивностей, величин g – факторов и ширин линии ЭПР. Он устраняет отмеченные недостатки, позволяя получить технический результат, состоящий в том, что на основе рассмотрения проведенной линии, соединяющей максимум и минимум спектра ЭПР изучаемого образца, анализируются на ней точки перегиба, что позволяет определить количество компонент, составляющих спектр, соотношения их величины и значения g – факторов. Известно, что метод ЭПР широко используется при изучении углеродных систем, например, [8-15].

В данном случае рассмотрение проведено на примере неоднородно уширенной линии ЭПР тонкой углеродной пленки, нанесенной на стеклянную подложку. Вообще, плёнка может наноситься на различные подложки, в частности на кварц, кремний, стекло и др. Тонкие углеродные пленки различной структуры находят самое широкое применение во многих областях науки и техники. Это обусловлено рядом их полезных свойств, таких как высокая твердость, диэлектрические характеристики, теплопроводность и др. Свойства тонких углеродных пленок в значительной степени определяются способом их получения. В данном случае пленки получали на установке AX5200S–ECR фирмы Seku Technotron Corp., оснащенной микроволновым излучателем для возбуждения плазмы. При плазменном разложении смеси CH_4 и H_2 и осаждении углерода на различные подложки (стекло, кварц, кремний и др.) на них образуются углеродные пленки темноватого цвета. В нашем случае время осаждения углерода на подложку с образованием пленки было 2 часа при возбуждении плазмы в смеси $\text{CH}_4 + \text{H}_2 + \text{Ar}$ при давлении $3,8 \cdot 10^{-2}$ торр. Подводимая микроволновая мощность в камеру составляла 540 Вт, а отраженная – 84 Вт, натекание CH_4 и H_2 было одинаковым и равным $20 \text{ см}^3/\text{мин}$. Измерения толщины пленки на микроскопе показали, что исходная пленка имеет толщину 1,2 мкм, а после отжига полученной углеродной пленки, например, до $800 \text{ }^\circ\text{C}$ её толщина уменьшилась до 0,8 мкм. Отжиг образцов полученных углеродных пленок проводился на этой же установке в атмосфере различных газов, а также в вакууме с остаточным давлением $\sim 3 \cdot 10^{-6}$ торр.

В ЭПР-спектроскопии в качестве вторичного образца часто используются ионы двухвалентного марганца в решетке окиси магния (Mn^{2+} в MgO). Спектр ЭПР этого образца состоит из шести линий ЭПР, между 3-ей и 4-ой компонентами которого обычно записывается спектр изучаемого образца. Анализ третьей линии ЭПР, как и всех остальных линий спектра двухвалентного марганца, показывает, что на линии, соединяющей ее максимум и минимум, отсутствуют какие-либо изгибы (изломы). Эта линия идеально прямая.

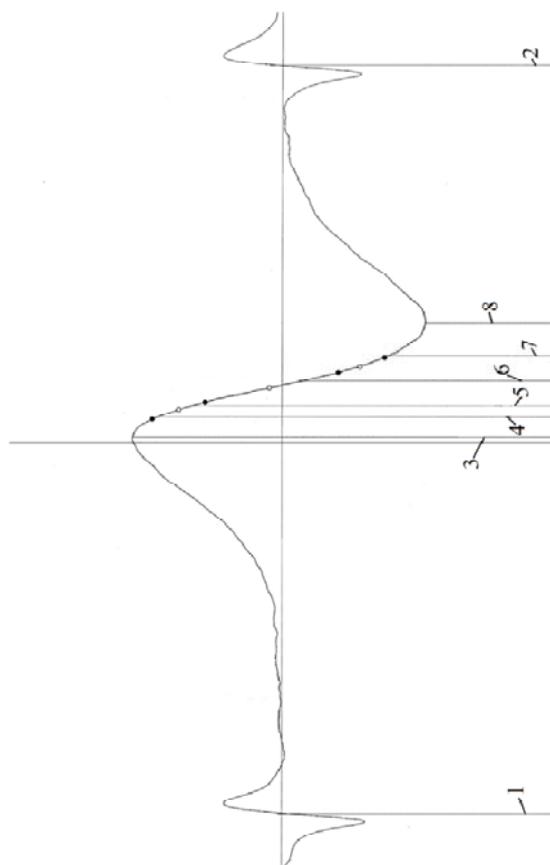
Но другую картину можно наблюдать на подобной линии исследуемого образца. Так, в случае изучаемого нами образца тонкой углеродной пленки на поверхности стекла (кстати, аналогичная картина наблюдается и при использовании подложек из других материалов: кварц, кремний и т. д.) на этой прямой обнаружены три излома (рис. 1). На рисунке приведен спектр ЭПР углеродной пленки, полученной при плазменном разложении смеси CH_4 и H_2 в Ar и осаждении образующегося при этом углерода на стекло. Темные точки на прямой, соединяющей максимум и минимум этого спектра, соответствуют началу и концу каждого из трех участков, образующихся в результате изломов на этой линии. Светлые точки характеризуют середину каждого участка, т.е. средние значения их интенсивностей и величин их g -факторов. Таким образом, эти изломы делят эту линию на три части, каждая из которых характеризуется своим значением g -фактора и размером. Как это следует из рисунка, соотношение между величинами участков определяется как 3:5,8:4.

Это свидетельствует о том, что получаемая тонкая углеродная пленка обусловлена тремя составляющими. В подписи к рисунку представлены величины магнитного поля и значения g-факторов, соответствующие выделенным точкам на спектре. Первый участок имеет $g=2.00420$, что характерно для спектра ЭПР графена и его соединений. Второй участок имеет $g=2.0031$. С таким g-фактором могут быть углеродные компоненты, обусловленные углеродными нанотрубками. Третья компонента углеродной пленки имеет g-фактор, равный $2.00118 \div 2.00164$ в зависимости от угла вращения образца в магнитном поле. Это свидетельствует о наличии в составе углеродных плёнок разных форм графита с некоторой степенью его кристалличности.

Аналогичная картина может наблюдаться на углеродных пленках, получаемых при их осаждении на подложку (стекло, кварц, кремний и др.) при отсосе из различных частей пламени продуктов горения твердого топлива с помощью капилляра. Не исключено, что в силу более сложной структуры пламени твердого топлива и спектры ЭПР будут иметь более богатый характер, чем в приведённом примере. Однако, это в принципе не помешает проведению зондирования пламени предлагаемой методикой, что позволит получить полезную информацию о структуре пламени твердого топлива.

Таким образом, предлагаемая методика анализа неоднородно уширенной линии ЭПР, рассмотренная на примере тонкой углеродной пленки, позволяет определить количество составляющих сложного спектра ЭПР, в частности спектра горячего пламени, их относительные значения интенсивностей и величины их g-факторов. Конечно, эту методику можно использовать и при анализе неоднородно уширенных линии ЭПР, соответствующих другими парамагнитными системами.

Так были исследованы методом ЭПР нитрид кремния Si_3N_4 [16-18], который являясь важной компонентой в современной кремниевой электронике, широко используется в ней в качестве изолирующих и пассивирующих покрытий.



Рисунок

Подпись к рисунку к статье «О возможности определения парамагнитных характеристик пламени твердого топлива на основе ЭПР–данных углеродных пленок»

Спектр ЭПР тонкой углеродной пленки на стекле при напылении в течение 2-х час.

Где:

1) $H=331.446$ гс, $g=2.03256$, 2) $H=340.627$ гс, $g=1.98078$ 3) $H=336.321$ гс, $g=2.00612$ 4) $H=336.552$ гс, $g=2.00475$, 5) $H=336.687$ гс, $g=2.00394$ 6) $H=36.981$ гс, $g=2.00219$ 7) $H=337.260$ гс, $g=2.00054$ 8) $H=337.633$ гс, $g=1.99832$

ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Панфилов В.Н., Цветков Ю.Д., Воеводский В.В. // Кинетика и катализ. 1960. Т. 1. № 2. С. 333.
- [2] Панфилов В. Н. // Кинетика и катализ. – 1962. Т. 3. Вып. 5. С. 643.
- [3] Карпинский Б. В., Мансуров З.А., Дубинин В.В., Рябикин Ю.А. и др. // Тез. Докл. третьего Всесоюзного симп. по горению и взрыву. Ленинград. 1971.
- [4] Сагиндыков А.А., Мансуров З.А., Рябикин Ю.А., Ксандопуло Г.И. // Сб. Ингибирование цепных и газовых реакций. Алма-Ата. 1971 г. С. 38
- [5] Карпинский Б.В., Мансуров З.А., Дубинин В.В., Рябикин Ю.А., и др. Горение и взрыв // Матер. 3–го Всесоюзного симп. М. Наука. 1972. С. 716
- [6] Рябикин Ю.А., Ксандопуло Г.И. // Парамагнитный резонанс. Всесоюз. Юбил. Конф. Казань. – 1969. ЭПР. Ч. 1. Казань. 1971 стр. 297
- [7] Рябикин Ю.А., Гершензон Ю.М., Дубинин В.В., Мансуров З.А. и др. // Изв. АН СССР. Сер. хим. 1972. №2. С. 464
- [8] Бротиковский О.И., Жидомиров Г.М., Казанский В.Б., Шелимов Б.Н. // "Теор. Экспер. Хим.". 1971. Т 7. В 2. С. 245.
- [9] Гринберг О.Я., Дубинский А.А., Лебедев Я.С. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. №3. С. 627.
- [10] Basu S., Mclenyehlm K.A. // J. Magn. Rez. 1983. №2. P. 335.
- [11] Королева Н.В. Физико–химические методы исследования углей и продуктов их переработки. М. Изд–во МХТИ. 1984. С 48.
- [12] Kosaka M., Ebbesen T.W., Hiura H., Tanigakia K. // Chem. Phys. Let. 1995. V. 233. Issues 1–2. P. 47.
- [13] Рябикин Ю.А., Мансурова Р.М., Заиквара О.В. // Вестник КазНУ. 2001. Сер. хим. №3 (20). С.164.
- [14] Васильева Л.М., Шкляев А.Н., Ануфриенко В.С. Исследование бурых углей методом ЭПР // Пиролиз бурых углей. Новосибирск: Наука, 1973. С. 44.
- [15] Рябикин Ю.А., Каирбеков Ж.К., Заиквара О.В., Ешова Ж.Т. // ХТТ. 2011. № 2. С. 53.
- [16] Шипатов Э. Т. Обратное рассеяние быстрых ионов. Теория, эксперимент, практика. - Ростов: Издательство Ростовского университета, 1988. 160 с.
- [17] Гриценко В.А., Литовченко В.Г. Строение и электронная структура аморфных диэлектриков в кремниевых МДП-структурах. Новосибирск. Наука, 1993. 278 с.
- [18] Власукова Л. А., Комаров Ф. Ф., Пархоменко И. Н., Мильчанин О. В., Леонтьев А. В., Мудрый А. В., Тогамбаева А. К. Оптические свойства пленок нитрида кремния, полученных плазмохимическим осаждением из газовой фазы // Прикладная спектроскопия. 2013. Т.80. №1. С. 92

REFERENCES

- [1] Panfilov V. N., Tsvetkov Yu. d., regional V. V. // Kinetics and catalysis. 1960. Vol. 1. No. 2. S. 333.
- [2] Panfilov V. N. // Kinetics and catalysis. – 1962. Vol. 3. Vol. 5. S. 643.
- [3] Karpinski B. V., Mansurov Z. A., Dubinin V. V., Ryabikin Yu. a. et al. // proc. Dokl. the third all-Union Symp. on combustion and explosion. Leningrad. 1971.
- [4] Sagindykov A. A., Mansurov Z. A., Ryabikin Yu. A., Ksandopulo G. I. // Proc. Inhibition of chain gas reactions. Alma-ATA. 1971, p. 38
- [5] Karpinsky, B. V., Mansurov Z. A., Dubinin V. V., Ryabikin Yu. a., etc. Combustion and explosion // Mater. 3rd all-Union Symp. M. Science. 1972. S. 716
- [6] Y. Ryabikin A., Ksandopulo, G. I. // Paramagnetic resonance. Proceedings of all-Union. Proceedings of jubilee. Conf. Kazan. – 1969. EPR. Part 1. Kazan. 1971 p. 297
- [7] A. Ryabikin Yu., Gershenzon Yu. M., Dubinin V. V., Mansurov Z. A. and others, Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Ser. chem. 1972. No. 2. S. 464
- [8] O. I. Bronikowski, Zhidomirov G. M., Kazansky V. B., Shelimov B. N. // "Teor. Eksper. Chem.". 1971. T 7. 2. S. 245.
- [9] Grinberg O. Ya, Dubinsky A. A., Lebedev Ya. S., Dokl. USSR ACADEMY OF SCIENCES. 1971. T. 196. No. 3. S. 627.
- [10] Basu S., Mclenyehlm K. A. // J. Magn. Rez. 1983. No. 2. P. 335.
- [11] Queen N.In. Physico–chemical methods of investigation of coals and products of their processing. M. publishing house of the Moscow chemical–technological Institute. 1984. 48.
- [12] M. Kosaka, T. W. Ebbesen, H. Hiura, K. Tanigakia // Chem. Phys. Let. 1995. V. 233. Issues 1-2. P. 47.
- [13] Ryabikin Yu. A., Mansurova R. M., Saskura O. V. // Vestnik KazNU. 2001. Ser. chem. No. 3 (20). P. 164.
- [14] Vasiliev L. M., Shklyayev A. N., Anufrienko V. S. investigation of the brown coal by the EPR method // the Pyrolysis of brown coal. Novosibirsk: Nauka, 1973. P. 44.

- [15] Ryabikin Yu. a., Kairbekov Zh. K., Saskura O. V., Yershova, J. T. // НТТ. 2011. No. 2. P. 53.
[16] Lipatov te backscattering of fast ions. Theory, experiment, practice. - Rostov: Rostov University, 1988. 160 p.
[17] Gritsenko V. A., Litovchenko V. G. the Structure and electronic structure of amorphous insulators in silicon MIS structures. Novosibirsk. Science, 1993. 278 p.
[18] Vlasukova L. A., Komarov F. F., Parkhomenko I. N., Milchanin O. V., Leont'ev A. V., A. V. Wise, Tugambaeva A. K. Optical properties of films of silicon nitride, obtained by plasma-chemical deposition from the gas phase // journal of Applied spectroscopy. 2013. V. 80. No. 1. P. 92

Ю.А. Рябкин, Б.А. Рақыметов, Т. Айтмукан

ЖШС Физикка-техникалық институт, 050032, Алматы

**КӨМІРТЕК ҚАБЫҚШАСЫНЫҢ ЭПР-МӘЛІМЕТІ НЕГІЗІНДЕ ҚАТТЫ ОТЫН ЖАЛЫНЫНЫҢ
ПАРАМАГНИТТІК ҚАСИЕТІН АНЫҚТАУ МҮМКІНДІГІ**

Аннотация. Бұл жұмыста төсеніш үстінде орналасқан қатты отынның жанғаннан бөлінген жалынынның әр бөлігінен капиллярдың көмегімен сорып алу арқылы пайда болған көміртегі кабықшаларының парамагниттік қасиетін өлшеу арқылы қатты отынның бос-радикалды құрылымын анықтау мүмкіндігі қарастырылған. Осылайша жалынның әр бөлігінің ЭПР параметрін анықтау, ол қатты отынның құрылымы туралы қортынды жасауға мүмкіндік береді.

Түйінді сөздер: көміртекті кабықша, электрондо парамагнитті резонанс (ЭПР) интенсивтілік, сызық ені, g-фактор.

Сведения об авторах:

Рябкин Юрий Алексеевич - ведущий научный сотрудник ТОО «Физико-технический институт», 050032 г.Алматы, ул. Ибрагимова, 11, Домашний адрес: г. Алматы 050035, Ибрагимова 14, кв 3, Адрес автора для переписки: 050032, г.Алматы, ул. Ибрагимова, 11, Телефон: раб. +7 727 386 5536, e-mail: : yuar-39@mail.ru;

Рақыметов Багдат Аскарлович - инженер ТОО «Физико-технический институт», г.Алматы, ул. Ибрагимова, 11

Домашний адрес: г. Алматы 050031, Аксай-1а, дом 8, кв 67, Адрес автора для переписки: 050032, г.Алматы, ул. Ибрагимова, 11, Телефон: раб. +7 727 386 5536, e-mail: bagdat_r@mail.ru;

Айтмукан Талант - младший научный сотрудник ТОО «Физико-технический институт», 050032 г.Алматы, ул. Ибрагимова, 11, Домашний адрес: г. Алматы, 050000, Рыскулбеков 14, Адрес автора для переписки: 050032, г.Алматы, ул. Ибрагимова, 11, Телефон: раб. +7 727 386 5536, e-mail: altay_ely@mail.ru

NEWS**OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 139 – 147

UDC 532.133, 371.62, 372.8.002

**R. S. Spabekova, G.SH. Omashova, K. A. Kabylbekov,
P. A. Saidakhmetov, G.S.Serikbaeva., G.K.Aktureeva**M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
roza_314@mail.ru**ORGANIZATION OF COMPUTER LABORATORY WORKS
ON THE RESEARCH OF TURNON AND TURNOFF CURRENT WITH
THE USE OF MATLAB PROGRAM PACKAGE**

Abstract. A model of the execution of the computer laboratory works on research of current when turning on and off current source in the circuit containing a resistor and an inductive coil, in which students prepare a program based on MATLAB language, are proposed. The research results are in the form of graphics formatting. The performance of specific laboratory works on the modeling of physical phenomena consolidates theoretical knowledge, formation of skills to use heuristic and scientific methods of thinking, information competence, the acquisition of adaptive competence, skills, visualization of research results, improves communication, motivation and activation of cognitive activity. While doing laboratory works, the students consulted with each other and were interested in the work of the neighbors, so they widely worked collectively. The implementation of the proposed laboratory work, with appropriate consultation in the course of training, does not cause particular difficulties in students, and, as a result, they feel a great desire to learn more about the capabilities of MATLAB. Some students have insufficient knowledge of formatting, graphics and analysis results.

Key words. Resistance, inductance, current source.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**Р.С. Спабекова, Г.Ш. Омашова, К.А. Кабылбеков,
П.А. Саидахметов, Г.С. Серикбаева, Г.К. Актурева**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

**ОРГАНИЗАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ТОКА ВКЛЮЧЕНИЯ И ВЫКЛЮЧЕНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА ПРОГРАММ MATLAB**

Аннотация. Предлагается модель выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию тока при включении и выключении источника тока в цепи, содержащей резистор и индуктивную катушку в ходе которого студенты составляют программу расчета на языке MATLAB. Результаты исследований представляются в виде графики с форматированием. Выполнение конкретных лабораторных работ по моделированию физических явлений закрепляет полученные теоретические знания, формированию навыков использования эвристических, научных методов мышления, **информационной компетенции**, приобретения адаптивной компетенции, навыков визуализации результатов исследований, повышает коммуникабельность, мотивацию и активизацию мыслительной деятельности. При выполнении лабораторной работы студенты консультировались друг с другом и интересовались процессом работы соседей, таким образом они практически работали в коллективно.

Выполнение предложенных лабораторных работ, при соответствующей консультации по ходу занятий, особых трудностей у студентов не вызывает и они от результата испытывают огромное желание еще больше

узнать о возможностях системы MATLAB. У отдельных студентов имеется недостаточное владение навыками форматирования графики и анализа результатов.

Ключевые слова. Сопротивление, индуктивность, источник тока.

Президент Республики Казахстан Н. Назарбаев в Послании народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» - новый политический курс состоявшегося государства» обозначив приоритеты в сфере образования сказал: «Нам предстоит произвести модернизацию методик преподавания и активно развивать он-лайн-системы образования, создавая региональные школьные центры. Мы должны интенсивно внедрять инновационные методы, решения и инструменты в отечественную систему образования, включая дистанционное обучение и обучение в режиме он-лайн, доступные для всех желающих» [1].

Для реализации поставленных задач кафедра «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. Ауэзова МОН РК с 2011-2012 учебного года внедрила в учебный процесс дисциплины «Информационные технологии в образовании», «Информационные технологии в преподавании физики», «Методика использования электронных учебников», «Компьютерное моделирование физических явлений» программы которых предусматривает освоение и использование современных информационных технологий в преподавании физики. Программа дисциплины «Компьютерное моделирование физических явлений» для специальности 5В011000, 5В060400-физика предусматривает использование программного комплекса MATLAB для моделирования задач механики, молекулярной физики и термодинамики, электростатики и электродинамики, оптики, квантовой физики с сопровождением графики. Цель курса – изучить основные принципы и раскрыть сущность математического моделирования, показать роль математического моделирования при описании различных физических процессов и явлений. Задачей курса является обучение студентов общим методам решения уравнений математической физики, построению модели физического процесса или явления, отражающей в математической форме важнейшие его свойства, присущие составляющим его частям связи и т.д.; обучение исследованию математическими методами свойств модели для получения сведений об объекте исследования; обучение выбору (или разработке) алгоритма для реализации модели на компьютере и созданию соответствующих компьютерных программ; обучения компьютерной графике: а) формирование творческого воображения, образно-графического и технического мышления; б) овладение компьютерными технологиями для получения графических изображений. В результате изучения дисциплины студенты должны:

- овладеть методологией математического моделирования физических явлений;
- иметь представление о принципах и методах математического моделирования;
- уметь моделировать различные системы и анализировать построенные математические модели физических явлений;
- Уметь редактировать двумерные и трехмерные графики.

Курс является логическим продолжением курсов: “Общая физика”, “Вычислительная математика”, “Математические пакеты”, “Языки программирования”.

Возможности MATLAB весьма обширны, а по скорости выполнения задач система нередко превосходит своих конкурентов. Она применима для расчетов практически в любой области науки и техники. Программный комплекс MATLAB является одним из лучших современных решений для организации математического моделирования физических процессов.

Методика конструирования заданий для компьютерных моделей приведена в брошюре «Методические аспекты преподавания физики с использованием компьютерного курса «Открытая физика». В качестве примера в ней приведены бланки заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы с использованием компьютерных моделей «Движение с постоянным ускорением» и «Упругие и неупругие соударения». Такие же материалы размещены в компакт-диске «Открытая физика 2.5», в сайтах «Открытый колледж» и на страницах сетевого объединения методистов (СОМ) [3,4]. В них даются два вида лабораторных бланков:

- бланк для внесения ответов обучающимися;
- бланк для учителя в котором имеются ответы тестов и заданий для удобства их проверки.

Сформировать интерес к изучению физике посредством использования современных информационных технологий обучения; развитие познавательных универсальных способностей (навыки теоретического мышления, исследовательского и творческого поиска. Современный взгляд на наше

общество как на обучающееся подразумевает, что образовательная система должна быть ориентирована (в большей степени, чем раньше) на развитие и воспитание у учащихся адаптивной компетенции, т. е. способности осознанно и гибко применять полученные знания и навыки в различных контекстах.

На основании результатов недавнего исследования [2] в данной статье в первую очередь обсуждается следующий вопрос: чему именно требуется научиться, чтобы приобрести адаптивную компетенцию в какой-либо области? Автор считает, что для развития адаптивной компетенции необходим комплекс когнитивных, эмоциональных и мотивационных компонентов, а именно: предметная база в виде структурированных знаний в определенной области, навыки использования эвристических методов мышления, метазнания - представления о собственной когнитивной деятельности, мотивации и эмоциях, навыки саморегуляции для управления собственными когнитивными, мотивационными и эмоциональными процессами, а также позитивные убеждения в отношении себя как учащегося и в отношении обучения в различных областях. Далее автор задается следующим вопросом: каковы характеристики процессов обучения, продуктивных с точки зрения приобретения адаптивной компетенции? Обучение, целью которого является формирование адаптивной компетенции, должно представлять собой конструктивный, саморегулируемый, конкретный и совместный (КСКС) процесс формирования знаний и навыков. Каким образом преподаватель может стимулировать обучение по типу КСКС? В статье приведен пример создания действенной обучающей среды, ориентированной на повышение эффективности обучения студентов. В работе [3] предлагаются критерии информационной компетентности, выраженные через качества «информационной» личности на основе комплекса знаний и умений в области информационных технологий, среди них особое внимание уделяется умению интерпретировать полученные результаты; принимать решения о применении того или иного программного обеспечения; предвидеть последствия принимаемых решений и делать соответствующие выводы; и т.д. Приводятся **практические примеры формирования информационной компетенции на различных этапах урока – исследования, например, по теме «Воздухоплавание».** В работах [4-7] предлагаются разработки уроков по темам «Основы термодинамики», «Атомная физика», «Преломление света», «Коэффициент полезного действия» с использованием электронных обучающих средств. Мощным средством обучения физике, по мнению многих отечественных и зарубежных специалистов является продукция компании «Физикон» [8]. В дисках «Открытая физика 25» этой компании даются методические рекомендации по составлению заданий и их выполнению практически по всем разделам школьной программы. По нашему и мнению других [9-14] каждый преподаватель физики при желании может самостоятельно сконструировать компьютерную лабораторную работу, используя интерактивные модели из мультимедийного курса «Открытая Физика» компании «Физикон». Для этого рекомендуется использовать тот же алгоритм для создания лабораторных работ, который применен в данном мультимедийном курсе. Сначала рекомендуется разобрать теорию вопроса, затем ответить на контрольные *вопросы, потом выполнить задачи, при решении которых необходимо провести компьютерный эксперимент и проверить полученный результат.*

Одной из трудных задач внедрения результатов использования информационных технологий в учреждениях образования является недостаточное практическое умение преподавателей использования компьютерных моделей физических явлений для организации проведения лабораторных работ. От организации компьютерных лабораторных работ во многом зависит активизация, мотивация и в конечном счете эффективность обучения. О создании и использовании моделей бланков организации компьютерных лабораторных работ по исследованию различных физических явлений в учебном процессе нами ранее написаны [15-34].

В данной статье приводятся примеры использования пакета программ Matlab [35] по исследованию тока при включении и выключении источника тока в цепи, содержащей резистор и индуктивную катушку.

Лабораторная работа №1.1. **Тема работы:** Исследование изменение силы тока при выключении и включении источника тока. **Цель работы:** Разработать программу на языке MATLAB. Установить закономерность изменения силы тока при включении и выключении источника тока, построить графики зависимости силы токов от времени. Определить установившиеся значения силы тока при включении источника тока.

Электрическая цепь состоит из источника постоянного тока ($E=0.6$ В) к клеммам которого присоединены через ключ сопротивление ($R=10.0$ Ом) и индуктивность ($L=10.2$ Гн). С помощью ключа источник тока можно включать или выключать.

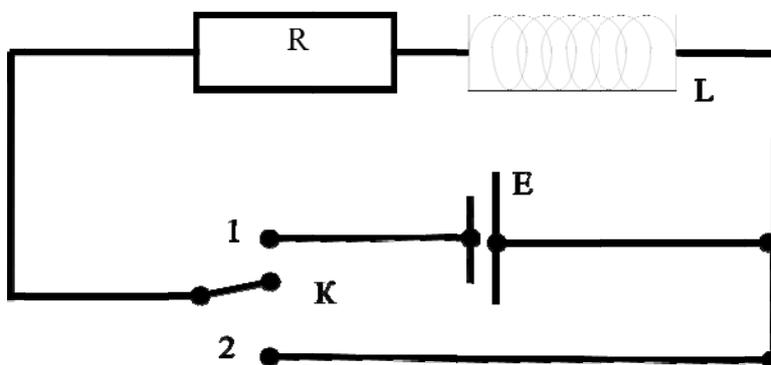


Рисунок 1 - Схема включения и выключения источника тока

Краткие сведения из теории: при включении в цепь источника постоянного тока возникает Э.Д.С. самоиндукции $\varepsilon = -L \frac{dl}{dt}$. Тогда уравнение процесса запишется в следующем виде

$$IR = E - L \frac{dl}{dt}$$

Уравнение решается разделением переменных и с учетом начальных условий ($t=0, I=0$, в цепи присутствует Э.Д.С. источника постоянного тока, сопротивление R и катушка индуктивности L).

$$I = \frac{E}{R} (1 - \exp(-\frac{R}{L}t)),$$

Сила тока при включении источника тока возрастает во времени экспоненциально до установившегося значения $I_0 = \frac{E}{R}$.

При выключении источника постоянного тока возникает Э.Д.С. самоиндукции $\varepsilon = -L \frac{dl}{dt}$.

$$IR = -L \frac{dl}{dt}$$

Решение этого уравнения аналогичное и с учетом начальных условий ($t=0, I_0 = \frac{E}{R}$) уравнение процесса запишется в следующем виде

$$I = \frac{E}{R} \exp(-\frac{R}{L}t),$$

Обычно в системе **MATLAB** нет необходимости решения данного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка, так как в системе имеется решатель и необходимо лишь сформировать М-файл, который будет таким:

```
function dydt = RL(t,y,E,R,L);
dydt = E/L - (R/L)*y;
end
```

Однако, для будущих физиков, более интересно составление программы с пониманием физики протекающего процесса. Поэтому студентам дается задание решить задачу с последующим программированием на языке **MATLAB**.

Программа для расчета для цепи (Рис.1. – ключ на позиции 2) $R=10$ Ом, $L=10.2$ Гн и $E=0.6$ В приведена ниже, а результаты расчета на рисунках 2 и 3.

1. Исследование изменение тока при выключении и включении источника тока.

```
% Программа для исследования
>> t=0:0.01:5; % ввод вектора времени
>>% Исходные данные
>> R=10; L=10.2;
>> E=0.6;
```

```

>>I0=E/R;
>> I1=I0*exp(-R.*t/(L)); %Закон изменения силы тока при выключении источника тока
>> plot(t,I1,'k-');% визуализация
>> hold on% разрешение нанесения нескольких графиков
>> grid on% нанесение сетки на графике
>> I2=10*(1-exp(-R.*t/(L)));%Закон изменения силы тока при включении источника тока
>> plot(t,I2,'k-')% визуализация
>> hold on
>> plot(t,I1,'k-')
>>gtext('I1')%непосредственное нанесение надписи на любом месте графика
>>gtext('I2')
>>xlabel('t,c') % нанесение оси x
>>ylabel('I(t)') % нанесение оси y
>>titlle('I(t)')
>>legend('I1(t)'),('I2(t)')

```

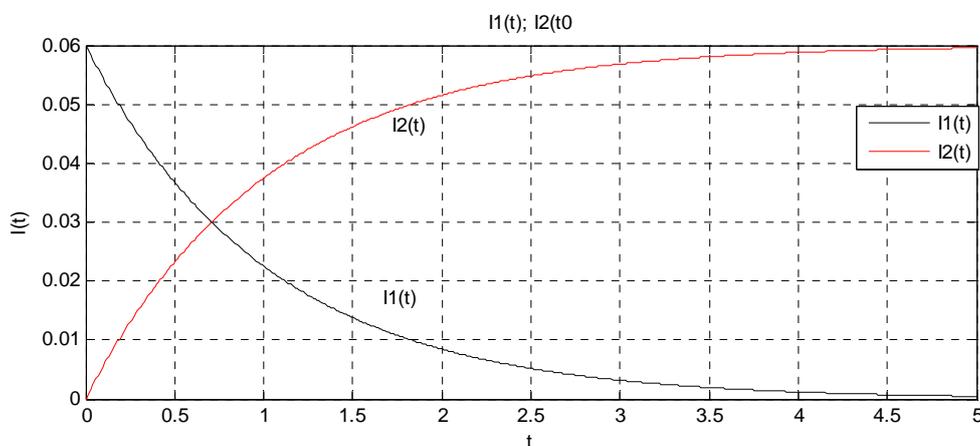


Рисунок 2 - График зависимости силы токов от времени $I_1(t)$ -при выключении и $I_2(t)$ -включения источника тока

Лабораторная работа №1.2. **Тема работы:** Закон изменения силы тока при включении источника тока при различных значениях значения индуктивности.**Цель работы:**Разработать программу на языке MATLAB реализующую зависимость силы тока при включении источника тока и визуализация этой закономерности при различных значениях индуктивности.

Программа для расчета для цепи (Рис.1. – ключ замкнут на позицию 1) $R=10$ Ом, $L=10.2$ Гн и $E=0.6$ В приведена ниже, а результаты расчета нарисунках2 и 3.

```

>>t=0:0.01:5; % ввод вектора времени
>>% ввод исходных данных
>>R=10;L=10.2;
>> E=0.6;
>>I0=E/R;
>>I1=10*(1-exp(-R.*t/(L))); %Закон изменения силы тока при включении источника тока
>>I2=10*(1-exp(-R.*t/(L+2))); %Закон изменения силы тока при включении источника тока
>>plot(t,I1,'r-',t,I2,'k-') % визуализация двух графиков в одном окне
>> I3=10*(1-exp(-R.*t/(L+4)));
>> I4=10*(1-exp(-R.*t/(L+6)));
>>plot(t,I1,'r-',t,I2,'k-',t,I3,'g',t,I4,'k--') % визуализация четырех графиков в одном окне
>>grid on
>>xlabel('t,c') % нанесение оси x
>>ylabel('I(t),A') % нанесение оси y
>>titlle('I(t)')

```

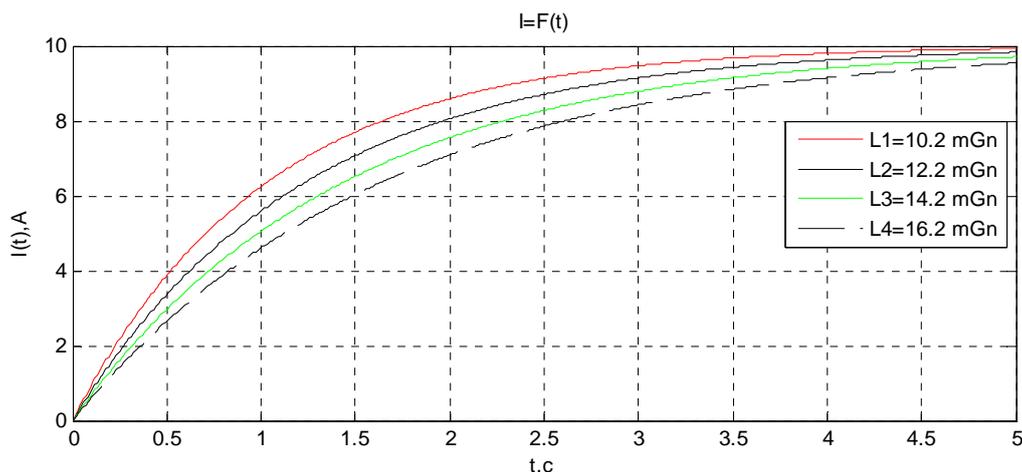


Рисунок 3 - Зависимость изменения силы тока от времени при включении источника тока при различных значениях значения индуктивности

При выполнении лабораторной работы студенты консультировались друг с другом и интересовались процессом работы соседей, таким образом они практически работали в коллективно.

Для самостоятельной работы студентам дается следующее задание: Исследовать зависимость изменения силы тока от времени при выключении источника тока при различных значениях значения индуктивности и сопротивления; Построить аналогичные графики в одном графическом окне. Редактировать графики не с командной строки, а с использованием непосредственного форматирования. К сожалению в MATLAB выводит только английские тексты, а команда

% Установка русского шрифта и его размера

>>set(gca,'FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',10) не всегда воспринимается.

Выводы. Выполнение конкретных лабораторных работ по моделированию физических явлений закрепляет полученные теоретические знания, формированию навыков использования эвристических, научных методов мышления, **информационной компетенции**, приобретения адаптивной компетенции, повышает мотивацию и активизацию мыслительной деятельности. При выполнении лабораторной работы студенты консультировались друг с другом и интересовались процессом работы соседей, таким образом они практически работали в коллективно .

Выполнение предложенных лабораторных работ при соответствующей консультации по ходу занятий особых трудностей у студентов не вызывает и они от результата испытывают огромное желание еще больше узнать о возможностях системы MATLAB. У отдельных студентов имеется недостаточное владение навыками форматирования графики и анализа результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.
- [2] Де Кортэ Эрик. Инновационные перспективы обучения и преподавания в сфере высшего образования в XXI в. (пер. с англ.Е. Шадринной). Вопросы образования. 2014. № 3. С. 8–29.
- [3] Бушуев Л.Г. Формирование информационной компетентности на уроках физики. Вопросы образования. № 88. 2011. С. 11–22.
- [4] Свириденко О.В. «Основы термодинамики». Разработка урока физики (10 класс) с использованием ЭОР. Вопросы образования. № 88. 2011.С. 11–22.
- [5] Кормильцева Л.А. Урок-проект "Атомная физика". Вопросы образования. №97.2011.С23 34.
- [6] Блохина С.Н. Разработка урока физики в 8 классе «Преломление света». Вопросы образования. №98. 2011. С 41-59.
- [7] Петрякова Л.Л. Коэффициент полезного действия. Конспект урока по физике, 7 класс Вопросы образования. № 114. 2013.С. 31-45.
- [8] CDдиск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.
- [9] Хертел Г. Сениченков Ю.Б, Новик Л.В. «Сэр Ньютон, что вы думаете о компьютерном обучении» — Журнал «Компьютерные инструменты в образовании», Санкт-Петербург, Информатизация образования, № 1, 2003 - С. 60–66.
- [10] Кавтрев А.Ф. «Лабораторные работы к компьютерному курсу «Открытая физика».Равномерное движение. Моделирование неупругих соударений». Газета «Физика», №20, 2001.С. 5–8.

- [11] Фрадкин В.Е. «Освоение учителями способов реализации образовательного потенциалов информационных технологий в процессе повышения квалификации». - Автореферат дис.канд. пед. наук. СПб. 2002 - 25 с.
- [12] Кавтрев А.Ф. Опыт использования компьютерных моделей на уроках физики. «Вопросы Интернет-образования» № 3, 2002.
- [13] Гомулина Н.Н. Методика проведения компьютерной лабораторной работы с использованием мультимедиа курса «Открытая физика 2.5». «Взаимодействие параллельных токов», 2003. <http://www.college.ru/physics/op25part2/planning/teach/lessons.html>
- [14] Леонов Н. Ф. Использование компьютеров при обучении физике. «Вопросы Интернет-образования» № 2, 2001. □ http://archive.1september.ru/fiz/2001/20/no20_02.htm
- [15] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. конференции с международным участием. Томск 2011, С 210-215.
- [16] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Модель бланка организации самостоятельного выполнения учениками компьютерных лабораторных работ. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [17] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е., Абдураимов Р. Методика применения закономерностей фото- и комптонэффекта, модели бланков оргпнизации выполнения компьютерной лабораторной работы. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 114-121.
- [18] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Модель урока на тему собирающей и рассеивающей линзы. Известия НАН РК, серия физ.-мат. №2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [19] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П.А., Рустемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию дифракции света. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [20] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движения заряженных частиц в магнитном поле и работы масс-спектрометра. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 80-87.
- [21] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию колец Ньютона. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [22] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка оргпнизации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию интерференции света. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136.
- [23] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка оргпнизации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию эффекта Доплера. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [24] Кабылбеков К.А. Организация выполнения компьютерной лабораторной работы. Учебное пособие. Шымкент, 2015, 77 стр.
- [25] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43.
- [26] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Аширбаев Х.А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию электромагнитных колебаний. Изв. НАН серия физ.мат. №1(305), 2016, С 111-116.
- [27] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами. Изв. НАН серия физ.мат. №1(305), 2016, С 135-140.
- [28] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Қозыбақова Г.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарного процесса. Изв НАН серия физ. мат №2 2016г. С92-97.
- [29] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Абекова Ж.А., Нуруллаев М.А. Модель бланка организации выполнения исследовательских заданий по физике. Вестник НАН РК №3, 2016, С67-73.
- [30] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев, Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е. Исследование работы газа на компьютерной модели Вестник. НАН №2 2016. С83-88
- [31] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйеркулова Ж.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний. Изв. НАН серия физ. мат №2 2016г. С84-91.
- [32] Кабылбеков К.А. Мадияров Н.К., Саидахметов П.А. Самостоятельное конструирование исследовательских заданий компьютерных лабораторных работ по термодинамике. Труды IX Международной научн.-методической конференции. Преподавание естественных наук (биологии, физики, химии) математики и информатики. Томск-2016, С 93-99.
- [33] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию реактивного сопротивления катушки индуктивности в цепи переменного тока. Вестник НАН РК-2017. №1, С 77-82.
- [34] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию изотерм реального газа. Изв. НАН серия физ. Мат. №1, 2017, С 77-83.
- [35] Дьяконов В.П. MATLAB учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 533с.

REFERENCES

- [1] Nazarbayev N.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012.
- [2] De Corte, Erik. Innovative perspectives of learning and teaching in higher education in the twenty-first century (translated from English. E. Shadrina). The issue of education. 2014. №3. P 8-29.
- [3] Bushuev, L. G. Formation of information competence in physics lessons. The issue of education. № 88. 2011. P 11-22.
- [4] Sviridenko O. V. "Fundamentals of thermodynamics". Development of a physics lesson (class 10) using the ESM. The issue of education. P 88. 2011. P 11-22.
- [5] Kormil'tsev L. A. Lesson-project "Nuclear physics". The issue of education. № 97. 2011. P 23-34.
- [6] Blokhin S. N. Development of a physics lesson in the 8th grade "Refraction of light". The issue of education. № 98. 2011. With 41-59.
- [7] Petryakova L. L. efficiency. A summary of the lesson on physics, 7th grade education. № 114. 2013. P 31-45.
- [8] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1». 2001.
- [9] Hertel G. Senichenkov Yu B, Novick L. V. "Sir Newton, what do you think about computer training" — Journal "Computer tools in education", Saint-Petersburg, Informatization of education, № 1, 2003 - P 60-66.
- [10] Kavtrev A.F. «Laboratory operations to a computer course» Open physics ». The uniform motion. Modelling of inelastic collisions». - the Newspaper of "Physicist", №20, 2001, P 5-8.
- [15] Kabyzbekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011г., P.210-215.
- [16] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P82-89.
- [17] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P114-121.
- [18] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P286-294.
- [19] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T. Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P71-77.
- [20] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva SH.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), 2015, P80-87.
- [21] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov, PA, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, №1 (299), 2015, P14-20.
- [22] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, 2015, P131-136
- [23] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, 2015, P155-160.
- [24] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. 2015, 284 p.
- [25] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, 2015. P40-43.
- [26] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., H. A. Ashirbaev, Omarova G. Sh., Berdalieva J. Model Blanca organization of computer laboratory works on research of electromagnetic oscillations. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), 2016, P111-116.
- [27] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omarova G. Sh., Berdalieva J., Dzhumagalieva A. I. Model Blanca computer organization laboratory study of the interaction between two infinitely long parallel conductors with currents. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), 2016, P 135-140.
- [28] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P92-97.
- [29] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P98-103.

- [30] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Ashirbaev . H A, Abdubaeva Ph.I, Doskanova A.E.Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN PK№2 2016. P83-88.
- [31] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P A, Omashova G.Sh., Serikbaeva G.S., Sujerkulova Zh. N. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P84-91.
- [32] Kabyzbekov K. A. Madjarov N. T., Saidahmetov P. A. An Independent design research assignments, computer laboratory work on thermodynamics. Proceedings of the IX International scientific-methodical conference.Teaching natural Sciences (biology, physics, chemistry) mathematics and computer science.Tomsk-2016,P 93-99.
- [33] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh Organization computer laboratory work on the study of reactance inductor in an ac circuit. The bulletin of NANRKN№1, 2017. P 77-82.
- [34] Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh., Ashirbaev H. A., Abekova J. A. Organization of computer laboratory works on the study of the isotherms of a real gas. News NAN RK, series physical-mat., №1, 2017, P 77-83.
- [35] Dyakonov V.P. MATLAB training course. - SPb.: Peter, 2001. – 533p.

ӘОЖ: 532.133, 371.62, 372.8.002

**Р.С. Спабекова, Г.Ш. Омашова, К.А. Қабылбеков,
П.А. Саидахметов, Г.С. Серикбаева, Г.К. Актурева**

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**ТОҚ КӨЗІН ҚОСҚАНДА ЖӘНЕ АЖЫРАТҚАНДА ТІЗБЕКТЕГІ ТОҚКҮШІНІҢ ӨЗГЕРУІН
ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ
ҰЙЫМДАСТЫРУДА МАТЛАВ БАҒДАРЛАМАСЫН ҚОЛДАНУ**

Аннотация. МАТЛАВ бағдарламасын қолданып резистор, индуктивті катушка жалғанған тізбекке ток көзін қосқанда және ажыратқанда тоқ күшінің өзгеруін зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастырудың үлгісі ұсынылған. Зертханалық жұмысты орындау барысында студенттер МАТЛАВ тілінде есептеудің программасын құрастырып іске асырады. Зерттеу тәжірибесінің нәтижелерін графика түрінде салып, оны форматтайды.

Физикалық құбылыстарды моделдеуде нақты зертханалық жұмыстарды орындау арқылы студенттер алған теориялық білімдерін бекітеді, ойлаудың эвристикалық және ғылыми әдістерін қолдануын, зерттеу нәтижелерін визуалдауын, алған білімін түрлі жағдайда қолдану дағдыларын қалыптастыруға, ақпараттық құзіреттілігін арттыруға, ойлау іс-әрекеттері мен білім алуға құштарлығын арттыруға мүмкіншілік жасайды.

Ұсынылған зертханалық жұмысты студенттердің орындауында, оқытушы сабақ барысында сәйкес көмек көрсеткен жағдайда, аса қиыншылық тудырмайды және олар алған нәтижелеріне аса қуанып, МАТЛАВ жүйесінің басқа да мүмкіншіліктерін үйренуге құштарланады. Дегенмен, бірқатар студенттердің графиктерді форматтау дағдыларының жеткіліксіз екені байқалды.

Түйін сөздер: кедергі, индуктивтілік, тоқ көзі.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 148 – 154

UDC 593

Z.Tashenova¹, M. Kaldarova², M. Mussaif²

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

²S.Seifullin Kazakh agrotechnical University, Astana, Kazakhstan

**ONE-DIMENSIONAL NUMERICAL SUBSTANTIATION
OF SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEM STEADY STATE
TEMPERATURE IN THE PRESENCE OF HEAT FLOW,
HEAT EXCHANGE AND THERMAL INSULATION**

Abstract. Bearing components of jet propelled, hydrogen engines, atomic, and heat power plants, technological lines of processing industries, as well as internal combustion engines work in complicated thermal area. Reliable operation of these structures will depend on thermo-stress condition of bearing components. Therefore this research is dedicated to numerical study of thermo-stress condition of bearing components of structures.

This article considers the problems of numerical study of the thermomechanical state of the rods of variable cross-section in the presence of local temperature, heat flux, thermal insulation, heat transfer and axial forces, is relevant interest for engineering and technological processes related strengths of the elements are partially thermally insulated structures. The rapid development of processing of natural resources became new problems for scientists in the development of adequate mathematical models generic computational algorithms and methods that allow a comprehensive numerical investigation of the thermos-elastic state of partially insulated construction elements of variable cross-section operating in challenging thermal and power field.

Keywords: the temperature, the rod, the thermal energy, the algorithm, the energy.

УДК 593

Ж.М. Ташенова¹, М. Калдарова², М. Мусайф²

¹Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева;

²Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина

**ЧИСЛЕННОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОДНОМЕРНОСТИ НЕКОТОРОЙ ТРЕХМЕРНОЙ
ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ
ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ**

Аннотация. В данной статье рассмотрены проблемы численного исследование термомеханического состояния стержней переменного поперечного сечения при наличии локальной температуры, теплового потока, теплоизоляции, теплообмена и осевых сил, представляет соответствующий интерес для техники, технологических процессов связанных прочностей элементов частично теплоизолированных конструкций. Бурное развитие переработки природных богатств, ставшие перед учеными новые проблемы разработки адекватных математических моделей универсальных вычислительных алгоритмов и методов, позволяющих всестороннее численное исследование термоупругого состояния частично-теплоизолированных элементов конструкций переменного поперечного сечение работающих в сложном тепловом и силовом поле.

Ключевые слова: температура, тепловой поток, теплоизоляция, теплообмен, энергия.

Рассмотрим проблемы численного исследование термомеханического состояния стержней переменного поперечного сечения при наличии локальной температуры, теплового потока, теплоизоляции, теплообмена и осевых сил, представляет соответствующий интерес для техники, технологических процессов связанных прочностей элементов частично теплоизолированных конструкций.

Экспериментальная часть

Рассмотрим трехмерное тело, поперечное сечение которого имеет форму прямоугольного четырехугольника. Длина имеет бесконечную протяженность. Построим глобальную декартовую систему координат $Oxyz$, как показано на рисунке 1.

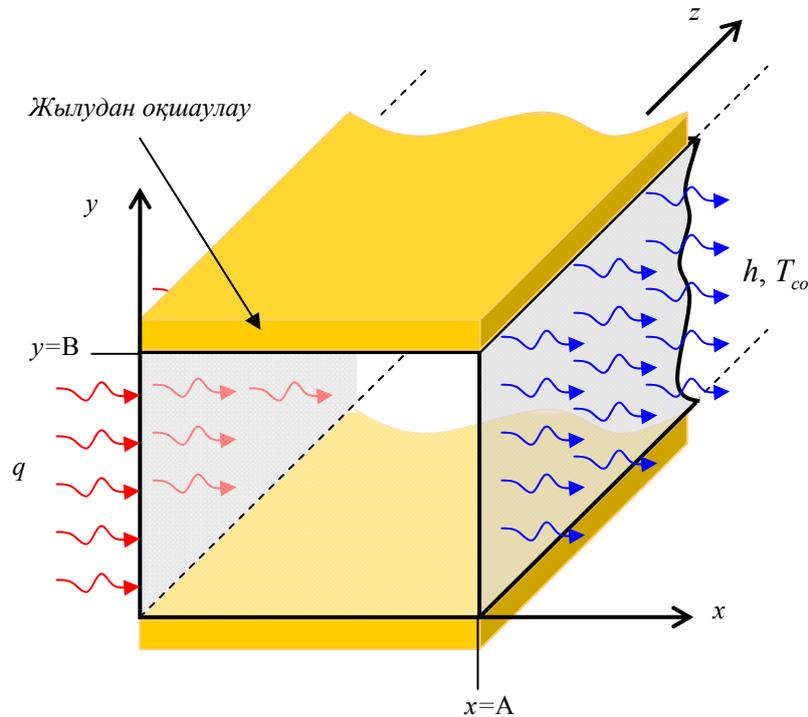


Рисунок 1– Расчетная схема рассматриваемой задачи

В этой системе координат длину тела обозначим через L (см), тогда $-\infty \leq L \leq +\infty$, ширину тела (в направлении оси Ox) через A (см), ее высоту (в направлении оси Oy) - B (см). Пусть на сторону $x=0, 0 \leq y \leq B, -\infty \leq z \leq +\infty$ тела подведен тепловой поток постоянной интенсивности $q = \text{const}$ (Bm/cm^2). Через поверхности противоположенной стороны тела ($x=A, 0 \leq y \leq B, -\infty \leq z \leq +\infty$) происходит теплообмен h ($Bm/(cm^2 \cdot ^\circ C)$), а температура окружающей среды T_{co} ($^\circ C$). Обе стороны ($y=0$ и $y=B, 0 \leq x \leq A, -\infty \leq z \leq +\infty$) тела полностью теплоизолированы. Требуется определить закон распределения температуры в объеме рассматриваемого тела. Здесь следует отметить, что из за постановки задачи процесс теплопереноса является двумерным, то есть поле распределение температуры в любом сечении $z = \text{const}$ рассматриваемого тела будет одинаковым. Поэтому закон распределения температуры является функцией от двух переменных, т.е. $T = T(x, y)$. В рассматриваемом случае, тело является бруском бесконечной длины. В соответствии [1] выражение функционала, которое характеризует полную тепловую энергию для рассматриваемого бруса имеет следующий вид:

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dV + \int_{S(x=0)} q T dS + \int_{S(x=A)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 dS, \quad (1)$$

где V - объем рассматриваемого бруса; $S(x=0)$ - площадь поверхности ($x=0$) бруса, где подведен тепловой поток q ; $S(x=A)$ - площадь поверхности ($x=A$) бруса, через которого происходит теплообмен с окружающей средой h ; K_{xx}, K_{yy} ($Bm/(cm \cdot ^\circ C)$)- коэффициент теплопроводности рассматриваемого бруса, соответственно по направлениям осей координат Ox и Oy .

Площадь поперечного сечения рассматриваемого бруса (которая имеет форму прямоугольного четырехугольника) дискретизируем с помощью координатных прямых на четырехугольные конечные элементы. Число дискретных конечных элементов будет $m \times n$ (соответственно по осям Ox и Oy). Для каждого элемента построим локальную систему координат Oxy , таким образом, что начало координат совпадает с геометрическим центром элемента, как показано на рисунке 2. Нумерация узлов элемента указана на этом рисунке. Координаты узлов элемента в локальной системе координат будут следующими $1(-a; -b)$; $2(a; -b)$; $3(a; b)$; $4(-a; b)$.

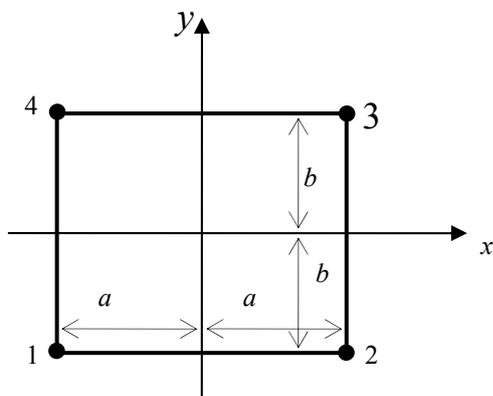


Рисунок 2 – Схема построения локальной системы координат

В пределах каждого элемента поле распределения температуры примем в виде билинейного полинома [2]:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy = \varphi_1(x, y)T_1 + \varphi_2(x, y)T_2 + \varphi_3(x, y)T_3 + \varphi_4(x, y)T_4, \quad (2)$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 - значение температуры в узлах четырехугольника, $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \varphi_4(x, y)$ - функции формы для рассматриваемого четырехугольного конечного элемента, которые имеют следующий вид [3]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab}; & \varphi_2(x, y) &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab}; \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab}; & \varphi_4(x, y) &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Свойства этих функции формы будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} &1) \text{ в первом узле, т.е. при } x = -a; y = -b \\ &\varphi_1(-a; -b) = 1; \varphi_2(-a; -b) = 0; \varphi_3(-a; -b) = 0; \varphi_4(-a; -b) = 0. \\ &2) \text{ во втором узле, т.е. при } x = a; y = -b \\ &\varphi_1(a; -b) = 0; \varphi_2(a; -b) = 1; \varphi_3(a; -b) = 0; \varphi_4(a; -b) = 0. \\ &3) \text{ в третьем узле, т.е. при } x = a; y = b \\ &\varphi_1(a; b) = 0; \varphi_2(a; b) = 0; \varphi_3(a; b) = 1; \varphi_4(a; b) = 0. \\ &4) \text{ в четвертом узле, т.е. при } x = -a; y = b \\ &\varphi_1(-a; b) = 0; \varphi_2(-a; b) = 0; \varphi_3(-a; b) = 0; \varphi_4(-a; b) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$5) \sum_{i=1}^4 \varphi_i = 1, \quad (5)$$

$$6) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

в любой точке дискретного конечного элемента.

Кроме того из (2), (3) легко определяется значения градиентов температуры в любой точке дискретного элемента:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} T_i; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} T_i \quad (7)$$

Для наглядности предлагаемого вычислительного алгоритма поперечное сечение рассматриваемого бруса рассмотрим как один дискретный элемент четырехугольной формы, как показано на рисунке 3.

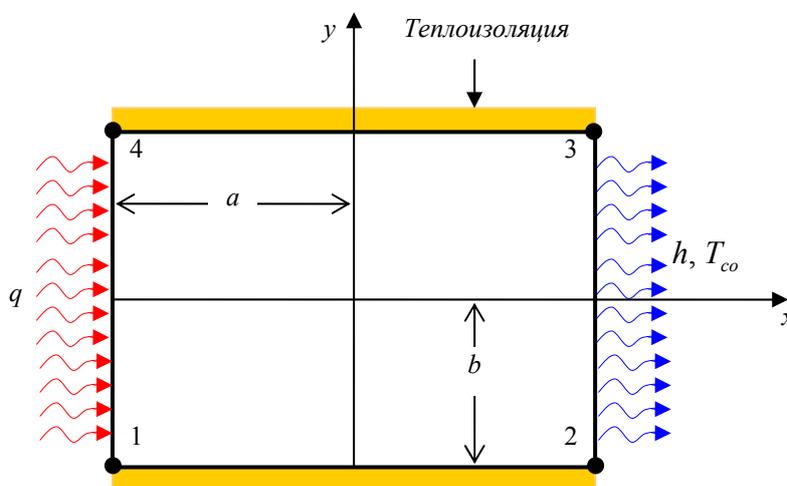


Рисунок 3 – Расчетная схема рассматриваемой задачи

Теперь для одного дискретного элемента вычислим интеграл по объему. Здесь пользуемся следующей формулой:

$$\int_V f(x, y) dV = L \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Используя выше написанные формулы например проведем проверку.

Результаты и их обсуждения

В целях проверки на точность и сходимость получаемых численных результатов проведем вычислительные эксперименты. За исходные данные принимая следующие значения:

$$a = 5 \text{ см}; \quad b = 3 \text{ см}; \quad q = -50 \text{ (Вт/см}^2\text{)}; \quad h = 10 \text{ (Вт/(см}^2 \cdot \text{°C))}; \quad T_{co} = 40 \text{ (°C)}$$

$$K_{xx} = K_{yy} = 75 \text{ (Вт/(см} \cdot \text{°C))}; \text{ вычисляя систему уравнения имеем:}$$

$$2T_1 - 2T_2 - T_3 + T_4 + 5,555T_1 + 2,777T_2 - 2,777T_3 - 5,555T_4 = 20;$$

$$T_1 + 0,10294T_2 - 0,5T_3 - 0,60294T_4 = 2,647;$$

$$T_1 = -0,10294T_2 + 0,5T_3 + 0,60294T_4 + 2,647; \quad (9)$$

Подставляя в последнее уравнение вместо T_1 ее выражение (9) имеем:

$$0,75T_2 - 2,20588T_3 + 0,39706T_4 = -45; \quad (10)$$

определим T_2 :

$$T_2 = 0,17028T_3 + 0,3756T_4 + 17,92986; \quad (11)$$

определим T_3 :

$$T_3 = 0,32658T_4 + 28,12; \quad (12)$$

определим T_4 :

$$T_4 = 51,665 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (13)$$

определим значение T_3 :

$$T_3 = 45 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (14)$$

находим значения T_2 :

$$T_2 = 45 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (15)$$

находим значение T_1 :

$$T_1 = 51,665 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (16)$$

Таким образом, из-за симметричности поставленной задачи относительно осей Ox и Oy , получим, что $T_1 = T_4 = 51,665 \text{ } ^\circ\text{C}$; $T_2 = T_3 = 45 \text{ } ^\circ\text{C}$; Пользуясь (2) находим закон распределения температуры в пределах сечения бруса, т.е. четырехугольника:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x, y)T_i = \frac{1}{4ab} [(ab - ay - bx + xy)T_1 + (ab - ay + bx - xy)T_2 + \\ &+ (ab + ay + bx + xy)T_3 + (ab + ay - bx - xy)T_4] = \frac{1}{4ab} (51,665ab - 51,665ay - 51,665bx + \\ &+ 51,665xy + 51,665ab + 51,665ay - 51,665bx - 51,665xy + 45ab - 45ay + 45bx - 45xy + \\ &+ 45ab + 45ay + 45bx + 45xy) = \frac{1}{4ab} (193,33ab - 13,33bx); \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что $-a \leq x \leq a$.

Ожидаемые результаты

Из последнего видно, что поле распределения температуры в пределах сечения бруса (четырёхугольника) не зависит от координаты оси Oy . Это поле является линейной функцией от x . Кроме

того из (17) также видно, что наибольшая температура наблюдается в точках поверхности $x = -a$. В точках этой поверхности значение температуры будет $T(x = -a, y) = 51,665 \text{ }^\circ\text{C}$ при $-b \leq y \leq b$. Соответственно наименьшее значение температуры будет в точках поверхности $x = a$, т.е. $T(x = a, y) = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ при $-b \leq y \leq b$.

Таким образом, из полученных результатов видно, что рассматриваемый процесс теплопереноса из-за скалярности температуры является одномерным физическим процессом.

Выводы

Все эти тестовые расчеты показывают, что в рамках рассмотренной задачи при нахождении закона распределения температуры в пределах расчетной области с применением энергетического принципа достаточно дискретизировать одним четырехугольным элементом, вследствие чего разрешающая система будет состоять из четырех линейных алгебраических уравнений. Последние можно решать аналитически. Здесь следует отметить, что при других граничных условиях это утверждение может терять смысл.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ноздрев В.Ф. Курстермодинамики. – М.: Мир, 1967. – 247 с.
- [2] Huebner, K. H., The Finite Element Method for Engineers. Wiley, 1975, pp: 183-187.
- [3] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, 2000, vol. 2: 119-125.
- [4] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, 1999, ch.1: 98-102.
- [5] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, 2009, pp: 123-129.
- [6] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, 2009, pp: 67-75.
- [7] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov, A., Zhumadillaeva A.K. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer // Advanced Science Letters. -№ 19.-P.2395-2397.
- [8] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov A. Developing a Computational Modeling Algorithm for Thermostressed Condition of Rod made of Heat-resistant Material ANB-300 type // Advanced Materials Research. – 2013. – Vol. 19. – P. 4562-4566.
- [9] Nicolas X., Benzaoui A., Xin S. Numerical simulation of thermoconvective flows and more uniform depositions in a cold wall rectangular APCVD reactor // J. Cryst. Growth. – 2008. – № 1(310). – P.174-186.
- [10] Chen W.R. A numerical study of laminar free convection heat transfer between inner sphere and outer vertical cylinder // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2007. – № 13-14(50). – P. 2656-2666.
- [11] Gamrat G., Favre-Marinet M., Le P.S. Numerical study of heat transfer over banks of rods in small Reynolds number cross-flow // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – № 3-4(51). – P. 853-864.
- [12] Nouri-Borujerdi A., Lavasani A.M. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2007. – № 13-14(50). – P. 2605-2611.
- [13] AvedissianT., Naylor D. Free convective heat transfer in an enclosure with an internal louvered blind // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – № 1-2(51). – P. 283-293.
- [14] Yalcin H.G., Baskaya S. Sivrioglu M. Numerical analysis of natural convection heat transfer from rectangular shrouded fin arrays on a horizontal surface // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. – 2008. – № 3(35). – C. 299-311.
- [15] Das A., Das B. Thermo-elastic stress distribution in three layered system // Proc. Nat. acad Sci. – 2001. – Vol. 71, №1. – P. 21-31.
- [16] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, 2000, vol. 2: 119-125.
- [17] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, 1999, ch.1: 98-102.
- [18] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, 2009, pp: 123-129.
- [19] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, 2009, pp: 67-75.
- [20] Panamarev, V. A., 2002. About calculating models for titanic bar high temperature straining. Boundary problems and mathematical modeling, pp: 65-69.

REFERENCES

- [1] Huebner, K. H., The Finite Element Method for Engineers. Wiley, 1975, 183-187 (in Eng.).
- [2] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, **2000**, 2, 119-125 (in Eng.).
- [3] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, **1999**, 1, 98-102 (in Eng.).
- [4] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, **2009**, 123-129, (In Russ.).
- [5] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, **2009**, 67-75, (In Russ.).
- [6] Nozdrev, V. F., The course of thermodynamics. Enlightenment, **1995**, (In Russ.).
- [7] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov, A., Zhumadillaeva A.K. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer // Advanced Science Letters, (In Russ.).
- [8] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov A. Developing a Computational Modeling Algorithm for Thermostressed Condition of Rod made of Heat-resistant Material ANB-300 type // Advanced Materials Research, **2013**, 19, 4562-4566 (In Russ.).
- [9] Nicolas X., Benzaoui A., Xin S. Numerical simulation of thermoconvective flows and more uniform depositions in a cold wall rectangular APCVD reactor // J. Cryst. Growth, **2008**, 1(310), 174-186 (In Russ.).
- [10] Chen W.R. A numerical study of laminar free convection heat transfer between inner sphere and outer vertical cylinder // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2007**, 13-14(50), 2656-2666 (in Eng.).
- [11] Gamrat G., Favre-Marinet M., Le P.S. Numerical study of heat transfer over banks of rods in small Reynolds number cross-flow // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2008**, 3-4(51), 853-864, (in Eng.).
- [12] Nouri-Borujerdi A., Lavasani A.M. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2007**, 13-14(50), 2605-2611 (In Russ.).
- [13] Avedissian T., Naylor D. Free convective heat transfer in an enclosure with an internal louvered blind // Int. J. Heat and Mass Transfer, **2008**, 1-2(51), 283-293, (In Russ.).
- [14] Yalcin H.G., Baskaya S. Sivrioglu M. Numerical analysis of natural convection heat transfer from rectangular shrouded fin arrays on a horizontal surface // Int. Commun. Heat and Mass Transfer, **2008**, 3(35), 299-311, (In Russ.).
- [15] Das A., Das B. Thermo-elastic stress distribution in three layered system // Proc. Nat. acad Sci, 2001, 71, 1, 21-31, (in Eng.).
- [16] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. China Applied mathematics and mechanics, **2000**, 2, 119-125, (in Eng.).
- [17] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. Gansu University of Science, **1999**, 1, 98-102, (in Eng.).
- [18] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. Baiterek, **2009**, 123-129, (In Russ.).
- [19] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. Bishkek, 2009, 67-75, (In Russ.).
- [20] Panamarev, V. A. About calculating models for titanic bar high temperature straining. Bound ary problems and mathematical modeling, **2002**, 65-69, (In Russ.).

Ж.М. Ташенова¹, М. Калдарова², М. Мусайф²

¹ Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
² С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті

**ЖЫЛУ АҒЫНЫ, ЖЫЛУ АЛМАСУ ЖӘНЕ ЖЫЛУ ИЗОЛЯЦИЯСЫ БАР ҮШӨЛШЕМДІ
ЕСЕПТІҢ ТҰРАҚТЫ ТЕМПЕРАТУРАЛЫ КҮЙІНДЕГІ САНДЫҚ СИПАТТАМАСЫ**

Аннотация. Көптеген өндіріс орындарында негізгі құрылым элементтері күрделі жылу көздері әсерінде тұрақты жұмыс жасайды. Өндірістің үздіксіз жұмыс жасауы әрине сол элементтердің сынып қалмауына тікелей байланысты. Сондықтанда алдын – ала негізгі құрылым элементтердің әр түрлі жылу көздері әсерінде қандай термо-механикалық жағдайда болуын терең зерттеу өндірістің үздіксіз, тұрақты, сапалы жұмыс жасау тұрғысынан өте өзекті мәселе болып табылады. Бұл ғылыми жұмыс осы мәселені шешуге бағытталған.

Тірек сөздер: температура, жылу көздері, жылу алмасу, жылу ағыны, жылу изоляция.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 155 – 162

UDC 593

Zh. Tashenova¹, M. Mussaif², M. Kaldarova²¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan²Kazakh agrarian-technical University named S.Seifullin, Astana, Kazakhstan**ENERGY METHOD IN DECISION PROBLEMS
THERMOELASTICITY**

Abstract. This article considers the problems of numerical study of the thermomechanical state of the rods. Bearing components of jet propelled and hydrogen engines, atomic and heat power plants, technological lines of processing industries, as well as internal combustion engines work in complicated thermal area. Reliable operation of these structures will depend on thermo-stress condition of bearing components. Therefore this research is dedicated to numerical study of thermo-stress condition of bearing components of structures in the form of limited length rods constrained from both ends. Herewith the rod is under influence of local temperature and heat exchange. Apart from this the rod under study is made of heatproof material ANV-300. Particularity of this material is that temperature expansion coefficient of the rod material depends on the temperature. The offered computational algorithm is based on the energy conservation principle. Herewith all types of integrals in energy functional formulas are integrated analytically. Whereupon the acquired numerical solutions will be of high accuracy.

Keywords: the temperature, the rod, the thermal energy, the algorithm.

УДК 593

Ж.М. Ташенова¹, М. Мусайф², М. Калдарова²¹Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева;²Казахский агротехнический университет имени С.Сейфуллина**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ**

Аннотация. На основе фундаментальных законов сохранения энергии в сочетании локальных квадратичных сплайн функции разрабатывается универсальный вычислительный алгоритм, метод и соответствующее программное обеспечение, позволяющее исследовать теплофизическое состояние теплоизолированного стержня, ограниченной длины, при воздействии локального теплового потока, теплообмена и температур. В работе разработанный вычислительный алгоритм и метод позволяет получить решения всех возникающих задач для стержней ограниченной длины, которые находятся под одновременным действием разнородных видов источников тепла. Точность полученных результатов обусловлена применением фундаментальных законов сохранения энергии. Универсальность разработанного вычислительного алгоритма и метода заключается в использовании его при решении класса теплофизических задач для стержней ограниченной длины. При этом все существующие естественные граничные условия учитываются на уровне закона сохранения энергии. Также следует отметить, что разработанная методика позволяет решать множество инженерных и прикладных задач для несущих элементов конструкций, которые работают в сложном тепловом поле.

Ключевые слова: тепловой поток, теплообмен, теплопроводности, теплообмена, теплоизоляция.

Несущие элементы современных газогенераторных энергетических установок, атомных и тепловых электростанций, водородных и реактивных двигателей, двигателей внутреннего сгорания, установок глубокой переработки минеральных сырья и нефтей работают в сложном силовом и тепловом поле. Надежной работы вышеприведенных установок будет зависеть от термомоч-

ностных характеристик их несущих элементов. В качестве несущих элементов рассматривались стержни ограниченной длины и постоянного поперечного сечения [1][2]. В этих задачах на основе фундаментальных законов теплофизики [3] определены поле распределения температуры по длине стержня ограниченной длины с учетом действующих видов источников тепла. Другие аналогичные задачи рассмотрены в работах [4-6]. В этих работах ограничивались определением закона распределения температуры по длине исследуемого стержня в зависимости от видов заданных источников. В отличие от их в данной работе в качестве несущего элемента конструкций рассматривается горизонтальный стержень ограниченной длины и постоянного поперечного сечения. При этом боковая поверхность исследуемого стержня полностью теплоизолированная. На площадь поперечного сечения левого конца подводится тепловой поток постоянной интенсивности. Через площади поперечного сечения правого конца происходит теплообмен с окружающей этой площади средой. В этой задаче с помощью фундаментальных законов сохранения энергии [7] определяются:

- 1) закон распределения температуры по длине рассматриваемого стержня;
- 2) величина ее термического удлинения;
- 3) величина возникающего осевого сжимающего усилия;
- 4) закон распределения упругих, температурных и термоупругих составляющих деформаций и напряжений;
- 5) поле перемещений.

Экспериментальная часть

Вывод разрешающих уравнений. Рассматривается горизонтальный стержень, ограниченной длины L [см]. Площадь поперечного сечения которого F [см²] постоянная по ее длине. Профиль поперечного сечения стержня может быть кругом, четырехугольником, треугольником, многоугольным и т.д. Теплофизические свойства материала стержня характеризуются коэффициентом теплового расширения материала стержня α [$\frac{1}{^\circ\text{C}}$], теплопроводностью kx [$\frac{\text{Вт}}{\text{см}^\circ\text{C}}$], а также модулем упругости E [$\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$].

На площадь поперечного сечения левого конца, рассматриваемого стержня, подведен тепловой поток q [$\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$]. Через площадь поперечного сечения правого конца происходит конвективный теплообмен с окружающей ее средой. При этом коэффициент теплообмена h [$\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{C}}$], а температура окружающей среды $T_{\text{с}}$ [°C]. Требуется с начала определить закон распределения температуры по длине исследуемого стержня в зависимости от вида действующих источников тепла, геометрических и теплофизических характеристик стержня. Для этого сначала построим локальную аппроксимационную квадратичную сплайн функцию.

Расчетная схема рассматриваемой задачи приводится на рисунке 1.

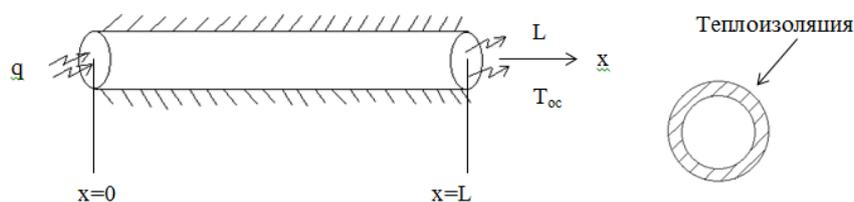


Рисунок 1- Расчетная схема задачи

Предположим, что

$$T(x = 0) = T_i; T\left(x = \frac{L}{2}\right) = T_j; T(x = L) = T_k \quad (1)$$

Закон распределения температуры по длине исследуемого стержня аппроксимируем полным полиномом второго порядка сплайн функции [8]

$$T(x) = ax^2 + bx + c = \varphi_i(x) * T_i + \varphi_j(x) * T_j + \varphi_k(x) * T_k; 0 \leq x \leq L \quad (2)$$

Где

$$\varphi_i(x) = \frac{2x^2 - 3Lx + L^2}{L^2}; \varphi_j(x) = \frac{4Lx - 4x^2}{L^2}; \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - Lx}{L^2}; 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

Теперь для исследуемой задачи напишем функционал, которая характеризует закон сохранения энергии [7].

$$J = \int_V + \int_V \frac{kx}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S(x=L)} \frac{h}{2} (T - T_{OC})^2 dS, \quad (4)$$

Здесь следует отметить, что размерность каждого члена является $[Bm^{\circ}C]$. Это и есть работа, выполненной температурой, по аналогии $[кг см]$. Из-за физической сущности явления имеем:

$$J_1 = \int_{S(x=0)} q * T dS = FqT_i \quad (5)$$

$$J_3 = \int_{S(x=L)} \frac{h}{2} (T - T_{OC})^2 dS = \frac{Fh}{2} (T_k - T_{OC})^2 \quad (6)$$

Для вычисления интеграла по объему в выражении (4), необходимо определить градиент температуры

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} T_k = \frac{4x-3L}{L^2} T_i + \frac{4L-8x}{L^2} T_j + \frac{4x-L}{L^2} T_k, 0 \leq x \leq L \quad (7)$$

Далее подставляя (7) в выражении J, а также пользуясь известной формулой

$$\int_V f(x) dV = F \int_0^L f(x) dx$$

имеем

$$J_2 = \int_V \frac{kx}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{Fkx}{\partial x} (7 T_i^2 - 16 T_i T_j + 2 T_i T_k - 16 T_j T_k + 16 T_j^2 + 7 T_k^2) \quad (8)$$

Тогда интегрированный вид функционала полной тепловой энергии имеет следующий вид:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = FqT_i + \frac{Fkx}{\partial x} (7 T_i^2 - 16 T_i T_j + 2 T_i T_k - 16 T_j T_k + 16 T_j^2 + 7 T_k^2) + \frac{Fh}{2} (T_k - T_{OC})^2 \quad (9)$$

Здесь следует отметить, что для определения значений T_i, T_j и T_k , можно получить соответствующую систему линейных алгебраических уравнений, где учитываются все существующие естественные граничные условия, варьируя J по T_i, T_j и T_k .

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{\partial J}{\partial T_i} = 0; & \rightarrow Fq + \frac{Fkx}{6L} (14T_i - 16T_j + 2T_k) = 0 \\ 2) \frac{\partial J}{\partial T_j} = 0; & \rightarrow \frac{Fkx}{6L} (-16T_i + 32T_j - 16T_k) = 0 \\ 3) \frac{\partial J}{\partial T_k} = 0; & \rightarrow \frac{Fkx}{6L} (2T_i - 16T_j + 14T_k) + FhT_k - FhT_{OC} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

После упрощения имеем

$$\left. \begin{aligned} 7T_i - 8T_j + T_k &= -\frac{3Lq}{k_x} \\ T_i - 2T_j + T_k &= 0 \\ 7T_i - 8T_j + 7T_k + \frac{3Lh}{k_x} T_k &= \frac{3LhT_{OC}}{k_x} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решая эту систему определим, что

$$T_i = T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{Lq}{k_x}, T_j = T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{Lq}{2k_x}, T_k = T_{Oc} - \frac{q}{h} \quad (12)$$

Далее подставляя (12) в(2-3) и после упрощения определим закон распределения температуры по длине исследуемого стержня с учетом одновременного наличия теплоизоляции, теплового потока и теплообмена. Она будет иметь следующий вид:

$$T = T(x, T_{Oc}, q, h, L, k_x) = \left(T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{k_x}\right) + \frac{q}{k_x} x; 0 \leq x \leq L \quad (13)$$

Отсюда видно, что в нашем случае закон распределения температуры по длине исследуемого стержня будет линейной.

Результаты исследования. Определение теплофизического состояния стержня. Теперь приступим к решению следующей задачи. Из-за наличия поле температур, исследуемый стержень будет удлиняться. Требуется определить величину удлинения в зависимости от одновременного наличия разнородных источников тепла. Для этого, предположим, что левый конец стержня жестко заземлена, а правый - свободный. Из общих законов термодинамики [7] известно, что величина удлинения стержня от поле температур определяется следующим образом:

$$\Delta l_T = \int_0^L \alpha T(x) dx \quad (14)$$

Если принять, что $\alpha = \text{const}$, имеем

$$\Delta l_T = \int_0^L \alpha T(x) dx = \alpha L \left(T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{2k_x}\right) \quad (15)$$

Далее будем решать третью возникающую задачу. Если оба конца исследуемого стержня будет жестко-защемлена, то она не может ни удлиняться и ни укорачиваться. В этом случае возникает осевое сжимающее усилие R [кг]. Его определим как решение статически неопределимой задачи при этом применяем условия совместности деформации:

$$\frac{RL}{EF} + \Delta l_T = 0 \rightarrow R = -\frac{\Delta l_T EF}{L} = -\alpha EF \left(T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{2k_x}\right) \quad (16)$$

После этого легко определяется решение четвертой задачи, определение возникающего поле термо-упругого напряжения σ $\left[\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right]$. Она определяется в соответствии обобщенного закона Гука:[9]

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\alpha E \left(T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{2k_x}\right) \quad (17)$$

Отсюда видно, что поле распределения термо-упругой составляющей напряжение σ будет прямой линией, которая параллельно к оси стержня и оси ОХ.

Еще раз применяя обобщенный закон Гука находится решение возникающей пятой задачи определения поле термо-упругой сосоставляющей деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\alpha \left(T_{Oc} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{2k_x}\right) \quad (18)$$

Из решения видно, что она имеет прямолинейный характер, которая параллельна к оси ОХ.

Если учесть, что $q < 0$, то из(16-18) видны, что R , σ и ε будет иметь только сжимающий характер.

Далее пользуясь фундаментальными законами термодинамики можно решать возникающую шестую задачу определения поле температурной составляющей деформации

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha T(x) = -\alpha \left[\left(T_{OC} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{k_x} \right) + \frac{q}{k_x} x \right], 0 \leq x \leq L \quad (19)$$

Отсюда видно, что ε_T - будет иметь сжимающий характер, и поле распределения будет линейной.

Возникающую седьмую задачу можно определить пользуясь обобщенным законом Гука. Тогда поле распределения температурной составляющей напряжения имеет следующий вид:

$$\sigma_T(x) = E\varepsilon_T(x) = -\alpha E \left[\left(T_{OC} - \frac{q}{h} - \frac{qL}{k_x} \right) + \frac{q}{k_x} x \right], 0 \leq x \leq L \quad (20)$$

Из решения видно, что она имеет линейный вид и сжимающий характер.

Возникающую восьмую задачу об определении поле упругих составляющих деформаций определим из фундаментального закона

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x) = \frac{\alpha}{k_x} \left(-\frac{qL}{2} + qx \right) = \frac{q\alpha}{k_x} \left(-\frac{L}{2} + x \right), \quad (21)$$

Отсюда видно, что $\varepsilon_x(x)$ имеет линейный характер. На участке $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, она имеет растягивающий характер. В сечении $x = \frac{L}{2}$, $\varepsilon_x\left(\frac{L}{2}\right) = 0$. Далее она имеет сжимающий характер.

Решение возникающей девятой задачи определяется из соответствующего закона Гука

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \frac{q\alpha E}{k_x} \left(-\frac{L}{2} + x \right) \quad (22)$$

Она имеет характер, как и $\varepsilon_x(x)$.

Теперь, наконец, решим десятую возникающую задачу об определении поля перемещения $U(x)$. Она определяется из соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow U(x) = \int \varepsilon_x(x) dx = \frac{q\alpha}{k_x} \left(-\frac{L}{2} x + \frac{x^2}{2} \right) + C, \text{ где } C = \text{const.}$$

Значение C определим из условия защемленности двух концов, то есть $U(x=0)=U(x=L)=0$. Тогда имеем, что $C=0$. Тогда поле перемещение имеет следующий вид:

$$U(x) = \frac{q\alpha x}{k_x} \left(\frac{x}{2} - \frac{L}{2} \right), 0 \leq x \leq L \quad (23)$$

Отсюда видно, что $U(x)$ имеет квадратичный вид. При этом сечение находящихся на участке $0 < x \leq L$ перемещается в направлении ОХ.

Естественно, защемленные концы неперемещаются, т.е. $U(x=0)=U(x=L)=0$.

Результаты и их обсуждения

В целях иллюстрации разработанного вычислительного алгоритма и метода, за исходных данных примем следующее

$$q = -500 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}, \quad h = 5 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{°C}}, \quad T_{OC} = 20 \text{°C}, \quad L = 20 \text{см}, \quad k_x = 75 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{°C}}, \quad \alpha = 0,0000125 \frac{1}{\text{°C}}, \quad E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$r = 1 \text{см}, \quad F = \pi r^2 = \pi \text{см}^2$$

При этих исходных данных определим следующее:

1. Закон распределения установившегося поля распределения температуры по длине исследуемого стержня. Она определяется по формуле (13):

$$T(x) = \frac{760}{3} - \frac{20}{3} * x = \frac{20}{3} (38 - x); \quad 0 \leq x \leq 20 \text{см};$$

2. Если левый конец стержня жестко-зашемлен, а правый – свободен, то из-за наличия поля температуры исследуемый стержень удлиняется. Величины увеличения определяется по формуле (15):

$$\Delta l_T = 0,0000125 * 20 \left(20 + \frac{500}{5} + \frac{500*20}{15} \right) = 0,04666 \dots \text{см};$$

3. Если оба конца исследуемого стержня жестко-зашемлены, то из-за наличия поля температуры возникает осевое сжимающее усилия R. Его величина определяется по формуле (16):

$$R = -0,0000125 * 2 + 10^6 * \pi \left(20 + \frac{500}{5} + \frac{500*20}{150} \right) = -14653,333 \dots \text{кГ};$$

4. При наличии осевого сжимающегося усилия в сечениях стержня возникает сжимающее термо-упругое напряжение. Его величина определяется по формуле (17):

$$\sigma = -0,0000125 * 2 * 10^6 \left(20 + \frac{500}{5} + \frac{500*20}{150} \right) = -4666,666 \dots \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2};$$

5. При наличии термо-упругой составляющей напряжения возникает соответствующая термо-упругая деформация. Его величина определяется по формуле (18):

$$\varepsilon = -0,0000125 \left(20 + \frac{500}{5} + \frac{500*20}{150} \right) = -0,00233 \dots;$$

6. Из-за наличия по длине стержня поля температуры возникает соответствующее поле температурной составляющей деформации. Она определяется по формуле (19):

$$\varepsilon_T(x) = -0,0000125 \left[\left(20 + \frac{500}{5} + \frac{500*20}{75} \right) - \frac{500}{75} * x \right] = -0,000083(38 - x); 0 \leq x \leq 20 \text{см};$$

Отсюда видно, что природа $\varepsilon_T(x)$ по всей длине исследуемого стержня будет сжимающей;

7. Из-за наличия $\varepsilon_T(x)$ в сечениях стержня возникает соответствующая температурная составляющая напряжения. Закон распределения этого напряжения определяется по формуле (20):

$$\sigma_T(x) = E\varepsilon_T(x) = -0,000166(38 - x), 0 \leq x \leq 20 \text{см};$$

Отсюда видно, что по всей длине исследуемого стержня природа $\sigma_T(x)$ будет сжимающей;

8. Из-за наличия температурных и термо-упругих составляющих деформаций в стержне также возникает упругое составляющее деформации. Закон распределения упругой составляющей деформаций определяется по формуле (21):

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x) = \frac{-500*0,0000125}{75} \left(-\frac{20}{2} + x \right) = -0,000083(-10 + x); 0 \leq x \leq 20 \text{см};$$

Отсюда видно, что на участке $0 \leq x \leq 10 \text{см}$ стержня природа $\varepsilon_x(x)$ будет растягивающей, а далее сжимающей;

9. При наличии поля упругих составляющих деформаций в сечениях стержня также возникает упругое составляющее напряжения $\sigma_x(x)$. Это поле определяется по формуле (22):

$$\sigma_x(x) = \frac{-0,0000125 * 2 * 10^6 * 500}{75} \left(-\frac{20}{2} + x \right) = -166(-10 + x), 0 \leq x \leq 20 \text{см};$$

Отсюда видно, что природа $\sigma_x(x)$ на участке $0 \leq x \leq 20 \text{см}$ стержня будет растягивающей, а далее будет сжимающей;

10. Из-за наличия разнородных видов источников тепла, сечение стержня перемещаются. В случае, когда оба конца стержня жестко-зашемлены, то возникающее поле перемещения определяется по формуле (23):

$$U(x) = \frac{-500 * 0,0000125}{75} * x \left(\frac{x}{2} - \frac{20}{2} \right) = -0,000083x \left(\frac{x}{2} - 10 \right), \\ 0 \leq x \leq 20 \text{см};$$

Отсюда видно, что сечения в зашеченных концах не перемещаются. Остальные все сечения перемещаются слева направо. Это обусловлено большим тепловым потоком, который подведен на площадь поперечного сечения левого конца стержня.

Выводы. На основе фундаментальных законов сохранения энергии разработан вычислительный алгоритм и метод исследования установившегося термо-физического состояния теплоизолированного стержня ограниченной длины при одновременной наличии теплового потока и теплообмена. Выявлено, что законы распределения температуры, упругих и температурных составляющих будут линейными. В то время значения терм упругой составляющей деформации и напряжения будут постоянными. Закон распределения перемещения будет иметь квадратичный характер, и все сечения стержня будет перемещаться слева в право если $q \leq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. – М.: Мир, 1967. – 247 с.
- [2] Huebner, K. H., *The Finite Element Method for Engineers*. Wiley, 1975, pp: 183-187.
- [3] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. *China Applied mathematics and mechanics*, 2000, vol. 2: 119-125.
- [4] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. *Gansu University of Science*, 1999, ch.1: 98-102.
- [5] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. *Baiterek*, 2009, pp: 123-129.
- [6] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. *Bishkek*, 2009, pp: 67-75.
- [7] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov, A., Zhumadillaeva A.K. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer // *Advanced Science Letters*. -№ 19.-P.2395-2397.
- [8] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov A. Developing a Computational Modeling Algorithm for Thermostressed Condition of Rod made of Heat-resistant Material ANB-300 type // *Advanced Materials Research*. – 2013. – Vol. 19. – P. 4562-4566.
- [9] Nicolas X., Benzaoui A., Xin S. Numerical simulation of thermoconvective flows and more uniform depositions in a cold wall rectangular APCVD reactor // *J. Cryst. Growth*. – 2008. – № 1(310). – P.174-186.
- [10] Chen W.R. A numerical study of laminar free convection heat transfer between inner sphere and outer vertical cylinder // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 2007. – № 13-14(50). – P. 2656-2666.
- [11] Gamrat G., Favre-Marinet M., Le P.S. Numerical study of heat transfer over banks of rods in small Reynolds number cross-flow // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 2008. – № 3-4(51). – P. 853-864.
- [12] Nouri-Borujerdi A., Lavasani A.M. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 2007. – № 13-14(50). – P. 2605-2611.
- [13] AvedissianT., Naylor D. Free convective heat transfer in an enclosure with an internal louvered blind // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 2008. – № 1-2(51). – P. 283-293.
- [14] Yalcin H.G., Baskaya S. Sivrioglu M. Numerical analysis of natural convection heat transfer from rectangular shrouded fin arrays on a horizontal surface // *Int. Commun. Heat and Mass Transfer*. – 2008. – № 3(35). – C. 299-311.
- [15] Das A., Das B. Thermo-elastic stress distribution in three layered system // *Proc. Nat. acad Sci*. – 2001. – Vol. 71, №1. – P. 21-31.
- [16] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. *China Applied mathematics and mechanics*, 2000, vol. 2: 119-125.
- [17] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. *Gansu University of Science*, 1999, ch.1: 98-102.
- [18] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. *Baiterek*, 2009, pp: 123-129.
- [19] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. *Bishkek*, 2009, pp: 67-75.
- [20] Panamarev, V. A., 2002. About calculating models for titanic bar high temperature straining. *Boundary problems and mathematical modeling*, pp: 65-69.

REFERENCES

- [1] Huebner, K. H., *The Finite Element Method for Engineers*. Wiley, **1975**, 183-187 (in Eng.).
- [2] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. *China Applied mathematics and mechanics*, **2000**, 2, 119-125 (in Eng.).
- [3] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. *Gansu University of Science*, **1999**, 1, 98-102 (in Eng.).
- [4] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. *Baiterek*, **2009**, 123-129, (In Russ.).
- [5] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. *Bishkek*, **2009**, 67-75, (In Russ.).
- [6] Nozdrev, V. F., *The course of thermodynamics*. Enlightenment, **1995**, (In Russ.).
- [7] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov, A., Zhumadillaeva A.K. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer // *Advanced Science Letters*, (In Russ.).
- [8] TashenovaZh.M., Nurlybaeva E.N., Kudaykulov A. Developing a Computational Modeling Algorithm for Thermostressed Condition of Rod made of Heat-resistant Material ANB-300 type // *Advanced Materials Research*, **2013**, 19, 4562-4566 (In Russ.).
- [9] Nicolas X., Benzaoui A., Xin S. Numerical simulation of thermoconvective flows and more uniform depositions in a cold wall rectangular APCVD reactor // *J. Cryst. Growth*, **2008**, 1(310),174-186 (In Russ.).
- [10] Chen W.R. A numerical study of laminar free convection heat transfer between inner sphere and outer vertical cylinder // *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **2007**, 13-14(50), 2656-2666 (in Eng.).

- [11] Gamrat G., Favre-Marinet M., Le P.S. Numerical study of heat transfer over banks of rods in small Reynolds number cross-flow // *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **2008**, 3-4(51), 853-864, (in Eng.).
- [12] Nouri-Borujerdi A., Lavasani A.M. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **2007**, 13-14(50), 2605-2611 (In Russ.).
- [13] Avedissian T., Naylor D. Free convective heat transfer in an enclosure with an internal louvered blind // *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **2008**, 1-2(51), 283-293, (In Russ.).
- [14] Yalcin H.G., Baskaya S. Sivrioglu M. Numerical analysis of natural convection heat transfer from rectangular shrouded fin arrays on a horizontal surface // *Int. Commun. Heat and Mass Transfer*, **2008**, 3(35), 299-311, (In Russ.).
- [15] Das A., Das B. Thermo-elastic stress distribution in three layered system // *Proc. Nat. acad Sci*, **2001**, 71, 1, 21-31, (in Eng.).
- [16] Lishirong, Chengshangyue, Analysis of thermal post-bulking of heated elastic rods. *China Applied mathematics and mechanics*, **2000**, 2, 119-125, (in Eng.).
- [17] Lishirong, Yangjingning, Accurate model of post bucking of elastic rod with Mirabel cross sections. *Gansu University of Science*, **1999**, 1, 98-102, (in Eng.).
- [18] Kudaykulov, A. K., Mathematical (finite element) modeling applications of heat distribution in one-dimensional structural elements. *Baiterek*, **2009**, 123-129, (In Russ.).
- [19] Kenzhegul, B. Z., Kudaykulov A. K., Myrzasheva, A. N., Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources. *Bishkek*, **2009**, 67-75, (In Russ.).
- [20] Panamarev, V. A. About calculating models for titanic bar high temperature straining. *Bound ary problems and mathematical modeling*, **2002**, 65-69, (In Russ.).

Ж.М. Ташенова¹, М. Мусайф², М. Калдарова²

¹ Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
² С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті

ТЕРМОСЕРПІМДІЛІКТІ ЕСЕПТЕУДЕГІ ЭНЕРГЕТИКАЛЫҚ ӘДІСІ

Андатпа. Көптеген өндіріс орындарында негізгі құрылым элементтері күрделі жылу көздері әсерінде тұрақты жұмыс жасайды. Өндірістің үздіксіз жұмыс жасауы әрине сол элементтердің сынып қалмауына тікелей байланысты. Сондықтанда алдын – ала негізгі құрылым элементтердің әр түрлі жылу көздері әсерінде қандай термо-механикалық жағдайда болуын терең зерттеу өндірістің үздіксіз, тұрақты, сапалы жұмыс жасау тұрғысынан өте өзекті мәселе болып табылады. Бұл ғылыми жұмыс осы мәселені шешуге бағытталған.

Тірек сөздер: температура, жылу көздері, жылу алмасу, жылу ағыны, жылу изоляция.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 163 – 166

УДК 002.001

K.E.Turganbay, S.U.Kaldibekoba,

Kazakh state women's pedagogical University, Almaty
kuralai_12@mail.ru

**FEATURES OF THINKING OF THE TEACHER
OF INFORMATICS IN HIGH SCHOOL**

Abstract: this article discusses all the areas of pedagogical training in higher school is, however, it is necessary no note especially the preparation is teacher of Computer science. As a result of the dynamic development Intensive science and academic subject in school, and as well as depending on the characteristics of their interdisciplinary Informatics, includes a wealth of material on the development of thinking of students. On the other hand, increases the level of thinking of students receiving Informatics, teacher of computer science of the mind can be exercised only when there is has at a sufficient level of development.

The article discusses their software in high school is the development of thinking skills teachers in the process of learning the basics of effective.

Key words: modernization, media programs, teachers, Methodists, reflective.

К.Е. Турганбай, С.У.Қалдыбекова

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы

**ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ МЫШЛЕНИЯ УЧИТЕЛЯ
ИНФОРМАТИКИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ**

Аннотация: в данной статье рассматриваются все направления подготовки педагогических кадров в высшей школе, однако, надо особенно отметить подготовку будущих учителей информатики. В результате динамичного развития интенсивных наук и учебного предмета в школе, а также в зависимости от свойств своего междисциплинарной информатики, включает в себя богатый материал по развитию мышления обучающихся. С другой стороны, увеличивает степень мышления обучающихся, получающих информации, разум учителя информатики может осуществляться только при наличии на достаточном уровне развития.

В статье рассматриваются их программное обеспечение в высшей школе является развитие мышления учителей информатики в процессе обучения основам результативности.

Ключевые слова: модернизация, мультимедийные программы, педагоги, методисты, рефлексивной.

Қазақстандық білімді модернизациялаудың заманауи кезеңіне қойылатын талаптардың бірі білім беру сапасын оның іргелілігі мен тұлғаның, қоғам мен мемлекеттің келешектегі қажеттіліктерін сақтап қалу барысында қамтамасыз ету болып табылады. Жалпыға білім беретін мектепте оқытуды модернизациялау, білім берудің оқушылардың тек белгілі бір білім қорын меңгеріп қана қоймай, сонымен қатар олардың тұлғалық қасиеттері мен қабілеттіліктерін дамытуға бағытталуын көздейді. Берілген тапсырманы іске асыру, терең ойлана білетін, дербес және белсенді мұғалімнің қолынан келеді, олай болса, қазіргі таңда жоғарғы кәсіби білімді болашақ мұғалімдердің ойлау қабілетін жетілдіруге бағыттау қажеттілігі туындайды.

Қазақстан Республикасындағы білім ақпараттандыру жүйесін ары қарай дамыту процесін оқып үйренудің ақпараттық ресурсы болып табылатын оқытуға арналған программалық құралдарды дайындамай жүзеге асыру мүмкін емес. Олардың ақпараттық қызметтерінің де ауқымы кең,

мысалы, бақылайтын және тест жүргізетін программалар, компьютерлік ойындар, ақпараттық жүйелер, оқыту орталығы электрондық оқулықтар және мультимедиялық программалар.

Білім жүйесі ел өміріндегі стратегиялық маңызды сала болып табылатындығы белгілі. Ал, оқу процесіндегі ескі әдістердің озық заман талабына жауап бере алмайтындығы өз-өзіне түсінікті. Бүгінгі уақыт талабына сәйкес білім беруді одан әрі жетілдіру оқу тәрбие процесіне озық тәжірибені, ғылыми жетістіктерді енгізуді талап етеді. Белгілі педагог Ш.А.Амонашвили: «Оқушылардың білімін арттыру, пәнге қызықтыру үшін оқытуда, жалпы алғанда ең бірінші оқушылардың неге қызығатынын анықтап алып, содан соң содан бастау керек», - дейді. Информатика пәнін оқыту барысында оқулықтағы материалды құрғақ баяндаудан гөрі қызықты, бейнелі түрде түсіндіруге оқушылардың ойлауына бағытталғаны дұрыс деп ойлаймын.

Компьютерді қосымша оқыту жабдығы ретінде пайдалану білім беру саласында жаңа бір әдістемелік жүйе қалыптастырып келеді. Бұл бағыттағы алғашқы қадам Президентіміздің орта білім жүйесін ақпараттандыру бағдарламасын жүзеге асырып, барлық мектептерді кемдегенде бір компьютерлік сыныппен қамтамасыз етуімен 2002 жылы іске асырылған Қазақстан Республикасы ұлттық ақпараттық инфрақұрылымын қалыптастыру мен дамыту мемлекеттік бағдарламасында компьютерлік технологияларды білім саласында кең қолдану ісін дамытуға көп көңіл бөліп отыр. Ендігі бағыт-сол компьютерлік техниканы тұрақты жұмыс істейтін күйде ұстап, білім саласындағы жаңа технологияларды пайдаланып, кез келген пән мұғалімдерін электрондық оқу құралдарын даярлау, қолдану ісіне жұмылдыру жалғасуы тиіс [1].

Сонымен қоса, жоғарғы мектепте болашақ мұғалімнің ойлау қабілетін жетілдіруге аз көңіл бөлінетінін атап өткен жөн. Қазіргі уақытта білім беру үрдісінде ойлау қабілетін арттыру кездейсоқ сипатқа ие және тек педагогтан ғана емес, сондай-ақ білім алушының өзіне де тәуелді.

Жоғарыда аталғандар, жоғарғы мектепте педагогикалық кадрларды даярлаудың барлық бағыттарына қатысты болып келеді, алайда болашақ информатика пәнінің мұғалімдерін даярлауға ерекше тоқталған жөн. Ғылым мен мектептегі оқу пәнінің қарқынды, әрі динамикалық түрде дамуының нәтижесінде, сондай-ақ өзінің пәнаралық қасиетіне байланысты информатика, білім алушылардың ойлау қабілетін дамытуға арналған бай материалдарды қамтиды. Басқа жағынан алып қарағанда, білім алушылардың ойлау қабілетін арттыруда информатиканың алатын дәрежесі, информатика мұғалімінің ақыл-санасының дамуы жеткілікті деңгейде болуы барысында ғана жүзеге асырыла алады.

Адамның сапалы ойлау қабілетін дамыту мүмкіндіктеріне қатысты әр түрлі көзқарастар бар. Бірқатар ғалымдар сапалы ойлау қабілетін, жетілдірілуі мүмкін емес туыла берілетін қасиет деп сипаттаса (Д.Б.Занков және т.б.), енді бірлеулер мәселеге позитивті көзқарас танытты – сапалы ойлау қасиетін дұрыс ұйымдастырылған білім беру үрдісі барысында жетілдіруге болады. Қазіргі мектептегі дамыта оқыту бағдарламасы танымдық қабілеттерді дамытуға мүмкіндік береді. Баланың танымдық қабілеттерін дамыту жолдары мен әдіс-тәсілдерін жүйелі түрде зерттеген ғалымдар Д.Б.Занков, Б.Тұрғынбаева, Қ.Бозжанова, Е.И.Рогов, М.Р.Битянова т.б. жаңа бағдарлама қабілет табиғатына сүйене отырып оны дамыту жолдарын көрсеткен.

Сапалы ойлауды, соның ішінде оның шығармашылық аспектілерін зерттеу, психология-педагогикалық әдебиетте нақты қарастырылған:

- Сапалы ойлаудың негізгі параметрлерін, оның түсініктемелі-терминологиялық аппаратын сипаттауға бағытталған еңбектер (М.И.Махмутов, Б.Тұрғынбаева, К.Бозжанова және т.б.);
- Тұлғаны шығармашылық қызметтің субъектісі және шығармашылық дара тұлға ретінде зерттеумен байланысты еңбектер (Ш.Т.Таубаева, М.И.Махмутов, Ю.К. Бабанский және т.б.);
- Оқу барысында баланың танымдық қабілетін дамыту жолдарын зерттеген И.Г.Песталоцци, К.Д.Ушинский, Д.Б.Занков, М.И.Махмутов, Б.Тұрғынбаева, К.Бозжанова т.б. ғалымдар осы проблеманы жан-жақты зерттеген. Б.М.Теплов қабілет табиғаты және оны қалыптастыру жолдарын анықтаған [2].

Мектепте білім беру сапасын арттырумен байланысты мәселелердің шешімін табудағы және білім алушылардың ойлау қабілетін дамытудағы жоғарғы педагогикалық мектептердің алыңғы қатарлы рөліне көптеген ғалымдар ерекше тоқталады (Ж.Қараев, В.В.Давыдов, М.Жанпейісова және т.б.). Сонымен қатар, қазіргі уақытта меңгерген білімдерді іс жүзінде қолдану бойынша қызмет әдістерін қалыптастыруға ықпал ететін пәнді оқыту әдістері мен оны меңгерудің жаңа жолдарын іздеу мәселесі өзекті болып отыр. Соңғы жылдарда жүргізілген психикалогия-педагогикалық зерттеулерді талдау жұмыстары, білім берудегі жүйені құрайтын фактор ретінде, кең мағынада түсінілетін білім алушылардың қызметі болуы тиіс екенін көрсетеді (Қ. Жарықбаев, С. Қалиев

және т.б.). Қызмет барысында білім алушылар оның рационалды тәсілдерін және оған қажетті білімдерді игереді, олардың бойында қалыптасқан қызметтер олардың қабілеттеліктеріне, сондай-ақ ойлау тәсілдеріне айналады (Қ. Жарықбаев) [3].

Информатика пән облысының пәндерін меңгеру барысындағы маңызды қызмет түрі, есептерді шығару болып табылады. Есептерді шығару арқылы білімдерді, біліктіліктерді және қабілеттіліктерді меңгеру іске асырылады. Зерттеу жұмыстарында есептер негізгі оқыту құралы ретінде қарастырылатын оқыту әдістемесі туралы айтылады. Білім беру үрдісінде оқу тапсырмаларын пайдалану сұрақтары И.Я.Лернер, М.Н.Скаткин және т.б. психологтардың еңбектерінде қарастырылған [4].

Психология-педагогикалық және әдістемелік әдебиеттерге жүргізілген талдау, студенттердің шығармашылық белсенділігін дамыту сұрақтарына, ЖОО мәселелік оқытуға, білім берудегі тапсырмалардың рөліне және тұлғаның дамуына арналған зерттеулер санының көптігіне қарамастан, болашақ информатика мұғалімдерінің, оларды ЖОО-да оқыту үрдісінде сапалы түрде ойлау қабілетін жетілдіру мәселесі толық шешімін тапқан жоқ және нақты зерттеулерді қажет етеді.

Осылайша, бір жағынан, көптеген зерттеулерде психологтар, педагогтар, әдіскерлер болашақ мұғалімдердің, соның ішінде информатика пәні мұғалімінің нәтижелі ойлау қабілетін жетілдіру қажет екеніне ерекше тоқталады, екінші жағынан педагогикалық ЖОО-ның информатика-студенттерінің информатика саласындағы пәндерді зерттеу үрдісінде оны дамытуға бағытталған тәсілдер мен әдістер бойынша зерттеу жұмыстары жоқтың қасы. Сол арқылы, жоғарғы мектепте білім беру сапасын арттырудың негізгі аспектілерінің бірі ретінде болашақ информатика мұғалімдерінің ойлау қабілеттіліктерін дамыту қажеттілігімен байланысты болып келетін зерттеу өзектілігі анықталады [5].

Мәселе, мектептер мен заманауи қоғамның информатика пәнінің нәтижелі түрде ойлау қабілетіне ие мұғалімдеріне деген қажеттілігі арасындағы қарама-қайшылықты шешуге, сондай-ақ болашақ информатика мұғалімін оқыту әдістемесінің жеткілікті дәрежеде әзірленбегеніне байланысты болып келеді.

Болашақ информатика мұғаліміне сапалы білім беруге және оның бойында нәтижелі ойлау қабілеттілігін қалыптастыруға бағытталған берілген тәсіл шеңберінде бағдарламалық қамтама негіздеріне оқыту әдістемесін әзірлеу және негіздеу.

Зерттеу негізінде, болашақ информатика пәні мұғалімінің ойлау қабілетінің деңгейін жоғарылату, және информатиканы оқыту сапасы төмендегілер орындалған жағдайда қамтамасыз етіледі деген гипотеза бар:

- мәселелік-тапсырмалы дәрістер арқылы және студенттердің нәтижелі ойлау деңгейін ескере отырып дифференциалдануын көздейтін жобалар әдісін пайдалану арқылы жүзеге асырылатын, диалогтықпен және рефлексивтікпен сипатталатын мұғалім мен студент арасындағы өзара әрекеттестікті ұйымдастыру;
- оқу үрдісінде студенттердің нәтижелі ойлау қабілетін дамытуға бағытталған информатика бойынша тапсырмалар жүйесін пайдалану.

Нәтижелі ойлау қабілетін жетілдіру мәселелері бойынша зерттеулерді талдау негізінде, нәтижелі ойлаудың жеке сапаларын дамытуға көбірек ықпал ететін информатика бойынша тапсырмалар типін анықтау, нәтижелі ойлаудың жеке сапаларын дамытуға бағытталған информатика бойынша тапсырмалар жүйесін құру шарттарын құрастыру керек.

Нәтижелі ойлау қабілетін мақсатқа бағытталған түрде жетілдіру барысында ЭЕМ бағдарламалық қамтамасын функционалдық тұрғыда толықтыру және оның тағайындалуын әзірлейтін дәріс сабақтар мен пәннің зертханалық практикумын өткізудің әдістемелік ерекшеліктерін анықтау қажет [6].

Берілген тәсіл шеңберінде болашақ информатика мұғалімінің нәтижелі ойлау қабілетін жетілдіруге және информатиканы оқыту сапасын арттыруға бағытталған болашақ информатика мұғалімін бағдарламалық қамтама негіздеріне оқыту моделінің болуы.

Болашақ информатика мұғалімінің нәтижелі ойлау қабілетін жетілдіруге арнап әзірленген бағдарламалық қамтама негіздеріне оқыту әдістемесінің тиімділігін тәжірибе жүзінде тексеру керек.

Алға қойылған тапсырмаларды орындау үшін келесідей зерттеу әдістері қолданылды: теориялық талдау және философиялық жалпылау, зерттеу мәселесі бойынша психологиялық, педагогикалық және әдістемелік әдебиеттер; сараптау, тестілеу, оқу үрдісін бақылау, педагогикалық тәжірибе, тәжірибе нәтижелерін талдау және оларды статистикалық өңдеу [7].

Болашақ информатика мұғалімінің нәтижелі ойлау қабілетін жетілдіруге бағытталған информатика бойынша тапсырмалар жүйесін құрастырудың ең алғаш рет теориялық негіздемесі жа-

салды, осы ретте тапсырмалар топологиясы мен нәтижелі ойлау сапасының дамуына осы тапсырмалардың ықпалы ескеруіміз керек. Алдыңғы қатарлы аспектілері ретінде диалог ұйымдастыру және мәселелі-тапсырмалы дәріс шеңберінде, практикалық сабақтарда және практикаға-бағытталған жобаларда рефлексивтік ұстанымды культивирлеу қолданылатын нәтижелі ойлау қабілетін жетілдіруге бағытталған болашақ информатика мұғалімдеріне бағдарламалық қамтама негіздерін оқытудың әдістемелік жұмыстарын да қолдануды үйрену керек.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Айтмамбетова Б.Р., Керимов Л.К. Оқыту әдістері. Алматы, 2012.
- [2] Абрамова Г.С. Практическая психология. М., 2011.
- [3] Венгер А.Л. Схема индивидуального обследования детей школьного возраста. М., 2012.
- [4] Крутецкий А.В. Жас және педагогикалық психология. Алматы, 2009.
- [5] Анисимов, О. С. Рефлексивная самоорганизация как предпосылка становления личности // Развитие творческих способностей личности в ходе инновационного преобразования практики: Материалы науч.-практ. конф. / Отв. редактор К. А. Нефедова - Омск, 2012. С. 9-13.
- [6] Архангельский, С. И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С. И. Архангельский. - М.: Высшая школа, 2009.-368 с.
- [7] Бабанский, Ю.К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса (методические основы) / Ю. К. Бабанский. - М.: Просвещение, 2012. - 192 с.

REFERENCES

- [1] Aytmambetova BR, Kerimov LK Methods of teaching and learning. Almaty, 2012.
- [2] Abramova GS Practical Psychology. M., 2011.
- [3] Wenger AL Individualno scheme obsledovaniya children skolnogo age. M., 2012.
- [4] A. Krwteckiy And educational psychology. Almaty, 2009.
- [5] Anisimov, O. S. Refleksivnaya how samoorganizaciya predposilka stanovleniya lichnosti // Development tvorcheskix sposobnostey lichnosti xode innovacionnogo preobrazovaniya Practices: Material nauç. practical. conference. / Rep. Editor K. A. Nefedova - Omsk, 2012. S. 9-13.
- [6] Archangel, S. I. Training process in the Higher School, it zakonomernie bases and methods / S. I. Archangel. - M. : Vysşaya School, 2009. 368 p.
- [7] Babanskiy, YK Optimization titled vospitatel'nogo processes (metodiçeskie bases) / Y. K. Babanskiy. - M. : Prosveşçeniye, 2012. - 192 p.

Қ.Е. Тұрғанбай, С.У.Қалдыбекова

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы

ЖОҒАРҒЫ МЕКТЕПТЕ ИНФОРМАТИКА ПӘН МҰҒАЛІМНІҢ ОЙЛАУ ҚАБІЛЕТІН ЖЕТІЛДІРУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аннотация: Бұл мақалада жоғарғы мектепте педагогикалық кадрларды даярлаудың барлық бағыттарына қатысты болып келеді, алайда болашақ информатика пәнінің мұғалімдерін даярлауға ерекше тоқталған жөн. Ғылым мен мектептегі оқу пәнінің қарқынды, әрі динамикалық түрде дамуының нәтижесінде, сондай-ақ өзінің пәнаралық қасиетіне байланысты информатика, білім алушылардың ойлау қабілетін дамытуға арналған бай материалдарды қамтиды. Басқа жағынан алып қарағанда, білім алушылардың ойлау қабілетін арттыруда информатиканың алатын дәрежесі, информатика мұғалімінің ақыл-санасының дамуы жеткілікті деңгейде болуы барысында ғана жүзеге асырыла алады.

Мақалада жоғарғы мектепте информатика пәнінің мұғалімдерін бағдарламалық қамтама негіздеріне оқыту барысында олардың нәтижелі түрде ойлау қабілеттіліктерін дамыту болып табылады.

Кілттік сөздер: модернизациялау, мультимедиялық программалар, педагогтар, әдіскерлер, рефлексивтік.

Сведения об авторах:

Тұрғанбай Құралай Егінбайқызы - кандидат технических наук, Казахский государственный женский педагогический университет, kuralai_12@mail.ru

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 167 – 172

UDC 004.421.2.519.178

A.S. Shomanov¹, D.Zh. Akhmed-Zaki¹, E.N. Amirgaliyev¹, M.E. Mansurova¹¹al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
e-mail: adai.shomanov@gmail.com**About the problem of key distribution in Mapreduce model**

Abstract. An important result in the field of processing of large amounts of data is the invention of the Mapreduce model. This model is based on the separation of data processing between parallel running processes. Data processing is performed using two types of functions: map and reduce. Map defines the transformation of input text by parallel processes on the basis of which a set of key / value pairs is generated. Reduce is operate on specific key and a list of all values associated with this key by performing a set of operations on this list of values, result of which is a pair with a key value and a certain aggregate value obtained as a result of these operations. The working environment of Mapreduce is a cluster consisting of a set of compute nodes. The nodes in the cluster must be connected by the communication network. Each node is scheduled to launch map and reduce processes.

Thus, an important task is to plan the distribution of keys among reduce processes in order to minimize data transfer operations over the network. Importance is justified by the fact that data transfer operations over the network greatly increase the processing time in case of incorrectly planned key distribution process. This task is NP-complete. The NP-completeness of the problem limits its exact solution, even for small parameters of the input data. For its effective solution in the current article, an approach based on the genetic algorithm is proposed. This approach can not guarantee an exact solution, but gives rather good approximated results. Another advantage of this approach is the ability to solve problems with large parameters of input data.

Keywords: Mapreduce, optimization, parallel processing, Generalized assignment problem.

УДК 004.421.2.519.178

А.С. Шоманов¹, Д.Ж. Ахмед-Заки¹, Е.Н. Амиргалиев¹, М.Е. Мансурова¹¹Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби**О ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
КЛЮЧЕЙ В MAPREDUCE МОДЕЛИ**

Аннотация. Важным результатом в области обработки больших объемов данных является изобретение Mapreduce модели. В основе данной модели лежит разделение обработки данных между параллельными процессами. Обработка данных производится с использованием двух типов функций: map и reduce. Map задает преобразование входного текста параллельными процессами на основе которого генерируется набор пар ключ/значение. Reduce на основе определенного ключа и списка всех значений, связанных с этим ключом, производит набор операций над списком значений, результатом которого является пара со значением ключа и определенного агрегированного значения, полученного как результат этих операций. Средой работы Mapreduce является кластер, состоящий из набора вычислительных узлов. Узлы в кластере должны быть соединены коммуникационной сетью. На каждом узле производится запуск процессов map и reduce.

Таким образом, важной задачей является планирование распределения ключей по процессам reduce с целью минимизации операций передачи данных по сети. Важность обоснована тем, что

операции передачи данных по сети в значительной степени увеличивают время обработки данных в случае неправильно спланированного процесса распределения ключей. Данная задача является NP-полной. NP-полнота задачи ограничивает ее точное решение даже для малых параметров входных данных. Для ее эффективного решения в текущей статье предлагается подход на основе генетического алгоритма. Данный подход не может гарантировать точного решения, но дает достаточно хорошие аппроксимированные результаты. Другим преимуществом данного подхода является возможность решения задач с большими параметрами входных данных.

Ключевые слова: Mapreduce, оптимизация, параллельная обработка данных, Обобщенная задача о назначениях.

В основе технологии Mapreduce [1-5] лежит идея параллельной обработки данных с применением двух основных функций: map и reduce. Функция map позволяет на основе входного набора данных произвести преобразование, в котором формируются в результате пары ключ/значение. Далее происходит группировка полученных пар ключ/значение, так что каждая преобразование reduce оперирует только на множестве значений, имеющих один и тот же ключ. Для параллелизации процесса обработки на основе Mapreduce, данные разбиваются между параллельно работающими map процессами на этапе map, а затем на этапе reduce создаются параллельные процессы для выполнения функции reduce по каждому ключу. Таким образом, при обработке больших массивов данных достигается высокий уровень масштабирования. Основной цикл работы Mapreduce состоит из 4 этапов :

- **Init.** Задается описание функций map и reduce, входные и выходные директории и другие параметры.
- **Map.** Каждый процесс map сканирует данные, переданные ему в качестве входного параметра. В ходе обработки данных функцией map формируется список пар ключ/значение согласно функции map, заданной пользователем.
- **Shuffle.** Происходит распределение пар ключ/значение по reduce процессам таким образом, что каждый reduce процесс обрабатывает только один, предназначенный для него, уникальный ключ.
- **Reduce.** Каждый reduce процесс выполняет операции на наборе пар ключ/значение согласно функции reduce, заданной пользователем.

Одной из основных проблем, связанных с обработкой больших объемов данных на основе технологии Mapreduce является оптимизация задачи по назначению ключей различным параллельным reduce процессам. Задача оптимизации включает в себя балансировку нагрузки между этими процессами, сокращения объема передаваемых данных, а также уменьшения количества операций передачи и обмена данными по сетевым каналам.

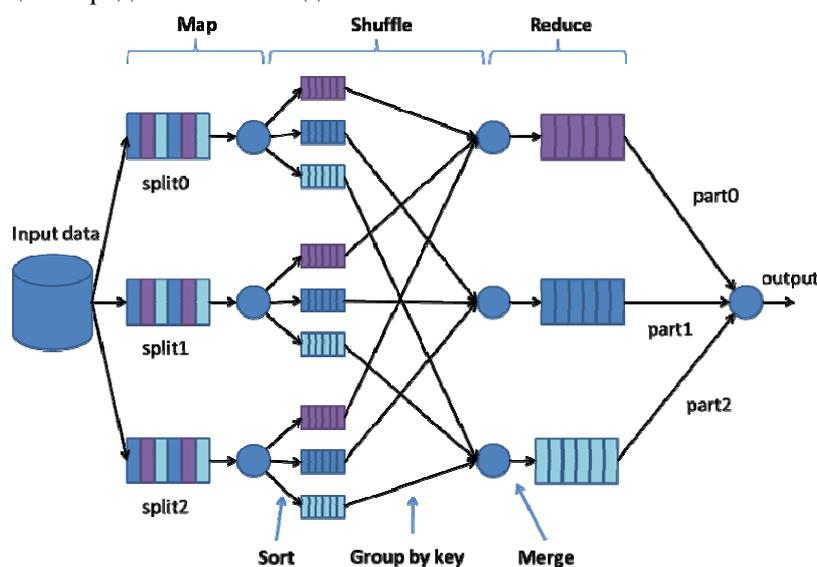


Рисунок 1 - Принцип работы Mapreduce

Из рисунка 1 видно, что данные с одинаковыми ключами на этапе распределения ключей (Shuffle) передаются одному процессу, ответственному за обработку определенного ключа. Так как объем данных может быть огромным, то соответственно, важно правильно определить, какому процессу нужно назначить определенный ключ для минимизации операций передачи данных по сети.

Для задачи распределения вычислительной нагрузки между параллельно работающими процессами и оптимального балансирования объема данных нами был применен эвристический подход на основе генетического алгоритма. Генетические алгоритмы [6-9] используются для решения многих задач в области комбинаторной и многокритериальной оптимизации. Основную часть задач в данных областях составляют NP-полные задачи, для которых не существует полиномиального алгоритма для их решения. Таким образом, многие важные задачи из данных областей остаются без эффективных подходов, которые способны были бы за разумное время решить данную задачу даже для самых малых параметров входных данных. Таким образом, единственными методами способными дать более или менее подходящее решение для больших размерностей данных задач являются различные классы эвристических алгоритмов.

Формулировка задачи оптимизации состоит из следующего множества условий:

$$\min \sum_{i=0}^{threads-1} \sum_{j=1}^{keys} x_{ij} \times cost_{ij} \quad (1)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (1)$$

$$\min \left(\max_{i,j=0..threads-1} |load_i - load_j| \right) \quad (2)$$

$$load_i = \sum_{t=0}^{threads-1} \sum_{j=1}^{keys} x_{ij} \times size_{tj} \quad (3)$$

Задача оптимизации, приведенная выше, является модификацией “Обобщенной задачи о назначениях” [10-13]. Данная задача относится к классу NP-полных задач. Различные генетические алгоритмы для решения данной задачи были описаны ранее [14,15].

Для того чтобы найти стоимость назначения ключа j потоку i нам требуется создать матрицу, в которой каждому элементу данной матрицы $cost_{ij}$ присваивается значение стоимости назначения ключа j потоку i . Данная стоимость задается на основе количества элементов определенного ключа, которые требуется передать определенному потоку. В формуле (3) дается определение функционала балансировки нагрузки. Функционал балансировки нагрузки рассчитывается как минимальное значение максимальной разницы общей нагрузки $load$ между любыми парами различных потоков. Значение общей нагрузки $load$ для каждого потока рассчитывается согласно формуле (4). Формула (2) описывает область определения для переменной x_{ij} . Значение x_{ij} задается равным 1, если поток i был назначен для обработки ключа под номером j , в противном случае, данное значение равно 0 и, соответственно, поток i не был назначен для обработки ключа j . Для модифицированной “Обобщенной задачи о назначениях” применимо к процедуре распределения ключей в Mapreduce модели, требуется оптимизировать значение обоих функционалов для получения приемлемого решения.

Для того чтобы применить к вышеописанной задаче подход с применением генетического алгоритма нужно определить как можно представить задачу на языке генетического алгоритма. Решение (особь) для задачи можно представить в виде вектора значений, где i -ому элементу данного вектора присваивается номер потока назначенного для обработки i -ого ключа. Популяция

представляет собой множество особей, выбранных согласно методам отбора генетического алгоритма. Размер популяции задается, как отдельный параметр алгоритма и может быть изменен в зависимости от специфических свойств решаемой задачи. Хромосома является упорядоченной последовательностью генов. Ген представляет собой атомарный элемент хромосомы. Начальная популяция выбирается случайной генерацией значений генов для хромосомы каждой особи. Функция приспособленности (фитнес-функция) определяет меру приспособленности определенной особи. Для нашей задачи оптимизации фитнес-функция рассчитывается как взвешенная сумма значений функционалов (1) и (3) для каждой особи в популяции. Задача генетического алгоритма, таким образом, выражается в нахождении особи с лучшим значением фитнес-функции. Генетический алгоритм для задачи распределения ключей в Mapreduce модели работает согласно следующей процедуре:

```
Load balancing procedure
Initialize algorithm
Generate initial random population  $p$  of chromosomes
While  $i \leq \text{MAX\_ITERATIONS}$ 
  Update fitness values of each element of  $p$ 
  For  $i=1..P\_NUM$ 
    Choose two parent elements  $p_1$  and  $p_2$  from current population  $p$  by
    applying tournament selection
    Perform crossover on  $p_1$  and  $p_2$  to generate child chromosome  $c$ 
    Perform mutation on child chromosome  $c$ 
    Add child chromosome  $c$  to the list of new population elements  $np$ 
  End Of For
  Assign current population  $p$  to newly obtained population list  $np$ 
End of While
Choose list member with best fitness value and assign it to array
sol
```

Рисунок 2 - Генетический алгоритм распределения ключей в Mapreduce модели

Основной цикл алгоритма состоит из P_NUM шагов. На каждой итерации алгоритма сначала обновляются значения фитнес-функции для каждой особи в текущей популяции. Затем, выбираются две особи популяции p_1 и p_2 на основе турнирного отбора, цель которого заключается в том, чтобы выбрать из случайно выбранного множества особей из текущей популяции наиболее приспособленного (с наилучшим значением фитнес-функции). После этого, производится операция кроссинговер (crossover), и из двух особей, посредством данной операции, генерируется новая особь потомок, которая наследует свойства обоих родительских особей. После этого новая особь потомок добавляется в новую популяцию. Затем, производится операция мутации над новой особью потомком, после которой основной цикл алгоритма завершается и происходит переход на новую итерацию.

ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dean, J., & Ghemawat, S. (2008). MapReduce: Simplified data processing on large clusters. *Communications of the ACM*, 51(1), 107-113. doi:10.1145/1327452.1327492

- [2] Dean, J., & Ghemawat, S. (2010). Map reduce: A flexible data processing tool. *Communications of the ACM*, 53(1), 72-77. doi:10.1145/1629175.1629198
- [3] Lee, K. -, Lee, Y. -, Choi, H., Chung, Y. D., & Moon, B. (2011). Parallel data processing with MapReduce: A survey. *SIGMOD Record*, 40(4), 11-20. doi:10.1145/2094114.2094118
- [4] Jiang, D., Ooi, B. C., Shi, L., & Wu, S. (2010). The performance of mapreduce: An indepth study. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 3(1), 472-483. doi: 10.14778/1920841.1920903
- [5] Dean, J. (2006). Experiences with MapReduce, an abstraction for large-scale computation. Paper presented at the *Parallel Architectures and Compilation Techniques - Conference Proceedings, PACT*, , 2006 1. doi:10.1145/1152154.1152155
- [6] Srinivas, M., & Patnaik, L. M. (1994). Genetic algorithms: A survey. *Computer*, 27(6), 17-26. doi:10.1109/2.294849
- [7] Konak, A., Coit, D. W., & Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(9), 992-1007. doi:10.1016/j.res.2005.11.018
- [8] Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341-359. doi:10.1023/A:1008202821328
- [9] Marler, R. T., & Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(6), 369-395. doi:10.1007/s00158-003-0368-6
- [10] Gavish, B., & Pirkul, H. (1991). Algorithms for the Multi-Resource Generalized Assignment Problem. *Management Science*, 37(6), 695-713. doi: 10.1287/mnsc.37.6.695
- [11] Shmoys, D. B., & Tardos, E. (1993). Approximation algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming, Series B*, 62(3-8), 461-474. doi:10.1007/BF01585178
- [12] Ross, G. T., & Soland, R. M. (1975). A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming*, 8(1), 91-103. doi:10.1007/BF01580430
- [13] Cattrysse, D. G., & Van Wassenhove, L. N. (1992). A survey of algorithms for the generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 60(3), 260-272. doi:10.1016/0377-2217(92)90077-M
- [14] Chu, P.C. & Beasley, J.E. 1997, "A genetic algorithm for the generalised assignment problem", *Computers and Operations Research*, vol. 24, no. 1, pp. 17-23. doi: 10.1016/S0305-0548(96)00032-9
- [15] Liu, Y. Y., & Wang, S. (2015). A scalable parallel genetic algorithm for the generalized assignment problem. *Parallel Computing*, 46, 98-119. doi:10.1016/j.parco.2014.04.008

REFERENCES

- [1] Dean, J., & Ghemawat, S. (2008). MapReduce: Simplified data processing on large clusters. *Communications of the ACM*, 51(1), 107-113. doi:10.1145/1327452.1327492
- [2] Dean, J., & Ghemawat, S. (2010). Map reduce: A flexible data processing tool. *Communications of the ACM*, 53(1), 72-77. doi:10.1145/1629175.1629198
- [3] Lee, K. -, Lee, Y. -, Choi, H., Chung, Y. D., & Moon, B. (2011). Parallel data processing with MapReduce: A survey. *SIGMOD Record*, 40(4), 11-20. doi:10.1145/2094114.2094118
- [4] Jiang, D., Ooi, B. C., Shi, L., & Wu, S. (2010). The performance of mapreduce: An indepth study. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 3(1), 472-483. doi: 10.14778/1920841.1920903
- [5] Dean, J. (2006). Experiences with MapReduce, an abstraction for large-scale computation. Paper presented at the *Parallel Architectures and Compilation Techniques - Conference Proceedings, PACT*, , 2006 1. doi:10.1145/1152154.1152155
- [6] Srinivas, M., & Patnaik, L. M. (1994). Genetic algorithms: A survey. *Computer*, 27(6), 17-26. doi:10.1109/2.294849
- [7] Konak, A., Coit, D. W., & Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(9), 992-1007. doi:10.1016/j.res.2005.11.018
- [8] Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341-359. doi:10.1023/A:1008202821328
- [9] Marler, R. T., & Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(6), 369-395. doi:10.1007/s00158-003-0368-6
- [10] Gavish, B., & Pirkul, H. (1991). Algorithms for the Multi-Resource Generalized Assignment Problem. *Management Science*, 37(6), 695-713. doi: 10.1287/mnsc.37.6.695
- [11] Shmoys, D. B., & Tardos, E. (1993). Approximation algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming, Series B*, 62(3-8), 461-474. doi:10.1007/BF01585178
- [12] Ross, G. T., & Soland, R. M. (1975). A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming*, 8(1), 91-103. doi:10.1007/BF01580430
- [13] Cattrysse, D. G., & Van Wassenhove, L. N. (1992). A survey of algorithms for the generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 60(3), 260-272. doi:10.1016/0377-2217(92)90077-M

[14] Chu, P.C. & Beasley, J.E. **1997**, "A genetic algorithm for the generalised assignment problem", *Computers and Operations Research*, vol. 24, no. 1, pp. 17-23. doi: 10.1016/S0305-0548(96)00032-9

[15] Liu, Y. Y., & Wang, S. (2015). A scalable parallel genetic algorithm for the generalized assignment problem. *Parallel Computing*, 46, 98-119. doi:10.1016/j.parco.2014.04.008

А.С. Шоманов¹, Д.Ж. Ахмед-Заки¹, Е.Н. Амиргалиев¹, М.Е. Мансурова¹

¹әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы

КІЛТТЕРДІ MAPREDUCE ҮЛГІСІНДЕ ТАРАТУ ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Үлкен деректерді өңдеу саласында Mapreduce үлгіні ойлап шығаруы маңызды нәтиже деп есептелінеді. Осы үлгінің негізінде деректерді өңдеу тапсырмасын параллельді процесстер арасында бөлуі жатыр. Деректерді өңдеу тапсырмасы екі функция арқылы орындалады: map және reduce. Map кіріс мәтінді параллельді процесстермен түрлендіру тапсырмасын орындайды, нәтижесінде кілт/мағынасы жиынтығы құрастырылады. Белгілі кілт және осы кілтпен байланысты мағыналар жиынтығы негізінде reduce мағыналар жиынтығымен әртүрлі операцияларды орындайды, нәтижесі ретінде кілт және операциялардан алынған жинақ мағынасы боп табылады. Mapreduce жұмыс істеу ортасы бірнеше есептеу орталықтардан құрылған кластерден тұрады. Кластердің орталықтары коммуникациялық желілермен байланыстырылған болу керек. Әр есептеу орталығында map және reduce процесстердің іске қосылуы орындалады.

Сонымен, желілер бойынша деректерді жіберу азайту мақсатымен кілттерді reduce процесстер ішінде тарату есебі маңызды боп есептелінеді. Кілттерді тарату тапсырма дурыс емес жоспарылған кезде деректерді желілер арқылы жіберу мағыналы дәрежесінде деректерді өңдеу уақытын көбейтеді. Осы есеп NP-толық есептеріне жатады. NP-толықтығы түгіл ең кіші деректердің кіріс параметрлердің жағдайында осы есептің нақты шешімін табуын шектейді. Осы есепті тиімді түрде шешу үшін осы мақалада генетикалық алгоритм негізінде тәсілдеме ұсынылады. Осы тәсілдеме нақты шешімін жеткізе алмай мүмкін, бірақ өте жақсы жуықтама нәтижесін көрсете алады. Осы тәсілдеменің үлкен параметрлермен кіріс деректерден құрылған есептерді шешуі басқа артықшылық боп есептелінеді.

Тірек сөздер: Mapreduce, үйлесімділеу, деректерді параллельді өңдеу, Жалпылама тағайындау есебі.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 173 – 180

E.A. Bakirova¹, N.B. Iskakova², B.Uaisov³^{1,2} Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;¹ Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan;² Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan;³ Kazakh Academy of Transport and Communications named after M. Tynyshbayev

E-mail: bakirova1974@mail.ru, narkesh@mail.ru

ON THE ALGORITHM FOR SOLVING OF A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER

Abstract. On a finite segment Fredholm's integral-differential equation with a parameter is considered. The kernel of integral member is assumed degenerate and as additional conditions allowing to find the values of parameter and corresponding to it solution of the investigated equation the values of solution are given in initial and eventual points of segment. At the fixed values of parameter the Cauchy problem for the Fredholm integral-differential equation with a degenerate kernel is solved. Using the fundamental matrix of differential part and assuming uniqueness solvability of the Cauchy problem an origin boundary value problem is reduced to the system of linear algebraic equations with respect to unknown parameter. Existence of solution of this system provides solvability of the investigated problem. The algorithm of finding of solution for initial problem is offered based on a construction and solving of the system of linear algebraic equations. The basic auxiliary problems of algorithm are: the Cauchy problem for ordinary differential equations and calculation of definite integrals. The numerical implementation of algorithm offered in the article uses the method of Runge-Kutta of fourth order to solve the Cauchy problem for ordinary differential equations and Simpson's method for the estimate of definite integrals.

Key words: boundary value problem with parameter, Fredholm integro-differential equation, solvability, algorithm.

УДК 517.624.3

Э.А. Бакирова¹, Н.Б. Искакова², Б. Уайсов³^{1,2} Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;¹ Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан;² Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан;³ Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тыншбаева**ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ПАРАМЕТРОМ**

Аннотация. На ограниченном отрезке рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с параметром. Ядро интегрального члена предполагается вырожденным и в качестве дополнительных условий, позволяющих найти значения параметра и ему соответствующее решение исследуемого уравнения даны значения решения в начальной и конечной точках отрезка. При фиксированном значении параметра решается задача Коши для интегро-дифференциального

уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Используя фундаментальную матрицу дифференциальной части и предполагая однозначную разрешимость задачи Коши исходная краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного параметра. Существование решения этой системы обеспечивает разрешимость исследуемой задачи. Предложен алгоритм нахождения решения исходной задачи, основанный на построении и решении системы линейных алгебраических уравнений. Основными вспомогательными задачами алгоритма являются: задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, вычисления определенных интегралов. Предлагаемая в статье численная реализация алгоритма использует метод Рунге-Кутты четвертого порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и метод Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов.

Работа выполнена в рамках проекта №3362/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан

Ключевые слова: краевая задача с параметром, интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, разрешимость, алгоритм.

Вопросы существования и единственности решения краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, содержащих параметры, исследованы в [1-9].

Двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма рассмотрены в работах [10-16].

В настоящей работе на отрезке $[0, T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(s)x(s)ds + K(t)\mu + f(t), \quad x, \mu \in R^n, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(T) = x^1, \quad x^1 \in R^n, \quad (3)$$

где $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и n -вектор $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x: [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$.

Решением задачи (1)-(3) является пара $(x^*(t), \mu^*)$, где непрерывная на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0, T)$ функция $x^*(t)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению с параметром (1) при $\mu = \mu^*$ и краевым условиям (2), (3).

Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0, T].$$

Тогда решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с параметром (1), (2) сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) \varphi(\tau) d\tau \int_0^T \psi(s) x(s) ds + \\ & + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) K(\tau) d\tau \cdot \mu + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Введя обозначение

$$a = \int_0^T \psi(s)x(s)ds$$

систему (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau \cdot a + \\ & + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau \cdot \mu + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Умножив обе части (5) на $\psi(\tau)$, интегрируя по τ на отрезке $[0, T]$, получим

$$a = G \cdot a + \int_0^T \psi(\tau)X(\tau) \int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)K(\tau_1)d\tau_1d\tau \cdot \mu + \int_0^T \psi(\tau)X(\tau) \int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1d\tau, \quad (6)$$

где

$$G = \int_0^T \psi(\tau)X(\tau) \int_0^t X^{-1}(\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau_1d\tau.$$

При обратимости матрицы $I - G$ из равенства (6) следует

$$\begin{aligned} a = [I - G]^{-1} \left\{ \int_0^T \psi(\tau)X(\tau) \int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)K(\tau_1)d\tau_1d\tau \cdot \mu + \right. \\ \left. + \int_0^T \psi(\tau)X(\tau) \int_0^\tau X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где I - единичная матрица размерности n .

Подставив в (5) вместо a правую часть (7), получим представление $x(t)$ через параметр μ :

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau \cdot [I - G]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \int_0^T \psi(\tau_1)X(\tau_1) \int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)K(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 \cdot \mu + \int_0^T \psi(\tau_1)X(\tau_1) \int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 \right\} + \\ & + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau \cdot \mu + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Определив из (8) значение $x(t)$ при $t = T$ и подставив его в краевое условие (3), получим систему линейных уравнений относительно параметра μ :

$$Q(T)\mu = -F(T), \quad \mu \in R^n, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Q(T) = & X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau + \\ & + X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau [I - G]^{-1} \int_0^{\tau_1} \psi(\tau_1)X(\tau_1) \int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2)K(\tau_2)d\tau_2d\tau_1, \end{aligned}$$

$$F(T) = x^{(1)} - X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau - \\ - X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) \varphi(\tau) d\tau [I - G]^{-1} \int_0^{\tau_1} \psi(\tau_1) X(\tau_1) \int_0^{\tau_1} X^{-1}(\tau_2) f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1.$$

При обратимости матрицы $I - G$ необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1)-(3) является существование решения системы (9), а критерием однозначной разрешимости обратимость матрицы $Q(T)$.

Предлагается следующий алгоритм нахождения решения задачи (1)-(3).

I. Решая задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

получим $(n \times n)$ матричные функции $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{k}(t)$, и n -вектор-функцию $\tilde{f}(t)$ соответственно.

II. Вычислим интегралы

$$\hat{\psi} = \int_0^T \psi(t) dt, \quad \hat{\psi}(\varphi) = \int_0^T \psi(t) \tilde{\varphi}(t) dt, \\ \hat{\psi}(K) = \int_0^T \psi(t) \tilde{k}(t) dt, \quad \hat{\psi}(f) = \int_0^T \psi(t) \tilde{f}(t) dt, \quad (13)$$

III. Предполагая обратимость матрицы $I - G$ составим систему линейных алгебраических уравнений (9). Решая эту систему, найдем параметр μ^* .

IV. Равенством (7) найдем элемент a^* и построим функцию

$$F^*(t) = \varphi(t) \cdot a^* + K(t) \mu^* + f(t), \quad t \in (0, T).$$

Решая следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^*(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T],$$

найдем $x^*(t)$.

Если известна фундаментальная матрица $X(t)$, то решение краевой задачи (1)-(3) определяется равенством

$$x^*(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (\varphi(\tau) \cdot a^* + K(\tau) \mu^* + f(\tau)) d\tau, \\ t \in [0, T]. \quad (14)$$

Предлагаемый алгоритм дает решение краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром (1)-(3) в аналитической форме (14).

Для случая, когда фундаментальную матрицу построить не удастся, предлагается численная реализация вышеизложенного алгоритма, основанная на методе Рунге-Кутты 4-го порядка и формуле Симпсона. Методом Рунге-Кутты 4-го порядка находим численные решения задач Коши (10)-(12). С помощью формулы Симпсона вычисляем определенные интегралы (13). Численные решения задач Коши и численные значения определенных интегралов позволяют получить приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметра μ .

Пример. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^1 \psi(s)x(s)ds + K(t)\mu + f(t), \quad x, \mu \in R^2, \quad t \in (0,1), \quad (15)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x^1, \quad x^1 \in R^2, \quad (16)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}, \quad \psi(s) = \begin{pmatrix} 2 & s \\ s^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ t-1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 2t - t^3(t-1) + \frac{1}{12}t^2 + e^t - \frac{59}{30} \\ t - \frac{29}{30}t^3 + 3 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи (15), (16) является пара $(x^*(t), \mu^*)$, где $x^*(t) = \begin{pmatrix} t(t-1) \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\mu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I. Взяв число разбиений интервала $[0,1]$ равным $M = 40$ с шагом $h = 0.025$ и решая методом Рунге-Кутты задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,1],$$

определим значения (2×2) матрицы $\tilde{\varphi}_i^h$, $i = \overline{0, M}$. Используя значения матриц $\psi(t)$, $\tilde{\varphi}_i^h$, $i = \overline{0, M}$, с помощью формулы Симпсона вычислим

$$\hat{\psi}^h(\varphi) = \int_0^1 \psi(t) \tilde{\varphi}_i^h(t) dt.$$

Тем самым получим матрицу $G^h = \hat{\psi}^h(\varphi) = \begin{pmatrix} 0.183858 & 1.157062 \\ 0.053684 & 0.234769 \end{pmatrix}$.

Матрица $I - G^h$ имеет обратную: $[I - G^h]^{-1} = \begin{pmatrix} 1.360599 & 2.057285 \\ 0.095451 & 1.451121 \end{pmatrix}$.

II. Решая задачи Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T],$$

найдем значения матриц \tilde{K}_i^h и векторов \tilde{f}_i^h , $i = \overline{0, M}$.

Применяя формулы Симпсона, вычислим определенные интегралы

$$\hat{\psi}^h = \int_0^1 \psi(t) dt, \quad \hat{\psi}^h(K) = \int_0^1 \psi(t) \tilde{K}_i^h(t) dt, \quad \hat{\psi}^h(f) = \int_0^1 \psi(t) \tilde{f}_i^h(t) dt.$$

III. Используя численные решения задач Коши и численные значения определенных интегралов, составим приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметра μ :

$$Q^h(1)\mu = -F^h(1), \quad \mu \in R^2,$$

где
$$Q^h(1) = \begin{pmatrix} 0.288198 & -0.447868 \\ 0.060207 & 0.234617 \end{pmatrix}, \quad F^h(1) = \begin{pmatrix} 2.254688 \\ 3.683668 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему, находим приближенное значение параметра

$$\mu^h = \begin{pmatrix} 0.999999954 \\ -1.000000022 \end{pmatrix}.$$

IV. Подставляя приближенное значение параметра в правую часть равенства

$$a = [I - G^h]^{-1}(\hat{\psi}^h(K) \cdot \mu^h + \hat{\psi}^h(f)),$$

определим приближенное значение элемента $a^h = \begin{pmatrix} -0.083333331 \\ -0.033333255 \end{pmatrix}.$

V. Методом Рунге-Кутты 4-го порядка решая задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^{*,h}(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T],$$

где $F^{*,h}(t) = \varphi(t) \cdot a^h + K(t)\mu^h + f(t)$, находим численные значения решения краевой задачи (15), (16) в точках разбиения интервала (0,1), которые приведены в следующей таблице.

Таблица - Результаты вычисления численного решения краевой задачи

t	$x_1(t)$ (численное решение)	$x_1(t)$ (точное решение)	$x_2(t)$ (численное решение)	$x_2(t)$ (точное решение)
0.000	0	0	0	0
0.025	-0.024375	-0.024375	0.000625	0.000625
0.050	-0.047499999	-0.0475	0.0025	0.0025
0.075	-0.069374999	-0.069375	0.005625	0.005625
0.100	-0.089999999	-0.09	0.01	0.01
0.125	-0.109374999	-0.109375	0.015625	0.015625
0.150	-0.127499999	-0.1275	0.0225	0.0225
0.175	-0.144374998	-0.144375	0.030625	0.030625
0.200	-0.159999998	-0.16	0.04	0.04
0.225	-0.174374998	-0.174375	0.050625	0.050625
0.250	-0.187499998	-0.1875	0.0625	0.0625
0.275	-0.199374998	-0.199375	0.075625	0.075625
0.300	-0.209999998	-0.21	0.089999999	0.09
0.325	-0.219374998	-0.219375	0.105624999	0.105625
0.350	-0.227499997	-0.2275	0.122499999	0.1225
0.375	-0.234374997	-0.234375	0.140624999	0.140625
0.400	-0.239999997	-0.24	0.159999998	0.16
0.425	-0.244374997	-0.244375	0.180624998	0.180624
0.450	-0.247499997	-0.2475	0.202499998	0.2025
0.475	-0.249374997	-0.249375	0.225624998	0.225625
0.500	-0.249999997	-0.25	0.249999997	0.25
0.525	-0.249374997	-0.249375	0.275624997	0.275625
0.550	-0.247499997	-0.2475	0.302499997	0.3025
0.575	-0.244374997	-0.244375	0.330624997	0.330625
0.600	-0.239999997	-0.24	0.359999997	0.36
0.625	-0.234374997	-0.234375	0.390624997	0.390625
0.650	-0.227499997	-0.2275	0.422499996	0.4225
0.675	-0.219374997	-0.219375	0.455624996	0.455625
0.700	-0.209999997	-0.21	0.489999996	0.49
0.725	-0.199374998	-0.199375	0.525624996	0.525625
0.750	-0.187499998	-0.1875	0.562499996	0.5625
0.775	-0.174374998	-0.174375	0.600624996	0.600625
0.800	-0.159999998	-0.16	0.639999996	0.64
0.825	-0.144374998	-0.144375	0.680624996	0.680625
0.850	-0.127499998	-0.1275	0.722499997	0.7225

Продолжение таблицы				
1	2	3	4	5
0.875	-0.109374999	-0.109375	0.765624997	0.765625
0.900	-0.089999999	-0.09	0.809999997	0.81
0.925	-0.069374999	-0.069375	0.855624998	0.855625
0.950	-0.047499999	-0.0475	0.902499998	0.9025
0.975	-0.024375	-0.024375	0.950624999	0.950625
1.000	0	0	1	1

Как видно из таблицы, разность между точным и численным решениями не превышает значения $\varepsilon = 0.4 \times 10^{-8}$.

Замечание. В случае если решение $x(t)$ исследуемой линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром (1)-(3) удовлетворяет начальному условию $x(0) = x^0$, то с помощью замены

$$y(t) = x(t) - x^0,$$

получим эквивалентную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t) \int_0^T \psi(s)y(s)ds + K(t)\mu + f(t) + \left(A(t) + \varphi(t) \int_0^T \psi(s)ds \right) \cdot x^0, \quad y, \mu \in R^n, t \in (0, T),$$

$$y(0) = 0, \quad y(T) = x^1 - x^0,$$

решение которой находим по вышеизложенному алгоритму.

ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nesterenko O.B. Iteration method for the solution of integro-differential equations with constraints // *Nonlinear Oscillations*. -2007. -Vol. 10, №3. P. 339-350.
- [2] Luchka A. Yu., Nesterenko O.B. Projection method for the solution of integro-differential equations with restrictions and control // *Nonlinear Oscillations*. -2008. -Vol. 11, №2. P. 219-228.
- [3] Luchka A. Yu., Nesterenko O.B. Construction of solution of integro-differential equations with restrictions and control by projection-iterative method // *Nonlinear Oscillations*. -2009. -Vol. 12, №1. P. 85-93.
- [4] Кибенко А.В., Перов А.И. О двухточечной краевой задаче с параметром // *Ученые записки АГУ им.С.М. Кирова. Сер. физ.-мат. и хим. наук.* -1961. №3. -С. 21-30.
- [5] Кибенко А.В., Перов А.И. Некоторые теоремы существования для двухточечной краевой задачи с параметром // *Труды семинара по функциональному анализу.* -1963. Вып.7. -С. 52-58.
- [6] Кибенко А.В. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче для уравнения с параметром // *Ученые записки АГУ им.С.М.Кирова. Сер. физ.-мат. и хим. наук.* -1961. №6. -С. 13-21.
- [7] Гома И.А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром // *Укр. матем. журн.* -1977. Т.29, №6. -С. 800-807.
- [8] Эйдельман Ю.С. Краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // *Диф.уравн.* 1978. Т.14, №7. -С. 1335-1337.
- [9] Джумабаев Д.С. Необходимые и достаточные условия существования решений краевых задач с параметром // *Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.* 1979. №3. -С. 5-12.
- [10] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // *Computational mathematics and mathematical physics*, - 2010. - 50, - №7. - P. 1150-1161.
- [11] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // *Differential equations*, - 2010. - 46. - № 4. - P. 553-567.
- [12] Бакирова Э.А., Исакова Н.Б. Алгоритмы нахождения решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральным условием на основе сплайн-аппроксимации // *Математический журнал Алматы*, 2016. - Т. 16, № 1. – С. 17-34.
- [13] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations // *Ukrainian Mathematical journal*, - 2015. - 66. -№ 8. - P. 1200-1219.

[14] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation //Computational mathematics and mathematical physics, - 2013. - 53. - № 6. - P. 736-758.

[15] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations //Journal of computational and applied mathematics, -2016. -294. - P. 342-357.

[16] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel // Journal of Mathematical Science. Vol. 220. No 4. 2017. P. 489-506.

Э.А. Бакирова¹, Н.Б. Исакова², Б. Уансов³

^{1,2}БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;

¹Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан;

²Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан;

³М.Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы

ПАРАМЕТРІ БАР ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ- ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР АЛГОРИТМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Шектелген аралықта параметрі бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеуі қарастырылады. Интегралдық мүшенің өзегі нұқсанды деп болжамдалады және параметрдің мәнін әрі оған сәйкес келетін зерттелінді тендеудің шешімін табуы мүмкін ететін қосымша шарттар ретінде шешімнің алғашқы және соңғы нүктелердегі мәндері берілген. Параметрдің белгілеп алынған мәнінде нұқсанды өзекті Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеуі үшін Коши есебі шешіледі. Дифференциалдық бөліктің фундаменталдық матрицасын пайдалана отырып әрі Коши есебінің бірімәнді шешілімділігін ескере отырып, бастапқы шеттік есеп белгісіз параметрге қатысты сызықтық алгебралық тендеулер жүйесіне келтіріледі. Осы жүйенің шешімінің бар болуы зерттелінді есептің шешілімділігін қамтамасыз етеді. Бастапқы есептің шешімін табуы сызықтық алгебралық тендеулер жүйесін құруға және оны шешуге негізделген алгоритмі ұсынылды. Алгоритмнің негізгі көмекші есептері мыналар болып табылады: жәй дифференциалдық тендеулер үшін Коши есебі, анықталған интегралдарды есептеу. Мақалада ұсынылған алгоритмді сандық жүзеге асыру төртінші ретті Рунге-Куттаның әдісін жәй дифференциалдық тендеулер үшін Коши есебін шешуге және Симпсон әдісін анықталған интегралдарды жуықтап шешуге пайдаланады.

Кілттік сөздер: параметрі бар шеттік есеп, Фредгольм интегралдық-дифференциалдық тендеу, шешілімділік, алгоритм.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 181 – 192

UDC 517.94

M.I. Akyibaev¹, M.B. Saprigina,² A.Sh. Shaldanbaev³

**SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM,
FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST
ORDER WITH A CONSTANT COEFFICIENT, BY THE METHOD
OF A DEVIATING ARGUMENT**

¹Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent;²Southern Kazakhstan state pharmitseptical academy, Shymkent;³South Kazakhstan State University, Shymkentshaldanbaev51@mail.ru

Abstract . In this paper we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and by means of this expansion we deduce the boundary layer expansion of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem, for the model equation of the first order $\varepsilon y' + ay(x) = f(x), y(0) = 0, a > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], a - const$.

Keywords: completeness, self-adjoint operator, completely continuous operator, Gilbert-Schmidt's theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, orthonormal basis.

УДК 517.94

М.И.Ақылбаев¹, М.Б. Сапрыгина², А.Ш. Шалданбаев³¹Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы;²Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік фармацевтика академиясы, Шымкент қ-сы;³Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы

**КОЭФИЦИЕНТІ ТҰРАҚТЫ, БІРІНШІ РЕТТІ КӘДІМГІ
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУДІҢ СИНГУЛЯР
ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИ ЕСЕБІН АРГУМЕНТТІН АУЫТҚЫТУ
ӘДІСІ АРҚЫЛЫ ШЕШУ**

1.Кіріспе. $H = L^2(0,1)$ кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), x \in (0, 1] \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндағы $f(x) \in H, a > 0 - const, \varepsilon -$ оң мардымсыз параметр.

Бұл есепті шешудің әртүрлі жолдары бар [1 – 18], біз бұл есепті сызықтық операторлардың спектралдік теориясы арқылы шешпекпіз. Мәселенің мәні, мынада, бұл (1)-(2) есепке, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), y(0) = 0$$

сызықтық оператор сәйкес келеді, ол $[0,1]$ кесіндісінде үздіксіз, ал $(0,1]$ жартыинтервалында үздіксіз дифференциалданатын функциялардың сызықтық көпсаласында анықталған, сонымен бірге, бұл көпсалада қосымша $y(0) = 0$ шарты орындалады.

$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0,1] \cap C[0,1]: y(0) = 0\}$ – арқылы L_ε операторының анықталу аймағын, ал $R(L_\varepsilon)$ арқылы өзгеру аймағын белгілейік. Жоғарыдағы $a > 0$ шарты L_ε – операторының төменнен шектеулі болуын қамтамасыз етеді, ал, мұнан, кері L_ε^{-1} операторының бар әрі шектеулі боларын көреміз, оның $R(L_\varepsilon)$ – мәндері аймағында анықталатыны айтпаса түсінікті. Кезкелген $[0,1]$ кесіндісінде үздіксіз $f(x)$ функциясы үшін Кошидің (1)-(2) есебінің бір ғана шешімі болғандықтан $R(L_\varepsilon)$ – жиыны осы $[0,1]$ кесіндісі бойында үздіксіз функциялардың сызықтық көпсаласы. Үздіксіз функциялардың сызықтық көпсаласы H кеңістігіндегі тығыз жыйын, сондықтан L_ε^{-1} операторы бүткіл H кеңістігіне үздіксіз оператор ретінде таратылады. Демек, L_ε операторының \bar{L}_ε қабындысының мәндерінің жыйыны $R(\bar{L}_\varepsilon)$ бүткіл H кеңістігімен бірдей болады, яғни $R(\bar{L}_\varepsilon) = H$, мұндағы, \bar{L}_ε – дегеніміз L_ε операторының қабындысы.

Егер Саркылы, мына,

$$Su(x) = u(1-x)$$

оператор анықталса, онда SL_ε операторының $D(L_\varepsilon)$ – анықталу аймағында симметриялы екенін байқауға болады, сонымен бірге $\overline{SL_\varepsilon} = \overline{S\bar{L}_\varepsilon}$ екенін көреміз, сондықтан $\overline{SL_\varepsilon}$ операторының мәндерінің жыйыны бүткіл H кеңістігі болады.

Мына, $SL_\varepsilon \subset (SL_\varepsilon)^*$ қатыстықтан, келесі, $\overline{SL_\varepsilon} \subset \overline{(SL_\varepsilon)^*}$ қатыстықтан туындайды және $(SL_\varepsilon)^*$ операторының тұйықтығынан, мына, $\overline{(SL_\varepsilon)^*} = (SL_\varepsilon)^*$ теңдігі шығады. Жоғарыда көрсетуіміз бойынша $\overline{SL_\varepsilon}$ операторының мәндерінің жиыны H кеңістігі, олай болса, $\overline{SL_\varepsilon} = (SL_\varepsilon)^*$, демек, $(SL_\varepsilon)^* = (SL_\varepsilon)^{**} = \overline{SL_\varepsilon}$, яғни SL операторының H кеңістігіндегі қабындысы жалқы.

Екінші жақтан, $(\bar{L}_\varepsilon)^{-1} = \overline{L_\varepsilon^{-1}}$ операторы Гилберт-Шмидтің класына, тиісті, сондықтан ол H кеңістігінде әсіре үздіксіз. Түптен келгенде, $(\overline{SL_\varepsilon})^{-1}$ операторы H кеңістігінде жалқы және әсіре үздіксіз, сондықтан Гилберт-Шмидтің теоремасы бойынша оның меншікті векторларынан H кеңістігінің ортанормаланған базисін құрауға болады.

Біздің (1)-(2) есебіміздің шешімі осы базисте Фуре қатарына таратылады. Осы қатардың Фуре коэффициенттері белгілі бір түрлендіруден соң, есептің шешімінің шекарадағы асимптотикасын береді. Бұл асимптотикалық таралымның қалдығы SL_ε операторының ең кіші меншікті мәні арқылы бағалағанда, немесе, SL_ε операторының жартылай шектеулілігін пайдалануға болады.

Егер (1)- теңдеудің оң жағындағы бос мүшесі, онша, біртегіс болмаса, онда біздің әдісіміздің, біртіндеп жуықтау әдісінен артықшылығы бар. Мәселе, мынада n – ші жуықтаудың біртегістігі дәл $f(x)$ – тың біртегістігіндей, ал мұнымыз, сандық әдістер үшін өте қолайсыз, ал Фура қатарының n – ші дербес қосындысының біртегістігі шексіз, біздің пайымдауымызша, осы сәт әдісті іске асырғанда көп пайда тигізеді.

Мына, $\varepsilon a' + ae = 0$, теңдеудің фундаментәлді шешімін табайық, бұл үшін Кошидің, мына,

$$\varepsilon e' + ae = 0, e(0) = 1$$

есебін шешейік.

$$\begin{aligned} \varepsilon \times e' &= -ae, \frac{e'}{e} = -\frac{a}{\varepsilon}, (l_n e)' = -\frac{a}{\varepsilon}, \\ l_n e / \varepsilon &= -\int_0^x \frac{a}{\varepsilon} dt = -\frac{a}{\varepsilon} \times x, l_n e(x) - l_n e(0) = -\frac{a}{\varepsilon} x, \\ l_n \frac{e(x)}{e(0)} &= -\frac{a}{\varepsilon} x, e(x) = e(0) \times e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} = e^{-\frac{a}{\varepsilon} x}. \end{aligned}$$

Енді, $f(x)$ – үздіксіз функция болсын деп (1)-(2) есептің шешімін, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \int_0^x K(x, t) f(t) dt \tag{3}$$

түрде іздейміз, мұндағы $K(x, t)$ – әзірше белгісіз функция. Осы (3) формуланы жоғарыға (1)-(2) апарып қоялық, сонда

$$y'(x) = K(x, t) \times f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} f(t) dt,$$

$$\varepsilon y'(x) + ay = \varepsilon K(x, x) f(x) + \int_0^x \varepsilon \frac{\partial K}{\partial x} f(t) dt + \int_0^x aK(x, t) f(t) dt =$$

$$= \varepsilon \times K(x, x) \times f(x) + \int_0^x \left(\varepsilon \frac{\partial K}{\partial x} + aK \right) f(t) dt = f(x),$$

болады. Демек

$$\varepsilon \times K(x, x) = 1, \varepsilon \frac{\partial K}{\partial x} + aK = 0;$$

болуы керек, яғни t ның әрбір шегеленген мәніде $K(x, t)$ сәйкес біртекті теңдеудің шешімі.

Мұндай, функцияның, мынау,

$$K(x, t) = \frac{e(x-t)}{\varepsilon},$$

екенін аңғару онша қыйын емес. Шынында-да,

$$\varepsilon K(x, t) /_{t=x} = e(0) = 1,$$

$$\varepsilon \times \frac{\partial e(x-t)}{\partial x} + ae(x-t) = \varepsilon \times e'(x-t) + ae(x-t) = 0.$$

Сонымен, кезкелген үздіксіз $f(x)$ функциясы үшін (1)-(2) Кошидің есебінің шешімі бар және ол, мынау,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x e(x-t) f(t) dt. \quad (4)$$

мұндағы $e(x) = \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}x\right)$ – сәйкес теңдеудің фундаменталді шешімі. Бұл, (4) формуланы, былай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \theta(x-t) e(x-t) f(t) dt \quad (5)$$

жазуға болады, мұндағы $\theta(x)$ – Хевисайдтың функциясы. Жоғарыдағы (5) интегралдық оператордың ядросы шектеулі функция, сондықтан ол үздіксіз функциялардың сызықтық көпсаласында шектеулі оператор болады, ал бұл көпсала $L^2(0,1)$ кеңістігінде тығыз болғандықтан бұл (5) оператор бүткіл $H = L^2(0,1)$ кеңістігіне шектеулі оператор етіп таратылады. Соныменен, мына,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), \varepsilon \in (0, 1], D(L_\varepsilon) = \{y \in C^1(0, 1] \cap C[0, 1]: y(0) = 0\}$$

оператордың қабындысының мәндерінің жыйыны H болады.

Енді (1) теңдеудің екі жағын-да $y(x)$ функциясына скаляр көбейтсек, онда

$$\varepsilon (y', y) + a \times \|y\|^2 = (f, y)$$

Бастапқы (2) шарттың арқасында

$$\varepsilon \times (y, y) = \varepsilon \times \int_0^1 y dy = \varepsilon \times \frac{y^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{\varepsilon y^2(1)}{2} \geq 0,$$

демек,

$$a \times \|y\|^2 \leq (f, y) \leq \|f\| \times \|y\|, a \|y\| \leq \|f\| = \|L_\varepsilon y\|.$$

Егер $f = 0$ болса, онда соңғы теңсіздіктен $y(x) \equiv 0$ болады, осыменен табылған шешімнің бірегейлігі және кері оператордың шектеулі екені дәлелденді, себебі, мына,

$$\|y\| = \|L_\varepsilon^{-1} f\| \leq \frac{\|f\|}{a}, \|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{a}$$

теңсіздік орынды.

Әрі қарай, (1) теңдеу арқылы, табылған шешімнің шығар шыңын бағалаймыз.

$$\varepsilon y' + ay = f(x), \varepsilon y'(x) = f(x) - ay(x),$$

$$\varepsilon \|y'\| \leq \|f\| + a \|y\| \leq 2 \|f\|, \|y'\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|f\|,$$

$$\|y\|_1 = (\|y'\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} \|f\|^2 + \|f\|^2} \leq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} + 1} \times \|f\|.$$

Демек $\varepsilon > 0$ –ның әрбір шегеленген мәнінде L_ε^{-1} кері операторы әсіре үзiксіз, тіптім онан-да әрi, Гилберт-Шмидтің класында жатады, мұнымыз жоғарыдағы (5) интегралдық операторының ядросының шектеулілігінің салдары.

2. Зерттеу әдістері

Егер S операторы, былай,

$$Su(x) = u(1 - x),$$

анықталса, онда SL_ε операторы H кеңістігінде симметриялы болады, шынында-да, егер $a, v \in D(L_\varepsilon)$ болса, онда

$$\begin{aligned} (SL_\varepsilon u, v) &= (L_\varepsilon u, Sv) = \int_0^1 (\varepsilon u' + au)v(1-x)dx = \\ &= \varepsilon \int_0^1 v(1-x)du + \int_0^1 a \times u(x)v(1-x)dx = \varepsilon v(1-x)u|_0^1 + \int_0^1 v'(1-x)u(x)dx + \\ &+ \int_0^1 au(x)v(1-x)dx = \int_0^1 u(x)[v'(1-x) + av(1-x)]dx = (u, SL_\varepsilon v), \end{aligned}$$

SL_ε –операторының симметриялылығынан $(SL_\varepsilon)^{-1}$ операторының симметриялылығы туындайды және $(SL_\varepsilon)^{-1}$ операторының бүткіл $L^2(0,1)$ кеңістігінде анықталғанын ескерсек, онда ол жалқы операторы болады. Соныменен, $(SL_\varepsilon)^{-1}$ операторы жалқы әрi әсіре үзiксіз, онда Гилберт пен Шмидтің теоремасы бойынша, бұл оператордың нормаланған меншікті векторлары $L^2(0,1)$ кеңістігінің ортанормаланған базисі болады.

Лемма 1. Егер $Su(x) = u(1 - x)$ болса, онда SL_ε операторының нормаланған меншікті векторлары H кеңістігінде ортанормаланған базис болады.

Теорема 1. Жоғарыдағы (1)-(2) Кошидің есебінің әлді шешімі, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \times \varphi_n(x)$$

болады, мұндағы, $\varphi_n(x)$ –дегеніміз SL_ε –операторының меншікті векторлары, ал λ_n –соларға сәйкес меншікті мәндері, тағы-да бір ескерер жай, $Su(x) = u(1 - x)$,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x), x \in (0, 1] \quad (1)'$$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0, 1] \cap C[0,1]: y(0) = 0\} \quad (2)'$$

Дәлелі. Соператорымен (1) теңдеудің екі жағына-да әсер етіп, мына, $SL_\varepsilon y = Sf$ теңдікті аламыз, демек, $y(x, \varepsilon, f) = (SL_\varepsilon)^{-1} Sf(x)$,

$$SL_\varepsilon \varphi_n = \lambda_n \varphi_n (n = 1, 2, \dots), \varphi_n(x) = \lambda_n (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n, (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n = \frac{\varphi_n}{\lambda_n},$$

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= (SL_\varepsilon)^{-1} Sf = \sum_{n=1}^{\infty} ((SL_\varepsilon)^{-1} Sf, \varphi_n) \times \varphi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (Sf \times (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n) \times \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \times \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Соныменен, бұл теорема дәлелденді, және ол біздің әдісіміздің қайнар көзі болады. Келесі бөлімшеде біз (1)-(2) есептің шешімінің шекара маңындағы таралымын аламыз.

3. Зерттеу нәтижелері

Лемма 2. Егер $f(x) \in W_2^1[0,1]$ болса, онда, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} \times f(0) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} \times \varphi_n(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f') \quad (6)$$

формула орынды, мұндағы $y(x, \varepsilon, f')$ –дегеніміз, оң жағы $f'(x)$ болған сәттегі, Коши есебінің шешімі.

Дәлелі.

Меншікті функциялардың теңдеуіне сүйеніп, (Sf, φ_n) Фуренің коэффициенттерін түрлендіріміз.

$$\begin{aligned} (Sf, \varphi_n) &= \left(Sf, \frac{\lambda_n S\varphi_n - \varepsilon \varphi_n'}{a} \right) = \\ &= \frac{\lambda_n}{a} (Sf, S\varphi_n) - \frac{\varepsilon}{a} (Sf, \varphi_n') = \frac{\lambda_n}{a} (f, \varphi_n) - \frac{\varepsilon}{a} (Sf, \varphi_n'); \\ (Sf, \varphi_n') &= \int_0^1 Sf d\varphi_n = Sf \times \varphi_n /_0^1 - \int_0^1 (Sf)' \varphi_n(x) dx = \\ &= f(0) \varphi_n(1) + \int_0^1 Sf' \times \varphi_n dx; \\ (Sf, \varphi_n) &= \frac{\lambda_n}{a} (f, \varphi_n) - \frac{\varepsilon}{a} [f(0) \times \varphi_n(1) + (Sf', \varphi_n)] = \\ &= \frac{\lambda_n}{a} (f, \varphi_n) - \frac{\varepsilon}{a} f(0) \times \varphi_n(1) - \frac{\varepsilon}{a} (Sf', \varphi_n); \\ y(x, \varepsilon, f) &= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \times \varphi_n(x) - \frac{\varepsilon}{a} f(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'). \end{aligned}$$

Лемма 3. Мына,

$$\varepsilon \times \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} = (\varphi_n, e), n = 1, 2, \dots$$

формула орынды, мұндағы λ_n – меншікті мәндер, ал $\varphi_n(x)$ осы меншікті мәндерге сәйкес SL_ε операторының меншікті функциялары, $e(x)$ – біртекті теңдеудің фундаменталді шешімі, яғни

$$\begin{cases} \varepsilon e'(x) + ae(x) = 0 \\ e(0) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

(8)

Дәлелі. S операторымен ((7)) теңдеудің екі жағына-да әсер етсек, мынадай

$$\varepsilon Se' + aSe = 0, \varepsilon \times (Se', \varphi_n) + a(Se, \varphi_n) = 0, n = 1, 2, \dots,$$

мұндағы $\varphi_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ – дегеніміз, мына,

$$\varepsilon \varphi_n'(x) + a\varphi_n(x) = \lambda_n S\varphi_n(x), \varphi_n(0) = 0, n = 1, 2, \dots$$

шекаралық есептің меншікті функциялары, сондықтан,

$$\begin{aligned} (Se', \varphi_n) &= \int_0^1 e'(1-x) \varphi_n(x) dx = - \int_0^1 \varphi_n de(1-x) = \\ &= -\varphi_n(x) e(1-x) /_0^1 + \int_0^1 \varphi_n'(x) e(1-x) dx = -\varphi_n(1) + \int_0^1 \varphi_n'(x) e(1-x) dx; \\ \varepsilon (Se', \varphi_n) &= -\varepsilon \varphi_n(1) + \int_0^1 \varepsilon \varphi_n'(x) e(1-x) dx = \\ &= -\varepsilon \times \varphi_n(1) + \int_0^1 (\lambda_n S\varphi_n - a\varphi_n) e(1-x) dx = \\ &= -\varepsilon \varphi_n(1) + \lambda_n (\varphi_n, e) - a(\varphi_n, Se); \end{aligned}$$

Демек,

$$\varepsilon (Se', \varphi_n) + a(Se, \varphi_n) = -\varepsilon \times \varphi_n(1) + \lambda_n (\varphi_n, e) = 0,$$

сондықтан,

$$\varepsilon \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n} = (\varphi_n, e).$$

Лемма 4. Егер $f(x) \in W_2^1[0,1]$ болса, онда, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'), \quad (9)$$

формула орынды, мұндағы $e(x)$ – дегеніміз сәйкес біртекті теңдеудің фундаменталді шешімі, ал $y(x, \varepsilon, f')$ – дегеніміз дәл сол (1)-(2) есептің оң жағы $f'(x)$ болған сәттегі шешімі.

Дәлелі.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, e) \varphi_n(x) = e(x),$$

сондықтан бәзге керек формула (6) –ден шығады:

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f') = \frac{f(x) - f(0)e(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f').$$

Теорема 2. Егер $a > 0$ және $W_2^1[0,1]$ болса, онда сингуляр әсерленген (1)-(2) Коши есебінің шешімі, мына,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x) - f(0)e(x)}{a} \right\| \leq \varepsilon \times \frac{\|f'\|}{a^2},$$

теңсіздікті қанағаттандырады, мұндағы $e(x)$ – дегеніміз, мына,

$$\varepsilon e'(x) + ae(x) = 0, \quad (7)$$

$$e(0) = 1 \quad (8)$$

Коши есебінің шешімі.

Салдар 1. Егер $a > 0$, $f(x) \in W_2^2[0,1]$ және $f(0) = 0$ болса, онда, мына,

$$\left\| y'(x, \varepsilon, f) - \frac{f'(x) - f'(0)e(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon \|f''\|}{a^2} \quad (10)$$

теңсіздік орындалады

Егер $f(x) \in W_2^n[0,1]$ және $n > 1$ болса, онда (9) формула бойынша таралымның, келесі, мүшелерін табуға болады. Мысалы, егер $f(x) \in W_2^2[0,1]$ болса, онда

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f''), \\ y(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x) - \frac{\varepsilon}{a} \left[\frac{f'(x) - f'(0)e(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'') \right] = \\ &= \frac{f(x) - f(0)e(x)}{a} - \frac{[f'(x) - f'(0)e(x)]}{a^2} \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 y(x, \varepsilon, f''). \end{aligned}$$

Енді математикалық индукция әдісін қолдайық, бұл үшін, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)] \varepsilon^k}{a^{k+1}} + (-1)^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n-1} y(x, \varepsilon, f^{(n-1)})$$

формула орынды деп санайық, онда

$$y(x, \varepsilon, f^{(n-1)}) = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)e(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f^{(n)}), \text{ сондықтан}$$

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k [f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]}{a^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n y(x, \varepsilon, f^{(n)}).$$

Бұрынырақ дәлелденген алдын-ала бағалау бойынша, мына.

$$\|y(x, \varepsilon, f^{(n)})\| \leq \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{a}$$

теңсіздің орындалады, сондықтан

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]\varepsilon^k}{a^{k+1}} \right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}} \|f^{(n)}(x)\|.$$

Теорема 3. Егер $a > 0$ және $f(x) \in W_2^n[0,1]$ болса. Онда сингуляр әсерленген (1)-(2) Коши есебінің шешімі $W_2^{n+1}[0,1]$ кеңістігінде жатады және, мына,

$$\|y(x, \varepsilon, f)\| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k [f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e(x)]\varepsilon^k}{a^{k+1}} \leq \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}} \|f^{(n)}(x)\|$$

теңсіздікті қанағаттандырады.

Салдар 2. Егер $a > 0$, $f(x) \in W_2^n[0,1]$ және $f(0) = f'(0) = f'' = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ болса, онда

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1}$$

мұндағы $\|\cdot\|_{n-1}$ – дегеніміз Соболевтің $W_2^{n-1}[0,1]$ кеңістігінің нормасы

Дәлелі. Негізгі теңдеуді k – рет дифференциалдасақ, онда ($1 \leq k \leq n-1$), мынадай,

$$\begin{cases} \varepsilon y^{(k+1)} + a \times y^{(k)} = f^{(k)}(x) \\ y^{(k)}(0) = 0 \end{cases}$$

Кошидің есебін аламыз, онда (10) формула бойынша, мынадай,

$$\left\| y^{(k)}(x, \varepsilon, f) - \frac{f^{(k)}(x)}{a} \right\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{a^4} \|y(x, \varepsilon, f^{(k+1)})\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{a^4} \|f^{(k+1)}(x)\|^2.$$

Осы теңсіздіктерді ($0 \leq k \leq n-1$) қосып, сонан соң қосындыдан квадрат түбір тапсақ, онда, мынадай,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\| y^{(k)}(x, \varepsilon, f) - \frac{f^{(k)}(x)}{a} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1}$$

теңсіздік аламыз.

4. Талқысы

Бірқалыпты бағамдар

Мынадай,

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), x \in (0,1], a > 0, f(x) \in C^n [0,1], \quad (1)$$

$$y(0) = 0; \quad (2)$$

сингуляр әсерленген Кошидің есебін қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0, a > 0$ – белгілі тұрақтылар, $f(x)$ белгілі функция, ал $y(x)$ – белгісіз функция.

Келесі,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

теңсіздіктердің орындалуы үшін, мына,

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots$$

теңдіктердің орындалуы қажетті, әрі, жеткілікті екенін көрсетейік, мұндағы,

$$\|g(x)\|_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|, \|g(x)\|_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \|g^{(k)}(x)\|,$$

ал $y(x, \varepsilon, f)$ – дегеніміз (1)-(2)- есептің шешімі.

Шешімі.

а) Жеткіліктілігі. Келесі,

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(0) = 0,$$

сәтте, мына,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'(x)\|_{n-1}.$$

теңсіздіктің орындалатынын көрсетейік.

Егер $f(0) = 0$ болса, онда, келесі,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f')$$

формуладан, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'), e(x, \varepsilon) = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}$$

теңдікке келеміз, мұнан,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{a} \|y(x, \varepsilon, f')\| \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|.$$

Әрі қарай, егер $f(0) = 0, f'(0) = 0$ болса, онда, келесі,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'),$$

формуладан

$$y'(x, \varepsilon, f) = \frac{f'(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y'(x, \varepsilon, f') = \frac{f'(x)}{a} - \frac{1}{a} [f'(x) - ay(x, \varepsilon, f')] = y(x, \varepsilon, f'),$$

$$f(0) = 0, \Rightarrow y'(x, \varepsilon, f) = y(x, \varepsilon, f')$$

Демек,

$$y'(x, \varepsilon, f) = \frac{f'(x)}{a} - \frac{f'(0)}{a} e(x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f''), \Rightarrow$$

$$\left\| y'(x, \varepsilon, f) - \frac{f'(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{a} \|y(x, \varepsilon, f'')\| \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f''\|.$$

Сонымен, келесі, $f(0) = 0, f'(0) = 0$ теңдіктерден, мынадай,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\| + \left\| y'(x, \varepsilon, f) - \frac{f'(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{a^2} [\|f'\| + \|f''\|]$$

теңсіздік алдық, яғни тұжырымымыз $n = 1$ және $n = 2$ сәттерінде дұрыс екен. Онан басқа, көмекші қызмет атқаратын, келесі,

$$f'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y''(x, \varepsilon, f) = \frac{f''(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y'(x, \varepsilon, f'') = \frac{f''(x)}{a} - \frac{1}{a} [f''(x) - ay(x, \varepsilon, f'')] = y(x, \varepsilon, f''),$$

формула орынды.

Енді, келесі, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, ..., $f^{(k)}(0) = 0$ теңдіктерден, мына

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_R \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|_R, \text{ теңсіздік пен мына,}$$

$y^{(R+1)}(x, \varepsilon, f) = y(x, \varepsilon, f^{(R+1)})$ теңдік шығады деп жорылық. Онда, келесі,

$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, ..., $f^{(R)}(0) = 0$, $f^{(R+1)}(0) = 0$ теңдіктер орындалса, мына,

$$y^{(R+1)}(x, \varepsilon, f) = \frac{f^{(R+1)}(x)}{a} - \frac{f^{(R+1)}(0)}{a} e(x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f^{(R+2)}),$$

теңдік-те орындалады, мұнан

$$\left\| y^{(k+1)}(x, \varepsilon, f) - \frac{f^{(k+1)}(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{a} \left\| y(x, \varepsilon, f^{(k+2)}) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f^{(k+2)}\|. \text{ Бұл алынған теңсіздікті, бұрынғы,}$$

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_k \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|_k \text{ теңсіздігін қоссақ, онда, мынадай,}$$

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{k+1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|_{k+1} \text{ теңсіздік аламыз және онан басқа, келесі}$$

$$y^{(R+2)}(x, \varepsilon, f) = \frac{f^{(R+2)}(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y'(x, \varepsilon, f^{(R+2)}) = \frac{f^{(R+2)}(x)}{a} - \frac{1}{a} [f^{(R+2)}(x) - ay(x, \varepsilon, f^{(R+2)})] = y(x, \varepsilon, f^{(R+2)}).$$

формула орынды.

Демек, $k = n - 1$ болған сәтте, келесі, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(0) = 0$ теңдіктерден, мына,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|_{n-1} \text{ теңсіздік пен, келесі,}$$

$$y^{(n)}(x, \varepsilon, f) = y(x, \varepsilon, f^{(n)}) \text{ теңдікті аламыз, мұнан, } \|y^{(n)}(x, \varepsilon, f)\| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_0}{a}.$$

б) Қажеттілігі. Келесі,

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\|_{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|_{n-1}, n = 1, 2, \dots \text{ теңсіздік орындалсын делік. Онда, мына,}$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(0) = 0$ теңдіктердің орындалатынын көрсетейік.

Келесі,

$$\|e(x, \varepsilon)\|_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} = 1, \text{ жайды ескерсек, онда, мына,}$$

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e(x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f') \text{ формуладан, мынадай,}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(0)}{a} \right| &\leq \left\| \frac{f(x)}{a} - y(x, \varepsilon, f) \right\|_0 + \frac{\varepsilon}{a} \|y(x, \varepsilon, f')\|_0 \leq \\ &\leq \left\| \frac{f(x)}{a} - y(x, \varepsilon, f) \right\|_{n-1} + \frac{\varepsilon}{a^2} \|f'\|_0 \leq \frac{\varepsilon}{a^2} [\|f'\|_{n-1} + \|f'\|_0] \leq \frac{2\varepsilon}{a^2} \|f'\|_{n-1} \end{aligned}$$

теңсіздік аламыз. Осы жерде $\varepsilon \rightarrow 0$, деп шекке көшсек $f(0) = 0$ боларын көреміз. Онда

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'), \Rightarrow \\ y'(x, \varepsilon, f) &= \frac{f'(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y'(x, \varepsilon, f') = \frac{f'(x)}{a} - \frac{1}{a} [f'(x) - ay(x, \varepsilon, f')] = y(x, \varepsilon, f'). \end{aligned}$$

Демек,

$$\begin{aligned} y'(x, \varepsilon, f) &= \frac{f'(x)}{a} - \frac{f'(0)}{a} e(x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f''), \Rightarrow \\ \left| \frac{f'(0)}{a} \right| &\leq \left\| \frac{f'(x)}{a} - y'(x, \varepsilon, f) \right\|_0 + \frac{\varepsilon}{a^2} \|f''\|_0 \leq \left\| \frac{f'(x)}{a} - y'(x, \varepsilon, f) \right\|_{n-1} + \frac{\varepsilon}{a^2} \|f''\|_0 \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{a^2} [\|f'\|_{n-1} + \|f''\|_0] \leq \frac{2\varepsilon}{a^2} \|f'\|_{n-1}. \end{aligned}$$

Осы, соңғы теңсіздікте, $\varepsilon \rightarrow 0$ деп шекке көшсек, онда $f'(0) = 0$ деген теңдік аламыз, мұнан,

$$\begin{aligned} y'(x, \varepsilon, f) &= \frac{f'(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f''), \Rightarrow \\ y''(x, \varepsilon, f) &= \frac{f''(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y'(x, \varepsilon, f'') = \\ &= \frac{f''(x)}{a} - \frac{1}{a} [f''(x) - ay(x, \varepsilon, f'')] = y(x, \varepsilon, f''). \end{aligned}$$

Енді,

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f^{(k)}(0) = 0, y^{(k+1)}(x, \varepsilon, f) = y(x, \varepsilon, f^{(k+1)})$$

теңдіктері дәлелденді деп жорыйық, онда

$$y^{(k+1)}(x, \varepsilon, f) = \frac{f^{(k+1)}(x)}{a} - \frac{f^{(k+1)}(0)}{a} e(x, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f^{(k+2)}), \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(k+1)}(0)}{a} \right| &\leq \left\| \frac{f^{(k+1)}(x)}{a} - y^{(k+1)}(x, \varepsilon, f) \right\|_0 + \frac{\varepsilon}{a^2} \|f^{(k+2)}\|_0 \leq |k+1| \leq n-1 \leq \left\| \frac{f(x)}{a} - y(x, \varepsilon, f) \right\|_{n-1} + \frac{\varepsilon}{a^2} \|f^{(k+2)}\|_0 \leq \\ &\leq (\|f'\|_{n-1} + \|f^{(k+2)}\|_0) - \frac{\varepsilon}{a^2} \leq \frac{2\varepsilon}{a^2} \|f'\|_{n-1}. \end{aligned}$$

Соңғы теңсіздікте, $\varepsilon \rightarrow 0$, деп шекке көшсек $f^{(k+1)}(0) = 0$ боларын көреміз, мұнан

$$y^{(k+2)}(x, \varepsilon, f) = \frac{d}{dx} \left[y(x, \varepsilon, f^{(k+1)}) \right] = \frac{f^{(k+2)}(x)}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y'(x, \varepsilon, f^{(k+1)}) = y(x, \varepsilon, f^{(k+2)}).$$

Демек, $k = n - 1$ сәтінде

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(0) = 0.$$

$$y^{(n)}(x, \varepsilon, f) = y(x, \varepsilon, f^{(n)}), \Rightarrow \left\| y^{(n)}(x, \varepsilon, f) \right\|_0 \leq \frac{\left\| f^{(n)} \right\|_0}{a}.$$

Жоғарыдағы, есептеулер, басқа, есепті қоюға негіз болады. Бұл сәтте, біз шешімді емес, оның өзгертілген түрін, немесе, шекқатпарлық функцияны жуықтаймыз.

5.Қорытынды

Бұл әдіс сингуляр әсерленген Коши есебін түпкілікті шешті, және есептің бұрын сонды беймәлім қырлары мен сырларын аша түсті.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. -М.: Высш. шк. 1990.-200с.
- [2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслоный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.
- [3] Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука, 1966.,-544с.
- [4] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
- [5] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
- [6] LomovS., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [7] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
- [8] Vasil'evaA., and TupchievV., Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
- [9] Trenogin V., Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
- [10] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41-48 (2004), (in Russian).
- [11] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
- [12] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [13] A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
- [14] Orazov I., Shaldanbaev A, Sh, Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
- [15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498
- [16] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
- [17] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

REFERENCES

- [1] Vasilyeva A. B., Butuzov of V. F. Asimtoticheskiye methods in theories of singular indignations. - M.: Vyssh. шк. 1990. - 200 pages.
- [2] Vishik M. I., Lyusternik A. A. Regular degeneration and a frontier layer layer for the linear differential equations with small parameter//Achievements of mathematical sciences, 1957. No. 5. page 3-122.
- [3] Akhiyezer N. N., Glazman N. M. The theory of linear operators in Hilbert space. - M of a.:nauk, 1966.,-544s.
- [4] TikhonovA. N., Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
- [5] ImanalievM. I., Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
- [6] LomovS., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [7] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
- [8] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
- [9] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
- [10] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41-48 (2004), (in Russian).
- [11] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
- [12] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).
- [13] KopzhassarovaA., and SarsenbiA., Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[14] Orazov I., Shaldanbaev A., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument. // Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.

[15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using a method of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[16] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[17] Read M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.1-2. – M.: World, 1977.

УДК 517.94

М.И. Акылбаев¹, М.Б. Сапрыгина², А.Ш. Шалданбаев³

Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г. Шымкент;

Южно-Казахстанская государственная фармацевтическая академия, г. Шымкент;

Южно-Казахстанский государственный университет, г. Шымкент

**РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ МЕТОДОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГОСЯ АРГУМЕНТА**

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение решения задачи Коши в пространстве с индефинитной метрикой, и с помощью этого разложения выведено погранслойное разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши, для модельного уравнения первого порядка $\varepsilon u' + au(x) = f(x)$, $u(0) = 0$, $a > 0$, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, $a - const$.

Ключевые слова: полнота, самосопряженный оператор, вполне непрерывный оператор, теорема Гилберта–Шмидта, вольтеровы операторы, индефинитная метрика, разложение Шмидта, ортонормированный базис.

Сведения об авторах:

Акылбаев М.И. - к.т.н., доцент кафедры «Информатики и математики» Южно-Казахстанского педагогического университета, г. Шымкент;

Сапрыгина М.Б. – к.ф.-м.н., и.о. доцента кафедры «Медицинская биофизика и информационные технологии» Южно-Казахстанской государственной фармацевтической академии, г. Шымкент;

Шалданбаев Амир Шалданбаевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 193 – 205

UDC 517.94

K.Zh. Rustemova¹, A.Sh. Shaldanbaev¹, M.I. Akylbaev²¹South Kazakhstan State University, Shymkent;²Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

**SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM
FOR AN ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION
WITH CONSTANT COEFFICIENTS BY THE METHOD OF A
DEVIATING ARGUMENT**

Abstract. In this paper we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem for an ordinary differential equation of the second order with constant coefficients in a space with an indefinite metric, and with the help of this expansion we deduce the boundary layer expansion of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem for the second-order equation $L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, x \in [0,1]$;

Keywords: self-adjoint operator, completely continuous operator, Gilbert-Schmidt's theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

УДК 517.94

К.Ж. Рустемова¹, А.Ш. Шалданбаев¹, М.И. Ақылбаев²¹Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы;²Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы

**Коэффициенттері тұрақты, екінші ретті
кәдімгі дифференциалдық теңдеудің сингуляр әсерленген
Коши есебін, аргументін ауытқыту әдісі арқылы шешу**

1. КіріспеМына, $H = L^2(0,1)$ кеңістігінде, Кошидің келесі,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (2)$$

есебін қарастырайық, мұндағы ε -оң аз шама, ал a, b - белгілі тұрақты шамалар, $f(x) \in L^2(0,1)$ - белгілі функция, $y(x)$ белгісіз функция.

Егер $\varepsilon \rightarrow +0$ болса онда $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon)$ шегі бар ма, әлде жоқ па деген сұрақ туындайды.

$\varepsilon = 0$ сәтінде теңдеудің реті төмендеп екінші $y'(0) = 0$ шарты керек болмай қалады. Мәселенің онай емес екенін осыдан-ақ аңғаруға болады.

Бұл (1)-(2) есепті шешудің, біздің әдісімізден өзгеше, әртүрлі жолдары бар [1-9]. Өкінішке орай, бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады, себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған. Біз бұл есепті спектралдік әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

Біздің әдісіміздің өзгешелігі, Коши операторының спектрінің жоқтығына қарамастан, спектрді таралым арқылы шешімді тарқатып, сонан соң оның асимптотикасын зерттеуінде.

2. Зерттеу әдістері

Лемма 1

Егер $f(x)$ функциясы $[0,1]$ кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда Кошидің (1)-(2) есебінің бірегейшешімі бар және ол екі рет үзіксіз дифференциалданады, былай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \psi(x-t)f(t)dt \quad (3)$$

өрнектеледі, мұндағы $\psi(x)$ – дегеніміз Кошидің, келесі,

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi''(x) + a\psi'(x) + b\psi(x) &= 0 \\ \psi(0) &= 0, \quad \psi'(0) = 1 \end{aligned}$$

Дәлелі. Жоғарыдағы (3)-ті (1)-ге апарып қойсақ, мынадай,

$$\begin{aligned} y'(x, \varepsilon, f) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \psi'(x-t)f(t)dt, \quad y''(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \psi''(x-t)f(t)dt, \\ L_\varepsilon y &= f(x) + \int_0^x \psi''(x-t)f(t)dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a\psi'(x-t)f(t)dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x b\psi(x-t)f(t)dt = \\ &= f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x [\varepsilon\psi''(x-t) + a\psi'(x-t) + b\psi(x-t)]f(t)dt = f(x)_0 \end{aligned}$$

Лемма 2.

Егер $a > 0, b \geq 0$ болса, онда, мына,

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; y(0) = 0, y'(0) = 0\}$$

жиынның кез келген мүшесі үшін, келесі,

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq \frac{\|L_\varepsilon y\|}{a\sqrt{2}}, (4) \\ \|y\|_1 &\leq \sqrt{\|y\|^2 + \|y'\|^2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|L_\varepsilon y\|}{a} \end{aligned}$$

Салдар 1. Үзіксіз функциялардың сызықтық көпсаласында шектеулі кері L_ε^{-1} операторы анықталған, және оны үзіксіздігін сақтай отырып, бүткіл $L^2(0,1)$ – кеңістігіне таратуға болады.

Дәлелі. Егер $f=0$ болса, онда (4)-дан $y=0$ екенін көреміз, яғни L_ε операторы $D(L_\varepsilon)$ аймағын өзінің мәндерінің жиынына: $R(L_\varepsilon) = C[0,1]$ бірмәнді сәйкестендіреді. Үзіксіз функциялардың сызықтық көпсаласы $L^2(0,1)$ кеңістігінде тығыз, сондықтан, L_ε^{-1} операторын, (4) теңсіздігінің арқасында, бүткіл $L^2(0,1)$ кеңістігіне үзіксіз етіп таратуға болады.

Салдар 2. Кері L_ε^{-1} операторының қабындысы: L_ε^{-1} операторы әсіре үзіксіз, бұл жай 7 теңсіздік пен Ремихтың теоремасының салдары.

2-лемманың дәлелі. Мына, $y(x) \in D(L_\varepsilon)$ жатыстықтан, келесі,

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x y'(t)dt, \quad |y(x)| \leq \left| \int_0^x y'(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^x |y'(t)|dt \leq \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_0^x |y'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{1-x} \left(\int_0^x |y'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

теңсіздіктер шығады.

Демек,

$$|y(x)|^2 \leq (1-x) \int_0^x |\dot{y}|^2 dt, \quad \|y(x)\|^2 = \int_0^1 |y(x)|^2 dx \leq \int_0^1 [(1-x) \int_0^x |\dot{y}|^2 dt] dx \\ \leq \int_0^1 |\dot{y}|^2 dt \int_0^1 (1-x) dx \leq \|\dot{y}\|^2 \int_0^1 x dx \leq \|\dot{y}\|^2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \leq \frac{\|\dot{y}\|^2}{2}$$

$$\text{Мұнан, } \|y\| \leq \frac{\|\dot{y}\|}{\sqrt{2}}$$

Әрі қарай, жоғарыдағы (1) теңдеудің екі жағын да $y'(x)$ функциясына скаляр көбейтеміз, сонда

$$(L_\varepsilon y, y) = \varepsilon (y'', y) + a \|\dot{y}\|^2 + b (y, y) = (f, y), \\ (y'', y) = \int_0^1 y'' y' dx = \int_0^1 y' dy' = \frac{y'^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{y'^2(1)}{2} = 0, \\ (y, y) = \int_0^1 y y' dx = \int_0^1 y dy = \frac{y^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{y^2(1)}{2} \geq 0$$

Демек,

$$(L_\varepsilon y, y) = \varepsilon \frac{y^2(1)}{2} + a \|\dot{y}\|^2 + b \frac{y^2(1)}{2} = (f, y)$$

Бұл теңсіздіктен, $\varepsilon > 0, a > 0, b \geq 0$ сәтінде, келесі,

$$a \|\dot{y}\|^2 \leq (f, y) \leq \|f\| \cdot \|\dot{y}\|, \Rightarrow a \|\dot{y}\| \leq \|f\|, \|\dot{y}\| \leq \frac{\|f\|}{a}$$

теңсіздіктер шығады. Онда

$$\|y\| \leq \frac{\|\dot{y}\|}{\sqrt{2}} \leq \frac{\|f\|}{a\sqrt{2}} \leq \frac{\|L_\varepsilon y\|}{a\sqrt{2}}, \\ \|y\|_1 = \sqrt{\|y\|^2 + \|\dot{y}\|^2} \leq \sqrt{\frac{\|f\|^2}{2a^2} + \frac{\|f\|^2}{a^2}} = \frac{\|f\|}{a} \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|f\|}{a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|L_\varepsilon y\|}{a}$$

Лемма 3.

Егер $Su(x) = u(1-x)$ және $L_\varepsilon y = \varepsilon y'' + ay'(x) + by(x)$

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; y(0) = 0, y'(0) = 0\};$$

болса, онда SL_ε - операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде симметриялы, яғни, мына

$$(SL_\varepsilon y, z) = (y, SL_\varepsilon z)$$

теңдігі кез келген $y, z \in D(L_\varepsilon)$ жұбы үшін орынды.

Дәлелі. Мына, $u, v \in D(L_\varepsilon)$ – жатыстықтары орынды делік, онда, келесі,

$$S(L_\varepsilon u, v) = (L_\varepsilon u, \delta v) = \varepsilon \int_0^1 u''(x)v(1-x) dx + a \int_0^1 u'(x)v(1-x) dx + b \int_0^1 u(x)v(1-x) dx; \\ \int_0^1 u''(x)v(1-x) dx = \int_0^1 v(1-x) du'(x) = u'(x)v(1-x) \Big|_0^1 + \int_0^1 v'(1-x)u'(x) dx = \\ \int_0^1 v'(1-x)du = v'(1-x)u(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 u(x)v''(1-x) dx = \int_0^1 u(x)v''(1-x) dx;$$

$$\int_0^1 u'(x)v(1-x)dx = \int_0^1 v(1-x)du = v(1-x)u(x)|_0^1 + \int_0^1 u(x)v'(1-x)dx = \int_0^1 u(x)v'(1-x)dx$$

$$S(L_\varepsilon u, v) = (L_\varepsilon u, \delta v) = \int_0^1 u(x)[\varepsilon v''(1-x) + av'(1-x) + bv(1-x)]dx = (u, SL_\varepsilon v),$$

теңдіктер де орынды.

Келесі, 1-теорема, жоғарыда, дәлелденген 1-3 леммалардың тікелей салдары.

Теорема 1. Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0$ болса, онда SL_ε – операторының қабындыдысы жалқы оператор, кері оператор $(SL_\varepsilon)^{-1}$ операторы бар және ол әсіре үзіксіз жалқы, мұндағы $Su(x) = u(1-x)$,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'' + ay' + by, D(L_\varepsilon) = \{y \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; y(0) = 0, y'(0) = 0\}$$

Теорема 2.

Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0$ болса, онда $\overline{SL_\varepsilon}$ операторының нормаланған меншікті векторлары $L^2(0,1)$ – кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Бұл теорема алдыңғы теорема мен Гильберт пен Шмидтің теоремасының, оңай, салдары.

Жалқы $\overline{SL_\varepsilon}$ - операторының меншікті векторлары $\varphi_n(x), n = 1, 2, \dots$, ал меншікті мәндері $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ болсын делік, онда, келесі,

$$\overline{SL_\varepsilon} \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad \overline{SL_\varepsilon}^{-1} \varphi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

теңдіктер орындалады. S - операторымен, келесі,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'' + ay' + by = f(x), \quad x \in (0,1]$$

тендеудің екі жағына да әсер етсек, онда, мынадай,

$$SL_\varepsilon y = Sf, \Rightarrow y(x, e, f) = (SL_\varepsilon)^{-1} Sf,$$

$$y(x, e, f) = \sum_{n=1}^{\infty} ((SL_\varepsilon)^{-1} Sf, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, (SL_\varepsilon)^{-1} \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

теңдіктерге келеміз, мұндағы, $Su(x) = u(1-x)$, яғни

S - дегеніміз $S^2 = I$ теңдігін қанағаттандыратын жалқы әрі унитар оператор.

Теорема 3. Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0$ болса, онда жоғарыдағы Кошидің (1)-(2) есебі $L^2(0,1)$ кеңістігінде әлді шешіледі және бұл әлді шешім, мынадай,

$$y(x, e, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x) \tag{5}$$

болады, мұндағы $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$, дегеніміз SL_ε - операторының меншікті мәндері, ал $\varphi_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ соларға сәйкес меншікті функциялар (векторлар),

$$Su(x) = u(1-x)$$

$$L_\varepsilon y(x) = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x), x \in [0,1]; \tag{1}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \tag{2}$$

3. Зерттеу нәтижелері

Меншікті $\varphi_n(x), (n = 1, 2, \dots)$ функциялардың дифференциалдық теңдеуі арқылы жоғарыдағы, (5) формуланың Фүре коэффициенттерін түрлендірейік.

Лемма 4. Егер $g(x)$ функциясы $[0,1]$ кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда Кошидің, мына,

$$\begin{cases} Bz(x) = az'(x) + bz(x) = g(x), x \in (0,1] \\ z(0) = 0 \end{cases},$$

есебінің шешімі келесі,

$$z(x) = B^{-1}g(x) = \int_0^1 \frac{\theta(x-t)}{a} e^{-\int_t^x \frac{b}{a} d\xi} g(t) dt \quad (6)$$

функция болады, мұндағы $\theta(x)$ - дегеніміз Хевксайдының функциясы

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Дәлелі: Жоғарыдағы, (6) формуланы дифференциалдап, келесі

$$z'(x) = \frac{g(x)}{a} - \frac{b}{a} \int_0^x g(t) e^{-\int_t^x \frac{b}{a} d\xi} dt$$

теңдікті аламыз, мұнан

$$az'(x) + g(x) - b \int_0^x \frac{g(t)}{a} e^{-\int_t^x \frac{b}{a} d\xi} dt = g(x) - bz(x) \Rightarrow az'(x) + bz(x) = g(x), z(0) = 0,$$

Салдар

$$\int_0^x [az'(t) + bz(t)] e^{-\int_t^x \frac{b}{a} d\xi} dt = z(x)$$

Лемма 5. Мына,

$$Bu = au'(x) + bu(x); u(0) = 0$$

оператордың сыңырласы, келесі,

$$B^+v = -av'(x) + bv(x); v(1) = 0$$

оператор.

Дәлелі.

$$\begin{aligned} (Bu, v) &= \int_0^1 [au'(x) + bu(x)]v(x) dx = \int_0^1 av(x) du + \int_0^1 u(x)bv(x) dx = u(x) - av(x) \Big|_0^1 - \\ &\int_0^1 av'(x)u(x) dx + \int_0^1 u(x)bv(x) dx = v(1)au(1) + \int_0^1 uB^+v(x) dx = (u, B^+v). \end{aligned}$$

Лемма 6. Егер

$$(a) Bu = au'(x) + bu(x); u(0) = 0;$$

$$(б) B^+v = -av'(x) + bv(x); v(1) = 0;$$

$$(в) Su(x) = u(1-x),$$

то имеет место формула

$$SB = B^+S$$

Дәлелі.

$$SBu(x) = au'(1-x) + bu(1-x); u(0) = 0$$

Егер $u(x) \in D(B)$ болса, онда $Su(x) \in D(B^+)$ және бұл сәтте

$$B^+Su = -a \frac{d}{dx} [Su] + \hat{a}Su = au'(1-x) + bu'(1-x) = S\hat{A}u(x),$$

бізге керегі де осы еді

Теорема 4. Егер, мына,

$$\varepsilon \varphi_n''(x) + a \varphi_n'(x) + \varepsilon \varphi_n(x) = \lambda_n S \varphi_n(x) \quad (7)$$

$$\varphi_n(0) = 0, \quad \varphi_n'(0) = 0 \quad (8)$$

тендіктер орындалса, яғни $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ сандары (7)-(8)-есептің меншікті мәндері, ал $\varphi_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ оларға сәйкес меншікті функциялары болса, онда келесі,

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

формула орынды, мұндағы $\psi(x)$ – дегеніміз Кошидің келесі,

$$\varepsilon z''(x) + az'(x) + bz(x) = 0,$$

$$\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$$

есепінің шешімі.

Дәлелі. Теореманың шарты бойынша, келесі,

$$\varepsilon \psi''(x) + a\psi'(x) + b\psi(x) = 0,$$

$$\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$$

тендіктер орынды. Біз бұларды, басқаша түрде жазайық:

$$\varepsilon \psi''(x) + B\psi(x) = 0,$$

мұндағы,

$$B\psi(x) = a\psi'(x) + b\psi(x); \psi(0) = 0.$$

Енді, $SB\psi(x)$ - функциясының $\{\varphi_n(x)\}, n=1, 2, \dots$ системасы бойынша Фуре коэффициенттерін табайық,

$$\begin{aligned} (SB\psi, \varphi_n) &= (SB\psi, \lambda_n B^{-1} S\varphi_n - \varepsilon B^{-1} \varphi_n'' = \\ \lambda_n (SB\psi, B^{-1} S\varphi_n) - \varepsilon (SB\psi, B^{-1} \varphi_n'') &= \lambda_n (S(B^{-1})^+ SB\psi, \varphi_n) - \varepsilon ((B^{-1})^+ SB\psi, \varphi_n'') = \\ \lambda_n (SSB^{-1} B\psi, \varphi_n) - \varepsilon (SB^{-1} B\psi, \varphi_n'') &= \lambda_n (\psi, \varphi_n) - \varepsilon (S\psi, \varphi_n''). \\ (S\psi, \varphi_n'') &= \int_0^1 S\psi d\varphi_n' = S\psi\varphi_n'(x)|_0^1 - \int_0^1 (S\psi)' d\varphi_n(x) = \\ &= \psi(1-x)\varphi_n'(x)|_0^1 - (S\psi)' \varphi_n(x) \int_0^1 + \int_0^1 (S\psi)'' \varphi_n(x) dx = \\ S\psi'(x)\varphi_n(x)|_0^1 + \int_0^1 (S\psi)'' - \varphi_n(x) dx &= \psi'(1-x)\varphi_n(x)|_0^1 + \int_0^1 (S\psi)'' \varphi_n(x) dx = \\ \psi'(0)\varphi_n(1) + \int_0^1 (S\psi)'' \varphi_n(x) dx &= \\ = \varphi_n(1) + \int_0^1 (S\psi)'' \varphi_n(x) dx &= \left| \begin{array}{l} \varepsilon \psi'' + B\psi = 0, \\ \varepsilon S\psi'' = -SB\psi \end{array} \right| = \varphi_n(1) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 SB\psi \cdot \varphi_n(x) dx = \varphi_n(1) - \frac{(SB\psi, \varphi_n)}{\varepsilon}; \end{aligned}$$

Демек,

$$(SB\psi, \varphi_n) = \lambda_n (\psi, \varphi_n) - \varepsilon \cdot \varphi_n(1) + (SB\psi, \varphi_n);$$

сондықтан,

$$(\psi, \varphi_n) = \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n},$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi, \varphi_n) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Енді (5) формуладан, Кошидің (1)-(2) есебінің шешімінің шекқатпарлық таралымын аламыз, бұл үшін оның Фуре коэффициенттерін бөліктеп интегралдау арқылы түрлендіреміз.

$$\begin{aligned} (Sf, \varphi_n) &= (Sf, \lambda_n B^{-1} S\varphi_n - \varepsilon B^{-1} \varphi_n'') = \lambda_n (Sf, B^{-1} S\varphi_n - \varepsilon (Sf, B^{-1} \varphi_n'')) = \\ &= \lambda_n ((B^{-1})^+ Sf, S\varphi_n) - \varepsilon ((B^{-1})^+ Sf, \varphi_n'') = \lambda_n (SB^{-1} f, S\varphi_n) - \varepsilon (SB^{-1} f, \varphi_n'') = \\ &= \lambda_n (B^{-1} f, \varphi_n) - \varepsilon (SB^{-1} f, \varphi_n''); \end{aligned}$$

Соңғы өрнекті түрлендірейік

$$\begin{aligned} &(SB^{-1} f, \varphi_n'') \\ &= \int_0^1 SB^{-1} f d\varphi_n' = \varphi_n'(x) SB^{-1} f \Big|_0^1 - \int_0^1 (SB^{-1} f)' d\varphi_n = -\varphi_n(x) (SB^{-1} f)' \Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi_n (SB^{-1} f)'' dx = \\ &- \varphi_n(1) (SB^{-1} f)'(1) + (S(B^{-1} f)'', \varphi_n); \end{aligned}$$

Демек,

$$(Sf, \varphi_n) = \lambda_n (B^{-1} f, \varphi_n) + \varepsilon \varphi_n(1) (SB^{-1} f)'(1) - \varepsilon (S(B^{-1} f)'', \varphi_n);$$

Онда (5)-формуладан, мынадай,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \\ \sum_{n=1}^{\infty} (B^{-1} f, \varphi_n) \varphi_n(x) + (SB^{-1} f)'(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi_n(1)}{\lambda_n} \varphi_n(x) - \varepsilon y(x, \varepsilon, \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f) &= B^{-1} f(x) - S(B^{-1} f)'(1) * \psi(x) - \varepsilon y(x, \varepsilon, \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f) = \\ &= B^{-1} f(x) - (B^{-1} f)'(0) \psi(x) - \varepsilon y(x, \varepsilon, \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f), \end{aligned}$$

мұндағы

$$B^{-1} f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{a} e^{-\int_t^x b d\xi} dt.$$

Жоғарыдағы (1) теңдеудің оң жақтағы бос мүшесін жеткілікті біртегіс функция деп санап, асимптотикалық таралымның келесі мүшелерін табуға болады.

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f) &= B^{-1} \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f(x) - (B^{-1} \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f)'(0) \psi(x) - \varepsilon y(x, \varepsilon, (\frac{d^2}{dx^2} B^{-1})^2 f) \\ y(x, \varepsilon, f) &= B^{-1} f(x) - (B^{-1} f)'(0) \psi(x) - \varepsilon [B^{-1} \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f(x) - (B^{-1} \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f)'(0) \psi(x) - \\ &- \varepsilon y(x, \varepsilon, (\frac{d^2}{dx^2} B^{-1})^2 f)] = B^{-1} f(x) - (B^{-1} f)'(0) \psi(x) - [B^{-1} \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f(x) - (B^{-1} \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f)'(0) \psi(x)] * \varepsilon + \\ &+ \varepsilon^2 y(x, \varepsilon, (\frac{d^2}{dx^2} B^{-1})^2 f) \end{aligned}$$

Былай, $D^0 = I$, $Df(x) = \frac{d^2}{dx^2} B^{-1} f(x)$ деп, белгілеулер енгізсек, жоғарыдағы формула, мына,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= B^{-1} f(x) - (B^{-1} f)'(0) * \psi(x) - [B^{-1} D(x) - (B^{-1} Df)'(0) * \psi(x)] \varepsilon + \\ &+ \varepsilon^2 y(x, \varepsilon, D^2 f) = B^{-1} D^0 f(x) - (B^{-1} D^0 f)'(0) * \psi(x) - [B^{-1} Df(x) - (B^{-1} Df)'(0) * \psi(x)] \varepsilon + \\ &+ \varepsilon^2 y(x, \varepsilon, D^2 f), \end{aligned}$$

түрге енеді. Әрі қарай, математикалық индукцияны қолдануымызға болады

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [B^{-1} D^k f(x) - (B^{-1} D^k f(x))'(0) * \psi(x)] \varepsilon^k + (-1)^n \varepsilon^n y(x, \varepsilon, D^n f)$$

Алынған нәтижедені тұжырымдап қоялық.

Теорема 5. Егер $a > 0, b \geq 0, \varepsilon > 0, f(x) \in C^n[0,1]$ болса, онда Кошидің, келесі,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \quad (2.7.1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (2.7.2)$$

есебінің шешімі, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [B^{-1} D^k f(x) - (B^{-1} D^k f(x))'(0) * \psi(x)] \varepsilon^k + (-1)^n \varepsilon^n y(x, \varepsilon, D^n f)$$

болады, мұндағы,

$$D^0 = I, Df(x) = \frac{d}{dx} B^{-1} f(x),$$

$$B^{-1} f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{a} e^{-\int_t^x \frac{b}{a} d\xi} dt.$$

$$\psi(x) = \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1}, k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}}{2\varepsilon};$$

$$||y(x, \varepsilon, D^n f)|| \leq \frac{||D^n f||}{a\sqrt{2}}.$$

4. Талқысы

Мысал

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = 1, \quad x \in (0, 1]; \quad (9)$$

$$y(0) = 0$$

Бұл есептің шешімі

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1 - e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a}, \text{ мұнан} \quad (10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ болған сәтте}; \\ \frac{1}{a}, & x \neq 0 \text{ болған сәтте}. \end{cases} \quad (11)$$

Жоғарыдағы (10) функцияның үзiксіз екенi айдан анық, бiрақ оның шегi (11) үзiктi функция, демек жинақталу бiрқалыпты емес. Теңдеудiң оң жағы $f(x) = 1$ өте бiртегiс әдемі функция, солай бола тұра, ол бiрқалыпты жинақталуды қамтамасыз ете алмады, демек, бiрқалыпты жинақталуды қамтамасыз ету үшiн теңдеудiң оң жағына бiртегiстiктен басқа қосымша шарттар қою керек сыйақты.

Жоғарыдағы (0.1)-(9) есептiң шешiмi, мынадай

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt \quad (12)$$

болары айдан анық, егер $f(x) \in C[0,1]$, яғни ол $[0,1]$ кесiндiсi бойында үзiксіз болса, онда

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x [f(t) - f(0)] e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt + \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt,$$

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt = \left| \begin{matrix} x-t=s \\ -dt=ds \end{matrix} \right| = \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}s} ds = \\ = e^{-\frac{a}{\varepsilon}s} \left(-\frac{\varepsilon}{a} \right) \Big|_0^x = \frac{\varepsilon}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right),$$

мұнан

$$y(x, \varepsilon) - \frac{f(0)}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x [f(t) - f(0)] e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt;$$

Соңғы интегралды, былай,

$$\left| \int_0^x [f(t) - f(0)] e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt \right| \leq \max_{0 \leq t \leq \varepsilon} |f(t) - f(0)| + \int_{\varepsilon}^x |f(t) - f(0)| e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt \leq \\ \leq \overline{\max}_{0 \leq t \leq \varepsilon} |f(t) - f(0)| + 2 \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \times \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt \leq \\ \leq \max_{0 \leq t \leq \varepsilon} |f(t) - f(0)| + 2 \|f\|_c \times \frac{\left(1 - e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right) \varepsilon}{a}$$

бағалауға болады, бірақ бұл баға бөліміндегі ε –ға төтеп бере алмайды. Мұнан шығар қорытынды есеп қарапайым болып көрінгенмен, қалпақпен ұрып алар, есептер қатарына жатпайды.

Егерде теңдеудің оң жағына қосымша шарт жүктесек, яғни $f(x) \in W_2^1[0,1]$ болса, онда

$$\left\| y(x, \varepsilon) - \frac{f(x)}{a} \right\| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\sqrt{2a}} [f|0| + \|f'\|]$$

боларын көруге болады

Егерде (12) формулада алмастыру жасасақ ол, мына,

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(x-t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt$$

түрге келеді. Енді оң жақтағы интегралды, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, сәтінде бөліктеп интегралдасак, онда мынадай,

$$\int_0^x f(x-t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt = \dots = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \sum_{k=1}^n (-1)^k f^{(k-1)}(0) \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^k - \\ - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(x) (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^k + (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^n \int_0^x f^{(n)}(x-t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt = \\ = \left| t = \frac{x}{\varepsilon} \right| = \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^k f^{(k-1)}(0) e^{-at}}{a^k} - \frac{(-1)^k f^{(k-1)}(x)}{a^k} \right] \varepsilon^k + \\ + (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^n \int_0^x f^{(n)}(x-t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt, = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} [r_k(t) + P_k(x)] \varepsilon^k + (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^n \int_0^x f^{(n)}(x-t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt; \\ \left\| \int_a^x f^{(n)}(x-t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt \right\| \leq \|f^{(n)}(x-t)\| \left(\int_0^1 e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \|f^{(n)}(x)\| \left[\left(\frac{\varepsilon}{-2a} e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t} \right) / 1_0^1 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f^{(n)}(x)\| \times \left(\frac{\varepsilon}{2a} \right)^{\frac{1}{2}}, \rightarrow$$

$$\left\| \int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} dt \right\| \leq \|f^{(n)}(x)\| \left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Біз жоғарыда есепті қарабайыр әдістердің бірі арқылы шығаруға әрекет жасадық, бірақ мұнымыз іске аспады.

Егер $\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x)$, $y(0) = 0$; $a - \cos nt$ болса, онда

$$\frac{\varepsilon}{a}y(x) + \int_0^x y(t)dt = \frac{1}{a} \int_0^x f(t)dt.$$

Енді $\lambda = \frac{\varepsilon}{a}$, $F(t) = \frac{1}{a} \int_0^x f(t)dt$, $Jy(x) = \int_0^x y(t)dt$ болсын, десек, онда

$$\begin{aligned} (\lambda I + J)y(x) &= F(t), & y(x) &= R_\lambda F(t) = (J + \lambda I)^{-1}F(t) = \\ &= \frac{1}{a}(J + \lambda I)^{-1}Jf(t) = \frac{1}{a}\left(J + \frac{\varepsilon}{a}I\right)^{-1}Jf(x). \end{aligned}$$

J –интегралдау операторы әсіре үзіксіз операторлар қатарына жатады сондықтан, оның резольвентасы $R_\lambda = (J + \lambda I)^{-1}$ операторы да әсіре үзіксіз, ал оның өзі $\lambda = 0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерде аналитикалық оператор функция, ал $\lambda = 0$ нүктесі елеулі (существенная) ерекше нүкте. Сондықтан, жалпы, алғанда,

$$\lim_{\lambda > 0} y(x, \lambda) = \lim_{\lambda > 0} (J + \lambda I)^{-1} F(t)$$

шегі жоқ, сондықтан, тақырыпты тамам деуге болар еді. Бірақ λ белгілі бір қыйсықтың бойымен, немесе, нүктелермен ұмтылғанда ондай шек бар болып, және ол керек болып тұр. Бұл тақырыптың өміршенділігі мен өзекшелігі осында болса керек. Келесі, бөлімде біз қолданыста жүрген әдістерге талдау жасаймыз.

5. Қорытынды

Әдісімізді Вишик пен Василеваның шекқатпарлық функция әдісімен сылыстырайық.

$H = L^2(0,1)$ –кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$\varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, 1] \tag{13}$$

$$y(0) = 0 \tag{14}$$

Сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндағы $a(x)$ пен $f(x)$ қажетінше біртегіс функция, ал $\varepsilon > 0$ – азшамалы параметр.

Осы (13)-(14) есептің шешімін, мына,

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_k(x) + \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \varepsilon^n R_n(x, \tau) \tag{15}$$

түрде іздейік, мұндағы $\tau = \frac{x}{\varepsilon}$ – шабан параметр. Осы өрнекті, жоғарыдағы, (13) теңдеуге апарып қоялық, сонда, мынадай,

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left[\varphi_k'(x) + \psi_k \times \frac{1}{\varepsilon} \right] \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R_n' + \\ &+ a(x) \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_k(x) + \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \varepsilon^n a(x) R_n(x, \tau) = f(x), \end{aligned}$$

теңдік аламыз, мұндағы (\cdot) – жоғарғы нүкте арқылы τ – айнымалысы бойынша туынды белгіленген Жақшаларды ашайық;

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k+1} \varphi_k'(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(\tau) \times \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} R_n' + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} [a(x) \varphi_k(x) + a(x) \psi_k(\tau)] \varepsilon^k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\varepsilon^n a(x)R_n(x, \tau) = f(x), \\
 & \sum_{k=1}^{n-1} [\varphi'_{k-1}(x) + \dot{\psi}_k + a(x)\varphi_k(x) + a(x)\psi_k(\tau)]\varepsilon^k + \\
 & +\varepsilon^n (\varepsilon R'_n + a(x)R_n(x, \tau) + \varphi'_{n-1}) + \dot{\psi}_0(\tau) + a(x)\varphi_0(x) + a(x)\psi_0(\tau) = f(x)
 \end{aligned}$$

Мұнан,

$$\begin{aligned}
 a(x) \times \varphi_0(x) = f(x), & \rightarrow \varphi_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)}; \\
 \dot{\psi}_0(\tau) + a(x)\psi_0(\tau) = 0, & \quad \frac{\dot{\psi}_0}{\psi} = -a(x), \int_0^{\tau(x)} \frac{\dot{\psi}_0}{\psi} d\tau = - \int_0^x a(x) dx = \\
 & = - \int_0^x d(x) \frac{dx}{\varepsilon}; \quad l_n \psi_0(\tau) / \tau_0 = - \int_0^x \frac{d(\xi)}{\xi} d\xi, \\
 l_n \frac{\psi_0(\tau)}{\psi_0(0)} = - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi, & \quad \psi_0(\tau) = \psi_0(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi}, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Әрі қарай, x –қа тәуелді функцияларды бөлек, ал τ –ға тәуелді функцияларды бөлек нөлге тенеп, мынадай:

$$\begin{aligned}
 \varphi'_{k-1}(x) + a(x)\varphi_k(x) = 0, & \rightarrow \varphi_k(x) = - \frac{\varphi'_{k-1}(x)}{a(x)}; \\
 \dot{\psi}_k + a(x)\psi_k(\tau) = 0, & \rightarrow \psi_k(\tau) = \psi_k(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi};
 \end{aligned}$$

тендіктер аламыз. Енді бастапқы шартқа жүгінеміз:

$$y(x, \varepsilon) /_{x=0} = 0, \rightarrow \varphi_k(0) + \psi_k(0) = 0, R_n(x, \tau) /_{x=0} = 0.$$

Демек, $\psi_k(0) = -\varphi_k(0)$, \rightarrow

$$\psi(0) = -\varphi_0(0) = -\frac{f(0)}{a(0)}, \psi_1(0) = -\varphi_1(0) = \frac{\varphi'_0(0)}{a(0)}.$$

Ыңғайлы болу үшін, мынадай,

$$Df(x) = \frac{d f(x)}{dx a(x)}. \quad D^0 = I$$

белгілеулер енгізейік, сонда

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x) &= \frac{f(x)}{a(x)} = \frac{D^0 f(x)}{a(x)}, \\
 \varphi_1(x) &= -\frac{\varphi'_0(x)}{a(x)} = -\frac{1}{a(x)} \frac{d f(x)}{dx a(x)} = -\frac{Df(x)}{a(x)}, \\
 \varphi_2(x) &= -\frac{\varphi'_1(x)}{a(x)} = \frac{D^2 f(x)}{a(x)}, \dots, \varphi_k(x) = (-1)^k \frac{D^k f(x)}{a(x)}.
 \end{aligned}$$

Сондықтан,

$$\psi_k(\tau) = -\varphi_k(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} = -(-1)^k \frac{D^k f(0)}{a(0)} \times e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}.$$

Қалдық $R_n(x, \tau)$ мүшесі үшін, мынадай,

$$R'_n + a(x)R_n + \varphi'_{n-1} = 0,$$

тендеу аламыз және оған, мынадай,

$$R_n(0_\tau) = 0$$

бастапқы шарт тіркеседі, яғни $R_n(x, \tau)$ функциясы, мынадай,

$$R'_n + a(x)R_n = -\varphi'_{n-1}(x) = (-1)^n D^n f(x)$$

$$R_n(x, \tau)/_{x=0} = 0$$

Коши есебінің шешімі. Демек, $R_n(x, \tau) = (-1)^n y(x, \varepsilon, D^n f)$, мұндағы $y(x, \varepsilon, D^n f)$ – дегеніміз сол бастапқы (13)-(14) есептің шешімі, оң жағы $(-1)^n D^n f(x)$ болған сәттегі.

Сонымен жоғарыдағы (13)-(14) есептің шешімі бар болса, онда ол, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{D^k f(x)}{a(x)} - \frac{D^k f(0)}{a(0)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} \right] \varepsilon^k + \varepsilon^n (-1)^n y(x, \varepsilon, D^n f)$$

болады.

Әдістің әлсіз тұстары:

- 1) Жоғарыдағы (13)-(14) есептің бар жоқтығы туралы ләм-лим деп ауыз ашпайды
- 2) Неліктен шешімді (ол бар болған сәтте) (15) түрінде іздеуіміз керек?
- 3) Есептеу барысында, мынадай,

$$\varphi'_{k-1}(x) + a(x)\varphi_k(x) + \psi_k(\tau) + a(x)\psi_k(\tau) = 0$$

бір теңдеуден, мынадай,

$$\varphi'_{k-1}(x) + a(x)\varphi_k(x) = 0, \quad \psi_k(\tau) + a(x)\psi_k(\tau) = 0$$

екі теңдеуге көшеді, шын мәнінде τ шамасы x – қа тәуелді $\left(\tau = \frac{x}{\varepsilon}\right)$ сондықтан бұл әрекетте негізсіздіктің ізі айқын байқалады.

- 4) Ең сорақысы, қалдық $R_n(x, \tau)$ мүшені қалай бағалау туралы ешнәрсе айтылмайды.

Қолданбалы математикада, мұндай әдістер көптеп кездеседі, олар қосымша мәліметті практикадан немесе, эксперименттен көріп тұрады, сондықтан олар үшін нәтижеге тез қол жеткізу маңызды, басқасын кейін көре жатармыз дейді-де, сол деймен қалып қояды.

Біздің әдісіміздің көш ілгері екені айдан анық.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.-М.: Высш. шк. 1990.-200с.
- [2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслоный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.
- [3] Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука ,1966.,-544с.
- [4] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
- [5] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
- [6] Lomov S., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.
- [7] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
- [8] Vasil'eva A., and Tupchiev V., Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

- [9] Trenogin V., Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
 [10] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).
 [11] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
 [12] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
 [13] A. Kopzhassarova, and A. Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
 [14] Orazov I., Shaldanbaev A., Sh., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
 [15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using a method of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498
 [16] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
 [17] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

REFERENCES

- [1] Vasilyeva A. B., Butuzov V. F. Asimtoticheskiye methods in theories of singular indignations. - М.: Vyssh. shk. 1990. - 200 pages.
 [2] Vishik M. I., Lyusternik A. A. Regular degeneration and a frontier layer layer for the linear differential equations with small parameter//Achievements of mathematical sciences, 1957. No. 5. page 3-122.
 [3] Akhiezer N. N., Glazman N. M. The theory of linear operators in Hilbert space. - М of a.:nauk, 1966.,-544s.
 [4] Tikhonov A. N., Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).
 [5] Imanaliev M. I., Asymptotical Methods in the Theory of Singularly Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
 [6] Lomov S., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
 [7] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
 [8] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
 [9] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
 [10] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).
 [11] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
 [12] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
 [13] Kopzhassarova A., and Sarsenbi A., Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
 [14] Orazov I., Shaldanbaev A., Sh., Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363>.
 [15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using a method of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498
 [16] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
 [17] Read M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.1-2. – М.: World, 1977.

УДК 517.94

К.Ж. Рустемова¹, А.Ш. Шалданбаев¹, М.И. Ақылбаев²¹Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент²Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент**РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, МЕТОДОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГОСЯ АРГУМЕНТА**

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в пространстве с индефинитной метрикой, и с помощью этого разложения выведено погранслоное разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши, для уравнения второго порядка

$$L_{\varepsilon}y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, \\ x \in [0, 1];$$

Ключевые слова: самосопряженный оператор, вполне непрерывный оператор, теорема Гилберта – Шмидта, вольтеревы операторы, индефинитная метрика, разложение Шмидта, полнота, ортонормированный базис.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 313 (2017), 206 – 213

**H.A. Ashirbaev, K. A. Kabylbekov, H. K. Abdrahmanova,
A.I. Dzhumagalieva, Zh.B. Kydyrbekova**

M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.
kenkab@mail.ru ainur_jumagali@mail.ru

**ORGANIZATION OF COMPUTER LABORATORY WORKS
TO STUDY ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS USING
THE SOFTWARE PACKAGE MATLAB**

Abstract. A model of the organization of computer laboratory works to study electric and magnetic fields using the software package MATLAB. When you study the electric field we consider two infinite charged plane with surface density of known, spaced apart from each other at a predetermined distance. Planes have coaxial holes of radius, which far exceeds the distance between the planes. - Written program for calculating potential and the projection of the electric field on the horizontal axis of the system as a function of the coordinates X . the reference point taken as the point located an equal distance from the holes. The results of the calculations are presented in the form of graphs of dependence of the potential and the projection of the field strength from the x -coordinates in one graphic window.

For the study of magnetic field is considered the field of the long straight solenoid with a current of known power having a predetermined length and radius of the cross section. The number of turns per unit length is also specified. Program of calculation of the magnetic field on axis as a function of distance x , measured along the axis of the solenoid from its end. The results of the calculations are presented in the form of a graph of dependency relations of induction of the calculated magnetic field to the magnetic field of infinite solenoid.

Key words: charged infinite plane charge density, the hole, the tension and potential of the electric field, the solenoid, the density of the number of turns, current, magnetic induction.

УДК 53, 532.133, 621.3.018.72.025.1

**Аширбаев, Х.К., К.А.Кабылбеков, Х.А. Абдрахманова,
А.И. Джумагалиева, Ж.Б., Кыдырбекова**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

**ОРГАНИЗАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО
ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА ПРОГРАММ MATLAB**

Аннотация. Предлагается модель организации компьютерной лабораторной работы по исследованию электрического и магнитного полей с использованием пакета программ **MATLAB**. При исследовании электрического поля рассматриваются две безграничные заряженные плоскости с известной поверхностной плотностью, отстоящие друг от друга на заданном расстоянии. Плоскости имеют коаксиальные отверстия радиуса, которого намного превышает расстояние между плоскостями. Составлена программа расчета потенциала и проекции напряженности электрического поля на горизонтальную ось системы как функцию координаты x . Началом отсчета взята точка, расположенная на одинаковом расстоянии от отверстий. Результаты расчетов представлены в виде графиков зависимости потенциала и проекции напряженности поля от координаты x в одном графическом окне.

Для исследования магнитного поля рассматривается поле прямого длинного соленоида с током, известной силы, имеющего заданную длину и радиус сечения. Число витков на единицу длины также задана. Составлена программа расчета индукции магнитного поля на оси как функцию расстояния x , отсчитанного вдоль оси соленоида от его торца. Результаты расчетов представлен в виде графика зависимости отношений индукции рассчитанного магнитного поля к индукции магнитного поля соленоида бесконечной длины от отношения расстояния x к радиусу сечения соленоида.

Результаты работ обсуждаются совместно со студентами.

Ключевые слова: заряженная безграничная плоскость, плотность заряда, отверстие, напряженность и потенциал электрического поля, соленоид, плотность числа витков, сила тока, индукция магнитного поля.

Президент Республики Казахстан Н. Назарбаев в Послании народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» - новый политический курс состоявшегося государства» обозначив приоритеты в сфере образования сказал: -Нам предстоит произвести модернизацию методик преподавания и активно развивать он-лайн-системы образования, создавая региональные школьные центры. Мы должны интенсивно внедрять инновационные методы, решения и инструменты в отечественную систему образования, включая дистанционное обучение и обучение в режиме он-лайн, доступные для всех желающих [1].

Для реализации поставленных задач кафедра «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. Ауэзова МОН РК с 2011-2012 учебного года внедрила в учебный процесс дисциплины «Информационные технологии в образовании», «Информационные технологии в преподавании физики», «Методика использования электронных учебников», «Компьютерное моделирование физических явлений» программы которых предусматривает освоение и использование современных информационных технологии в преподавании физики. Программа дисциплины «Компьютерное моделирование физических явлений» для специальности 5В011000, 5В060400-физика предусматривает использование программного комплекса MATLAB для моделирования задач механики, молекулярной физики и термодинамики, электростатики и электродинамики, оптики, квантовой физики с сопровождением графики. Цель курса – изучить основные принципы и раскрыть сущность математического моделирования, показать роль математического моделирования при описании различных физических процессов и явлений. Задачей курса является обучение студентов общим методам решения уравнений математической физики, построению модели физического процесса или явления, отражающей в математической форме важнейшие его свойства, присущие составляющим его частям связи и т.д; обучение исследованию математическими методами свойств модели для получения сведений об объекте исследования; обучение выбору (или разработке) алгоритма для реализации модели на компьютере и созданию соответствующих компьютерных программ; обучения компьютерной графике: а) формирование творческого воображения, образно-графического и технического мышления; б) овладение компьютерными технологиями для получения графических изображений. В результате изучения дисциплины студенты должны:

- овладеть методологией математического моделирования физических явлений;
- иметь представление о принципах и методах математического моделирования;
- уметь моделировать различные системы и анализировать построенные математические модели физических явлений;
- Уметь редактировать двумерные и трехмерные графики.

Курс является логическим продолжением курсов: “Общая физика”, “Вычислительная математика”, “Математические пакеты”, “Языки программирования”.

Возможности MATLAB весьма обширны, а по скорости выполнения задач система нередко превосходит своих конкурентов. Она применима для расчетов практически в любой области науки и техники. Программный комплекс MATLAB является одним из лучших современных решений для организации математического моделирования физических процессов.

Методика конструирования заданий для компьютерных моделей приведена в брошюре «Методические аспекты преподавания физики с использованием компьютерного курса «Открытая физика». В качестве примера в ней приведены бланки заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы с использованием компьютерных моделей «Движение с постоянным ускорением» и «Упругие и неупругие соударения». Такие же материалы размещены в компакт-

диске «Открытая физика 2.5», в сайтах «Открытый колледж» и на страницах сетевого объединения методистов (СОМ) [3,4]. В них даются два вида лабораторных бланков:

- бланк для внесения ответов обучающимися;
- бланк для учителя в котором имеются ответы тестов и заданий для удобства их проверки.

Сформировать интерес к изучению физике посредством использования современных информационных технологий обучения; развитие познавательных универсальных способностей (навыки теоретического мышления, исследовательского и творческого поиска. Современный взгляд на наше общество как на обучающееся подразумевает, что образовательная система должна быть ориентирована (в большей степени, чем раньше) на развитие и воспитание у учащихся адаптивной компетенции, т. е. способности осознанно и гибко применять полученные знания и навыки в различных контекстах.

На основании результатов недавнего исследования [2] в данной статье в первую очередь обсуждается следующий вопрос: чему именно требуется научиться, чтобы приобрести адаптивную компетенцию в какой-либо области? Автор считает, что для развития адаптивной компетенции необходим комплекс когнитивных, эмоциональных и мотивационных компонентов, а именно: предметная база в виде структурированных знаний в определенной области, навыки использования эвристических методов мышления, метазнания - представления о собственной когнитивной деятельности, мотивации и эмоциях, навыки саморегуляции для управления собственными когнитивными, мотивационными и эмоциональными процессами, а также позитивные убеждения в отношении себя как учащегося и в отношении обучения в различных областях. Далее автор задается следующим вопросом: каковы характеристики процессов обучения, продуктивных с точки зрения приобретения адаптивной компетенции? Обучение, целью которого является формирование адаптивной компетенции, должно представлять собой конструктивный, саморегулируемый, конкретный и совместный (КСКС) процесс формирования знаний и навыков. Каким образом преподаватель может стимулировать обучение по типу КСКС? В статье приведен пример создания действенной обучающей среды, ориентированной на повышение эффективности обучения студентов. В работе [3] предлагаются критерии информационной компетентности, выраженные через качества «информационной» личности на основе комплекса знаний и умений в области информационных технологий, среди них особое внимание уделяется умению интерпретировать полученные результаты; принимать решения о применении того или иного программного обеспечения; предвидеть последствия принимаемых решений и делать соответствующие выводы; и т.д. Приводятся **практические примеры формирования информационной компетенции на различных этапах урока – исследования, например, по теме «Воздухоплавание»**. В работах [4-7] предлагаются разработки уроков по темам «Основы термодинамики», «Атомная физика», «Преломление света», «Коэффициент полезного действия» с использованием электронных обучающих средств. Мощным средством обучения физике, по мнению многих отечественных и зарубежных специалистов является продукция компании «Физикон» [8]. В дисках «Открытая физика 2.5» этой компании даются методические рекомендации по составлению заданий и их выполнению практически по всем разделам школьной программы. По нашему и мнению других [9-14] каждый преподаватель физики при желании может самостоятельно сконструировать компьютерную лабораторную работу, используя интерактивные модели из мультимедийного курса «Открытая Физика» компании «Физикон». Для этого рекомендуется использовать тот же алгоритм для создания лабораторных работ, который применен в данном мультимедийном курсе. Сначала рекомендуется разобрать теорию вопроса, затем ответить на контрольные вопросы, потом выполнить задачи, при решении которых необходимо провести компьютерный эксперимент и проверить полученный результат.

Одной из трудных задач внедрения результатов использования информационных технологий в учреждениях образования является недостаточное практическое умение преподавателей использования компьютерных моделей физических явлений для организации проведения лабораторных работ. От организации компьютерных лабораторных работ во многом зависит активизация, мотивация и в конечном счете эффективность обучения. О создании и использовании моделей бланков организации компьютерных лабораторных работ по исследованию различных физических явлений в учебном процессе нами ранее написаны [15-34].

В данной статье приводятся примеры использования пакета программ Matlab [35]. при организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию электрического и магнитного полей.

Лабораторная работа 1. **Тема работы: Исследование поля двух разноименно заряженных плоскостей, имеющие коаксиальные отверстия.**

Цель работы: Использовать пакет программы MATLAB для расчета поля, результаты представить в виде графиков потенциала и напряженности от расстояния вдоль оси, совпадающей с линией, соединяющей центры коаксиальных отверстий.

Условия задания: Две безграничные плоскости, отстоящие друг от друга на расстоянии $l=1$ мм, заряжены с поверхностной плотностью $+\sigma=1.77 \cdot 10^{-3}$ Кл/м² и $-\sigma=1.77 \cdot 10^{-3}$ Кл/м². Плоскости имеют коаксиальные отверстия радиуса $R=2$ см, причем $l \ll R$. Взяв координатную ось x с началом отсчета O , расположенная на одинаковом расстоянии от отверстий, как показано на рис.1. Найти потенциал и проекцию напряженности электрического поля E_x на ось системы как функцию координаты x . Нарисовать графики.

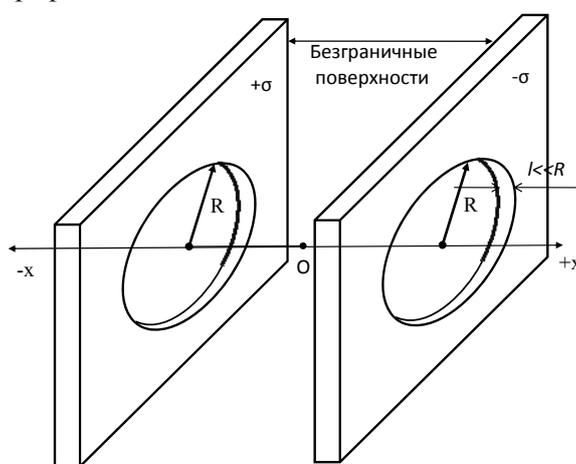


Рисунок 1 - Схема для расчета поля

Проекция вектора напряженности на ось системы и потенциала в зависимости от x выражаются формулами:

$$E_x = -\frac{\sigma \cdot l \cdot R^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (x^2 + R^2)^{3/2}} = c \cdot \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}; \quad V = \frac{\sigma \cdot l}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = c \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}};$$

$R=2$ см; $l=1$ мм; $\sigma=1.77 \cdot 10^{-3}$ Кл/м².

```
>>x=-5:0.1:5; % ввод вектора оси x
```

```
>>R=2;
```

```
>> e0=1./(4.*pi.*9.*10.^9) % ввод электрической постоянной
```

```
e0 = 8.8419e-012
```

```
>> c=q./(2.*e0) % вычисление коэффициента
```

```
c = 1.0005e+007
```

```
>>v= c.*x./(sqrt(x.^2+R.^2)); % вычисление потенциала поля вдоль оси x, проходящей между центрами отверстий.
```

```
>> plot(x,v,'r-') % визуализация
```

```
>> hold on % разрешение нанесения нескольких графиков
```

```
>> grid on % нанесение сетки на графике
```

```
>>Ex=- c.*R.^2./(sqrt(x.^2+R.^2));% вычисление проекции напряженности поля на ось x
```

```
>> plot(x,Ex,'k-') % визуализация
```

```
>>xlabel('X') % нанесение оси x
```

```
>>ylabel('v, E_x') % нанесение оси y
```

```
>>title('V(x), E(x)') % нанесение названия графика
```

Результаты расчетов представлены на Рис.2. Сплошная кривая – зависимость потенциала поля от расстояния x отсчитанная от середины между коаксиальными отверстиями, прерывистая кривая - зависимость напряженности поля от расстояния x отсчитанная от середины между коаксиальными отверстиями.

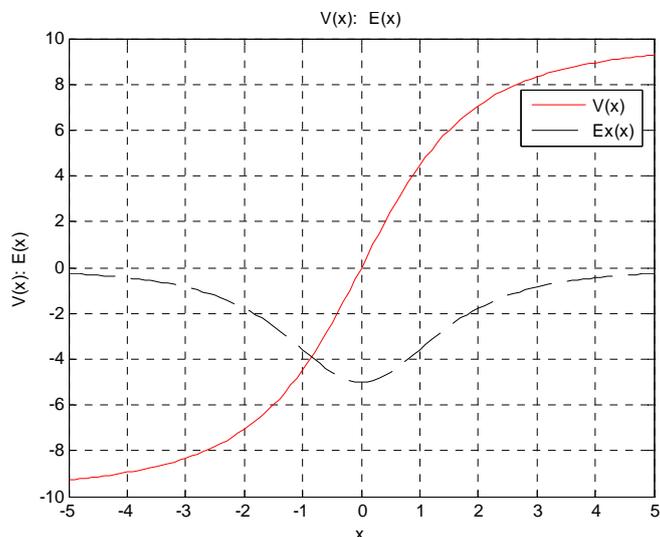


Рисунок 2 - Графики зависимости потенциала и напряженности электрического поля вдоль оси x в зависимости от расстояния x от центра плоскостей.

Из графика видн, что кривая потенциала поля симметрично возрастает относительно центра от нуля до ± 9.3 В, а кривая зависимости напряженности поля от координаты ($x=0$ до $x=\pm 5$) симметрично уменьшается до ± 5 В/м.

Лабораторная работа 2. **Тема работы:** Исследование поля прямого длинного соленоида, имеющего длину l и радиус сечения $R=2$ см. Число витков на единицу длины n . По соленоиду течет ток I .

Цель работы: Найти индукцию магнитного на оси соленоида как функцию x , изобразить график зависимости индукции B/B_0 от отношения x/R . x -отсчитывать вдоль оси соленоида от его торца (где, $B_0 = \mu_0 * n * I = 10$ мТл - магнитная индукция длинного соленоида).

$$B = \mu_0 * n * I * (1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}) / 2, \text{ где } x > 0 \text{ вне соленоида, } x < 0 \text{ внутри соленоида, .}$$

```
>>x=-4:0.1:4; % ввод вектора расстояния
>> B0=10; % ввод параметров
>> R=2; % радиус сечения соленоида
>>B1=B0*(1+(x./(sqrt(x.^2+R.^2))))./2); % вычисление проекции индукции магнитного поля на
ось x
>> t=x./R;
>> Y1=B1./B0;
>>B2=B0*(1-(x./(sqrt(x.^2+R.^2))))./2);
>> Y2=B2./B0;
>>plot(t,Y1,'k-',t,Y2,'k--') % визуализация
>>grid on % нанесение сетки
>>xlabel('x/R') % нанесение оси x
>>ylabel('B/B0 ') % нанесение оси y
>>title('Y=F(t)')
>>legend('B1/B0, x<0, B2/B0,x>0')
```

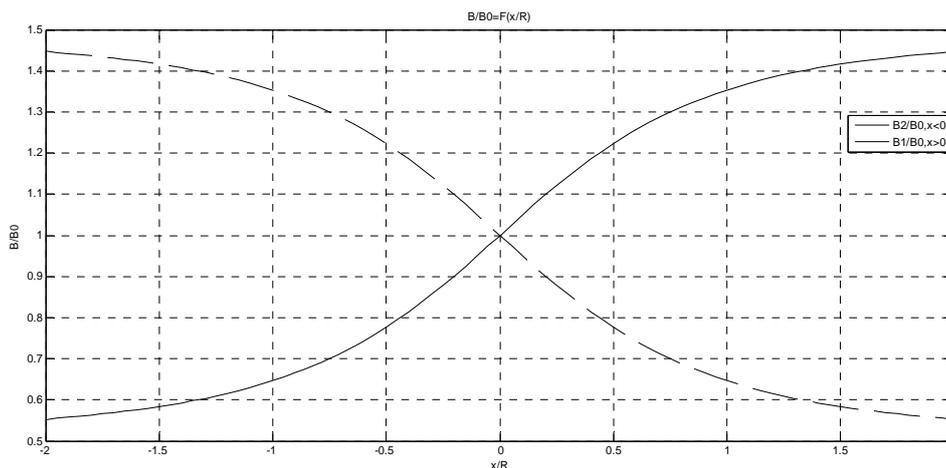


Рисунок 3 - Зависимость индукции магнитного поля соленоида вдоль его оси внутри и снаружи от отношения расстояния x к радиусу его сечения

Результат представлен на рисунке 3 из которого видно, что индукции магнитного поля соленоида вдоль его оси внутри и снаружи симметричны и возрастают с увеличением расстояния x от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.
- [2] Де Кортэ Эрик. Инновационные перспективы обучения и преподавания в сфере высшего образования в XXI в. (пер. с англ.Е. Шадринной). Вопросы образования. 2014. № 3. С. 8–29.
- [3] Бушуев Л.Г. Формирование информационной компетентности на уроках физики. Вопросы образования. № 88. 2011. С. 11–22.
- [4] Свириденко О.В. «Основы термодинамики». Разработка урока физики (10 класс) с использованием ЭОР. Вопросы образования. № 88. 2011.С. 11–22.
- [5] Кормильцева Л.А. Урок-проект "Атомная физика". Вопросы образования. №97.2011.С23 34.
- [6] Блохина С.Н. Разработка урока физики в 8 классе «Преломление света». Вопросы образования. №98. 2011. С 41-59.
- [7] Петрякова Л.Л. Коэффициент полезного действия. Конспект урока по физике, 7 класс Вопросы образования. № 114. 2013. С. 31-45.
- [8] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.
- [9] Хертел Г. Сениченков Ю.Б, Новик Л.В. «Сэр Ньютон, что вы думаете о компьютерном обучении» — Журнал «Компьютерные инструменты в образовании», Санкт-Петербург, Информатизация образования, № 1, 2003 - С. 60–66.
- [10] Кавтрев А.Ф. «Лабораторные работы к компьютерному курсу «Открытая физика». Равномерное движение. Моделирование неупругих соударений». Газета «Физика», №20, 2001. С. 5–8.
- [11] Фрадкин В.Е. «Освоение учителями способов реализации образовательного потенциала новых информационных технологий в процессе повышения квалификации». -Автореферат дис.канд. пед. наук. СПб. 2002 - 25 с.
- [12] Кавтрев А.Ф. Опыт использования компьютерных моделей на уроках физики. «Вопросы Интернет-образования» № 3, 2002.
- [13] Гомулина Н.Н. Методика проведения компьютерной лабораторной работы с использованием мультимедиа курса «Открытая физика 2.5». «Взаимодействие параллельных токов», 2003. <http://www.college.ru/physics/op25part2/planning/teach/lessons.html>
- [14] Леонов Н. Ф. Использование компьютеров при обучении физике. «Вопросы Интернет-образования» № 2, 2001.
- [15] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. Конференции с международным участием. Томск 2011, С 210-215.
- [16] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Модель бланка организации самостоятельного выполнения учениками компьютерных лабораторных работ. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [17] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е., Абдураимов Р. Методика применения закономерностей фото- и комптонэффекта, модели бланков организации выполнения компьютерной лабораторной работы. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [18] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Модель урока на тему собирающей и рассеивающей линзы. Известия НАН РК, серия физ.мат., №2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [19] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П.А., Рустемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию дифракции света. Изв. НАН РК, серия физ.мат., №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [20] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию движения заряженных частиц в магнитном поле и работы масс-спектрометра. Изв. НАН РК, серия физ.мат., №1(299), Алматы, 2015, С 80-87.

- [21] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию колец Ньютона. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [22] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию интерференции света. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136.
- [23] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию эффекта Доплера. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [24] Кабылбеков К.А. Организация выполнения компьютерной лабораторной работы. Учебное пособие. Шымкент, 2015, 77 стр.
- [25] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43.
- [26] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Аширбаев Х.А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию электромагнитных колебаний. Изв. НАН РК, серия физ.мат., №1(305), 2016, С 111-116.
- [27] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Бердалиева Ж., Джумагалиева А.И. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами. Изв. НАН РК, серия физ.мат., №1(305), 2016, С 135-140.
- [28] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Қозыбақова Г.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарного процесса. Изв НАН РК, серия физ. Мат., №2 2016 г. С 92-97.
- [29] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Абекова Ж.А., Нуруллаев М.А. Модель бланка организации выполнения исследовательских заданий по физике. Вестник НАН РК, №3, 2016, С 67-73.
- [30] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев, Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е. Исследование работы газа на компьютерной модели Вестник НАН РК, №2 2016. С83-88
- [31] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйеркулова Ж.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний. Изв. НАН РК, серия физ. мат №2 2016г. С84-91.
- [32] Кабылбеков К.А. Мадияров Н.К., Саидахметов П.А. Самостоятельное конструирование исследовательских заданий компьютерных лабораторных работ по термодинамике. Труды IX Международной научн-методической конференции. Преподавание естественных наук (биологии, физики, химии) математики и информатики. Томск-2016, С 93-99.
- [33] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию реактивного сопротивления катушки индуктивности в цепи переменного тока. Вестник НАН РК, 2017, №1, С 77-82.
- [34] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А. Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию изотерм реального газа. Изв. НАН РК, серия физ. мат., №1, 2017, С 77-83.
- [35]. Дьяконов В.П. MATLAB учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 533с.

REFERENCES

- [1] Nazarbayev N.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012.
- [2] De Corte, Erik. Innovative perspectives of learning and teaching in higher education in the twenty-first century (translated from English. E. Shadrina). The issue of education. 2014. №3. P 8-29.
- [3] Bushuev, L. G. Formation of information competence in physics lessons. The issue of education. № 88. 2011. P 11-22.
- [4] Sviridenko O. V. "Fundamentals of thermodynamics". Development of a physics lesson (class 10) using the ESM. The issue of education. P 88. 2011. P 11-22.
- [5] Kormil'tsev L. A. Lesson-project "Nuclear physics". The issue of education. № 97. 2011. P 23-34.
- [6] Blokhin S. N. Development of a physics lesson in the 8th grade "Refraction of light". The issue of education. № 98. 2011. With 41-59.
- [7] Petryakova L. L. efficiency. A summary of the lesson on physics, 7th grade education. № 114. 2013. P 31-45.
- [8] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1». 2001.
- [9] Hertel G. Senichenkov Yu B, Novick L. V. "Sir Newton, what do you think about computer training" — Journal "Computer tools in education", Saint-Petersburg, Informatization of education, № 1, 2003 - P 60-66.
- [10] Kavtrev A.F. «Laboratory operations to a computer course« Open physics ». The uniform motion. Modelling of inelastic collisions». - the Newspaper of "Physicist", №20, 2001, P 5-8.
- [15] Kabylybekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011г., P.210-215.
- [16] Kabylybekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P82-89.
- [17] Kabylybekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P114-121.
- [18] Kabylybekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P286-294.

- [19] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Saidahmetov P. A., Rustemova T. Zh., Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P71-77.
- [20] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Takibaeva G.A., Saparbaeva E. M., Bajdullaeva L. E., Adineeva S.H.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), 2015, P80-87.
- [21] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Saidahmetov, P. A., Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, №1 (299), 2015, P14-20.
- [22] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, 2015, P131-136
- [23] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, 2015, P155-160.
- [24] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. 2015 , 284 p.
- [25] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, 2015. P 40-43.
- [26]. Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., H. A. Ashirbaev, Omarova G. Sh., Berdalieva J. Model Blanca organization of computer laboratory works on research of electromagnetic oscillations. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), 2016, P111-116.
- [27]. Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omarova G. Sh., Berdalieva J., Dzhumagalieva A. I. Model Blanca computer organization laboratory study of the interaction between two infinitely long parallel conductors with currents. News NAN RK, series physical-mat., №1(305), 2016, P 135-140.
- [28] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A., Omashova G.S.H., Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P 92-97.
- [29] Kabyzbekov K.A., Omashova G.S.H., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P 98-103.
- [30] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A., Ashirbaev H. A., Abdubaeva Ph.I., Doskanova A.E. Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN PK №2 2016. P 83-88.
- [31] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh., Serikbaeva G.S., Sujerkulova Zh. N. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P 84-91.
- [32]. Kabyzbekov K. A. Madjarov N. T., Saidahmetov P. A. An Independent design research assignments, computer laboratory work on thermodynamics. Proceedings of the IX International scientific-methodical conference. Teaching natural Sciences (biology, physics, chemistry) mathematics and computer science. Tomsk-2016, P 93-99.
- [33]. Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh Organization computer laboratory work on the study of reactance inductor in an ac circuit. The bulletin of NAN RK №1, 2017. P 77-82.
- [34]. Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Omashova G.Sh., Ashirbaev H. A., Abekova J. A. Organization of computer laboratory works on the study of the isotherms of a real gas. News NAN RK, series physical-mat., №1, 2017, P 77-83.
- [35]. Dyakonov V.P. MATLAB training course. - Spb.: Peter, 2001. – 533p.

Х.К. Аширбаев, К.А. Кабылбеков, Х.А. Абдрахманова, А.И. Джумагалиева, Ж.Б. Кыдырбекова

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

МАТЛАВ БАҒДАРЛАМА ПАКЕТІН ҚОЛДАНЫП ЭЛЕКТР ЖӘНЕ МАГНИТ ӨРІСТЕРІН ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫ ҰЙЫМДАСТЫРУ

Аннотация. MATLAB бағдарлама пакетін қолданып электр және магнит өрістерін зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастырудың үлгісі ұсынылады. Электр өрісін зерттеу үшін белгілі тығыздықпен зарядталған екі шексіз жазықтық қарастырылған. Жазықтықтар бетінде олардың ара қашықтығынан радиустары көп үлкен сақина тәрізді коаксиалды екі тесік жасалған.

Электр өрісінің потенциалы мен кернеулік векторының горизонталь өске проекциясының x координатаға тәуелдігін есептеуге арналған бағдарлама құрылған. Есептеу басы тесіктерден бірдей қашықтықта орналасқан нүктеден басталады. Есептеу нәтижелері бір графикалық терезеде салынған өріс потенциалы мен кернеулік векторының горизонталь өске проекциясының x координатаға тәуелділік графиктері ретінде берілген.

Магнит өрісін зерттеу үшін тік ұзын тоғы бар соленоид қарастырылған. Соленоидтың ұзындығы мен қимасының радиусы және орам санының тығыздығы берілген. Магнит өрісінің соленоид өсі бойындағы индукциясының x қашықтыққа тәуелділігін зерттеу үшін есептеу бағдарламасы құрылған. Қашықтық соленоидтың бір шетінен бастап есептеледі. Есептеу нәтижелері анықталған магниттік индукцияның шексіз ұзын соленоидтың индукциясына қатынасының x қашықтықтың соленоид өіімен радиусына қатынасына тәуелділік графигі түрінде берілген.

Зерттеу нәтижелері студенттермен бірлесіп талқыланады.

Кілттік сөздер: зарядталған шексіз жазықтық, зарядтар тығыздығы, тесік, электр өрісінің кернеулігі мен потенциалы, соленоид, орма санының тығыздығы, ток күші, магнит өрісінің индукциясы.

МАЗМУНЫ

<i>Бердібай С.Б., Парецкая Н.А., Сабитов А.Н., Исламов Р.А., Тамазян Р.А., Токмолдин С.Ж., Ильин А.И., Мартиросян К.С.</i> Иод және оның құрылымымен фенилалалиннің кешенді комплексі	5
<i>Кабышев А.М., Кутербеков К.А., Пенионжкевич Ю.Э., Маслов В.А., Мендибаев К., Соболев Ю.Г., Лукьянов С.М., Кабдрахимова Г.Д., Азнабаев Д., Курманжанов А.Т.</i> Өлшеу кезіндегі модификацияланған трансмиссионды әдіс негізінде – реакциялардың толық өлшемдерінің кателіктерін және ұшып келуші бөлшектердің энергиясы анықтау.....	10
<i>Бердібай С.Б., Парецкая Н.А., Сабитов А.Н., Исламов Р.А., Тамазян Р.А., Токмолдин С.Ж., Ильин А.И., Мартиросян К.С.</i> Иод және оның құрылымымен фенилалалиннің кешені комплекс фенилаланина с иодом и его структура.....	19
<i>Жұмағұлова Қ.Н., Рамазанов Т.С., Машеева Р.У., Донко З.</i> Үш өлшемді Юкава жүйесінің диффузия коэффициентіне сыртқы магнит өрісінің әсері.....	25
<i>Грушевская Е.А., Лебедев И.А., Темиралиев А.Т., Федосимова А.И.</i> Асимметриялы ядролардың өзара әрекеттерінде снарядтың ядросының толық талқандану жағдайларының сипаттамаларын зерттеу.....	30
<i>Асқарова А., Жұмаханова А.С., Құдайкұлов А., Ташев А.А., Қалиева Г.С.</i> Айнымалы жылу ағынының қатысуымен көлденең қимасының жылу және жылу окшаулаумен бөлек тұрақты жылуфизикалық жай-күйін зерттеу энергиясының әдісі.....	38
<i>Абишев М., Кенжебаев Н., Кенжебаева С., Джанибеков А.</i> Реакторлық нейтрондармен әсерлесудегі катализдық қоспаның изотоптық құрамын және энергия шығаруын есептеу.....	48
<i>Абишев М., Хасанов Н.</i> Жылулық нейтрондардың катализдық қоспамен (Pb, Bi, Po) әсерлесуін "IBUS" компьютерлік бағдарламалау кешенімен жобалау.....	53
<i>Алдабергенова Т.М., Ганеев Г.З., Кислицын С.Б., Досболаев М.К.</i> Графит бетінің термиялық эрозиясы мен құрылымына импульстік плазмалық сәулелендірудің ықпалы.....	57
<i>Жақып К.Б.</i> Стокса және Навье теңдеулерінің генеалогиялары. Дәрежелік реологиялық заңдар және теңдеулер.....	64
<i>Жаугашева С.А., Валиолда Д.С., Джансейтов Д.М., Жусупова Н.К., Сериков Ж., Айтжан Ф.</i> Теоретическое исследование кулоновского развала гало ядер ¹¹ Be, ¹⁵ C.....	81
<i>Жаугашева С.А., Сайдуллаева Г.Г., Нурбакова Г.С., Хабыл Н., Турарбекова М.М.</i> В(Bs) Мезонның ауыр мезондарға ыдырау қасиетін релятивистік әсерлесуін ескере отырып анықтау	86
<i>Қошанов Б.Д., Нұрыкенова Ж.С.</i> Жоғарғы ретті эллиптикалық теңдеулер үшін жалпылаған Дирихле - Нейман есебінің шешілімі туралы.....	95
<i>Құралбаев З.К., Оразаева А.Р., Рахимжанова З.М.</i> Жоғары көтерілген магма заттарының әсерінен болатын астеносферадағы қозғалыстың механика-математикалық моделі.....	103
<i>Мұқашев К.М., Казаченок В.В., Алиева М.Е.</i> Ғарыштық бөлшектер тұрғысынан физиканың іргелі проблемаларын оқытудың парадигмасы туралы жаңа көзқарастар.....	112
<i>Мырзақұл Т.Р., Таушинова А.С., Белисарова Ф.Б., Мырзақұл Ш.Р.</i> Гаусс-Бонн инвариантымен минималды емес байланыс кезіндегі <i>k</i> - эссенцияның инфляциялық моделі.....	120
<i>Омашова Г.Ш., Спабекова Р.С., Қабылбеков К.А., Саудахметов П.А., Абдрахманова Х.К., Арысбаева А.С.</i> Изохоралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісінің тапсырмаларын өз бетінше құрастыру.....	127
<i>Рябкин Ю.А., Рақыметов Б.А., Айтмукан Т.</i> Көміртек қабықшасының ЭПР-мәліметі негізінде қатты отын жалынының парамагниттік қасиетін анықтау мүмкіндігі.....	134
<i>Спабекова Р.С., Омашова Г.Ш., Қабылбеков К.А., Саудахметов П.А., Серикбаева Г.С., Актурева Г.К.</i> Тоқ көзін қосқанда және ажыратқанда тізбектегі токкүшінің өзгеруін зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастыруда матлав бағдарламасын қолдану.....	139
<i>Ташенова Ж.М., Калдарова М., Мусайф М.</i> Жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы бар үшөлшемді есептің тұрақты температуралы күйіндегі сандық сипаттамасы.....	148
<i>Ташенова Ж.М., Мусайф М., Калдарова М.</i> Термосерпімділікті есептеудегі энергетикалық әдісі.....	155
<i>Тұрғанбай Қ.Е., Қалдыбекова С.У.</i> Жоғарғы мектепте информатика пән мұғалімнің ойлау қабілетін жетілдіру ерекшеліктері.....	163
<i>Шоманов А.С., Ахмед-Заки Д.Ж., Амиргалиев Е.Н., Мансурова М.Е.</i> Кілттерді Mapreduce үлгісінде тарату есебі туралы	167
<i>Бакирова Э.А., Искакова Н.Б., Уаисов Б.</i> Параметрі бар фредгольм интегралдық- дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты шеттік есепті шешудің бір алгоритмі туралы	173
<i>Ақылбаев М.И., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Коэффициенті тұрақты, бірінші ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеудің сингуляр әсерленген Коши есебін аргументтің ауытқыту әдісі арқылы шешу.....	181
<i>Рустемова К.Ж., Шалданбаев А.Ш., Ақылбаев М.И.</i> Коэффициенттері тұрақты, екінші ретті кәдімгі дифференциалдықтеңдеудің сингуляр әсерленген Коши есебін аргументтің ауытқыту әдісі арқылы шешу.....	193
<i>Аширбаев Х.К., Кабылбеков К.А., Абдрахманова Х.А., Джумағалиева А.И., Кыдырбекова Ж.Б.</i> MATLAB бағдарлама пакетін қолданып электр және магнит өрістерін зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру.....	206

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бердибай С.Б., Парецкая Н.А., Сабитов А.Н., Исламов Р.А., Тамазян Р.А., Токмолдин С.Ж., Ильин А.И., Мартиросян К.С.</i> Комплекс фенилаланина с иодом и его структура.....	5
<i>Кабышев А.М., Кутербеков К.А., Пенионжкевич Ю.Э., Маслов В.А., Мендибаев К., Соболев Ю.Г., Лукьянов С.М., Кабдрахимова Г.Д., Азнабаев Д., Курманжанов А.Т.</i> Статистические и систематические погрешности, полное сечение реакции, γ -спектрометр.....	10
<i>Бердибай С.Б., Парецкая Н.А., Сабитов А.Н., Исламов Р.А., Тамазян Р.А., Токмолдин С.Ж., Ильин А.И., Мартиросян К.С.</i> Комплекс фенилаланина с иодом и его структура.....	19
<i>Джумагулова К.Н., Рамазанов Т.С., Машеева Р.У., Донко З.</i> Влияние внешнего магнитного поля на коэффициент диффузии трехмерной Юкава системы.....	25
<i>Грушевская Е.А., Лебедев И.А., Темиралиев А.Т., Федосимова А.И.</i> Исследование событий полного разрушения ядра снаряда во взаимодействиях асимметрических ядер.....	30
<i>Аскарова А., Жумаханова А.С., Кудайкулов А., Ташев А.А., Калиева Г.С.</i> Энергетический метод в исследовании установившегося теплофизического состояния стержня переменного сечения при наличии теплового потока, теплообмена и теплоизоляции.....	38
<i>Абишев М., Кенжебаев Н., Кенжебаева С., Джанибеков А.</i> Расчет изотопного состава каталитического материала при облучении реакторными нейтронами.....	48
<i>Абишев М., Хасанов М.</i> Моделирование взаимодействия тепловых нейтронов каталитическим составом (Pb,Bi,Po) с помощью программного комплекса "IBUS".....	53
<i>Алдабергенова Т.М., Ганеев Г.З., Кислицин С.Б., Досболаев М.К.</i> Влияние импульсного плазменного облучения на термическую эрозию и структуру поверхности графита.....	57
<i>Джакупов К.Б.</i> Генезис уравнений Стокса и Навье. Степенные реологические законы и уравнения.....	64
<i>Жаугашева С.А., Валиолда Д.С., Джансейтов Д.М., Жусупова Н.К., Сериков Ж., Айтжан Ф.</i> ^{11}Be , ^{15}C Гало ядроларының кулондық күйреуін теориялық зерттеу.....	81
<i>Жаугашева С.А., Сайдуллаева Г.Г., Нурбакова Г.С., Хабыл Н., Турарбекова М.М.</i> Определение свойств тяжелого В(Bs)-мезона в рамках релятивистского характера взаимодействия.....	86
<i>Кошанов Б.Д., Нуриенова Ж.С.</i> О разрешимости обобщенной задачи Дирихле - Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка.....	95
<i>Куралбаев З.К., Оразаева А.Р., Рахимжанова З.М.</i> Механико-математическая модель движений в астеносфере под воздействием поднимающихся мантийных веществ.....	103
<i>Мукашев К.М., Казаченок В.В., Алиева М.Е.</i> О новых взглядах на парадигму обучения фундаментальным проблемам физики на примере частиц космического происхождения.....	112
<i>Мырзақұл Т.Р., Таукенова А.С., Белисарова Ф.Б., Мырзақұл Ш.Р.</i> Инфляционная модель k -эссенции при неминимальной связи с инвариантом Гаусса-Боннэ.....	120
<i>Омашова Г.Ш., Саббекова Р.С., Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Абдрахманова Х.К., Арысбаева А.С.</i> Самостоятельное конструирование заданий для выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию изохорного процесса.....	127
<i>Рябкин Ю.А., Ракыметов Б.А., Айтмуқан Т.</i> О возможности определения парамагнитных характеристик пламени твердого топлива на основе ЭПР-данных углеродных пленок.....	134
<i>Саббекова Р.С., Омашова Г.Ш., Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Серикбаева Г.С., Актуреева Г.К.</i> Организация компьютерных лабораторных работ по исследованию тока включения и выключения с использованием пакета программ MATLAB.....	139
<i>Ташенова Ж.М., Калдарова М., Мусайф М.</i> Численное обоснование одномерности некоторой трехмерной задачи установившегося температурного состояния при наличии теплового потока, теплообмена и теплоизоляции.....	148
<i>Ташенова Ж.М., Мусайф М., Калдарова М.</i> Энергетический метод в решении задач термоупругости.....	155
<i>Турганбай К.Е., Қалдыбекова С.У.</i> Особенности развития мышления учителя информатики в высшей школе.....	163
<i>Шоманов А.С., Ахмед-Заки Д.Ж., Амирғалиев Е.Н., Мансурова М.Е.</i> О задаче оптимизации распределения ключей в Mapreduce модели.....	167
<i>Бакирова Э.А., Искакова Н.Б., Уайсов Б.</i> Об одном алгоритме решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром.....	173
<i>Ақылбаев М.И., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом методом отклоняющегося аргумента.....	181
<i>Рустемова К.Ж., Шалданбаев А.Ш., Ақылбаев М.И.</i> Решение сингулярно возмущенной задачи Коши, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, методом отклоняющегося аргумента.....	193
<i>Аширбаев Х.К., Кабылбеков К.А., Абдрахманова Х.А., Джумағалиева А.И., Кыдырбекова Ж.Б.</i> Организация компьютерной лабораторной работы по исследованию электрического и магнитного полей с использованием пакета программ MATLAB.....	206

CONTENTS

<i>Berdibay S.B., Paretskaya N.A., Sabitov A.N., Islamov R.A., Tamazyan R.A., Tokmoldin S.Zh., Ilin A.I., Martirosyan K.S.</i> Phenylalanine - iodine complex and its structure.....	5
<i>Kabyshv A.M., Kuterbekov K.A., Penionzhkevich Yu.E., Maslov V.A., Mendibayev K., Sobolev Yu.G., Lukyanov S.M., Kabdrakhimova G. D., Aznabayev D. T., Kurmanzhanov A. T.</i> Errors in the total reaction cross sections and energies of incident particles measured using modified transmission technique	10
<i>Berdibay S.B., Paretskaya N.A., Sabitov A.N., Islamov R.A., Tamazyan R.A., Tokmoldin S.Zh., Ilin A.I., Martirosyan K.S.</i> Phenylalanine complex with iodine and its structure.....	19
<i>Dzhumagulova K.N., Ramazanov T.S., Masheyeva R.U., Donkó Z.</i> Effect of magnetic field on diffusion coefficients of the three-dimensional yukawa systems.....	25
<i>Grushevskaya E.A., Lebedev I.A., Temiraliev A.T., Fedosimova A.I.</i> Study on events with complete destruction of projectile nucleus in interactions of asymmetric nuclei	30
<i>Askarova A., Zhumakhanova A.S., Kudaykulov A., Tashev A.A., Kaliyeva G.S.</i> The energy method in the study of steady-state thermophysical condition of a rod of variable cross section in the presence of heat flow, heat exchange and thermal insulation.....	38
<i>Abishev M., Kenzhebayev N., Kenzhebayeva S., Dzhanbekov A.</i> Calculation of isotopic composition of catalytic material under radiation by reactor neutrons.....	48
<i>Abishev M., Khassanov M.</i> Simulation of the thermal neutrons interaction with catalytic composition (Pb, Bi, Po) by "IBUS" software.....	53
<i>Aldabergenova T.M., Ganeyev G.Z., Kislitsin S.B., Dosbolaev M.K.</i> Effect of pulsed plasma irradiation on thermal erosion and structure of graphite surface.....	57
<i>Jakupov K.B.</i> Genealogy of the Stokes and Navier equations. Degree rheological laws and equations.....	64
<i>Zhaugasheva S.A., Valiolda D.S., Janseitov D.M., Zhussupova N.K., Serikov Zh., Aitzhan F.</i> Theoretical study of the coulomb breakup of the halo nuclei ^{11}Be , ^{15}C	81
<i>Zhaugasheva S.A., Saidullaeva G.G., Nurbakova G.S., Khabyl N., Turarbekova M.M.</i> Determination properties of heavy decay in the B(Bs) meson in the framework of the relativistic character of the interaction.....	86
<i>Koshanov B.D., Nurikenova J.</i> On solvability of the generalized Dirichlet-Neiman problem for a high order elliptic equation.....	95
<i>Kuralbaev Z.K., Orazaeva A.R., Rahimzhanova Z.M.</i> Mechanical-mathematical model of kinematics in the asthenosphere under the influence of rising mental substances.....	103
<i>Mukashev K.M., Kazachenok V.V., Alieva M.E.</i> About new look at the paradigm of study fundamental problems of physics of cosmic the example of origin.....	112
<i>Myrzakul T.R., Taukenova A.S., Belisarova F.B., Myrzakul S.R.</i> Inflation model of k -essence for non minimally coupled Gauss-Bonnet invariant.....	120
<i>Omashova G. Sh., Spabekova R.S., Kabylbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Abdrakhmanova KH.K., Arysbaeva A.S.</i> Independent designing of tasks for performance of computer laboratory work on the investigation of the isophoric process... <i>Ryabikin Yu.A., Rakymetov B.A., Aitmukan T.</i> On the possibility of determination of paramagnetic characteristics of flame of solid fuel on the basis of epr-data carbon films.....	127
<i>Spabekova R. S., Omashova G.SH., Kabylbekov K. A., Saidakhmetov P. A., Serikbaeva G.S., Aktureeva G.K.</i> Organization of computer laboratory works on the research of turnonand turnoff current with the use of matlab program package	139
<i>Tashenova Zh., Kaldarova M., Mussaif M.</i> One-dimensional numerical substantiation of some three-dimensional problem steady state temperature in the presence of heat flow, heat exchange and thermal insulation.....	148
<i>Tashenova Z., Mussaif M., Kaldarova M.</i> Energy method in decision problems thermoelasticity.....	155
<i>Turganbay K.E., Kaldibekoba S.U.</i> Features of thinking of the teacher of Informatics in high school.....	163
<i>Shomanov A.S., Akhmed-Zaki D.Zh., Amirgaliyev E.N., Mansurova M.E.</i> About the problem of key distribution in Mapreduce model	167
<i>Bakirova E.A., Iskakova N.B., Uaisov B.</i> On the algorithm for solving of a linear boundary value problem for fredholm integro-differential equation with parameter.....	173
<i>Akylbaev M.I., Saprigina M.B., Shaldanbaeva A.Sh.</i> Solution of a singularly perturbed Cauchy problem, for an ordinary differential equation of the first order with a constant coefficient, by the method of a deviating argument.....	181
<i>Rustemova K.Zh., Shaldanbaeva A.Sh., Akylbaev M.I.</i> Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for an ordinary second-order differential equation with constant coefficients by the method of a deviating argument.....	193
<i>Ashirbaev H.A., Kabylbekov K. A., Abdrakhmanova H. K., Dzhumagalieva A.I., Kydyrbekova Zh.B.</i> Organization of computer laboratory works to study electric and magnetic fields using the software package matlab.....	206

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60x88¹/₈. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
6,5 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19