

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

ӘЛЪ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

AL-FARABI KAZAKH
NATIONAL UNIVERSITY

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

3 (319)

МАМЫР – МАУСЫМ 2018 ж.

МАЙ – ИЮНЬ 2018 г.

MAY – JUNE 2018

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2018

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. чл.-корр. (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2018

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. corr. member. (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2018

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 5 – 13

41.19.31, 41.19.33

523.61; 523.64; 523.68; 523.682

A. Serebryanskiy¹, I. Reva¹, M. Krugov¹, Fumi Yoshida^{2,3}¹Fesenkov Astrophysical Institute, Observatory-23, Almaty, Kazakhstan;²Planetary Exploration Research Center, Chiba Institute of Technology, 2-17-1 Tsudanuma, Narashino, Chiba 275-0016, Japan;³Department of Planetology, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe, 657-8501, Japan
E-mail: alex@aphi.kz, reva@aphi.kz, krugov@aphi.kz, fumi.yoshida.ermei@gmail.com**RESULTS OF PHOTOMETRICAL ANALYSIS
OF ASTEROID (3200) PHAETHON**

Abstract. We present the results of photometry of the Phaethon asteroid from CCD observations obtained on the Zeiss-1000 telescope of the Tien Shan astrophysical Observatory (TSO) in three Johnson-Cousin filters, B, V and R. The light curves are obtained, the values of the stellar magnitudes in the standard photometric system, as well as the color indices (B-V) and (V-R) are determined. Mean values of stellar magnitudes at unit heliocentric and geocentric distances: $M_B=16.306\pm 0.033$, $M_V=15.75\pm 0.02$, $M_R=15.36\pm 0.04$. The color indices are $(B-V) = 0.56 \pm 0.03$, $(V-R) = 0.38\pm 0.03$. The analysis of differential light curves is carried out by the methods of Phase Dispersion Minimization (PDM), Lomb-Scargle periodogram (LS) and the analysis of combined statistics (Ψ). As a result, the value of the rotation period of the asteroid is determined. Weighted average value of rotational period over three filters and three methods is 3.6042 ± 0.0004 hours.

Key words: Objects: asteroids; observations: CCD observations; data analysis; methods: lightcurve analysis, photometry

Introduction

The Japanese Aerospace Agency (JAXA/ISAS) is developing the DESTINY+ mission (Demonstration and Experiment of Space Technology for INterplanetary voYage, Phaethon fLyby and dUSt science) under which it is planned to launch the PROCYON space module to the Phaethon asteroid in 2022. The purpose of the mission is to conduct detailed studies of the Phaethon dust envelope, its distribution and chemical composition, as well as the analysis of the surface of the asteroid and study its geology. Knowledge of the geology and origin of the Phaethon can shed light on some issues of the formation of the solar system in general and the formation of the Earth in particular. In preparation for this mission, an international campaign to observe the Phaethon from ground-based observatories, organized by the Planetary Exploration Research Center of the Chiba Institute of Technology (Japan), was conducted in 2017. Active participation in this program is taken by the Fesenkov Astrophysical Institute in Kazakhstan (FAI).

Phaethon is the main body of the Geminid meteor stream and has perihelion at just 0.14 a.u., and at aphelion is at 2.4 a.e. The eccentricity of the orbit of 0.89 and inclination of 85°. The period of revolution of the Phaethon around the Sun is 1.4 years. It belongs to near-Earth objects (NEOS), has spectral type B and a diameter of about 5 km (the largest of NEOS at the moment). The Phaethon albedo is known with low accuracy (0.11 ± 0.20), which makes it difficult to obtain an accurate value of its diameter from photometric observations. At the moment of closest approach to the Sun, the surface of the asteroid can be heated up to 1000 K and above. The period of rotation of the Phaethon around its own axis is about 3.6 hours, but requires clarification. The very shape of the asteroid also needs refinement.

The study of the processes of formation and evaporation of dust and small particles from the surface of the asteroid is of great interest, as it is very important to establish a relationship between the Geminid meteor stream and processes occurring on the Phaethon. Some of the meteors of the Geminid stream are large enough to not completely burn out in the atmosphere of the Earth and fall to its surface. Thus the study of the Phaethon is also important from the point of view of assessing the danger of meteorites. For more information on the Phaethon can be obtained from <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> (HORIZONS Web-Interface).

Table 1 - Dates of the observations of the Phaethon, used filters and the corresponding exposures

Date	Start (JD)	End (JD)	Filter	Exposure
16.11.2017	2458074.227141	2458074.509545	B,V,R	120, 90, 40
19.11.2017	2458077.218988	2458077.493304	B,V,R	120, 90, 40
20.11.2017	2458078.300265	2458078.442163	B,V,R	120, 90, 40
21.11.2017	2458079.294038	2458079.492062	B,V,R	120, 90, 40
22.11.2017	2458080.291865	2458080.492380	B,V,R	120, 90, 40

Observations

Observations of the Phaethon were carried out at the time of its maximum approach to the Earth in November-December 2017 at the Tien Shan Observatory using two meter-class telescopes "Zeiss-1000", equipped with CCD cameras and a set of filters.

This paper presents the results of the analysis of observations obtained on the telescope "Zeiss-1000-East" equipped with Apogee Alta F16M CCD. The CCD size is 4096×4096 pixels. Observations are made in the second binning, so the size of the resulting image is 2048×2048 pixels. The gain=1.36 and readout noise = 16.07 are determined for this observation mode from the analysis of flat field and bias frames. The scale of the resulting image is 0".56 / pixel, giving a FOV (Field Of View) = 19'.22×19'.22. The observations were carried out sequentially in three Johnson-Cousin filters B, V and R, manufactured by Astrodon. Table 1 provides additional information about observation sessions used in this paper.

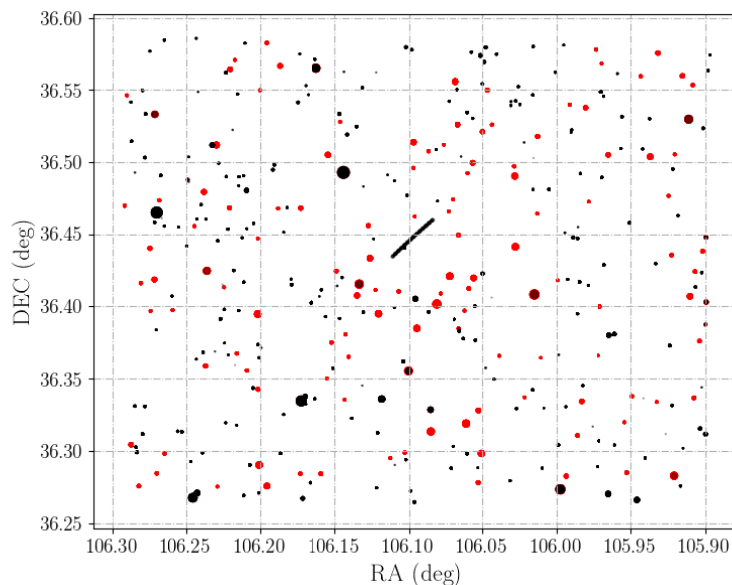


Figure 1 - Map of sources that have passed the procedure of photometry and astrometry. Catalog stars are indicated by colored symbols. Sources not included in the catalog are indicated by black symbols. The size of the symbols depends on the instrumental stellar magnitude. Asteroid track is visible in the center of the frame. The results of observation on 20.11.2017 TSO ("Eastern" Zeiss-1000).

Photometry and astrometry

Evaluation of changes in the values of the coordinates RA and DEC for the longest exposure in the B filter, that is, for 120 seconds, obtained according to the source <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> (HORIZONS Web-Interface). These values, $\Delta RA / 120s = 0''.24$ and $\Delta DEC / 120s = 0''.56$, do not exceed the size of one CCD pixel. For V and R filters, ΔRA and ΔDEC values are even smaller. For astroclimate of TSO with seeing parameter approximately $2''.5 - 3''.0$ it is then possible to consider the PSF profile of the asteroid not very different from the PSF profile of stars and, therefore, the method of photometry procedure described in [1] (the "Method") can be used. At times when the luminosity of the asteroid falls, this technique gives better estimates with fewer errors in both astrometry and photometry. The selection of PSF-photometry is also more reliable in dense stellar fields where it can effectively separate the flux of the asteroid from the flux of the background stars and, thereby, to avoid the gaps in the light curves, which is very critical for accurate determination of the periods of brightness variation of the asteroid.

The output of the Method is a table with the results of photometry and astrometry of the catalog stars and objects that are not included in the catalogs for each CCD frame and for each filter used. To analyze this large array of data, the authors developed software (implemented in python 2.7 under Linux Ubuntu 16.04). The program allows one to construct a map of the location of all sources for which the procedure of photometry and astrometry was carried out successfully. The program automatically saves information in the form of tables for catalog stars and the object selected by the user for further analysis. An example of the resulting map is shown in Figure 1. For sufficiently long observations such a map allows to detect objects with large proper motion. To select out the track of the asteroid, we use the algorithm implemented in *shapely.geometry* method.

Standard field photometry

To convert instrumental stellar magnitudes to the magnitudes in Johnson-Cousins standard photometric system (BVR), observations of the standard fields SA 92 (RA= 00:56:00, DEC=+01:11:00), SA 25 SF3 (RA=06:44:00, DEC=+44:47:00) were made in parallel with the observations of the asteroid. The procedure and parameters of the photometry of the standard stars are similar to the procedure used for photometry of stars on the asteroid field.

The process of transformation to the standard photometric system consists of the following steps. First, the values of instrumental magnitudes taking into account atmospheric extinction are calculated:

$$\begin{aligned} b_0 &= b_{inst} - k_1^B \cdot X_{JD,B} \\ v_0 &= v_{inst} - k_1^V \cdot X_{JD,V} \\ r_0 &= r_{inst} - k_1^R \cdot X_{JD,R}, \end{aligned}$$

where $X_{JD,B}$, $X_{JD,V}$ и $X_{JD,R}$ – airmass at a particular moment of observations for each filter, b_{inst} , v_{inst} and r_{inst} – instrumental stellar magnitude in filters B, V и R, respectively. k_1^B , k_1^V и k_1^R – coefficients of atmospheric extinction in filters B, V and R, respectively. The values of these coefficients can be taken from previous works or determined by the stars of the field of observed objects. In this work, we adopted the following values: $k_1^B = 0.2993$, $k_1^V = 0.2243$ and $k_1^R = 0.2089$. These values were obtained from an analysis of star field for the entire observation period from 16.11.2017, 23.11.2017.

Color indices in the instrumental photometric system are:

$$\begin{aligned} (b - v)_{obs} &= b_0 - v_0 \\ (v - r)_{obs} &= v_0 - r_0 \end{aligned}$$

The color indices in the standard photometric system and the corresponding errors are expressed by the following dependencies:

$$(B - V)'_{std} = C_3^{(B-V)} \cdot (b - v)_{obs} + C_4^{(B-V)}$$

$$\sigma_{(B-V)'_{std}} = |C_3^{(B-V)} \cdot \sigma_{(b-v)_{obs}}|$$

$$(V-R)'_{std} = C_3^{(V-R)} \cdot (v-r)_{obs} + C_4^{(V-R)}$$

$$\sigma_{(V-R)'_{std}} = |C_3^{(V-R)} \cdot \sigma_{(v-r)_{obs}}|$$

The coefficients $C_i^{C.I.}$ are determined by linear fitting of the corresponding relations.

Stellar magnitudes in the standard photometrical system and corresponding errors can be obtained from the following expressions:

$$B'_{std} = b_0 + C_1^B \cdot (B-V)'_{std} + C_2^B$$

$$\sigma_{B'_{std}} = \sigma_{m_b} + |C_1^B \cdot \sigma_{(B-V)'_{std}}|$$

$$V'_{std} = v_0 + C_1^V \cdot (B-V)'_{std} + C_2^V$$

$$\sigma_{V'_{std}} = \sigma_{m_v} + |C_1^V \cdot \sigma_{(B-V)'_{std}}|$$

$$R'_{std} = r_0 + C_1^R \cdot (V-R)'_{std} + C_2^R$$

$$\sigma_{R'_{std}} = \sigma_{m_r} + |C_1^R \cdot \sigma_{(V-R)'_{std}}|$$

The values of the coefficients $C_i^{B,V,R}$ are determined from the linear approximation of corresponding dependencies. The coefficients obtained by this method are presented in table 1.

Table 1 - The transformation coefficients from the instrumental photometric system to the standard BVR photometric system derived by analysis of observation of the standard fields in the period of 16.11.2017 – 22.11.2017

Date Coeff.	16.11	19.11	20.11	21.11	22.11	Average value
C_1^B	-0.0988	0.1756	0.1674	0.1303	0.1357	0.102±0.046
C_1^V	0.0363	0.0532	0.0317	0.0453	0.0515	0.044±0.004
C_1^R	0.0176	0.2225	0.0027	0.0148	0.0043	0.052±0.038
C_2^B	-2.4222	-2.6725	-2.6363	-2.6573	-2.6631	-2.610±0.042
C_2^V	-2.1382	-2.1918	-2.1718	-2.1625	-2.1727	-2.167±0.008
C_2^R	-2.1485	-2.2737	-2.1870	-2.1707	-2.1676	-2.190±0.020
$C_3^{(B-V)}$	0.893	1.132	1.060	1.083	1.083	1.050±0.037
$C_3^{(V-R)}$	1.0489	0.9276	1.1031	1.1202	1.1266	1.065±0.033
$C_4^{(B-V)}$	-0.2631	-0.5399	-0.4368	-0.5311	-0.5287	-0.460±0.047
$C_4^{(V-R)}$	0.0113	0.0543	-0.0038	-0.0138	-0.0184	0.006±0.012

To exclude the trend in the values of the observed stellar magnitudes due to the change in the mutual distance Asteroid-Earth-Sun, their correction and reduction to the standard distance (to one astronomical unit) are necessary. The value of this correction is computed as:

$$\delta m \equiv H_{\lambda} - m_{\lambda} = -5 \cdot \log(R_{au} \cdot \Delta_{au}) + 2.5 \cdot \log \Phi(\alpha)$$

Here R_{au} and Δ_{au} are heliocentric and geocentric distances to the asteroid. In particular, these heliocentric and geocentric distances at the moment of observations at TSO were determined from <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> (HORIZONS Web-Interface) using linear interpolation between the closest moments of time. The phase angle α for the moments of our observations varies from 32° to 31° . In the presented results, $\log \Phi(\alpha) = 0$. However, as shown in [2], this assumption can give an error of determining the value of H_R to one magnitude. In this work, we did not take into account the phase correction $\Phi(\alpha)$ because its value is known with a sufficiently low accuracy and in differential photometry, this probably will give second order correction. The obtained values of stellar magnitudes, reduced to unit heliocentric and geocentric distances, as well as the corresponding color indices, are given in table 2. Variations in the values of the color index are mainly due to errors in the determination of transformation coefficients to the standard photometric system and changes in conditions of observations from night to night. In part, these differences can be explained by variations in magnitude with a period slightly shorter than the duration of one observation session, and, as a consequence, not quite correct estimate of the average value.

Table 2 - Values of stellar magnitudes and color indices for each night of observation in the standard photometric system and corrected by δm .

Parameter/Date	16.11	19.11	20.11	21.11	22.11	Simple average	Weighted average
B	16.347	16.377	16.163	16.310	16.335	16.306 ± 0.033	---
V	15.818	15.754	15.710	15.715	15.732	15.746 ± 0.018	---
R	15.478	15.418	15.218	15.344	15.361	15.364 ± 0.040	---
(B - V)	0.529 ± 0.017	0.622 ± 0.012	0.453 ± 0.013	0.595 ± 0.015	0.603 ± 0.008	0.560 ± 0.028	0.574 ± 0.005
(V - R)	0.341 ± 0.016	0.336 ± 0.012	0.492 ± 0.018	0.371 ± 0.006	0.371 ± 0.013	0.382 ± 0.025	0.371 ± 0.005

Differential lightcurves

To determine the period of changes in the asteroid's brightness caused by its rotation around the axis we analyzed the differential lightcurve calculated as,

$$\overline{\Delta m_{B,V,R}(UT)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_{ref}} w_{B,V,R}^i(UT)} \sum_{i=1}^{N_{ref}} (m_{B,V,R}(UT) - m_{B,V,R}^i(UT)) \cdot w_{B,V,R}^i(UT)$$

Here $m_{B,V,R}(UT)$ – stellar magnitude of the asteroid at particular moment of observation in filter B, V or R, $m_{B,V,R}^i(UT)$ – corresponding magnitude i -th reference star, N_{ref} – number of reference stars, and

$$w_{B,V,R}^i(UT) = \frac{1}{(\sigma_{B,V,R}^i(UT))^2} \text{ – weight of each observation and}$$

$$\sigma_{B,V,R}^i(UT) = \sqrt{\sigma_{m_{B,V,R}}^2(UT) + \sigma_{m_{B,V,R}^i}^2(UT)}$$

$\sigma_{m_{B,V,R}}^2(UT)$ and $\sigma_{m_{B,V,R}^i}^2(UT)$ – error of stellar magnitude of the asteroid and i -th reference star at the moment of observation UT in filter B, V and R.

All stars of the field for which there is data in catalogs and for which photometry procedure has been successfully carried out are used as reference stars. Figure 2 shows the values of $\overline{\Delta m_{B,V,R}(UT)}$.

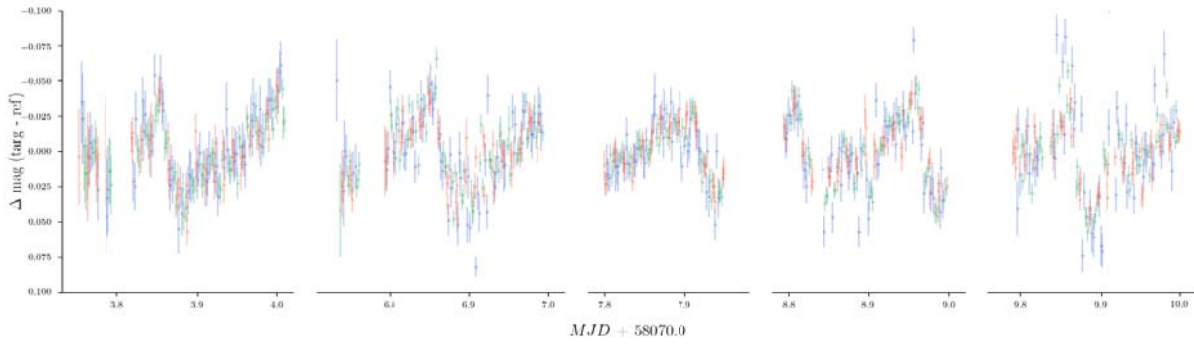


Figure 2 - Differential lightcurve of the Phaethon in different filters (indicated by different colors) based on the results of photometric observations in filters B, V and R, made on the Zeiss-1000 (TSO) in November 2017

Three methods to analyze the variation of $\overline{\Delta m_{B,V,R}(UT)}$ were applied to accurately determine the rotation period of the Phaethon. The first method is based on the analysis of the Lomb-Scargle (LS) periodogram [3]. The second method uses the analysis of the mixed statistics [4],

$$\Psi = \frac{2 \cdot LS}{\theta}$$

where, LS — value of LS-periodogram power, a θ — Lafler-Kinman function [5] of the form:

$$\theta = \frac{\sum_1^N w_i \cdot (\overline{\Delta m_{B,V,R}^i} - \overline{\Delta m_{B,V,R}^{i-1}})^2}{\sum_1^N (\overline{\Delta m_{B,V,R}^i} - \langle \overline{\Delta m_{B,V,R}} \rangle)^2 \cdot \sum_1^N w_i}$$

N — total number of observation, $\overline{\Delta m_{B,V,R}^i}$ — value of differential magnitude,

$w_i = 1/\sigma_{\overline{\Delta m_{B,V,R}^i}}^2$ — weight, $\sigma_{\overline{\Delta m_{B,V,R}^i}}$ — uncertainty of $\overline{\Delta m_{B,V,R}^i}$ value.

As can be seen in Figure 1, the differential lightcurve of the Phaethon has a rather irregular shape and a third method was used to accurately estimate the period in lightcurve variation (the period of rotation of the asteroid) – the search for the period for the minimum dispersion of the phase curve (PDM – Phase Dispersion Minimization). This method is more adequate for analyzing the variation of an irregular shape, since the algorithm of the method does not depend on the shape of the signal. We use *pyPDM* procedure of the *pyastronomy* package (<https://github.com/sczesla/PyAstronomy>). The period was searched in the range from 2 to 5 hours with period step of $4 \cdot 10^{-4}$ hours.

The results of PDM method and Ψ -analyses are shown on figure 3 and on figure 4, respectively.

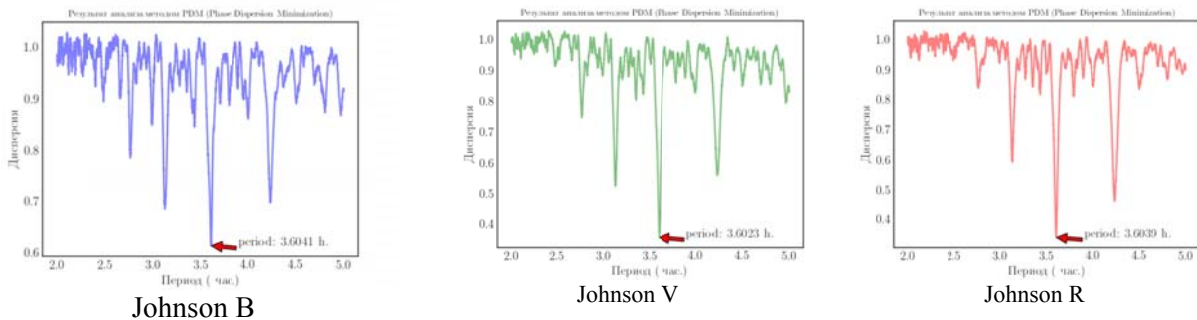


Figure 3 - The results of determination of the period of Phaethon's differential magnitude variations in filters B, V and R (designations under the corresponding panels) shown in Figure 2, by the PDM (Phase Dispersion Minimization) method.

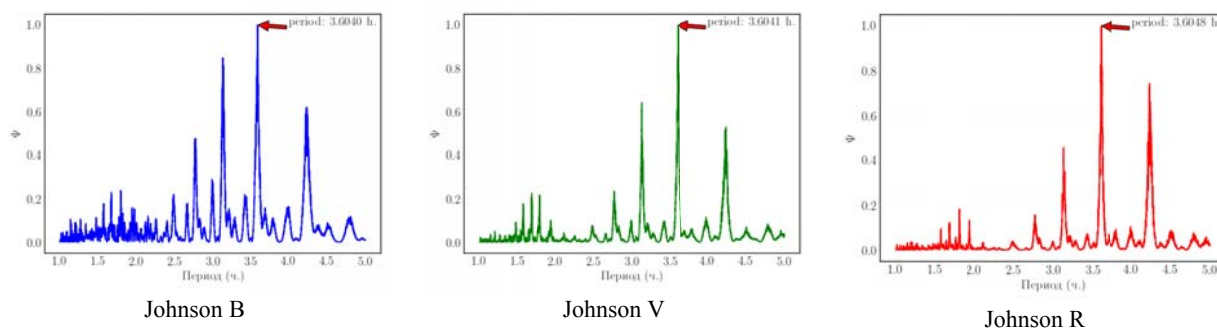


Figure 4 - The results of the determination of the period of the Phaethon magnitude variation in filters B, V and R (designations under the corresponding panels) from the analysis of the combined function Ψ (see text) based on the lightcurve shown in figure 2

Table 3 - The values of the period of Phaethon's magnitude variation in the filters B, V, R, obtained by three methods of analysis of the differential lightcurves, corresponding weighted average of the periods and uncertainty of their determination

Filter \ Method	PDM	LS	Ψ	average
B	3.6041 ± 0.0038	3.6038 ± 0.0012	3.6040 ± 0.0012	3.6039 ± 0.0008
V	3.6023 ± 0.0031	3.6039 ± 0.0011	3.6041 ± 0.0011	3.6039 ± 0.0008
R	3.6039 ± 0.0023	3.6044 ± 0.0010	3.6048 ± 0.0010	3.6045 ± 0.0007
average	3.6035 ± 0.0017	3.6041 ± 0.0006	3.6044 ± 0.0006	3.6041 ± 0.0004 3.6042 ± 0.0004

For each method, the exact position of the maximum (period of magnitude variation) and the corresponding value of error are determined by non-linear approximation of the profile of the peak by a Gaussian function. The obtained period values and corresponding errors for all three methods, for all three filters, as well as the average values obtained as the weighted average and the corresponding error, are shown in table 3.

Figure 5 shows the phase curves obtained by convolution of differential light curves in filters B, V and R with the corresponding periods obtained by PDM

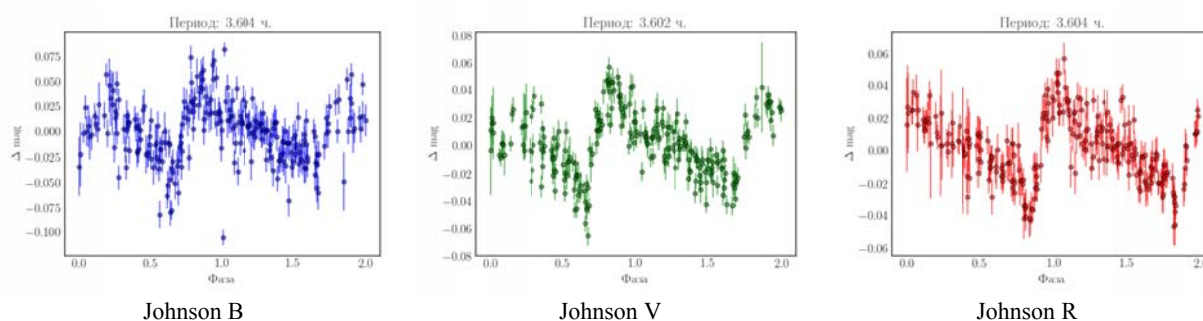


Figure 5 - Phase curves obtained from differential lightcurves by convolution with the corresponding periods obtained from the analysis using method of PDM (figure 3)

Discussion and Conclusions

Using the results of observations of the Phaethon during its maximum approach to the Earth (16.11.2017-23.11.2017), as well as standard stars for the same period of observations, the values of the color indices of this asteroid were determined: $(B-V) = 0.56 \pm 0.03$ and $(V-R) = 0.38 \pm 0.03$. The obtained values are in good agreement with the value $(B-V) = 0.58 \pm 0.01$ of [6] and with the value $(V-R) = 0.34$ of [7], and with the result $(B-V) = 0.59 \pm 0.01$ and $(V-R) = 0.35 \pm 0.01$ of [8].

Our results also agree well with the later estimations $(B-V) = 0.62 \pm 0.01$ and $(V-R) = 0.33 \pm 0.06$ [9], which were obtained from the observations in the period 2011.11-2012.02. However, our result differs statistically significantly from the values $(B-V) = 0.67 \pm 0.02$ and $(V-R) = 0.32 \pm 0.02$ of [2], although the value $M_R = 15.46$ (at $\alpha=36^\circ$) from the same work is close (within 3σ) to our value 15.364 ± 0.040 (at $\alpha=32^\circ$).

The relative good agreement of color indices obtained in different epochs of observation suggests that the reflective properties of the surface of the asteroid have not changed much in 2 decades and, perhaps, the assumption that the Phaethon is most likely an "active asteroid", rather than a "dying comet" [10, 12], has its grounds.

From the analysis of differential lightcurves of using three methods, the value of the rotational period of the Phaethon of 3.6042 ± 0.0004 hours is obtained, which is consistent within 1σ range with the result 3.6032 ± 0.0008 hours of [13], but having higher accuracy and is closer to the values of 3.604 of [9] and 3.603958 of [11].

Acknowledgements

This work is supported by the Targeted Financing Program BR05336383 Aerospace Committee of the Ministry of Defense and Aerospace Industry of the Republic of Kazakhstan). This work made use of *PyAstronomy* (<https://github.com/sczesla/PyAstronomy>) given, e.g., as a footnote. The authors express their gratitude to G. K. Aimanova for constructive comments, suggestions and editing of the manuscript.

REFERENCES

- [1] A. Serebryanskiy, S. Serebryakov, A. Ergeshev Methodology of pipeline data reduction for astrometry and photometry of a large array of CCD observations // NEWS of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. 2018. (submitted)
- [2] Jewitt, D., Properties of Near-Sun Asteroids // The Astronomical Journal. 2013. V. 145. Issue 5. P.133 DOI: <https://doi.org/10.1088/0004-6256/145/5/133>
- [3] VanderPlas, Jacob T.; Ivezić, Željko, Periodograms for Multiband Astronomical Time Series // The Astrophysical Journal. 2015. V.812. Issue 1. P.18 DOI: 10.1088/0004-637X/812/1/18
- [4] Saha, Abhijit, Vivas, A. Katherina A Hybrid Algorithm for Period Analysis from Multiband Data with Sparse and Irregular Sampling for Arbitrary Light-curve Shapes // The Astronomical Journal. 2017. V.154. Issue 6. P.231 DOI: 10.3847/1538-3881/aa8fd3
- [5] Lafler, J., Kinman, T. D. An RR Lyrae Star Survey with the Lick 20-INCH Astrograph II. The Calculation of RR Lyrae Periods by Electronic Computer // ApJS. 1965. V.11. P. 216 DOI: 10.1086/190116
- [6] Michel, Patrick, DeMeo, Francesca E., Bottke, William F. Asteroids IV // Asteroids IV. 2015. Patrick Michel, Francesca E. DeMeo, and William F. Bottke (eds.), University of Arizona Press, Tucson, 895 pp. ISBN: 978-0-816-53213-1, DOI: 10.2458/azu_uapress_9780816532131
- [7] Skiff, B. A., Buie, M. W., Bowell, E. Near-Earth Asteroid Physical Observations: 1993-1995 // American Astronomical Society. – 1996. – DPS meeting, Bulletin of the American Astronomical Society. V.28. P.1104
- [8] Dundon, L. // Masters' thesis. 2005. University of Hawaii
- [9] Pan, S., Abe, S., Kinoshita, D., Rotation Period and Lightcurve Analysis of Asteroid (3200) Phaethon // Asteroids, Comets, Meteors, Proceedings of the conference. – 2012. – Niigata, Japan. LPI Contribution No. 1667, id.6294
- [10] Cochran, A.L., Barker, E.S. Minor planet 1983TB – A dead comet? // Icarus (ISSN 0019-1035), vol. 59, Aug. 1984, p. 296-300 1984 DOI: 10.1016/0019-1035(84)90029-0
- [11] Hanuš, J., Delbo', M., Vokrouhlický, D., Pravec, P., Emery, J. P., Alí-Lagoa, V., Bolin, B., Devogèle, M., Dyvig, R., Galád, A., Jedicke, R., Kornoš, L., Kušnirák, P., Licandro, J., Reddy, V., Rivet, J.-P., Világi, J., Warner, B. D. Near-Earth asteroid (3200) Phaethon: Characterization of its orbit, spin state, and thermophysical parameters // Astronomy & Astrophysics. – 2016. – V.592. – A34. – P.15 DOI: 10.1051/0004-6361/201628666
- [12] Licandro J., Campins, H., Mothé-Diniz, T., Pinilla-Alonso, N., de León J., The nature of comet-asteroid transition object (3200) Phaethon // Astronomy and Astrophysics. 2007. V.461. P.751 DOI: 10.1051/0004-6361:20065833
- [13] Ansdell, M., Meech, K.J., Hainaut, O., Buie, M.W., Kaluna, H., Bauer, J., Dundon, L. Refined rotational period, pole solution, and shape model for (3200) Phaethon // The Astrophysical Journal. 2014. V.793. P.50 DOI: 10.1088/0004-637X/793/1/50

А. Серебрянский¹, И. Рева¹, М. Кругов¹, FumiYoshida^{2,3}

В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Алматы, Қазақстан

²Planetary Exploration Research Center, Chiba Institute of Technology, 2-17-1 Tsudanuma, Narashino, Chiba 275-0016, Japan

³Department of Planetology, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe, 657-8501, Japan

ФАЭТОН (3200) АСТЕРОИДЫНЫҢ ФОТОМЕТРЛІК ТАЛДАУЛАРЫНЫҢ НӘТИЖЕЛЕРІ

Аннотация. Тянь-Шань астрофизикалық обсерваториясында (ТШАО) Джонсон-Кузиннің В, V және R үш филтрінде «Цейсс-1000» телескобында ЗБА-бақылау мәліметтері бойынша Фаэтон астероидының фотометрлік нәтижелері берілген. Жарқырау қисықтары алынды, стандарттық фотометрлік жүйедегі жұлдыздық шаманың мәндері, сонымен бірге (B-V) және (V-R) түс көрсеткіштері анықталды. Гелиоцентрлік және геоцентрлік бірлік қашықтықтағы жұлдыздық шаманың орташа мәндері: $M_B=16.306\pm 0.033$, $M_V=15.75\pm 0.02$, $M_R=15.36\pm 0.04$. Сәйкесінше түс көрсеткіштері: (B-V)=0.56 ± 0.03 , (V-R)=0.38 ± 0.03 . Дифференциалдық жарқырау қисығының талдаулары минимальды дисперсиялы фазалық қисық (PDM), (LS) периодограммасы Ломб-Скаргл (Lomb-Scargle) және (Ψ) аралас статистикалық талдаулар әдістерімен жүзеге асты. Нәтижесінде астероидтың айналу периодының мәні анықталды. Үш әдіс және үш филтр бойынша айналу периодының орташа өлшенген мәні 3.6042 ± 0.0004 сағат.

Тірек сөздер: Объектілер: астероидтар; бақылаулар; ЗБА-бақылаулары; мәліметтердің талдаулары; әдістер: жарқырау қисықтарының талдаулары, фотометрия.

А. Серебрянский¹, И. Рева¹, М. Кругов¹, Fumi Yoshida^{2,3}

¹Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Обсерватория-23, Алматы, Казахстан

²Planetary Exploration Research Center, Chiba Institute of Technology, 2-17-1 Tsudanuma, Narashino, Chiba 275-0016, Japan

³Department of Planetology, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe, 657-8501, Japan

РЕЗУЛЬТАТЫ ФОТОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА АСТЕРОИДА ФАЭТОН (3200)

Аннотация. Представлены результаты фотометрии астероида Фаэтон по данным ПЗС-наблюдений на телескопе «Цейсс-1000» Тянь-Шаньской астрофизической обсерватории (ТШАО) в трех фильтрах, В, V и R Джонсона-Кузина. Получены кривые блеска, определены значения звездных величин в стандартной фотометрической системе, а также показатели цвета (B-V) и (V-R). Средние значения звездных величин на единичных гелиоцентрическом и геоцентрическом расстояниях: $M_B=16.306\pm 0.033$, $M_V=15.75\pm 0.02$, $M_R=15.36\pm 0.04$. Соответствующие показатели цвета: (B-V)=0.56 ± 0.03 , (V-R)=0.38 ± 0.03 . Анализ дифференциальных кривых блеска проведен методами минимальных дисперсий фазовой кривой (PDM), Ломб-Скаргл (Lomb-Scargle) периодограммой (LS) и анализом комбинированной статистики (Ψ). В результате определено значение периода вращения астероида. Средневзвешенное значение периода вращения по трем фильтрам и трем методам 3.6042 ± 0.0004 часа.

Ключевые слова: Объекты: астероиды; наблюдения: ПЗС-наблюдения; анализ данных; методы: анализ кривых блеска, фотометрия

Information about authors:

Serebryanskiy Aleksander - Fesenkov Astrophysical Institute, Head of Observational astrophysics Dpt., alex@aphi.kz;

Reva Inna - Fesenkov Astrophysical Institute, junior scientist, reva@aphi.kz;

Krugov Maxim - Fesenkov Astrophysical Institute, engineer, krugov@aphi.kz;

Fumi Yoshida - Dr., Research Scientist, Planetary Exploration Research Center, Chiba Institute of Technology, 2-17-1 Tsudanuma, Narashino, Chiba 275-0016, Japan, Department of Planetology, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe, 657-8501, Japan.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 14 – 22

UDC 539.23; 539.216.1

**Ye. Yerlanuly^{1,3}, D.G. Batryshev^{1,3}, T.S. Ramazanov², M.T. Gabdullin³,
N.E. Ahmetzhanov³, N.E. Ahanova^{3,4}, O. Omirzhanov¹**

¹Laboratory of Engineering Profile, Al-Farabi Kazakh National University;

²Scientific and Research Institute of Experimental and Theoretical Physics,
Al-Farabi Kazakh National University;

³National Nanotechnological Laboratory of Opened Type, Al-Farabi Kazakh National University
71, Al-Farabiavenue, Almaty, 050040, Kazakhstan;

⁴Kazakh-British Technical University, Kazakhstan

yerlanuly@physics.kzbatryshev@physics.kzramazan@physics.kzgabdullin@physics.kznazym@physics.kz

EFFECT OF PLASMA PARAMETERS ON THE SYNTHESIS OF CARBON NANOMATERIALS BY THE PECVD METHOD

Abstract: This work covers an experimental study of the effect of plasma parameters on the synthesis of carbon materials by the PECVD method. It was found that, depending on PECVD synthesis parameters, in particular, temperature, discharge power, gas pressure, percentage of gas mixture and etc., various carbon nanomaterials are synthesized. The obtained samples were analyzed by using analytical equipment such as Quanta 3D scanning electron microscope (SEM, FEI USA), NThegra Spectra Raman spectroscopy and Leica optical microscope. Thus, the morphology and quality of the structure of the obtained samples (carbon nanoparticles (CNP), carbon nanofibres (CNF) and nanotubes (CNTs), carbon nanowalls (CNWs) and multilayered graphene sheets) were studied by optical and electron microscopies, as well as by the method of combined light scattering. Found, that with the increase of power of the radio-frequency discharge, the production of qualitative nanostructures is complicated by the formation of their nanoclusters. For the synthesis of CNT, it is necessary to control the thickness of catalytic nanolayer, since the quality of CNT structures can be worsened by the formation of thicker nanofibers. The obtained experimental results can be used to determine the optimum PECVD synthesis condition to synthesize various carbon nanomaterials.

Keywords: carbon nanoparticles, carbon nanofibers, carbon nanotubes, carbon nanowalls, multilayer graphene, radio-frequency (RF) discharge plasma.

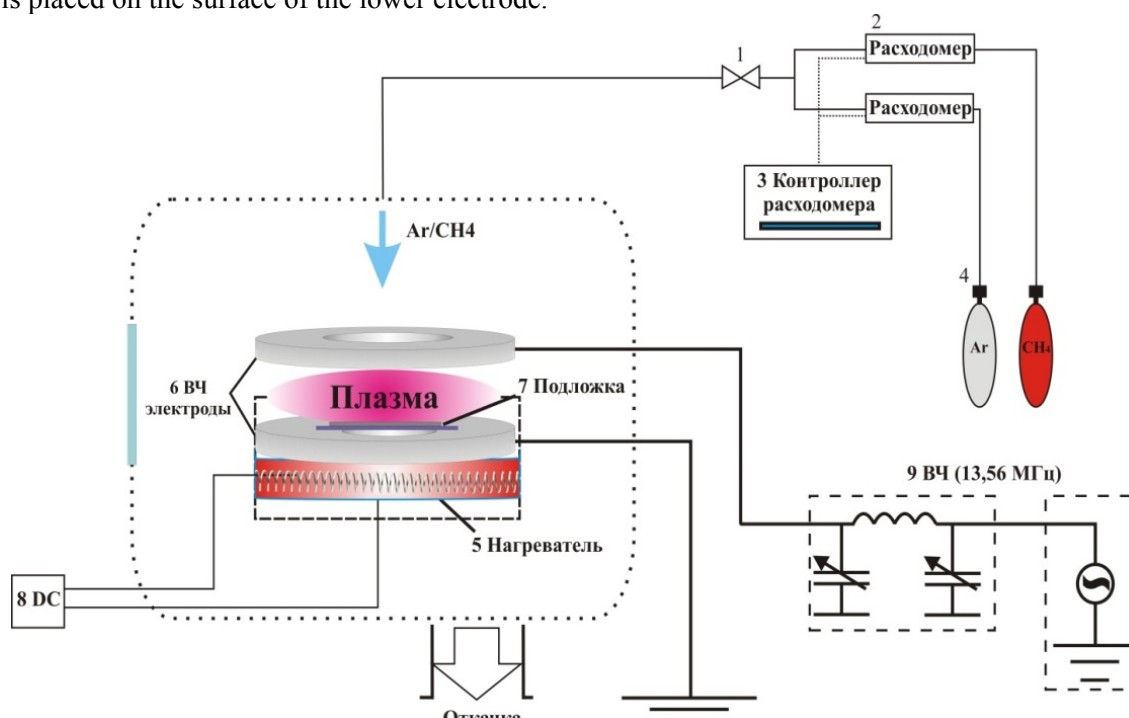
Introduction

Analysis of the state and trends in the modern development of nanoindustry objects allows us to conclude that one of the most promising areas of nanotechnology is the production of carbon nanomaterials (CNMs). As is well known, carbon exists in the solid phase in several modifications, the properties of which sharply differ from each other: carbon nanoparticles [1-2], carbon nanofibres, carbon nanotubes [3-4], graphene [5-6], carbon nanowalls [7- 8], fullerene [9] etc. The research relevance of CNMs is due to the wide range of their practical application in various areas of industry. For example, carbon nanoparticles can find their application in water purification [10,11], automobile tires as reinforcing fillers [12], in determining cancer cells at an early stage [13], etc. Scientists suggest the use of carbon nanotubes as reinforcing elements for the production of high-quality concrete [14,15] in construction. The unique properties of CNTs are also used for medicine purposes like water disinfection, production of antimicrobial coatings and drugs [16] and in targeted drug delivery [17]. CNTs and composites based on them are used in power engineering to store hydrogen [18], to create high-capacity capacitors (supercapacitors) [19]. The unique semiconductor properties of graphene allow them to be used in electronics to create highly sensitive sensors, high-speed electronic devices [20,23] etc. As for carbon

nanowalls (CNW), they are one of the allotropic modifications of carbon, which are vertically oriented graphene sheets [24,25], which find their application for energy storage as a blackbody-like material, for bolometers [26] and solar cells [27] as electrodes for supercapacitors [28,29], etc. Thus, taking into account the relevance of CNM, in this work a method of plasma-enhanced chemical vapor deposition (PECVD) was used for the synthesis of carbon nanomaterials at different plasma parameters.

Experimental part

The scheme of the experimental setup is shown in Fig. 1. The PECVD system consists of a working chamber, a system of radio-frequency electrodes (6), a heating element (5), which reduces the effect of power RF discharge on the process of dissociation of carbon-containing gas for the gas-phase deposition process of a CNT, power supply for heating element (8), a high-frequency (RF) generator (9) for igniting a plasma, a vacuum system and a gas inlet system. The substrate with the catalyst, in this case, a nickel one, is placed on the surface of the lower electrode.



1 - valve, 2 - gas flowmeters, 3 - gas flowmeter controller, 4 - argon and methane gas cylinders,
5 - heating element, 6 - high frequency (RF) electrodes, 7 - substrate, 8 – power supply for heating element,
9 – HF (RF) generator with automatic matching device

Figure 1 – Structure of the PECVD system for the synthesis of nanocomposite materials based on CNTs

The experiment was carried out as follows. First, a silicon substrate with a catalytic nanolayer was annealed to form the islands of the nickel nanoclusters. To do this, the substrate is loaded into the working chamber on the surface of the lower electrode and a vacuum condition is created, after the vacuum is established, the working gas argon (Ar) flow is supplied to a pressure of the order of 1 Torr, the RF plasma is ignited in the power range 1-25 W at the temperature of 400⁰C and processed for 10 minutes. This process is well described in [30]. Further, for the growth of CNTs, a reaction carbon-containing gas, methane, is injected into the working chamber up to a pressure of 1.1-1.6 Torr, and then the synthesis process lasts for 15-30 minutes.

Figure 2 shows photographs of silicon substrates with a nickel catalyst before and after CNT synthesis by the PECVD method. It can be seen that after the synthesis, the surface of the substrate has a soot formation, which indicates the possible deposition of carbon nanostructures.

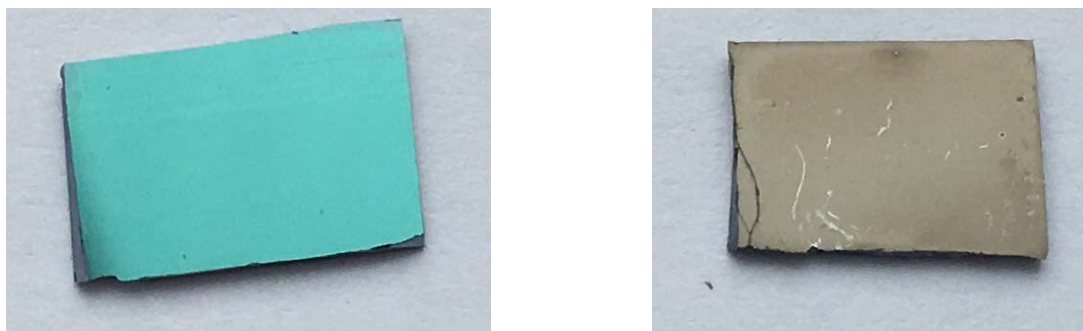


Figure 2 – Silicon substrates with nickel catalyst before (left) and after (right) CNT synthesis by the PECVD method

Results and discussion

The samples synthesized by the PECVD method were investigated by scanning electron microscopy (SEM) and Raman spectroscopy (Raman spectroscopy).

SEM images and Raman spectra of the samples obtained at temperatures 400-450⁰C, pressure of 1.3 Torr and discharge power in the range of 1-10 W are shown in Fig. 3. As can be seen, the surface of the obtained samples has a deposition in the form of carbon nanoparticles with sizes of the order of 50 -100 nm and a carbon film. The absence of CNTs is explained by the low synthesis temperature for the formation of nanoclusters (crystalline structure).

Further, the experimental work was carried out at a temperature of 500⁰C, a gas pressure of methane/argon of 1-1.8 Torr, and a discharge power in the range of 1-25 W.

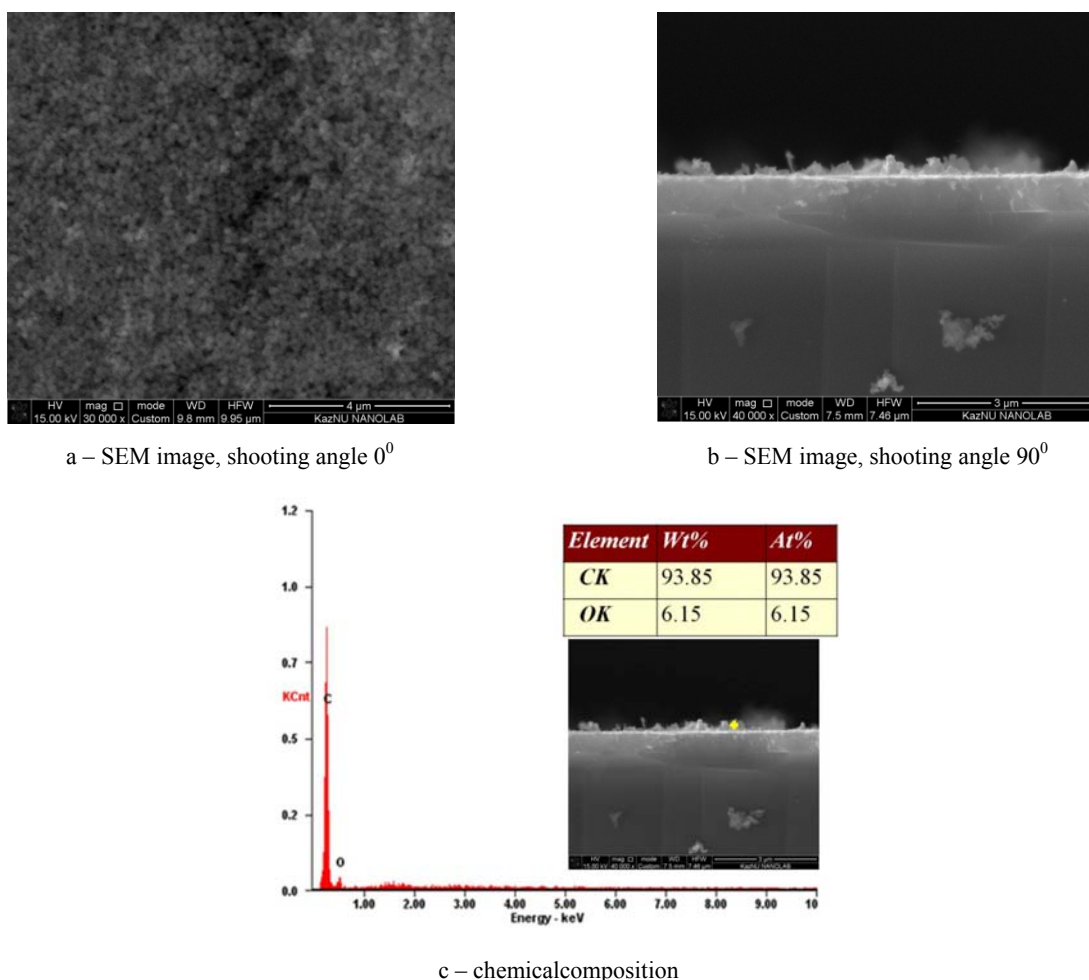


Figure 3 – SEM analysis of samples after PECVD synthesis at a temperature of 400-450⁰C and discharge power of 1-10W

In experiments with synthesis conditions: pressure 1-1.8 Torr, temperature 500⁰C and duration of 20 minutes, carbon nanowires (1-5 W) and nanotubes (5-7 W) were obtained, which was proved by the results of SEM and Raman studies, as well as optical microscopy.

Optical micrographs and SEM images of the obtained samples of carbon nanofibers and nanotubes are presented in Figures 4 and 5, respectively.

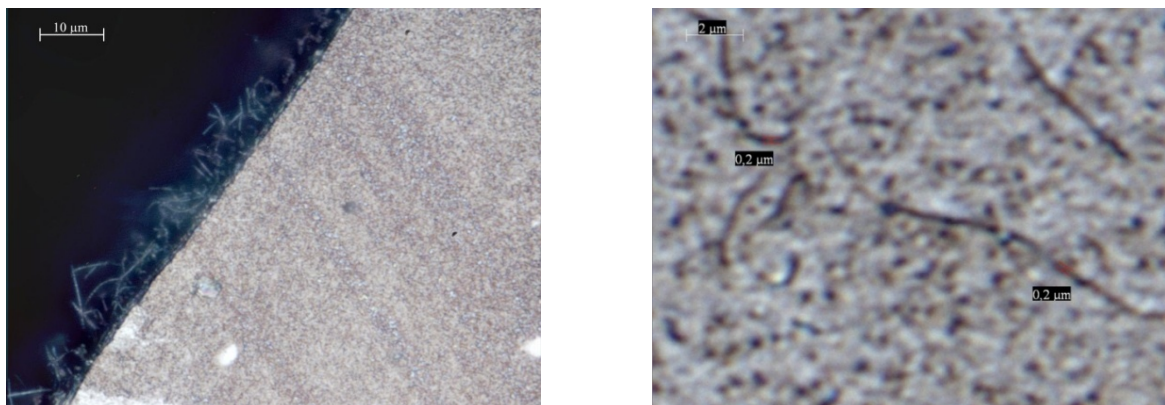
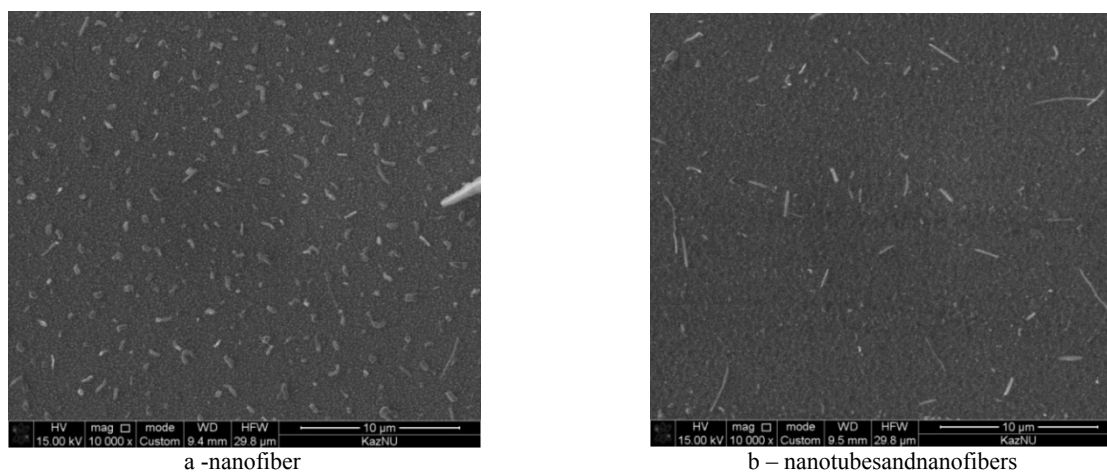


Figure 4 – Optical micrographs of carbon nanofibers synthesized at discharge power of 1-5 W and temperature of 500⁰C



a - nanofiber

b – nanotubes and nanofibers

Figure 5 - SEM images of carbon nanofibers and nanotubes at a discharge power of 1-7 W and temperature of 500⁰C

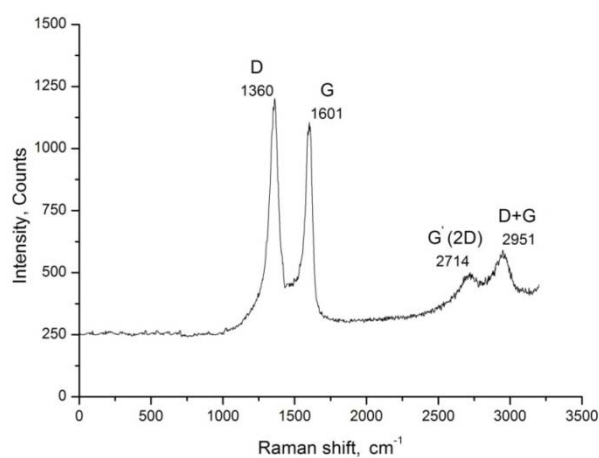


Figure 6 – Raman spectrum of the obtained nanofibers (nanotubes) at a discharge power of 1-7 W and a temperature of 500⁰C

The result of Raman study of the obtained samples is shown in Fig. 6. The obtained spectrum is typical for the multiwalled carbon nanotubes (MWCNT) and demonstrates G mode, which is usually observed in graphite-like materials, D mode, which is associated with defects in the structure, the second harmonic of the D mode - G'(2D) mode and G+D mode, the origin of which is not fully understood yet.

It can be seen from the spectrum that the obtained MWCNTs are not of the high quality. The intensity ratio of D and G peaks, responsible for the perfection of the graphene structure, is equal to 1.1, where for CNTs it is about 1.5 and higher. In addition, the position and partial overlapping of D and G peaks indicate amorphous structure. The low quality of MWCNTs is probably due to the presence of additional constituents like nanofibers, which have higher diameter and more disordered structure.

With the increase in discharge power in the range of 10-15 W, the formation of carbon nanowalls (CNW) was detected, which was confirmed by the results of SEM, Raman analysis (Figures 7-9).

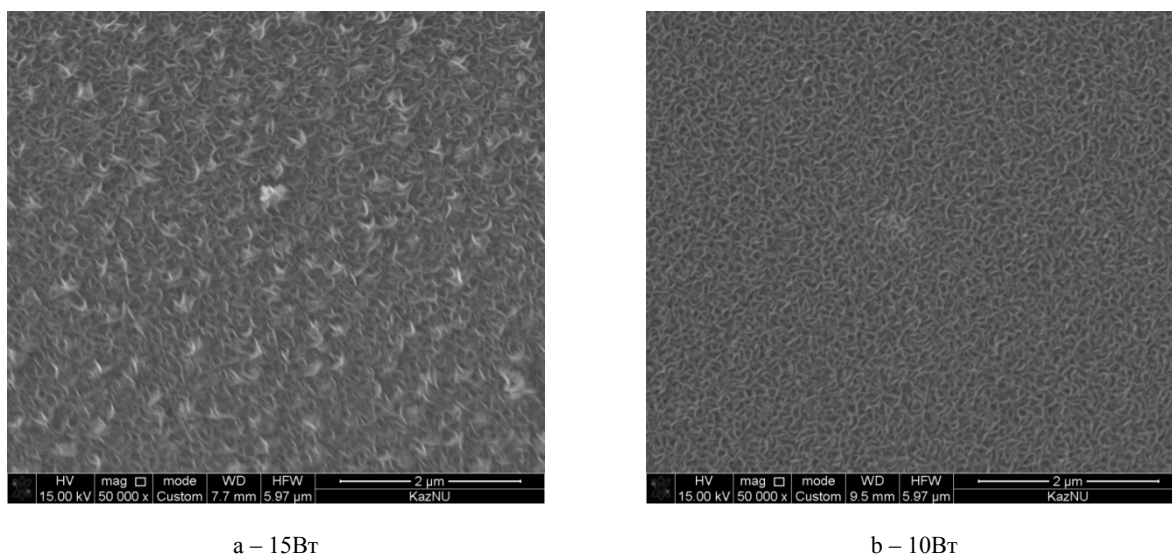


Figure 7 – SEM images of CNW synthesized on Ni/Si substrates at a discharge power of 15 W (a) and 10 W (b) at a temperature of 500°C

As can be seen from the SEM image, after the synthesis process, the surface of the silicon substrate becomes covered with the vertically aligned carbon sheets, also known as carbon nanowalls (CNW). As the discharge power is increased, it is possible to observe the agglomeration of nanolayers - the formation of nanoclusters of the walls (Figures 7a and 8).

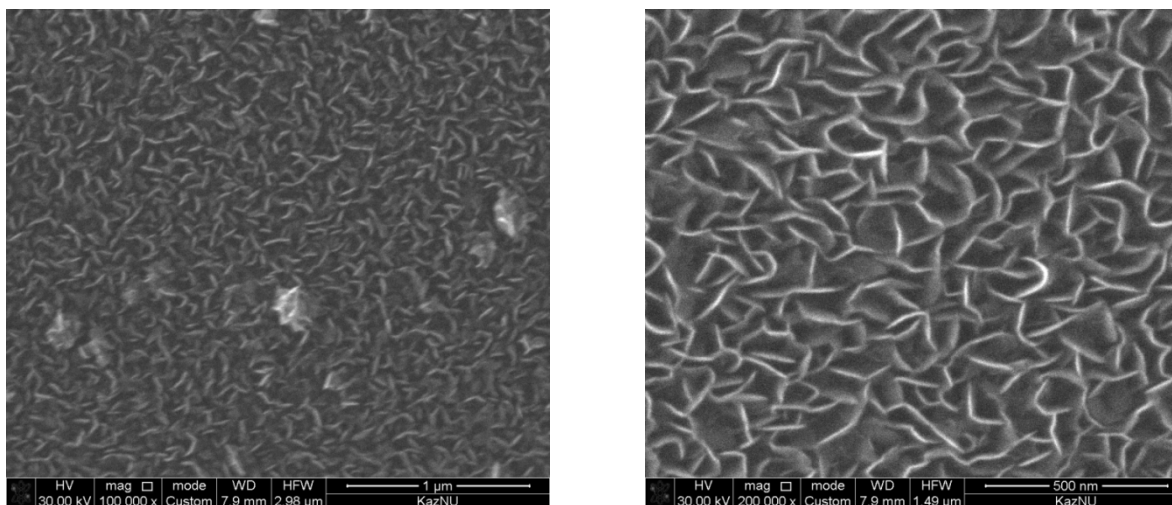


Figure 8 – SEM images of CNW synthesized on Ni/Si substrates at discharge power of 15 W and the temperature of 500°C

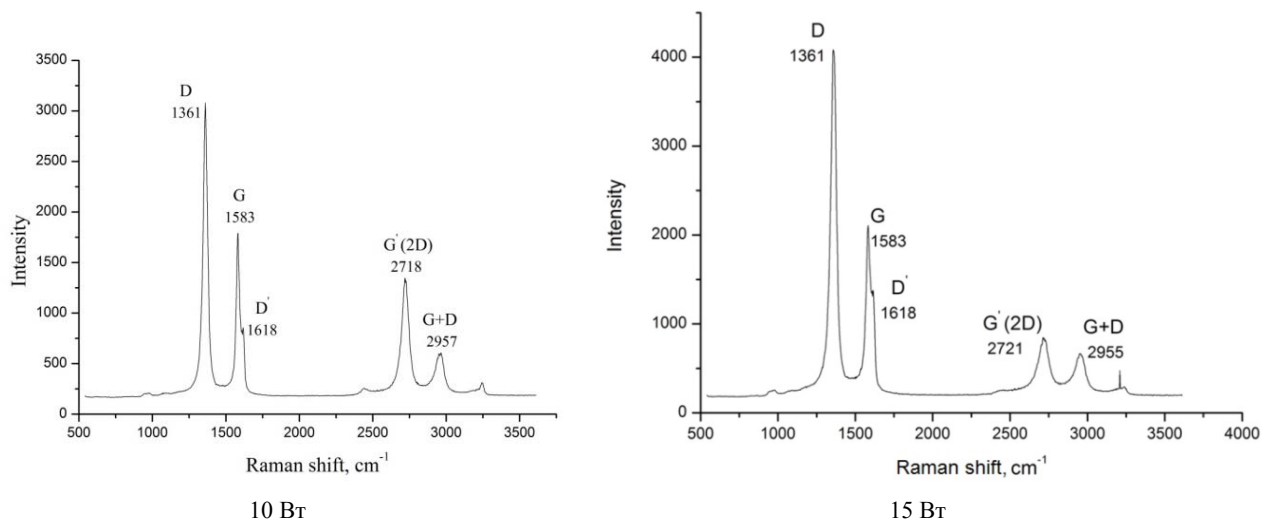
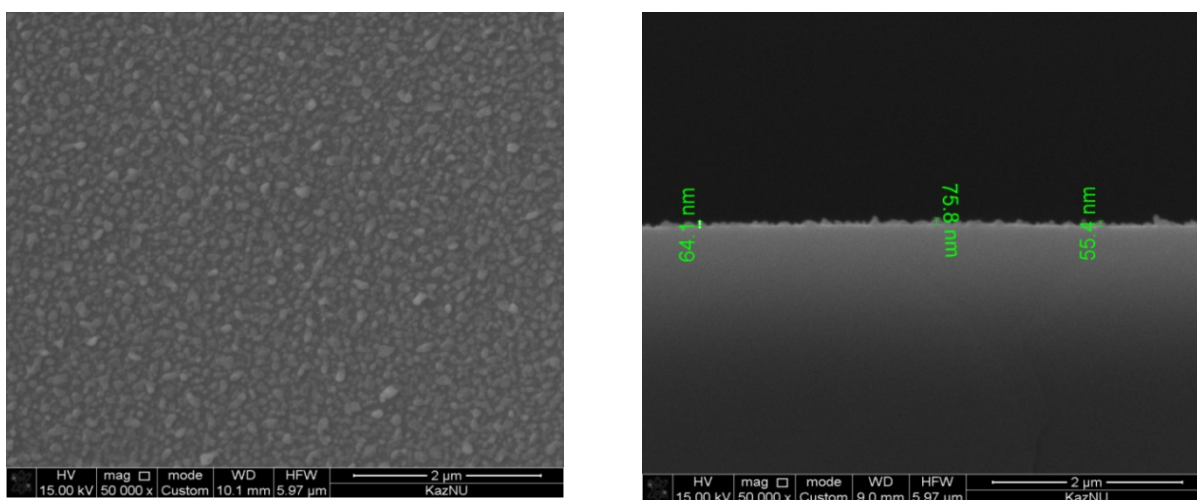


Figure 9– Raman spectrum of CNW synthesized on Ni/Si substrate at discharge power of 10 and 15 W at the temperature of 500°C

The Raman spectrum of the obtained samples corresponds to the typical spectrum of CNW [31-33], while the G-mode, which is usually observed in graphite materials, has a redshifted shoulder - D' peak. The spectrum also contains characteristic D-peak, associated with defects in the sp^2 structures, 2D (G') - peak, which corresponds to the second order of the D-mode and the G+D mode. The intensity ratio of the D and G modes, which indicates the degree of disorder (defectiveness) in the crystal lattice of the graphene sheet, ranges from 1.7 to 1.9. The calculated in-plane correlation length L_a varies from 2.5 to 2.3 nm, the region in which the CNW can be considered as defect-free. As mentioned above, with the increase of discharge power, the agglomeration of nanowalls occurs, and the ratio $I(D)/I(G)$ increases as well, which indicates the formation of defects in the structure.

With a further increase in the discharge power in the range of 20-25 W and under the same parameters of temperature and pressure, multilayer graphene sheets were obtained (Fig. 10,11). As can be seen from the SEM images, the islands of multilayer graphene with a thickness of the order of 50-75 nm were formed on the surface of the silicon substrate. Raman studies indicate that the obtained structures correspond to the graphite-like material. The in-plane correlation length L_a is 2 nm, and the ratio $I(D)/I(G)$ is 1.4.



а – SEM image, shooting angle 0°

б – SEM image, shooting angle 90°

Figure 10 – SEM analysis of the samples after PECVD synthesis at 500°C and discharge power of 15-25 W

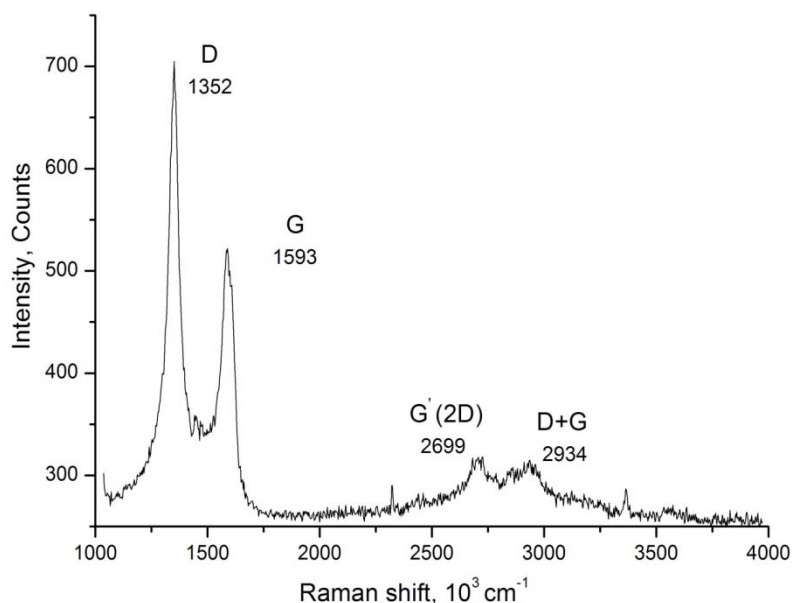


Figure 11 – Raman spectrum of the samples after PECVD synthesis at 500⁰C and discharge power of 15-25 W

Table 1 represents parameters for the synthesis of carbon nanomaterials by PECVD method

Table 1 – Parameters for the synthesis of carbon nanomaterials by PECVD method

Resulting product	Synthesis parameters			
	Pressure, torr	Temperature, ⁰ C	Discharge power, W	Gas mixture
Carbon nanoparticles	1.1-1.6	400-450	1-15	Ar/CH ₄
Carbon nanofibers and nanotubes	1.1-1.6	500	1-7	Ar/CH ₄
Carbon nanowalls	1.1-1.6	500	8-15	Ar/CH ₄
Multilayered graphene	1.1-1.6	500	20-25	Ar/CH ₄

Conclusion

Thus, various carbon nanomaterials were obtained and characterized. It was experimentally revealed that the type of the synthesized nanomaterial depends on the value of discharge power. At temperatures of 400-450⁰C and discharge power of 1-15 W carbon nanoparticles are synthesized, with increasing temperature up to 500⁰C carbon nanostructures are formed, in particular, at discharge power of 1-7 W- carbon nanofibres and nanotubes, 8-15 W- carbon nanowalls, 20-25 W multi-layered graphene. The obtained experimental results can be used to determine the optimum PECVD synthesis condition to synthesize various carbon nanomaterials.

REFERENCES

- [1] Nanoparticle Technology Handbook, Masuo Hosokawa, Kiyoshi Nogi, Makio Naito, Toyokazu Yokoyama (eds.), Elsevier Science, 2007.
- [2] S. C. Ray, ArindamSaha, Nikhil R. Jana, Rupa Sarkar, Fluorescent Carbon Nanoparticles: Synthesis, Characterization, and Bioimaging Application// J. Phys. Chem. C, 2009, 113 (43), pp 18546–18551.
- [3] T. Ikuno, S. Takahashi, K. Kamada, S. Ohkura, S. Honda, M. Katayama, T. Hirao, K. Oura, Influence of the plasma condition on the morphology of vertically aligned carbon nanotube films grown by RF plasma chemical vapor deposition//Surface Review and Letters, 2003. Vol. 10, No. 4. P.611-615.
- [4] T.Kato, R. Hatakeyama, Formation of Freestanding Single-Walled Carbon Nanotubes by Plasma-Enhanced CVD//Chem. Vap. Deposition. 2006. 12, P. 345–352.

- [5] Ning G.Q., Wang H., Zhang X.X., Xu C.G., Chen G.J., Gao J.N., Synthesis and methane storage of binder-free porous graphene monoliths//PARTICULOLOGY. 2013. Vol. 11. №4. P.415-420.
- [6] Shibuta Y., Arifin R., Shimamura K., Oguri T., Shimojo F., Yamaguchi S., Low reactivity of methane on copper surface during graphene synthesis via CVD process: Ab initio molecular dynamics simulation // CHEMICAL PHYSICS LETTERS. 2014. Vol. 610. P.33-38.
- [7] S.Y. Kim, S. K. Shin, H. Kim, Y.-H. Jung, H. Kang, W. S. Choi, G. B. Kweon, Synthesis of Carbon Nanowalls by Microwave PECVD for Battery Electrode // TRANSACTIONS ON ELECTRICAL AND ELECTRONIC MATERIALS. 2015.Vol. 16, No. 4, pp. 198-200.
- [8] S. Kurita, A. Yoshimura, H. Kawamoto, T. Uchida, K. Kojima, M. Tachibana, P. Molina-Morales, H. Nakai, Raman spectra of carbon nanowalls grown by plasma-enhanced chemical vapor deposition// JOURNAL OF APPLIED PHYSICS. 2005. 97, 104320.
- [9] Kroto, H. W.; Heath, J. R.; O'Brien, S. C.; Curl, R. F.; Smalley, R. E., C-60 - Buckminsterfullerene. Nature 1985, 318, (6042), 162-163.
- [10] R. KhaydarovR. KhaydarovEmailauthorO. Gapurova, Application of Carbon Nanoparticles for Water Treatment//Water Treatment Technologies for the Removal of High-Toxicity Pollutants. 2009. Pp. 253-258.
- [11] Simpson A., Pandey R.R., Chusuei C.C., Ghosh K., Patel R., Wanekaya A.K., Fabrication characterization and potential applications of carbon nanoparticles in the detection of heavy metal ions in aqueous media//CARBON. 2018. V.127. P.122-130.
- [12] <http://carboninspired.com/blog/?p=561&lang=en>
- [13] Lu Yю, Wei J.Y., Yao D.S., Pan Z.M., Yao Y., Application of carbon nanoparticles in laparoscopic sentinel lymph node detection in patients with early-stage cervical cancer//PLOS ONE. 2017. V.12, No 9 – e0183834.
- [14] Raki, L.; Beaudoin, J.J.; Alizadeh, R.; Makar, J.M.; Sato, T. Cement and concrete nanoscience and nanotechnology// Materials. 2010. Vol. 3. P. 918-942.
- [15] Cwirzen A.; Habermehl-Cwirzen K.; Penttala V., Surface decoration of carbon nanotubes and mechanical properties of cement/carbon nanotube composites// Adv. Cem. Res. 2008. Vol. 20. P. 65-73.
- [16] Coccinia T., Rodab E., Sarigiannisc D.A., Mustarellid P., Quartaroned E., Profumoe A., Manzoa L. Effects of water-soluble functionalized multi-walled carbon nanotubes examined by different cytotoxicity methods in human as-trocyte D384 and lung A549 cells// Toxicology. 2010. Vol.269. P. 258-269.
- [17] Dumortier H., Lacotte S., Pastorin G., Marega R., Wu W., Bonifazi D., Briand J.P., Prato M., Muller S., Bianco A. Functionalized carbon nanotubes are non-cytotoxic and pre-serve the functionality of primary immune cells//NanoLett. 2006. № 6. P. 1522-1528.
- [18] Frackowiak E.,BéguinF., Electrochemical Storage of Energy in Carbon Nanotubes and Nanostructured Carbons// Carbon. 2002. Vol. 40. P.1775-1787.
- [19] Frackowiak E, Jurewicz K, Delpoux S, Beguin F. Nanotubular materials for supercapacitors//J. Power Sourc. 2001 . Vol.97. P.822–825.
- [20] EliasD.C.,NairR.R., MohiuddinT.M.G., MorozovS.V., BlakeP., HalsallM.P.et. al. Science 323 610 2009.
- [21] Seah T.H., Poh H.L., Chua C.K., Sofer Z., Pumera M., Towards Graphane Applications in Security: The Electrochemical Detection of Trinitrotoluene in Seawater on Hydrogenated Graphene// Electroanalysis. 2014. Vol. 26, №1. P. 62-68.
- [22] Gharekhanlou B., Tousaki S.B., Khorasani S: Bipolar transistor based on graphane. Phys. Conf. Ser 2010, 248:012061.
- [23] Savchenko A: Transforming graphene. Sci 2009, 323:589.
- [24] Y.H. Wu, P.W. Qiao, T.C. Chong, Z.X. Shen. Adv. Mater. 14 (2002) 64.
- [25] S. Kurita, A. Yoshimura, H. Kawamoto, T. Uchida, K. Kojima, M. Tachibana, P. Molina-Morales, H. Nakai. J. App.Phys. 97 (2005) 104320.
- [26] V.A. Krivchenko et al, Sci. Rep. 3 (2013) 3328.
- [27] S.Y. Kim et al. J.Trans. Electrical and electronic materials 16 (2015) 198-200.
- [28] S. Hassan, M. Suzuki, Sh. Mori and A. Abd El-Moneim,, RSC Adv. 4 (2014) 20479.
- [29] H. Matsumura. Thin Solid Films 395 (2001)1.
- [30] Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Yerlanuly Ye., Synthesis of carbon nanotubes by plasma enhanced chemical vapor depositionmethod in radio-frequency capacitive discharge // NAS RK, physico-mathematical series. 2016. Vol.310, № 6, P. 10-16
- [31] S. Kurita, A. Yoshimura, H. Kawamoto, T. Uchida, K. Kojima, M. Tachibana, P. Molina-Morales, H. Nakai. J. App.Phys. 97 (2005) 104320.
- [32] S. Matsumoto, Y. Sato, M. Kamo, N. Setaka.Jpn. J. Appl. Phys. 21 (1982)183.
- [33] R. Liu, Ya. Chi, L. Fang, Zh. Tang and X. Yi., J. Nanoscience and Nanotechnology 14 (2014) 1647–1657.

Е. Ерланұлы^{1,3}, Д.Ф. Батрышев^{1,3}, Т.С. Рамазанов²,
М.Т. Габдуллин³, Н.А. Ахметжанов³, Н.Е. Аханова^{3,4}, О. Омиржанов¹

¹Инженерлі бейіндегізертхана, әл-ФарабиатындағыҚазҰУ

²Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

³Ашық түрдегі ұлттық нанотехнологиялық зертхана, әл-Фарабиатындағы ҚазҰУ,

Қазақстан, 050040 Алматы, әл-Фараби, 71;

⁴Қазақстан-Британтехникалық университеті, Қазақстан, 050000 Алматы, Төлеби көш., 59

ПЛАЗМА ПАРАМЕТРЛЕРІНІҢ КӨМІРТЕКТІ НАНОМАТЕРИАЛДАРДЫҢ PECVD ӘДІСІМЕН СИНТЕЗІНЕ ӘСЕРІ

Аннотация. Аталған жұмыс плазма параметрлерінің көміртекті наноматериалдардың PECVD әдісімен синтезіне әсерін эксперименталды зерттеуге арналған. PECVD параметрлеріне, температура, разряд қуаты, газ қысымы, газдардың пайыздық үлесіне байланысты әртүрлі көміртекті наноматериалдар синтезделетіні анықталды. Алынған үлгілер сканерлеуші электрондық микроскоп Quanta 3D (СЭМ, FEI USA), Рамандық спектрометр NThegra Spectra, оптикалық микроскоп Leica сияқты аналитикалық қондырғылар көмегімен зерттелді. Осылайша, оптикалық және электрондық микроскоп, және де комбинациялық жарық шашырау көмегімен құрылымдардың морфологиясы мен сапасы зерттелді: көміртекті нанобөлшектер (КНБ), көміртекті наноталшық (КНТ) пен нанотүтікше (КНТ), көміртекті наноқабырға (КНҚ) және көпқабатты графен парақшалары. ЖЖ разряд қуатын өсірген кезде наноқабырғалардың нанокластерге құрылуы қиындайдығыны анықталды. КНТ синтезі үшін каталитикалық наноқыбықтықшаның қалыңдығын басқару қажет, себебі КНТ құрылымы нашарлап наноталшықтың өсуіне алып келеді. Алынған нәтижелер, PECVD әдісімен әртүрлі көміртекті наноматериалдарды синтездеуде қолданылуы мүмкін.

Тірек сөздер: көміртекті нанобөлшектер, көміртекті наноталшықтар, көміртекті нанотүтікшелер, көміртекті наноқабырғалар, көпқабатты графен, жоғары жиілікті разряд плазмасы.

УДК 539.23; 539.216.1

Е. Ерланұлы^{1,3}, Д.Ф. Батрышев^{1,3}, Т.С. Рамазанов², М.Т. Габдуллин^{3,4},
Н.А. Ахметжанов³, Н.Е. Аханова^{3,4}, О. Омиржанов¹

¹Лаборатория инженерного профиля, КазНУ им. аль-Фараби;

²Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. аль-Фараби;

³Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, КазНУ им. аль-Фараби,

Казахстан, 050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71;

⁴Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан, 050000 Алматы, ул. Толе-би, 59

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ НА СИНТЕЗ УГЛЕРОДНЫХ НАНОМАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ PECVD

Аннотация. Данная работа посвящена экспериментальному исследованию влияния параметров плазмы на синтез углеродных материалов методом PECVD. Установлено, что в зависимости от параметров PECVD синтеза в частности, температуры, мощности разряда, давление газа, процентное соотношение смеси газов и т.д., синтезируются различные углеродные наноматериалы. Полученные образцы были исследованы с помощью аналитических оборудований, таких как сканирующий электронный микроскоп Quanta 3D (СЭМ, FEIUSA), Рамановский спектроскоп NThegraSpectra, оптический микроскоп Leica. Таким образом, с помощью оптической и электронной микроскопии, а также методом комбинированного рассеяния света были исследованы морфология и качество структуры полученных образцов: углеродные наночастицы (УНЧ), углеродные нановолокна (УНВ) и нанотрубки (УНТ), углеродные наностены (УНТ) и многослойные графеновые листы. Установлено, что с увеличением мощности ВЧ разряда получение качественных наностен усложняется формированием их нанокластеров. Для синтеза УНТ необходимо контроль толщины каталитического нанослоя, так как качество структур УНТ может ухудшиться формированием более толстых нановолокон. Полученные результаты могут быть использованы для определения оптимальных условий PECVD метода для синтеза различных углеродных наноматериалов.

Ключевые слова: углеродные наночастицы, углеродные нановолокна, углеродные нанотрубки, углеродные наностены, многослойный графен, плазма высокочастотного разряда.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 23 – 31

**V.G. Teifel, V.D. Vdovichenko, P.G. Lysenko, A.M. Karimov,
G.A. Kirienko, V.A. Filippov, G.A. Kharitonova, A.P. Hozhenets**

Fessenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan

tejf@mail.ru, vdv1942@mail.ru, lyssenko_petr@mail.ru, karalik0@yandex.ru, gak39@mail.ru, filip-va@mail.ru,
gah38@mail.ru, hogenez@gmail.com

**THE GREAT RED SPOT ON JUPITER:
SOME FEATURES OF THE AMMONIA ABSORPTION**

Abstract. In April 2017, we carried out five cycles of spectral observations of Jupiter to study some optical features of the Great Red Spot (GRS) that is a long-lived giant anticyclonic vortex. Recording the CCD spectrograms of Jupiter's central meridian in each cycle was performing consistently for two hours in the 240° - 310° longitude ranges in steps of about 2° each - before, during and after passage the GRS across the CM. The main objective was to investigate the behavior of the 645 and 787 nm ammonia (NH_3) absorption bands in the GRS region, which before was studied quite a little. The measurements of the profiles and equivalent widths of these bands showed explicitly that ammonia absorption in the GRS is decreased; the decrease is even more than the NH_3 depression in the Northern Equatorial Belt (NEB) that we discovered in 2004. A comparison with the results of the studies of Jupiter in the ranges of thermal infrared and millimeter radiation allowed concluding that the causes of the ammonia absorption decrease are not the same for the NEB and GRS. In the NEB, according to the radio astronomical observations, the gaseous ammonia concentration is really lowered. In the GRS, the NH_3 absorption decrease is caused by the increased cloud volume density. As a consequence of this, the absorption equivalent optical path decreases due to multiple scattering. That is also manifested in the near infrared ammonia and methane absorption bands. Quantitative interpretation requires some further complex studies because of the multiparametric nature of the models that are will be taken.

Keywords: Jupiter, Atmosphere, Clouds, Great Red Spot, Ammonia, Methane, Molecular Absorption Bands, Spectrophotometry.

Introduction

Some important and interesting objects in the study of Jupiter's atmosphere are specific optical and dynamic properties of the Jovian Great Red Spot (GRS). A number of distinctive features of this giant long-lived anticyclonic vortex are already known quite well. The period of its rotation is about 6 terrestrial days. It is known that the GRS makes its own special speed longitude drift, and it is not always regular, and for 300 years GRS has noticeably decreased in diameter [1], which, judging by the early sketches of Jupiter, had reached 40 thousand kilometers. The GRS has specific optical features, for example, its unique red-orange color, which has not yet been explained. But the coloring of Jupiter's cloud belts is also not yet fully explained, although it is very likely that ammonium hydrosulfide (NH_4SH) plays a role in this coloring, because it forms a cloud layer at great depths, below the ammonia layer [2].

In the ranges of thermal infrared [3] and millimeter [4] radiation, the brightness temperature of the GRS is lower in comparison with the surrounding regions, and that indicates a greater opacity for radiation emerging from the deep layers of the Jovian atmosphere.

It should be noted that in spectral ranges with strong methane absorption bands, the Great Red Spot looks like the brightest, or rather abnormally bright, formation on the planet. This indicates that in the GRS region the methane absorption is strongly weakened in comparison with all other regions of the visible cloud surface of Jupiter [5]. As for the morphological and dynamic properties of the GRS, the most impressive recent results are those obtained from the space probe JUNO, approaching to Jupiter at the distance of only three thousand kilometers [6]. The properties of the GRS also show themselves in

ammonia absorption. In addition to the previous photometric and spectral observations of the GRS (for example, [7-9]), a special observational program for studying the spectral features of the GRS was carried out in 2017. Five cycles of recording the spectra of Jupiter's central meridian (CM) were carried out before, during and after a passage of the GRS across the CM. We report on results of this our research.

Observations: methods and results

From the end of March to the beginning of May 2017, a series of observation cycles of Jupiter was performed as an extension of regular long-term spectral studies of variations in the molecular absorption bands, and studying the structure of the planet's cloud cover. These observations covered almost all the longitudes of Jupiter (Figure 1), including 5 cycles destined to obtain spectra of longitudes near the GRS. At that time its longitude was 267° in the 2nd system. The GRS (or its core) has its own longitudinal coverage of about 12° , apart from the peripheral light edging.

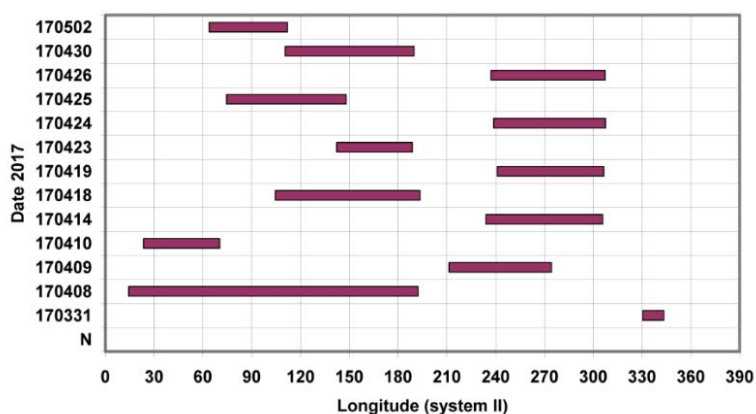


Figure 1 - Diagram of the date distribution of Jovian longitudes observed in 2017

Each cycle, timed to the GRS passage across the CM, was lasting for 2 hours. During this time, 30-32 spectra were recorded with an interval of about 4 min, which corresponded to Jupiter turn of 2.5° . Thus, the longitudes from 240° to 310° in the second system of the Jupiter rotation were covered (Figure 2). A fragment of the map of Jupiter for April 2017, compiled by Vedovato (the site of the Association of Observers of the Moon and the planets ALPO Japan [10]), was used.

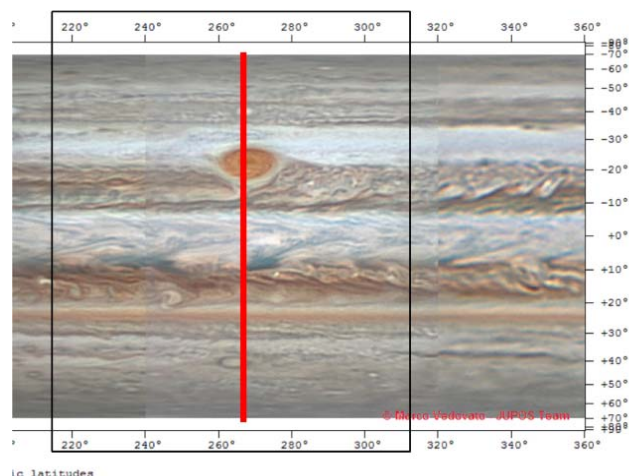


Figure 2 - Fragment of the map of Jupiter from the ALPO Japan site as of April 2017 with the area of longitude scanning

Observations were carried out using the SGS diffraction spectrograph installed in the 7.5-m Cassegrain focus of the 0.6-m RZ-600 telescope. The receiver of a spectrum image was the ST-7XE CCD camera with a matrix of 765x510 pixels. The size of one pixel is 9x9 microns and the resolving power for dispersion of 4.3 Å/pixel is 8.5 Å. The scale of an image on the spectrogram is 4.08 pixels /arc second. As

a rule, the exposure time of one spectrum was 20", although in some cases, it increased to 100" in order to provide a better isolation of the methane absorption band in the near-IR region (800-900 nm). In total, the extensive observational material was obtained, which can be used for different further studies, including those related to the study of temporal changes in the Jovian atmosphere during the entire period of its revolution around the Sun.

Processing spectrograms of the absorption bands

For the processing and analysis of the Jupiter's CM spectra, some corresponding programs based on spreadsheets were compiled. They could provide a quick education of tabular and graphical results. The main attention was paid to measurements of the two ammonia absorption bands' (645 and 787 nm NH₃) profiles and to the evaluation of their intensities. These bands are weak in intensity, especially the 645-nm band. Both bands overlap with more intense methane absorption bands, so their separations require special techniques. Therefore, their behavior in the spectra of Jupiter has not been studied in detail by anyone before, except for some researchers [11-15]. Laboratory studies of these ammonia bands are also few and not yet very definite. Their analysis is contained in [16]. The 645 nm NH₃ absorption band is located in the short-wave and relatively weak wing of the methane absorption band ($\lambda?$). Therefore, its separation is carried out simply by calculating the ratio to the interpolated smooth running of the intensity in this methane band's wing. The 787 nm NH₃ band is located in the middle of another methane band, centered at the same wavelength. Filling, its less intense central part. In this case, we use the spectrum of Saturn as a reference spectrum. In it, the ammonia absorption inside this methane band is practically absent or negligible. So, the Jupiter 787 nm NH₃ band stands out well enough in calculating the ratio of the Jupiter spectrum to the spectrum of Saturn. Figure 3 shows examples of the profiles of both ammonia bands, obtained by processing one spectrogram of Jupiter's CM for all points of the meridian (from the South Pole to the North one). As a result of measurements, we obtain estimates of the equivalent widths (W) of these absorption bands at different latitudes, including the GRS region. We note that the maximum value of W in the 645 nm band does not exceed 8Å, while in the 787nm band it does not exceed 20Å.

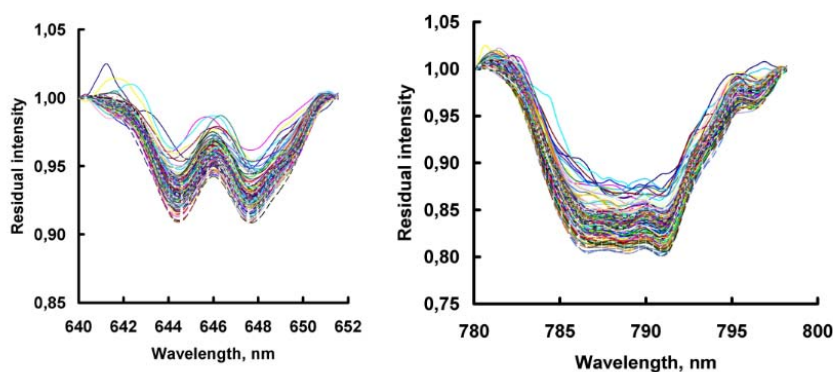


Figure 3 - The 645 and 787 nm NH₃ absorption band profiles, separated from all the lines of the Jupiter's CM spectrum

We started measurements of the 645 and 787 nm NH₃ bands in the spectrum of Jupiter in 2004. From them, we found the existence of a depression of ammonia absorption in the Northern Equatorial Belt (NEB). This depression [17, 18] is most pronounced in the 787 nm NH₃ band. In the NEB its W (W_{NEB}) is less by 2-3Å in comparison with other low and moderate latitudes, where $W > W_{NEB}$ and varies within smaller limits [19]. Further observations from 2005 to 2017 (during the complete revolution of Jupiter around the Sun) have shown that this depression remains a peculiar feature of the NEB, albeit it is variable in longitudes and in time.

Ammonia absorption in the Great Red Spot

Based on the results of spectral measurements of each observational cycle during the GRS passage across the Jupiter CM, latitudinal variations in intensities of the ammonia absorption bands were plotted. The graphs plotted together for all longitudes (Figure 4) show that along with depression in the low-latitude NEB, the weakening of ammonia absorption in the GRS is observed. It is most pronounced in the 787 nm NH₃ band (Fig. 4).

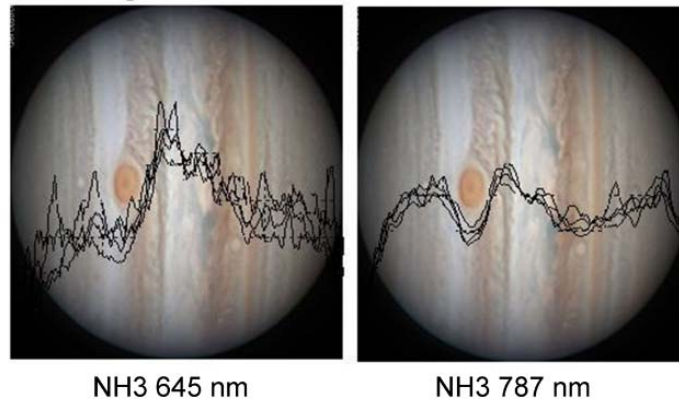


Figure 4 - Latitudinal variations of ammonia absorption in the GRS during its movement along the meridian (the images of Jupiter were taken from the ALPO Japan site)

Figure 5 shows graphs of the 645 and 787 nm NH_3 absorption bands' intensities along the CM from the measurements on April 19, 2017. The absorption profiles obtained in the 240° - 310° longitude ranges are averaged. The longitudinal variations of the profiles differ little, so that the standard deviation in the W values is less than 1 A everywhere, except for the GRS region. The profiles with the GRS for the longitude 272° , corresponding to the middle of the GRS, are shown separately (red). The ammonia absorption decrease in the GRS stands out clearly. There also attracts attention the noticeable blurring of the depression of ammonia absorption in the northern hemisphere in comparison with the picture that was observed in previous years. At that time the depression was only related to the NEB. The additional processing of spectrograms obtained for other longitudes gave the same result. The reason for this is that in the Jupiter visibility season of 2017, the NTB dark band formed north of the NEB, where the ammonia absorption also turned out to be lower. Changes in the NEB cloud cover structure were occurring in the recent years, and they are described in [20].

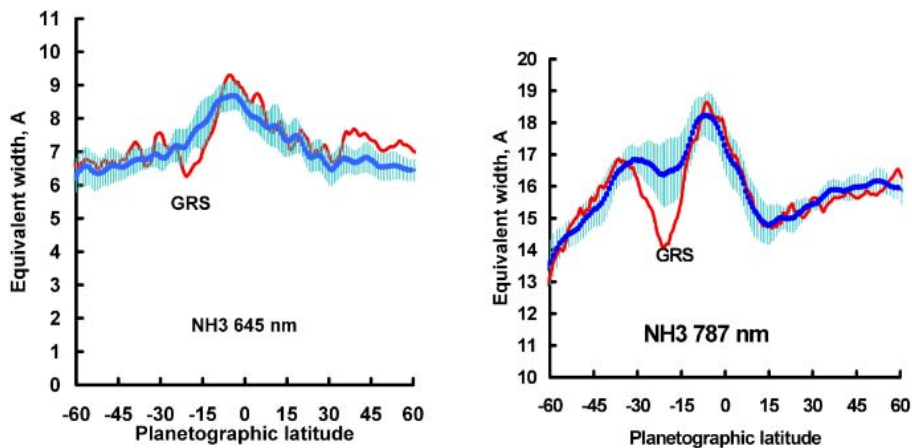


Figure 5 - Latitudinal variations in the 645 and 787 nm NH_3 absorption bands averaged over the 240° - 310° longitude ranges. The profiles with the Red Spot for longitude 272° are shown separately (red)

To illustrate the differences in the meridional variations in the NH_3 absorption at different longitudes, the W profiles of the 787 nm band are shown in Figure 6 with a vertical shift per unit of the scale. On the right, a three-dimensional representation of the ammonia absorption variations is shown. It can be seen that the absorption depression in the northern hemisphere remains at all the longitudes, whereas in the southern hemisphere only the GRS region is manifested.

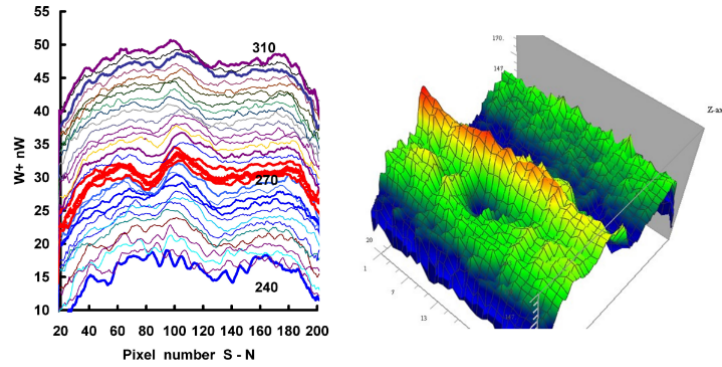


Figure 6 - Profiles of variations of the 787 nm NH₃ band's equivalent widths (on the left); 3D- representation of the ammonia absorption latitude-longitudinal variations in the 240⁰-310⁰ longitudinal interval (on the right)

Figure 7 compares the longitude variations of ammonia absorption at the latitude of the GRS: near the southern edge of the SEB and at the latitude that is symmetrical to it in the northern hemisphere, corresponding to the northern edge of the NEB (latitudes $+22^{\circ} \pm 1^{\circ}$ and $-22^{\circ} \pm 1^{\circ}$). One can see a systematic difference in W of the 787 nm NH₃ absorption band in these belts: weakening the absorption in the NEB, with the exception of the GRS, in which the absorption is even smaller than in the NEB.

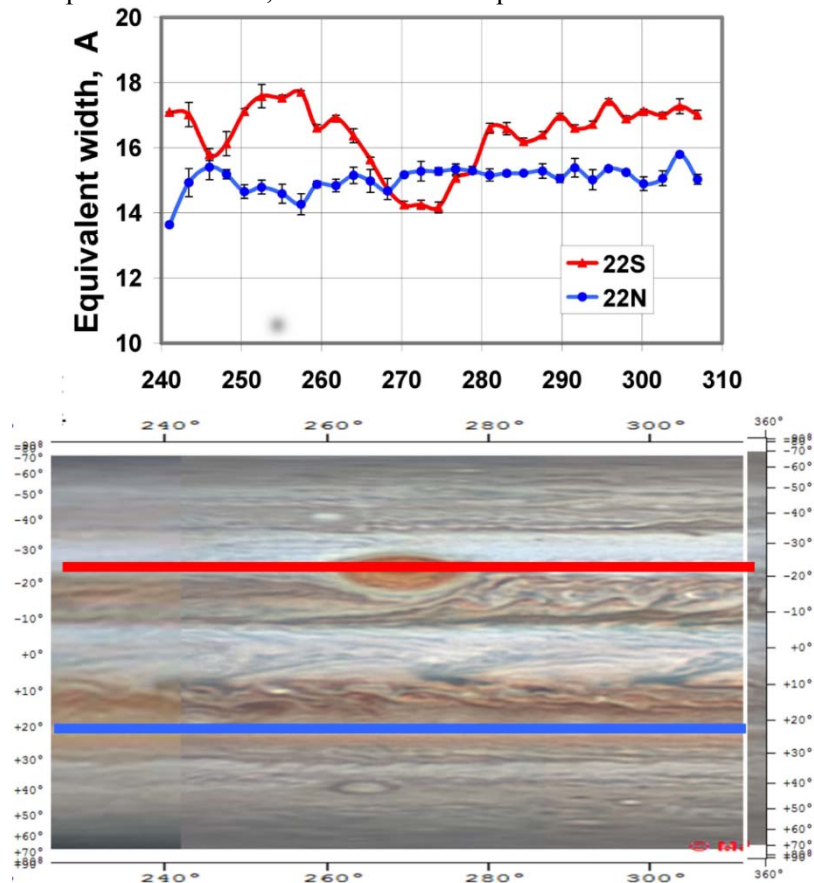


Figure 7 - Long-term variations of the ammonia absorption at symmetrical latitudes in the SEB and NEB

In the other belts of low and moderate latitudes of Jupiter, there is a relatively monotonous longitude course of the ammonia absorption, except for some oscillations caused by both inevitable errors and real variations in the intensity of the absorption band. But at each the latitude within the considered longitudinal range, the mean level changes with latitude that one can see in Figures 5 and 6.

Discussion

From the consideration of the obtained data on variations of the ammonia absorption bands on Jupiter located in the visible and near IR spectral regions, the following feature is worth serious attention. It has already been noted above that the GRS seems anomalously bright in the images obtained through the filter that cuts out the center of the strong methane absorption band at 887 nm. However, the NEB, where the ammonia absorption depression is observed, comparable to that observed in the GRS, does not show such an increase in brightness at 887 nm, as in the GRS. Apparently, one should seek the reason for this discrepancy in the difference in the structural features of the atmosphere over these regions. These features determine the mechanisms for the formation of molecular absorption bands. Here it is relevant comparing the observational data on Jupiter in very different spectral regions of the reflected radiation and the planet's native thermal radiation.

In a number of publications on Jupiter's observations in the ranges of thermal radio emission, for example, in [4, 21], the NEB's feature was noted: the brightness temperature of the radiation in it was slightly higher than in other regions of the planet. The most detailed map of the brightness temperature distribution on Jupiter was obtained using the VLF (Very Large Array) radio telescope system, in 2012-2014 [4]. Indeed, the NEB was distinguished with its high brightness temperature at frequencies of 8-14 GHz (millimeter-wave radio range). The output of increased thermal radio emission in the NEB is associated with the lower ammonia abundance in this latitudinal belt. It is ammonia in this range that reduces the radio emission absorption and determines the process of its transfer from the deep layers of the Jovian atmosphere. A cloudy layer with particle sizes of one or even tens of micrometers is transparent to radio waves and cannot affect their passage, so we can specifically speak about the reduced ammonia abundance in the NEB. Accordingly, the depression of ammonia absorption in the visible and near-IR spectral regions observed in the NEB, one can explain by a real decrease in the gaseous NH_3 abundance. However, in the absorption band formation in this spectral region, the cloud layer plays a certain role. In this layer the gaseous molecules' absorption optical path increases with the cloud particle multiple scattering.

The GRS demonstrates a different situation. We see that in the 645 and 787 nm NH_3 bands, the absorption in the GRS is lowered in comparison with the surrounding regions by almost as much as in the NEB. However, radio measurements do not show such an increase in the brightness temperature in the GRS, as in the NEB. On the maps, the Spot does not stand out for its brightness. A similar effect of reduced thermal IR radiation is observed in the GRS both in the 8-12 μm ranges [4, 22] and near 5 μm [23]. As for IR measurements, they require special analysis and discussion in the future. But judging by radio observations, in the GRS region the gaseous NH_3 concentration is not lowered as in the NEB. Hence, weakening the ammonia absorption bands in the GRS has to be caused by other causes. It should be remembered that in the strong 887 nm methane absorption band, the GRS looks abnormally bright in comparison with any other morphological details of the Jupiter disk. In the temperature conditions of the Jovian atmosphere the methane does not condense, so its vertical distribution is mainly described by the barometric formula. Therefore, in the atmospheric layer above the clouds, the methane abundance is still quite appreciable for the absorption band formation. Absorption in the strong 887-nm methane band forming above the clouds can play an even greater role than inside the clouds, since the number of acts in multiple scattering decreases with increasing the absorption. So the methane absorption abrupt decrease in the GRS is most likely due to the fact that the upper boundary of the cloudiness in the Spot is higher than in its surroundings. Formation of the ammonia absorption bands occurs practically only within the cloud layer, since the concentration of NH_3 over it becomes smaller by several orders of magnitude. It follows that the decrease in the intensities of the NH_3 absorption bands in the GRS mainly occurs because of the increased bulk density of the clouds inside it. This reduces the equivalent absorption path, which determines the observed intensities of the 645 and 787 nm ammonia bands. They are relatively weak.

In the region of IR thermal radiation, the GRS looks like a dark spot surrounded by a light rim. The effect of cloud density on IR thermal radiation in the GRS (especially at λ 5 μm) depends on the particle sizes both in the upper ammonia cloud layer and in the deeper layer of clouds consisting of ammonium

hydrosulfide NH_4SH . Interpretation of measurements in this range is still ambiguous and depends on the adopted models and initial parameters of the structure and temperature regime in the troposphere at different latitudes and depths.

Conclusion

This paper presents the first experience of studying the behavior of the 645 and 787 nm ammonia (NH_3) absorption bands in the region of the GRS on Jupiter. We found that these ammonia bands were sufficiently weakened in the GRS as compared to the surrounding areas of the visible cloud surface of the planet. In terms of magnitude, this depletion is comparable to the previously observed depression of the 787 nm NH_3 band intensity in the NEB. Our long-term (since 2004) spectral observations have shown that such the NEB feature is peculiar to this belt, although it reveals some longitude and temporal changes. However, based on a comparison with the results of observations of Jupiter in the ranges of thermal IR optical and millimeter radio emission, one can assume that the mechanism of ammonia absorption depression in the GRS and in the NEB is not the same, but is determined by some different causes. Of course, further observations and analysis of different models of formation of the absorption bands and their role in the transport of visible and thermal radiation in different atmospheric layers of Jupiter are needed. In this atmosphere, apart from the usual zonal circulation and the vortex structure, unusual and unpredictable large-scale changes occur at times, such as the disappearance of the SEB dark belt in 2010 or the formation of a quasi-periodic structure of the NEB belt observed in the strong 887 nm methane (CH_4) absorption band in photographs in 2018. Accordingly, we plan new observations on molecular absorption studies in the visible and near-IR spectral regions for the next few years.

This research was carried out in accordance with the grants of MES RK 0073 / GF4 and AP05131266

REFERENCES

- [1] Simon A A., Tabataba-Vakili F., Cosentino R., Beebe R F., Wong M H., Orton G S. (2018) Historical and Contemporary Trends in the Size, Drift, and Color of Jupiter's Great Red Spot, *Astronomical Journal*, V. 155 P.1-15 (in Eng, In press).
- [2] Loeffler M.J. ,Hudson. R. L (2018) Coloring Jupiter's Clouds: Radiolysis of Ammonium Hydrosulfide (NH_4SH), *Icarus*, 302: 418-425 (in Eng). V.
- [3] Fletcher LN., Greathouse TK., Orton GS., Sinclair JA., Giles RS., Irwin PJ., Encrenaz T. (2016) Mid-Infrared mapping of Jupiter's temperatures, aerosol opacity and chemical distributions with IRTF/TEXES, arXiv: 1606.05498. V.1 [astro-ph. EP] 17.06 (in Eng).
- [4] Pater I., de Sault RJ., Butler B., de Boer D., Wong MH. (2016) Peering through Jupiter's clouds with radio spectral imaging - Research Reports Gas Giant Planets, *Science*, 352: 1198-1201, ISSUE 6290 (in Eng).
- [5] Rogers J.H., Akutsu T., Orton G.S. (2004) Jupiter in 2000/2001 Part II: Infrared and ultraviolet wavelengths –A review of multispectral imaging of the Jovian Atmosphere, *Journal of the British Astronomical Association*, 114(6): 313 -330 (in Eng).
- [6] Orton GS. (2018) Explained in 60 Seconds: Juno Surveys Jupiter's Great Red Spot and the Citizen-Led Approach to Imaging, *Communicating Astronomy with the Public Journal*, 23:4 (in Eng).
- [7] Tejfel VG. (1964) On the photometric properties of the Red Spot on Jupiter, *Astronomical Journal [Astronomicheskii Zhurnal]*, 41(3): 531-538 [in Russian].
- [8] Tejfel VG. (1967) Red Spot spectrophotometry on Jupiter, *Proceedings of Astrophysical Institute of the Acad. of Sci. of Kazakh. SSR [Trudi Astrofizicheskogo Instituta Akademii nauk Kaz. SSR]*, 9: 52-58 [in Russian].
- [9] Vdovichenko VD, Kirienko GA, Lysenko PG, Teifel VG (2014) Features of the Great Red Spot on Jupiter in the methane absorption bands, *Proceedings of NAS RK [Izvestia NAN RK]*, 4: 77-84 [in Russian].
- [10] ALPO Japan - Jupiter (<http://alpo-j.asahikawa-med.ac.jp/indexE.htm>) (in Eng).
- [11] Cochran WD., Cochran AL. (1980) Longitudinal variability of methane and ammonia bands on Jupiter, *Icarus*, 42: 102-110 (in Eng).
- [12] Cochran WD., Cochran AL. (1983) Longitudinal variability of methane and ammonia bands on Jupiter. II. Temporal Variations, *Icarus*, 56: 116-121 (in Eng).
- [13] Giver LP., Boese, RW., Miller, JH. (1969) Laboratory studies of the visible NH_3 bands with applications to Jupiter, *J. Atm. Sci.*, 26: 941-942 (in Eng).

[14] Giver LP, Miller JH., Boese RW. (1975) A laboratory atlas of the $5\nu_1$ NH_3 absorption band at 6475 A with applications to Jupiter and Saturn, *Icarus*, 25: 34-48 (in Eng).

[15] Karkoschka E. (1998) Methane, ammonia, and temperature measurements of the Jovian Planets and Titan from CCD-spectrophotometry, *Icarus*, 133: 134-146 (in Eng).

[16] Irwin PGJ., Bowles N., Braude AS., Garland R., Calcutt S. (2017) Analysis of gaseous ammonia (NH_3) absorption in the visible spectrum of Jupiter, *Icarus*, 302: 426-436 (in Eng).

[17] Tejfel VG., Karimov AM., Vdovichenko VD. (2005a) Strange latitudinal variations of the ammonia absorption on Jupiter, *Bulletin Amer. Astron. Soc.*, 37(3): 682 (in Eng).

[18] Tejfel VG., Vdovichenko VD., Kirienko GA., Kharitonova GA., Sinjaeva NV., Karimov AM. (2005b) Spatially resolved variation in the methane and ammonia absorption in the atmosphere of Jupiter, *Astron & Astroph. Transactions*, 24(4): 359-363 (in Eng).

[19] Bondarenko N. N. (2013) The study of the ammonia absorption band NH_3 787 nm variations in the atmosphere of Jupiter, *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 28 (Issue 2): 81- 86 (in Eng).

[20] Fletcher LN., Orton GS., Sinclair JA., Donnelly P., Melin H., Rogers JH., Greathouse TK., Kasaba Y., Fujiyoshi T., Sato TM., Fernandes J., Irwin PGJ., Giles RS., Simon AA., Wongl MH., Vedovato M. (2017) Jupiter's North Equatorial Belt expansion and thermal wave activity ahead of Juno's arrival, *Geophys. Res. Letters*, 44 (Issue 14): 7140-7148, DOI:10.1002/2017GL073383 (in Eng).

[21] Pater I., de Dunn D., Zahnle K., Romani PN. (2001) Reconciling Galileo Probe data and ground-based radio observations of ammonia on Jupiter, *Icarus*, 149: 66-78 (in Eng).

[22] Fletcher L.N., Orton G.S., Mousis O., Yanamandra-Fisher P., Parrish P.D., Irwin P.G.J., Edkins E., Baines K.H., Line M.R., Vanzi L., Fujiyoshi T., Fuse T. (2010) Jupiter's Great Red Spot: High-resolution thermal imaging from 1995 to 2008, *Icarus*, 208: 306-328 (in Eng).

[23] Giles RS., Fletcher LN., Irwin PGJ., Orton GS., Sinclair JA. (2017) Ammonia in Jupiter's troposphere from high-resolution 5 μm spectroscopy, *Geophys. Res. Letters*, 44 (Issue 21): 10838-10844 (in Eng).

УДК 523.45

**В.Г. Тейфель, В.Д. Вдовиченко, П.Г. Лысенко, А.М. Каримов,
Г.А. Кириенко, В.А. Филиппов, Г.А. Харитоновна, А.П. Хоженец**

Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан

БОЛЬШОЕ КРАСНОЕ ПЯТНО НА ЮПИТЕРЕ: НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ АММИАЧНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

Аннотация. В апреле 2017 года мы провели пять циклов спектральных наблюдений Юпитера для изучения некоторых оптических особенностей Большого Красного Пятна (БКП) – долгоживущего гигантского антициклонального вихря. Запись ПЗС-спектрограмм центрального меридиана Юпитера в каждом цикле производилась в течение двух часов последовательно в интервале долгот от 240 до 310 градусов с шагом около 2 градусов – до, во время и после прохождения БКП через центральный меридиан. Основной задачей было исследование мало изученного ранее поведения в БКП полос поглощения аммиака NH_3 645 и 787 нм.

Измерения профилей и эквивалентных ширин этих полос показали определенно, что в БКП аммиачное поглощение ослаблено, причем даже в несколько большей степени, чем у депрессии NH_3 в Северном экваториальном поясе (НЕВ), обнаруженной нами еще в 2004 году. Сравнение с результатами исследований Юпитера в диапазонах теплового инфракрасного и миллиметрового излучения приводят к заключению, что причины ослабления аммиачного поглощения не одинаковы. В НЕВ, согласно данным радиоастрономических наблюдений, понижена концентрация газообразного аммиака. В БКП ослабление поглощения NH_3 вызвано повышенной объемной плотностью облачной среды. Из-за этого уменьшается эквивалентный оптический путь поглощения в процессе многократного рассеяния, что проявляется и в полосах поглощения аммиака и метана в ближней инфракрасной области. Для количественной интерпретации необходимы дальнейшие комплексные исследования ввиду многопараметричности принимаемых моделей.

Ключевые слова: Юпитер, атмосфера, облака, Большое Красное Пятно, аммиак, метан, молекулярные полосы поглощения, спектрофотометрия.

**В.Г.Тейфель, В.Д.Вдовиченко, П.Г.Лысенко, А.М.Каримов,
Г.А.Кириенко, В.А.Филиппов, Г.А.Харитоновна, А.П.Хоженец**

В.Г.Фесенков атындағы Астрофизика институты, Алматы, Қазақстан

ЮПИТЕРДЕГІ ҮЛКЕН ҚЫЗЫЛ ДАҚ: АММИАКТЫ ЖҰТЫЛУДЫҢ КЕЙБІР ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аннотация. 2017 жылдың сәуірінде біз ұзақ өмір сүретін антициклондық сызық Үлкен Қызыл Дақтың (ҮҚД) кейбір оптикалық ерекшеліктерін зерттеу үшін Юпитердің спектрлік бақылауларының бес циклін жүргіздік. Орталық меридиан арқылы ҮҚД өту кезінде және одан кейін шамамен 2 градус қадаммен 240 тан 310 дейін градустан бойлық интервалында тізбекті Юпитердің орталық меридианының ЗБА-спектрограммының жазбасы әрбір циклде екі сағат аралығында жүргізілді. Ертеректе аз зерттелген ҮҚД NH_3 645 және 787 нм аммиакты жұтылуының бағытын зерттеу негізгі міндет болды.

Бұл эквиваленттік ендіктерде бағытты өлшеу біз 2004 жылы тапқан Солтүстік экваторлық белдіктегі (NEB) NH_3 депрессиясына қарағанда бірнеше үлкен дәрежеде жүрелейміз аммиакты жұтылуының әлсізденгенін айқын көрсетеді. Жылу инфрақызыл және миллиметрлік сәулелену диапазоңдарында Юпитердің зерттеулері нәтижелерімен салыстыру аммиакты жұтылуының әлсізденуінің себептері бірдей емес деген қорытындыға әкеледі. NEB радиоастрономиялық бақылаулардың мәліметтеріне сәйкес, газ тәрізді аммиактың концентрациясы төмен. ҮҚД NH_3 жолағының әлсізденуі қоршаған ортаның артқан көлемді тығыздығынан туындаған. Осыған байланысты көп есе шашырау процессінде жұту жолағының эквивалентті оптикалық жолы азаяды, бұл жақын инфрақызыл аймақта аммиак және метан жұту жолақтарында көрінеді. Сандық интерпретациялар үшін қабылданатын моделдердің көп параметрлігі түрінде кешенді зерттеулер қажет.

Түйін сөздер: Юпитер, атмосфера, бұлт, Үлкен Қызыл Дақ, аммиак, метан, жұтудың молекулалық жолақтары, спектрофотометрия.

Сведения об авторах:

Тейфель Виктор Германович, ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», доктор физ.-мат.наук, профессор, заведующий лабораторией «Физика Луны и планет», tejf@mail.ru;

Вдовиченко В.Д., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», Главный н.с., vdv1942@mail.ru;

Кириенко Г.А., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», Старший н.с., gak39@mail.ru;

Харитоновна Г.А., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», Старший н.с., gah38@mail.ru;

Филиппов В.А., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», Старший н.с., filip-va@mail.ru;

Лысенко П.Г., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», н.с., lyssenko_petr@mail.ru;

Каримов А.М., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», н.с., karalik0@yandex.ru;

Хоженец А.П., ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», н.с., hogenez@gmail.com.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 32 – 36

UDC 539.172.12

N. Burtebaev¹, Zh.K. Kerimkulov^{1,3}, D.M. Zazulin^{1,2}, D.K. Alimov¹,
Y.S. Mukhamejanov^{1,2}, A.E. Kurahmedov³, A. Chunkibayeva³, E.N. Edilbayev⁴

¹Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan;

²al-Farabi KazNU, Almaty, Kazakhstan;

³L.N Gumilev ENU, Astana, Kazakhstan, A.Yasawi IKTU, Turkestan, Kazakhstan

e-mail: diliyo@mail.ru

EXPERIMENTAL STUDY OF $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ REACTION AT LOW ENERGIES

Abstract. Differential process sections of the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ have been measured at the UKP-2-1 accelerator (Almaty, Kazakhstan) at the energy of incident protons from 300 to 1000 keV and $\theta_{\text{lab.}} = 50^\circ$ - 140° in increments of about 20° . The total error of the experimental data does not exceed 30%. Integral cross sections of the reaction $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ at $E_{p, \text{lab.}} = 300$ -1000 keV were defined. S-factors for the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction at $E_{p, \text{lab.}} = 300$ -1000 keV were calculated, which will be useful for reliable normalization of the experimental data obtained by the “Trojan horse” method in earlier works.

Keywords: differential cross sections, integral cross section, astrophysical S-factor.

Introduction. The $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ breakup reaction occurring at low energies attracted much attention of researchers in recent years mostly due to the fact that it plays an important role in fields such as nuclear physics, fusion plasma physics and astrophysics.

Boron in the Earth crust consists of two isotopes ^{11}B (abundance of about 80%) and ^{10}B (abundance of about 20%). Both isotopes are candidates to alternative fuel for future fusion reactors, one of the main advantages of which is the absence of neutrons in output channels for reactions with these nuclei. On the other hand, the reaction product of $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ is a radioactive element ^7Be with a sufficiently long half-life of 53.2 days, and this creates a certain safety problem. New precision measurement of $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction cross sections may have a significant impact on the design features of future fusion power plants.

From the view of nuclear physics the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction is of interest as it can be used to study in detail the level scheme of ^{11}C nucleus.

Experimental results for the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction at low energies are very few and contradictory. Thus, in [1] the obtained integral section of the reaction at $E_{p, \text{lab.}} = 21$ -146 keV, in [2] – at $E_{p, \text{lab.}} = 60$ -180 keV, in [3] – to $E_{p, \text{lab.}} = 121$ -460 keV, in [4] – at $E_{p, \text{lab.}} = 531$ -1613 keV, in [5] – at $E_{p, \text{lab.}} = 330$ -530 keV and in [6] – at $E_{p, \text{lab.}} = 2790$ -6995 keV. And the cross sections of [1] and [3] differ 1.8 times [1] in the overlapping region.

The problem of solving the above mismatch between [1] and [3], as well as more reliable normalization of the experimental data obtained by the “Trojan horse” method [7] require new measurement of the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction cross sections in broad energy and angular range.

Experimental methods and measurement results. Measurements of the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction differential cross sections were made on the proton accelerator UKP-2-1 at INP. Calibration of proton beam energy was carried out by using reactions with narrow, well-isolated resonances [8,9]. For this purpose the reactions $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$ at $E_{p, \text{lab.}} = 632, 773, 992, 1089$ keV and $^{19}\text{F}(p,\alpha\gamma)^{16}\text{O}$ at $E_{p, \text{lab.}} = 340$ keV were used. Calibration accuracy in this case was ± 1 keV. The energy spread of the proton beam did not exceed 1.2 keV.

A proton beam was transported through collimation system (two collimators with diameters of 1.5 mm and spaced 420 mm apart) and was formed at the target (at a distance of 100 mm from the last collimator) to a spot with diameter of 1.5 mm. In order to minimize the number of protons scattered on the end faces of the collimators thickness of the front wall in the region of the holes was adjusted to 0.1 mm. Alpha particles – products of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction were registered by ORTEC silicon detector (diameter of the sensitive area of 8 mm thickness – 0.2 mm) placed at a distance of 240 mm from the scattering region and at angles from 50° to 140° . A second similar detector was placed at an angle of 160° with respect to the incident beam, was used as a monitor. The energy resolution of the detectors was about 15 keV. A set of spectra was taken using the MAESTRO32 program (ORTEC). Careful alignment of the collimator system, and a mobile device with a detector for measuring the angular distributions made it possible to reduce the error in determining the angle to $\pm 0.20^\circ$. Faraday cup (tube with diameter 15 mm and length 150 mm) placed at a distance of 120 mm from the target, was connected to a current integrator. Detectors equipped with protective tubes, which ruled out the registration of protons scattered at the end of the last collimator and Faraday cup in the whole range of the detector position. Integrator sent a digital impulse to the counter once collected charge portion (0.1, 1 or 10 nC). It made it possible to determine the accumulated charge with an error of not more than 1.5% in the current range from 10 to 50 nA.

Thin films of ^{10}B (isotopic enrichment of about 80%) manufactured by electron beam evaporation on VUP-2 installation were used as targets. During the experiments, several self-supported films of thickness of about $50 \mu\text{g}/\text{cm}^2$ were used. Determination of target thicknesses was made with 10% accuracy using nuclear physics method developed previously [10]. Example spectrum obtained by inducing target by protons is shown in Figure 1.

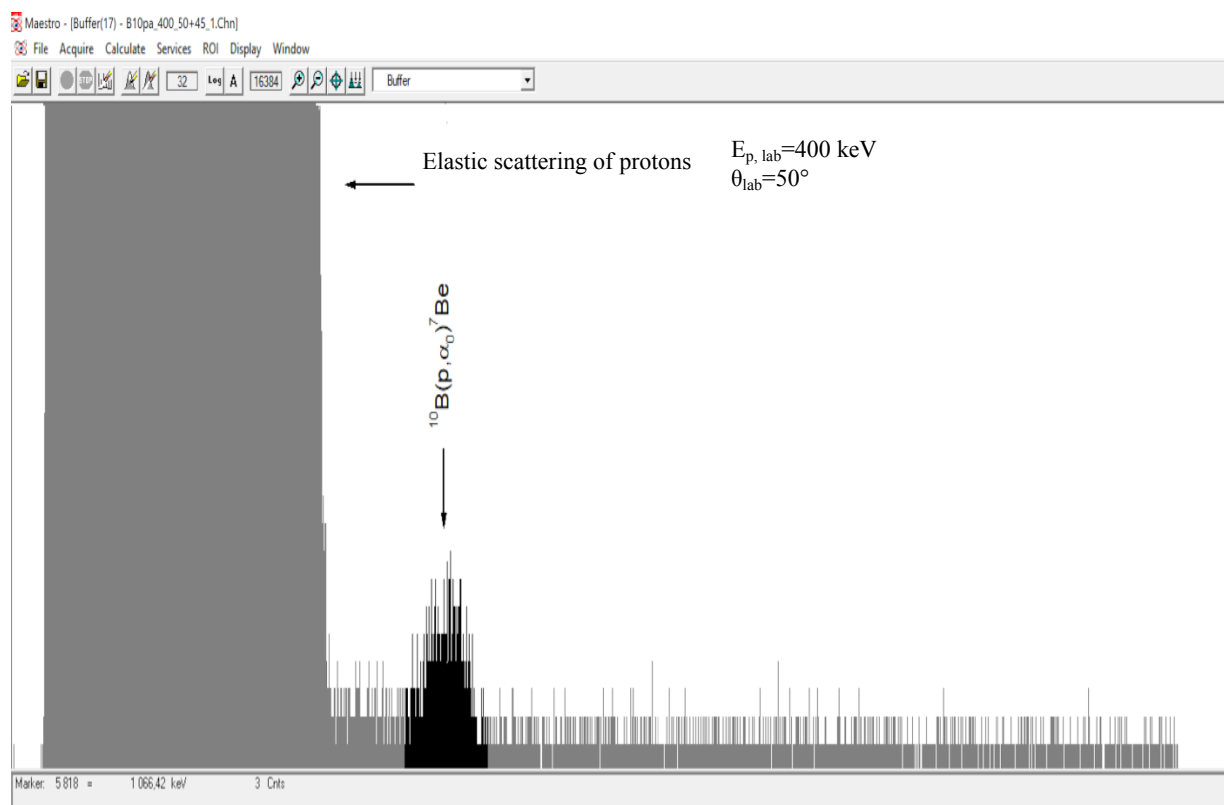


Figure 1 - Example spectrum of charged particles

The differential cross sections of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction at $E_{p,lab} = 300, 320, 340, 360, 380, 400, 500, 600, 700, 800, 900$ and 1000 keV and $\theta_{lab} = 50, 70, 90, 120$ and 140 degrees were measured in the present study with 30% error. Figure 2 shows the results obtained. The figure shows that the angular distributions of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction in the energy range $E_{p,lab} = 300-1000 \text{ keV}$ within error are isotropic.

To obtain integral cross sections for each energy firstly mean value of differential cross-sections was found, and then the average value was multiplied by 4π . The result of this operation to determine the integral cross sections of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction is given in Figure 3 together with literature data. Astrophysical S-factors given in Figure 4 were calculated using the formula:

$$S(E) = E * \sigma_2 * \pi * \eta, \text{ с } 2 * \pi * \eta = 4.73 * E$$

Where E is the energy in center of mass frame, expressed in MeV. It can be seen from Figures 3 and 4 that the margin of error in the overlapping areas of our and published data are the same.

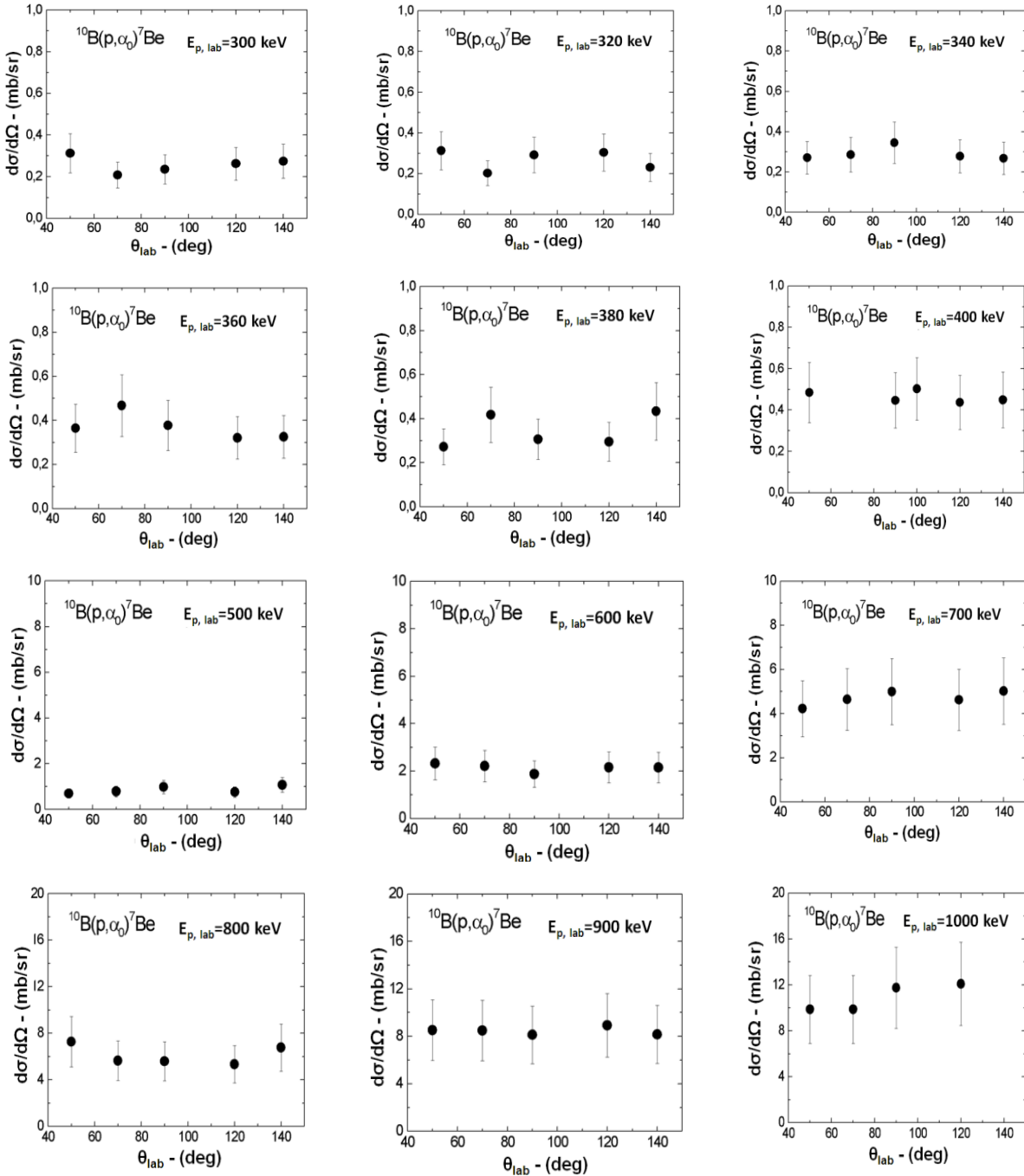


Figure 2. - The differential cross section of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction (in the form of angular distributions)

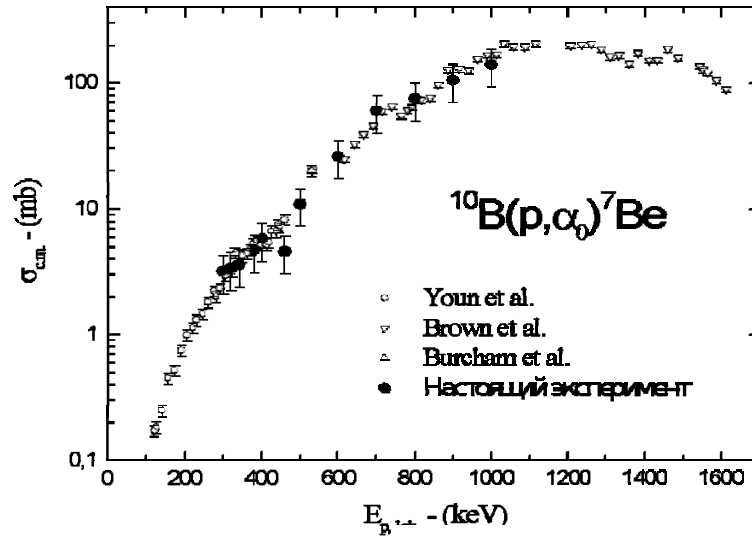


Figure 3 - Integral cross sections of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction *Current experiment* previous experimental studies

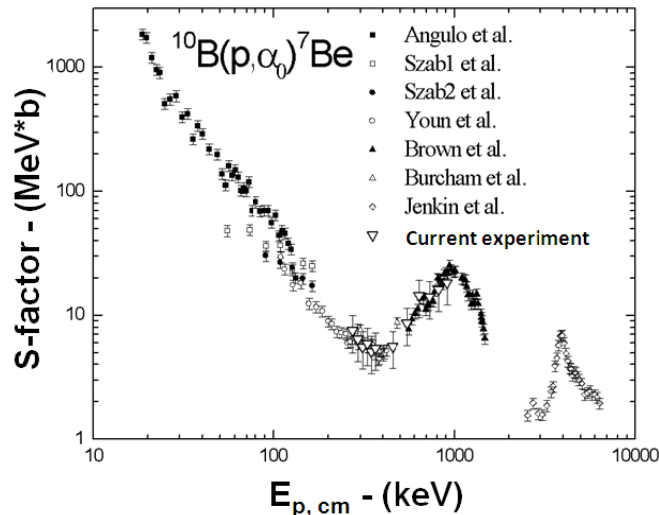


Figure 4 - S-factors of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction. Also presented the results of previous experimental studies

Conclusion. Experiments to measure the differential cross sections of the $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ reaction in a range of incident proton energies from 300 to 1000 keV and at angles of 50° - 140° with increments of about 20° . The measurements were performed with an error of not more than 30%. New data on the integral cross sections and the S-factors for this reaction presented in this work are in good agreement with published data in the overlapping fields of energy.

REFERENCES

- [1] Angulo C., Engstler S., Raimann G., Rolfs C., Schulte W.H., Somorjai E // Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei. 1993. Vol. 345, P. 333-334.
- [2] Szabo J., Csikal J., M. Varnagy // Nuclear Physics A. 1972. Vol. 195, P. 527-533.
- [3] Youn M., Chung H.T., Kim J.C., Bhang H.C. // Nuclear Physics A. 1991. Vol. 533, P. 321-332.
- [4] Brown A.B., Snyder C.W., Fowler W.A., Lauritsen C.C. // Physical Review. 1951. Vol. 82, P. 159-181.
- [5] Burcham W.E., Freeman Joan M. // Philosophical Magazine. 1950. Vol. 41, P. 337-345.
- [6] Jenkin J.G., Earwaker L.G., Titterton E.W. // Nuclear Physics. 1964. Vol. 50, P. 516-529.
- [7] Baur G. // Physics Letters B. 1986. Vol. 178, P. 135-138.
- [8] Butler J.W. // U. S. Naval Research Laboratory. NRL Report. 1959. P. 5282.
- [9] Lyons P.B., Toevs J.W., Sargood D.G. // Nuclear Physics A. 1969. Vol. 130, P. 1-24.
- [10] Burtebayev N., Igamov S.B., Peterson R.J., Yarmukhamedov R., Zazulin D.M. // Physical Review C. 2008. Vol. 78, P. 035802.

УДК 539.172.12

Н. Буртебаев¹, Ж.К. Керимкулов^{1,3}, Д.М. Зазулин^{1,2}, Д.К. Алимов¹,
Е.С. Мухамеджанов^{1,2}, А.Е. Курахмедов³, А. Чункибаева³, Е.Н. Еділбаев⁴

¹Институт ядерной физики, Алматы, Казахстан;

²КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

³ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

МКТУ им. А.Ясауи, Туркестан, Казахстан

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Аннотация. На ускорителе УКП-2-1 (Алматы, Казахстан) измерены дифференциальные сечения процесса $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ в области энергий налетающих протонов от 300 до 1000 кэВ и при $\theta_{\text{лаб.}} = 50^\circ - 140^\circ$ с шагом около 20° . Полная погрешность экспериментальных данных не превышает 30%. Определены интегральные сечения реакции $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ при $E_{\text{р. лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ. Вычислены S - Факторы реакции $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ при $E_{\text{р. лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ, которые будут полезными для надежной нормировки экспериментальных данных полученных методом «Троянского коня» в более ранних работах.

Ключевые слова: дифференциальные сечения, интегральные сечения, астрофизический S-фактор.

ӘОК 539.172.12

Н. Буртебаев¹, Ж.К. Керимкулов^{1,3}, Д.М. Зазулин^{1,2}, Д.К. Алимов¹,
Е.С. Мухамеджанов^{1,2}, А.Е. Курахмедов³, А. Чункибаева³, Е.Н. Еділбаев⁴

¹Ядролық физика институты, Алматы, Қазақстан

²әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан

³Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

⁴А.Ясауи атындағы ХҚТУ, Түркістан, Қазақстан

ТӨМЕНГІ ЭНЕРГИЯЛАРДА $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ РЕАКЦИЯСЫН ЭКСПЕРИМЕНТТІК ЗЕРТТЕУ

Аннотация. УКП-2-1 үдеткішінде (Алматы, Қазақстан) атқыланатын протондардың 300 -1000 кэВ энергиялар аймағында $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ процесінің дифференциалдық қимасы $\theta_{\text{лаб.}} = 50^\circ - 140^\circ$ бұрыштарда 20° қадаммен өлшенді. Эксперименттік мәліметтердің толық қателігі 30% аспайды. $E_{\text{р. лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ энергияда $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ реакциясының интегралдық қимасы анықталды. $E_{\text{р. лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ энергияда $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ реакциясының S – факторы есептелді, бұл алдығырақ жұмыстарда «Трояндық конь» әдісімен алынған эксперименттік мәліметтерді сенімді нормалау үшін маңызды болып саналады.

Түйін сөздер: дифференциалдық қима, интегралдық қима, астрофизикалық S-фактор.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 37 – 47

41.51.27, 41.51.41

520.2/.8, 520-16/-17; 520.88

A. Serebryanskiy¹, S. Serebryakov¹, A. Ergeshev¹¹Fesenkov Astrophysical Institute, Observatory-23, Almaty, KazakhstanE-mail: alex@aphi.kz, serebryakov@aphi.kz, ergeshev@aphi.kz**METHODOLOGY OF PIPELINE DATA REDUCTION
FOR ASTROMETRY AND PHOTOMETRY
OF A LARGE ARRAY OF CCD OBSERVATIONS**

Abstract. We provide the description of the methodology of preliminary data reduction of the CCD observations and following astrometry and photometry analysis of a large number of objects in CCD images during uninterrupted observations, surveys or search campaigns. The result of the method of analysis of a large array of CCD images on the example of the observations of Phaeton asteroid, made on the telescope Zeiss-1000 on the Tien Shan Observatory is presented.

Key words: CCD-observations: data analysis, methods: astrometry, photometry, pipeline for data reduction

Introduction

One of the tasks in Fesenkov Astrophysical Institute (FAI) for 2018-2020 is carrying out CCD observations for the purpose of search and classification of variable stars, as well as long-term observations of individual objects to determine and refine the parameters of their brightness variability. In parallel, there are monitoring observations to search for objects potentially hazardous to Earth (NEOs – near-earth objects), little-known asteroids and comets, as well as the definition and clarification of the physical characteristics of the known NEOs. As a result of such observations, Assy-Turgen (ATO) and Tien Shan (TSO) observatories produce arrays of CCD data, numbering up to several thousand frames per night [1]. Most of these CCD images already have a fairly large field of view (FOV) (32'×32'). In the near future, it is planned to increase the FOV on some instruments to several degrees and the number of objects on one CCD frame, for which it is necessary to obtain photometric and astrometric information can reach several thousand, and the number of frames received during one night will reach several thousand too. It becomes clear that the usual procedure for analyzing CCD images in "manual" mode will require too much time and will lead to an increase in the probability of errors due to the human factor. Variety of observation modes (see "Sorting data") makes this task even more complicated.

Thus, the task of developing a methodology for the automated processing of CCD observations and obtaining astrometric and photometric information for each object on the CCD frame in a format that is most convenient for further analysis becomes quite important in modern observational astrophysics.

Of course, such methods have been developed earlier in other groups and observatories. However, the effectiveness of each specific technique depends on the specificity of the task to which it is directed, as well as the characteristics of the equipment used and observation conditions.

The choice of methods of automatic data analysis in our case is determined by a specific goal — the search for variable stars by analyzing their brightness variability with periods ranged from a few minutes to several hours, using CCDs and EMCCDs with a FOV of not less than 20'×20', with different signal amplification parameters and observations in different wavelengths (a complete list of the parameters used is given in the section "Data sorting").

Methods

As the main tool for search and identification of variable stars, it is supposed to use methods of analysis of light curves obtained on the basis of photometry of stars using CCD observations. Since the survey observations are quite routine, require as long as possible observations in one mode of operation of the equipment, the correct solution will be to automate the observation process itself. Automation makes it possible to use all available observation time as efficiently as possible, to reduce or eliminate errors caused by the human factor, and to utilize budget funds allocated for scientific research more effectively.

Automation of the observation process:

In addition to the above facts, the need to automate the observation process is dictated by the growing number of instruments installed or planned for installation on TSO and ATO, as well as the specifics of their tasks, a variety of requirements for equipment used for different types of observations. In particular, among the various options for only one instrument, with certain equipment one can specify the following parameters: the object of observation, its priority, visibility conditions, the required duration of observations, a combination of filters, exposure values, the need to obtain calibration frames and frames of standard fields, etc. The complexity of the observation process increases nonlinearly if there is the necessity to replace equipment for observation during one night of different objects.

Optimization of the process of analysis of observations is not limited only to the automation of the observation process, but also includes such steps as data management (sorting data and storing it in the databases), preparation for the analysis and the analysis itself with the output of the results in a user-friendly format. These steps are shown schematically in Figure 1.

The task of automating the observation process is successfully solved in FAI and a detailed description of its implementation will be presented in a separate publication.

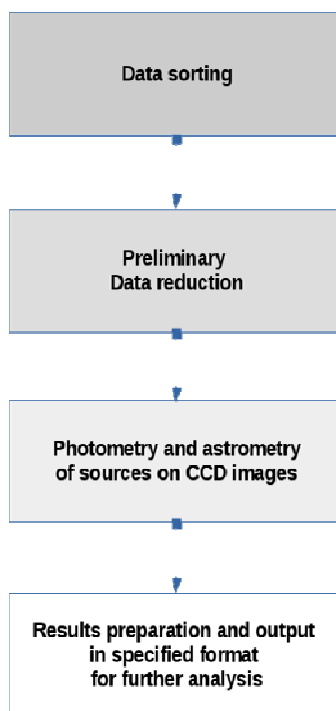


Figure 1 - Sequence of the main steps in the analysis of CCD observations

Data sorting:

For the effective use of the obtained observations and the convenience of their analysis by the scientific community, the observations must be appropriately ordered (sorted) and stored in the database.

The process of automatic sorting of observations significantly simplifies the subsequent procedure of their analysis and can significantly minimize the impact of errors due to the human factor. One of the possible algorithms for sorting CCD observation data, based on the analysis of information in fits-header, is implemented by us in the python environment and is shown in Figure 2. In particular, the presented technique automatically sorts data into directories with certain observation dates. In each such directory, the corresponding subdirectories are created designated by the object name (for example, by catalog number), the filter used, etc., as shown in Figure 2. This sorting not only simplifies subsequent data analysis, but also greatly facilitates the observation process itself, since the observer does not need to track the uniqueness of the assigned ID (or file name) of the CCD frame, but rather correctly prepare the observation plan for the current session, and the relevant information is automatically entered through certain keys in the header of the fits file. Simultaneously with the sorting of the observations, CCD images can be checked, for example, for errors of tracking, temperature stability, while it is possible to automatically generate a report on the statistics of observations and the necessary request for calibration images if some of them are not found.

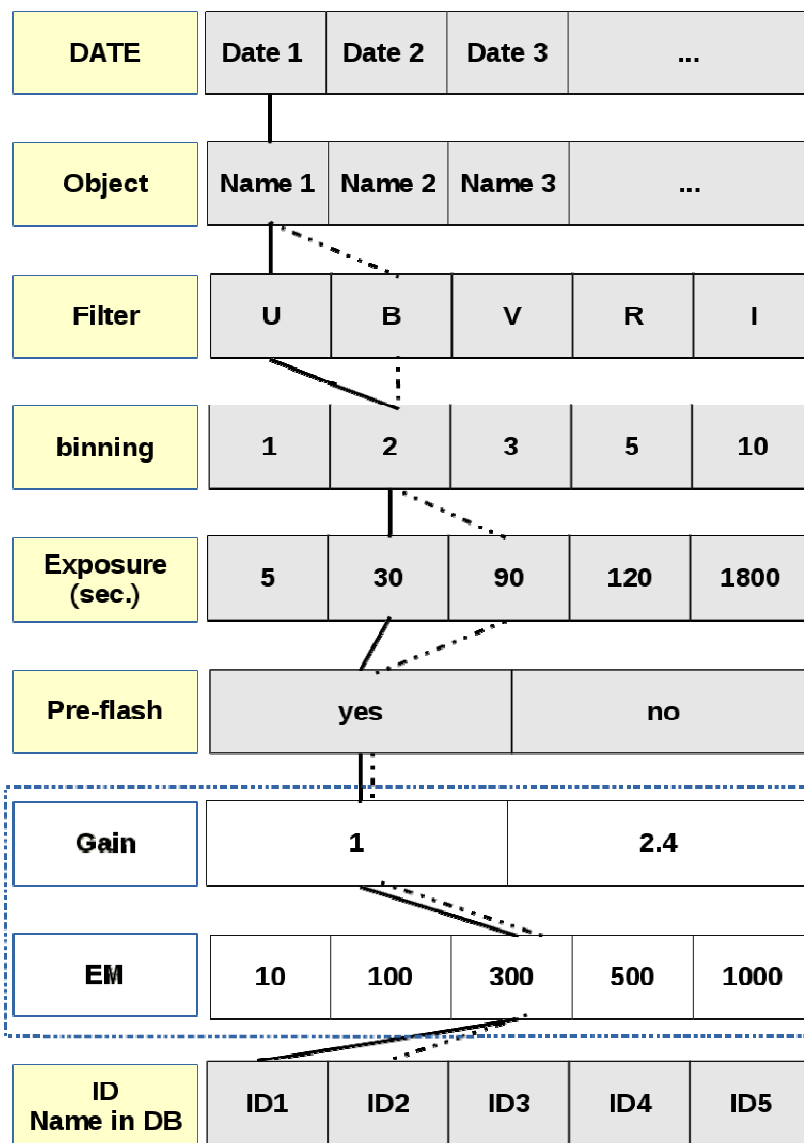


Figure 2 - Automatic data sorting of the CCD frames based on relevant parameters of the observations. Solid and dashed lines show examples of parameter combinations. The parameters Gain and EM correspond to observations performed with the use of EMCCD and are not used for the conventional CCD

Preliminary data reduction:

The next step in the preparation of observations for further analysis is to take into account instrumental systematic noise in CCD images. We will not dwell on this issue, those interested can get acquainted with it in detail in the [2]. The systematic noise includes the dark current, the bias offset and the unevenness of sensitivity on the field of the CCD. To minimize random noise in the accounting of systematic error, the corresponding calibration frames should be averaged over a sufficient number of images (usually not less than 10). The IRAF package is used as the main tool for the analysis of astronomical data of CCD observations (<http://iraf.noao.edu/>). Averaged CCD frames of bias (MasterBias) can be obtained by zerocombine procedure (`iraf.imred.ccdred`), a dark current (MasterDark) is obtained by darkcombine (`iraf.imred.ccdred`) routine. MasterDark must be taken for each image obtained with combinations indicated in Figure 2 (except for the selection of filters). MasterBias and MasterDark are additive noises and should be subtracted from the CCD image of the object (respectively, MasterBias is first subtracted from MasterDark), and the heterogeneity of the sensitivity along the CCD image is a multiplicative component, so CCD image of the object should be divided by it. The averaged CCD frame of the flat field (MasterFlat) must be obtained for each filter in which the object was observed and correctly corrected for corresponding MasterDark. To obtain MasterFlat one may use the flatcombine procedure (`iraf.imred.ccdred`). After that the MasterBias, MasterFlat and MasterDark are used in preliminary data reduction using `ccdproc` procedure (`iraf.imred.ccdred`).

Pipeline method for automatic photometry of objects on CCD frames:

Since our main task is to search for variable stars by analyzing the light curves, the technique should perform the following steps: 1) automatically assign the equatorial coordinate grid to the CCD frame, 2) detect all sources on the FOV of the CCD frame, 3) determine among them the stars belong to different catalogs, 4) conduct aperture and PSF-photometry and 5) output the results in a format convenient for further analysis.

For clarity and ease of understanding of the whole process its flowchart is shown in Figure 3.

As the environment for method implementation, the combination of the Linux operating system with a high-level language python was chosen. This choice is made for several reasons. First, both Linux and python are open source (the standard public license, GNU GPL). Secondly, python is one of the most dynamically developing high-level languages, it is quite simple and provides ample opportunities to attract a large number of people, including students and post-graduates. Third, an IRAF package is integrated into the python environment (http://www.stsci.edu/institute/software_hardware/pyraf). The algorithms and methods of this package have been repeatedly tested, well documented and integrated into many modern data analysis packages of CCD observations. All iraf functions and libraries are available and can be directly imported into the python environment.

To date, the python community has developed a large number of applications for working with digital images, analysis of astronomical catalogs, presentation of graphical and other information directly in a format suitable for publication or use by other applications. The most popular python platform for scientific data analysis is Anaconda, developed by Continuum Analytics (<https://www.anaconda.com/>). We use this platform to install the AstroConda channel with all relevant packages (<http://astroconda.readthedocs.io/en/latest/index.html>). The whole installation and configuration process is quite simple.

Let us now examine in detail each of the steps shown in Figure 3. At the beginning of the process, a list of CCD frames that have been preprocessed is formed. To do this, one uses the `getcwd` and `listdir` procedures imported from `iraf.os` in python. Further, for the convenience, we will denote by \leftarrow the process of importing the appropriate packages and methods into python. At this stage, the procedure checks the existence of appropriate directories to save the results and the corresponding log-file (`path.exists`, `makedirs` \leftarrow `iraf.os`).

The results of observations are saved in the fits format [3], in the header of which all parameters of observations are listed. Working with fits-files is carried out through `astropy package.io.fits`. The header of the fits file is analyzed to determine such parameters as the coordinates of the observatory (`astropy` [4]), the size of the CCD frame and FOV of the CCD (in arcminutes), the focal length f in mm, the pixel size in μm , the image scale in arcsec/pixel. For the analysis of observations obtained at different epochs,

especially for the analysis of light curves of variable stars, it is desirable to use barycentric Julian date. This is calculated using barycentric correction (time ← astropy).

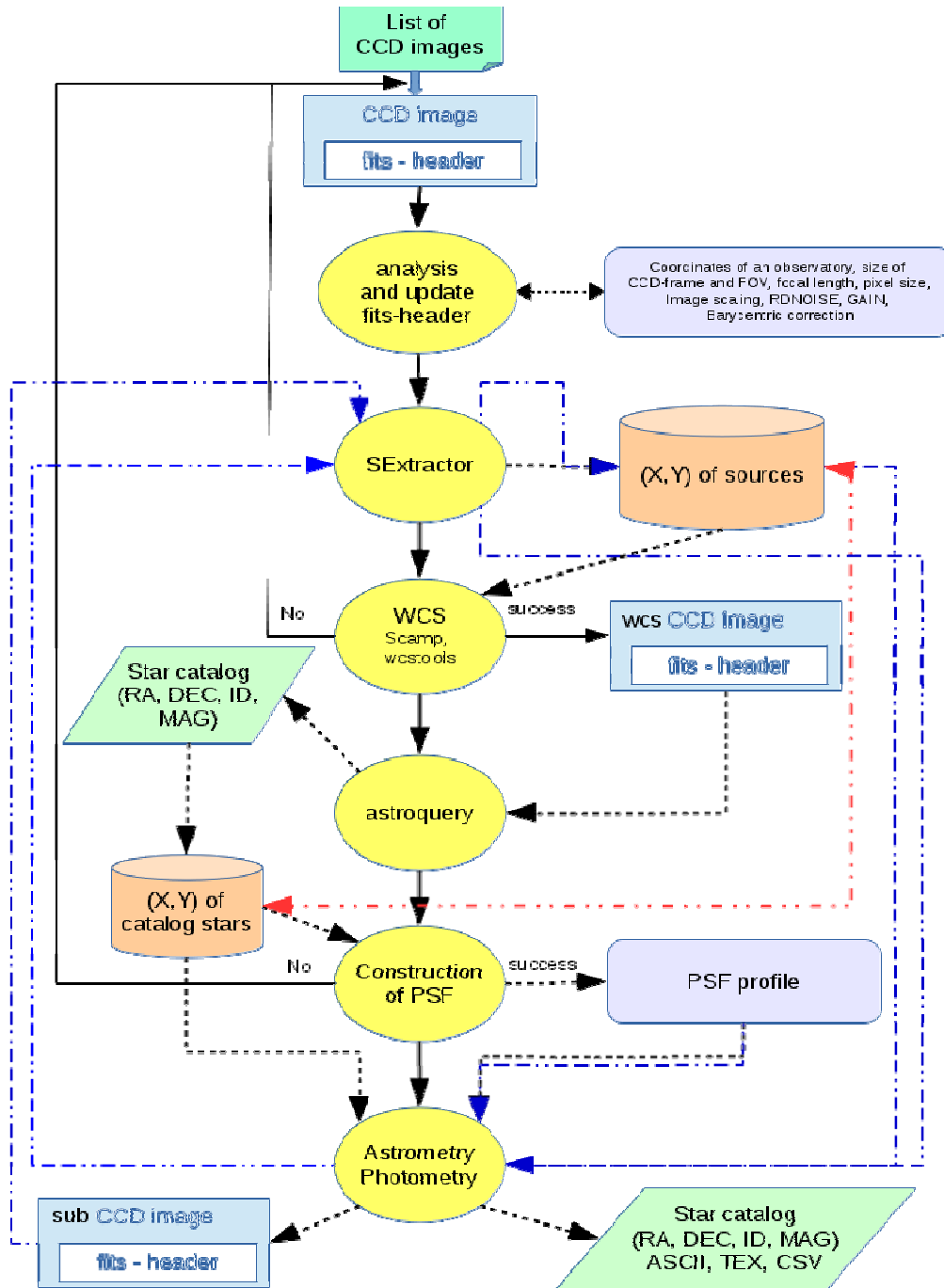


Figure 3 - Flowchart of the procedure of automatic aperture- and PSF-photometry and astrometry of all sources detected in the field of CCD image

The next step is to automatically assign the equatorial world coordinate system (wcs) to the CCD frame. This task can be performed using two methods: `wcstools` [5,6,7] or `scamp` [8]. To do this, in the fits header, in addition to such parameters as the image center, image scale, the preliminary values of the main parameters of wcs are set, and the geometry of the frame is determined (that is, the need to invert and rotate the CCD frame). The necessary information for `wcstools` and `scamp` also includes a list of objects, or rather the coordinates (X, Y) of the sources on the CCD frame. The `SExtractor` package [9] is used to

detect these sources. The type of the output catalog for the correct operation of the scamp must be FITS_LDAC (Leiden Data Analysis Center). Determined location of the sources, that is, their coordinates (X, Y), and the position of the center of the frame in the second equatorial coordinates system for the epoch of 2000 are used to assign the wcs-coordinates. The accuracy of the plate solution procedure can be estimated from the output figure of combined residuals that is automatically generated by the scamp task. An example of a residual map is shown in Figure 4. The X and Y axes, respectively, show the coordinate differences between the catalog values and the values obtained from the plate solution, and the corresponding difference distributions.

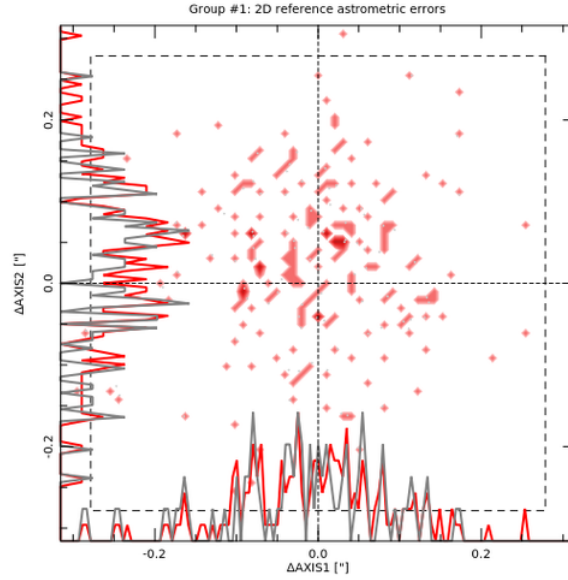


Figure 4 - An example of a 2D map of the coordinate residuals from the results of the scamp procedure, using the CCD-observations with FOV of $19' \times 19'$, obtained on the Zeiss-1000, TSO (November 2017)

In the case of a success of the wcs-procedure, corresponding CCD frame with updated fits header is passed further to search for catalog stars on the FOV.

Catalogs query to search for known stars:

The next step of the methodology is the identification of stars on the FOV of the CCD-frame listed in various catalogs. For example, these can be photometric standard catalogs or variable star catalogs. In the former case, these stars can be used to convert instrumental stellar magnitudes into a standard photometric system, and in the latter case, identified stars can be excluded from further analysis as variables or suspected variables. Astroquery package [10] (Vizier ← astroquery.vizier) allow one to automatically identify stars of the catalog of particular interest from the Vizier database. In our implementation of the data analysis process URAT1 [11], UCAC4 [12] or 2MASS [13] catalogs are used. The values of the magnitudes in the ugriz system (the photometric system of the SDSS) converted into the UBVRI system, which is used on TSO. The following conversion equations are used for this purpose [14]:

$$\begin{aligned}
 B - g &= (0.313 \pm 0.003) \cdot (g - r) + (0.291 \pm 0.002) \\
 V - g &= (-0.565 \pm 0.001) \cdot (g - r) - (0.016 \pm 0.001) \\
 V - I &= (0.675 \pm 0.002) \cdot (g - i) + (0.364 \pm 0.002), \text{ if } g - i \leq 2.1 \\
 V - I &= (1.11 \pm 0.02) \cdot (g - i) - (0.52 \pm 0.05), \text{ if } g - i > 2.1 \\
 R - r &= (-0.153 \pm 0.003) \cdot (r - i) - (0.117 \pm 0.003) \\
 R - I &= (0.93 \pm 0.005) \cdot (r - i) + (0.259 \pm 0.002)
 \end{aligned}$$

The equatorial coordinates of the detected stars in the catalog are transformed to the (X, Y) coordinates of the position on the CCD frame using astLib library (astWCS ← astLib). The positions of stars are checked for proximity to the edges of the CCD frame and are excluded from the analysis if they are located too close to the edge of the FOV (usually less than the width of the star profile). The resulting catalog of stars tabulated in a convenient form using astropy.table (Table, Column ← astropy.table) and is submitted to the procedure to build a PSF profile for PSF photometry of all sources detected on the frame.

There are several reasons why we chose this method of building PSF-profile. First, we use a star catalog, and not just the detected sources in the field of CCD frames, among which could be random sources. Secondly, we, simultaneously to construction of the PSF profile, conduct photometry of catalog stars, which allows us, in the future, to carry out transformation into a standard photometric system, if there were no observations of the standard fields carried out for some reason. This is particularly useful if observations are to be made in uninterrupted regime. Third, the subsequent subtraction of catalog stars allows to detect and conduct photometry of stars that are not included in the catalogs. Such stars are the main targets of observation campaigns and surveys.

To automatically build a proper PSF profile one should be sure that the profiles of the selected stars are far enough from the edge of the CCD frame and do not overlap with each other. We use the following criteria for the selection of PSF stars:

$$3 \cdot R_{PSF} < X < N_{pix} - 3 \cdot R_{PSF} \text{ and } 3 \cdot R_{PSF} < Y < N_{pix} - 3 \cdot R_{PSF},$$

$$FWHM_{PSF} \cdot scale / 2 < r_{ij} < R_{PSF} \cdot 2 \cdot scale,$$

where $r_{ij} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ and $\Delta x, \Delta y$ - the mutual distance between the centeroids of the stars. Here $N_{pix} = N_{AXIS1}$ - size of the CCD frame in pixels, $R_{PSF} = 4 \cdot FWHM_{PSF} - 1$ - radius of the PSF-profile, $FWHM_{PSF} = \frac{seeing}{scale} + 0.1$ - preliminary estimation of full width at half maximum of the PSF-profile with $seeing = 2'' . 5$, which is determined by astroclimate of an observatory. The parameter $scale = \frac{\mu m}{f} \cdot 206.265$ - is image scale in arcseconds per pixel, where $\mu m = XPIXSZ$ - physical size of the pixel in micrometers, $f = FOCALLEN$ - equivalent focal length of the telescope in mm. After star selection procedure using preliminary estimation of the parameters the value of $FWHM_{PSF}$ is refined automatically using radial profile fitting procedure radprof of the IRAF applied to selected stars. The total number of PSF stars selected according to these criteria usually does not exceed 25. Obtained refined profile parameters are used for the specification of the parameters for the photometry procedure.

Photometric aperture $Ap = 5 \cdot \sigma$ where σ of the Gauss profile related to $FWHM_{PSF}$ as $\sigma = \frac{FWHM_{PSF}}{2\sqrt{2 \ln(2)}}$, inner sky radius for sky background estimation is $R_{inner}^{sky} = 6 \cdot \sigma$ and corresponding outer sky radius is $R_{outer}^{sky} = R_{inner}^{sky} + 5.0$. Radius of the PSF-profile used for fitting is $R_{fit} = FWHM_{PSF} + 0.75$.

The selection of the PSF profile function can be automatic or user-defined. In our implementation, the Moffat profile with $\beta=2.5$ [15] is used, and if the construction is unsuccessful, the profile "penny2" is used (a complex profile whose kernel is described by the Gauss function, and the wings of the distribution are described by the Lorentz function with the parameter $\beta=1$, while the Gauss and Lorentz functions can be inclined in different directions), which showed the best result. To normalize the PSF profile, first the daophot.phot procedure is used to estimate flux value using aperture photometry. Then the daophot.pstselect procedure selects stars to build a PSF profile and finally daophot.psf builds the PSF profile.

If the PSF profile is successfully built, it is passed to the next stage of processing. If for some reason the PSF profile cannot be built, the program proceeds to the next CCD frame.

Catalog stars subtracting from the CCD frame and search for new objects:

The next step is photometry of catalog stars and their subsequent subtraction from the field of CCD frame. To do this, the aperture photometry of all stars of the catalog is carried out again by the `phot.daophot` procedure. The resulting aperture photometry values, PSF profile, and the corresponding source coordinates are used for the PSF photometry using `allstar.daophot` task. As a result, in addition to the photometry results, we obtain images with subtracted catalog stars for which photometry was successfully performed. These images are used to search for new sources (`SExtractor`) that are not included in the catalog and which are of our main interest. After that, a generalized list of objects is formed. At this point, one can recalculate the PSF profile again to check the overlap of the star profiles. Then the PSF-photometry is performed simultaneously for all stars in the combined list by `allstar.daophot` procedure. This stage is shown in Figure 3 by a blue dashed line.

The resulting CCD frame with all detected and successfully passed photometry stars subtracted should ideally shows a field with background noise. An example of sequential subtraction of processed stars is shown in Figure 5.

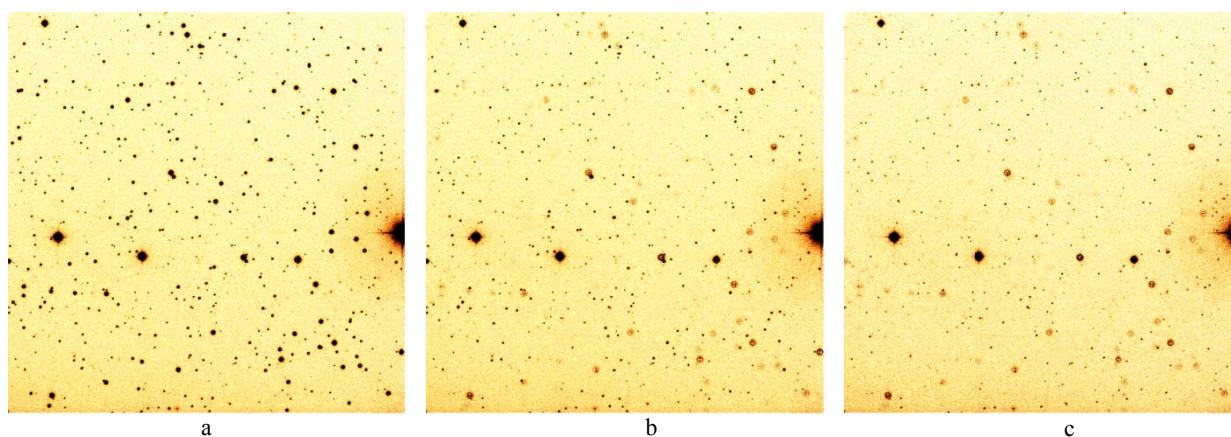


Figure 5 - CCD images with the sequential subtraction of stars: a) the original CCD image, b) after photometry and subtraction of the catalog stars, c) after photometry and subtraction of sources not included in the catalog. The remaining stars on the field were overexposed and excluded from the analysis process

Output the results of the analysis:

For the convenience of further analysis of the obtained results, using them directly for publication or exchange between interested groups, they given in the form of tabular values in the conventional text format, and in the format of csv and tex. These tables are automatically generated separately for catalog stars and for objects that are not included in catalogs. Tables for catalog stars contain the following information: catalog number (`recno`), the coordinates of the object in the catalog in fractions of degrees (`RAJ2000`, `DEJ2000`), the values of magnitudes in the catalog (`Bmag`, `Vmag`, `Rmag`, `Imag`), the coordinates of the object in the catalog in the format `h:m:s` and `d:m:s` (`RA` and `DEC`), their magnitude in a certain filter (`V_Johnson`), corresponding error of magnitude (`errV_Johnson`), the observed values of the coordinates in the format `h:m:s`, `d:m:s` (`RA_obs`, `DEC_obs`), barycentric Julian date (`OBS-TIME`) and the air mass at the time of the observations (`AIRMASS`). The tables for objects not included in the catalogs contain the following information: number of internal (local) catalog (`recno`), magnitude values in a certain filter (`V_Johnson`), corresponding magnitude error (`errV_Johnson`), observed coordinate values in the format `h:m:s`, `d:m:s` (`RA_obs`, `DEC_obs`), barycentric Julian date (`OBS-time`) and air mass at the time of observations (`AIRMASS`).

Results

The described method is tested on observations of the asteroid Phaeton that were obtained on the Zeiss-1000 (TSO) in the period from 16.11.2017 until 22.11.2017. In total, more than 280 CCD images were obtained in each of the three BVR filters. That is, the total number of images is more than 800. Several dozens of catalog stars are identified on the field of each CCD image and, therefore, the number

of photometric estimates and astrometric measurements can reach several tens of thousands. If we take into account the registered sources that are not included in the catalogs (which are of the greatest interest for us), the number of photometric measurements for this particular example is several hundred thousand! However, the whole process of photometry of the whole array of observations in automatic mode takes only a few hours.

The developed technique of automated photometry of all sources on the field of the CCD frame can be used to search for objects with large proper motion (for example, asteroids and other small bodies of the solar system).

As an example, the result of the methodology applied to the observation of the asteroid Phaethon (3200) is shown in Figure 6. This figure shows a plot of $10' \times 10'$ FOV with the result of automatic astrometry and photometry of all objects observed in 19.11.2017 on the Zeiss-1000 telescope (TSO). The size of the marks corresponds to the instrumental stellar magnitude. In addition to the main object of interest (the Phaethon), two known asteroids are also visible on the field (230273, 45156). When one constructs such a map, catalog stars identified by a unique number are displayed with colored symbols, depending on the magnitude of the stars in the three filters. The values of stellar magnitudes and positions of these stars are automatically saved as tables in three formats (text, csv, tex) for each of the stars of the catalog separately and for each of the filters in which observations were carried out. Information on other objects of interest to the user can be obtained, for example, by selecting the appropriate area on the map shown in Figure 6. The resulting tables are used to construct and analyze the light curves. The results of this analysis will be presented in a separate publication.

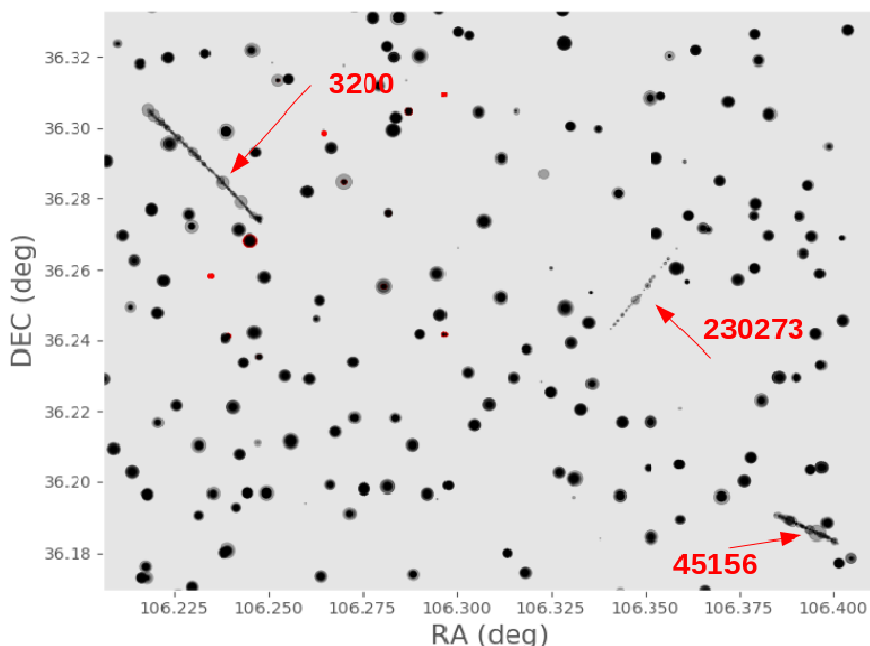


Figure 6 - The results of the automatic photometry and astrometry of the CCD-observations obtained on the Zeiss-1000 (TSO). Shown is field of size $\sim 10' \times 10'$, where one can identify the tracks of the three asteroids (indicated by arrows and number)

Discussion

Conducting survey and search observations to detect transients, fast evolved processes, monitoring for variable stars, etc. on medium and small aperture instruments (from 50 cm to 1 meter) with a sufficiently large FOV involves obtaining a large array of observations. Especially if EMCCD is used as an instrument in time-domain astrophysics. In addition, the availability of the results of various sky surveys in the form of databases can significantly improve the efficiency of searching for new objects, information about which is not available in catalogs, or quickly respond to the need for alert and follow-

up observations of high-priority objects. This makes the task of fast and robust processing and analysis of observational data particularly relevant.

The methodology described in this article was implemented under the Linux operating system based on the python high-level language and uses generally accepted and proven algorithms for data analysis (whose implementations are freely available).

The work on improving the methodology continues. In particular, it is necessary to develop criteria for updating the parameters of procedures for detection of faint objects on a FOV, to consider the possibility of building a PSF profile for the particular instrument, which should not only improve the quality of the results of PSF-photometry, but also reduce the processing time. Another important problem to be solved is an implementation of methods of extended object photometry including tracks of objects observed at different regimes of telescope tracking, as well as photometry of extended objects (galaxies, nebulae).

In conclusion, we should note some possible sources of errors in photometry and astrometry using the developed methodology. First, it is assumed that the PSF profile remains constant throughout the entire observation session, which may not be the case for observations in highly changing weather conditions, inaccuracies in the telescope tracking (wind, auto-guiding failure, etc.). As a result of the incorrect description of the true stellar profile on the images, there will be some remnants after subtracting the stars which can be incorrectly interpreted as additional sources. This ultimately leads to errors in photometry. Second, it is assumed that the dependence of the PSF profile on the CCD frame is also constant or changes linearly. If this requirement is not met, it can also lead to errors in the photometry of stars and the detection of false sources. To determine the valid regimes of adequate performance and assessment of the domain of application of the methodology we should test it on artificial data generated with different noise levels and different complexity of the field (density of sources, the variability of the PSF-profile stars across the field of the CCD frame, etc.).

Acknowledgements

The work was carried out within the framework of the Project № BR05236322 "Research of physical processes in extragalactic and galactic objects and their subsystems", financed by Ministry of Science, the Republic of Kazakhstan. The authors express their gratitude to G. K. Aimanova for constructive comments, suggestions and editing of the article.

REFERENCES

- [1] Serebryanskiy A., Krugov M., Komarov A., Usoltseva L., Akniyazov Ch. The first results of observations on the new optical system based on RC500 telescope and EMCCD (Electron Multiplying Charge-Coupled Device) at Assy-Turgen observatory in Kazakhstan // *Solar system research*. 2018. (in press).
- [2] Howell S. B. *Handbook of CCD astronomy* // Cambridge University Press the Edinburgh Building, Cambridge cb2 2ru, UK Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006.
- [3] Wells, D. C.; Greisen, E. W.; Harten, R. H. (1981) FITS - a Flexible Image Transport System // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 1981. v. 44. P. 363.
- [4] Astropy collaboration Astropy: A community Python package for astronomy // *Astronomy & Astrophysics*. 2013. V.558, id.A33. - P.9. - DOI: 10.1051/0004-6361/201322068.
- [5] Mink, D. // *ASP Conf. Ser.* 1997. V.125. - ADASS VI, ed. G. Hunt & H. E. Payne (San Francisco: ASP). P.249.
- [6] Mink, D. // *ASP Conf. Ser.* 1999. V.172. ADASS VIII, ed. D. M. Mehringer, R. L. Plante, & D. A. Roberts (San Francisco: ASP). P.498.
- [7] Mink, D. // *ASP Conf. Ser.* 2002. V.281. - ADASS XI, ed. D. A. Bohlender, D. Durand, & T. H. Handley (San Francisco: ASP). P.169.
- [8] Bertin, E. Automatic Astrometric and Photometric Calibration with SCAMP, Software for Calibrating AstroMetry and Photometry // *Astronomical Data Analysis Software and Systems XV ASP Conference Series*. – 2006. - V.351, Proceedings of the Conference Held 2-5 October 2005 in San Lorenzo de El Escorial, Spain. Edited by Carlos Gabriel, Christophe Arviset, Daniel Ponz, and Enrique Solano. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. P.112.
- [9] Bertin, E. SExtractor: Software for source extraction // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 1996. V.117. P. 393-404.
- [10] Jenness, T., Robitaille, Th., Tollerud, E., Mumford, S., Cruz, K. Python in Astronomy // *Proceedings of the conference held 21-25 March, 2016 at the University of Washington eScience Institute in Seattle, WA, USA*. 2016. id.34.
- [11] Zacharias, N., Finch, C., Subasavage, J., Bredthauer, G., Crockett, C., Divittorio, M., Ferguson, E., Harris, F., Harris, H., Henden, A., Kilian, C., Munn, J., Rafferty, T., Rhodes, A., Schultheiss, M., Tilleman, T., Wieder, G. The First U.S. Naval Observatory Robotic Astrometric Telescope Catalog // *The Astronomical Journal*. 2015. V.150, Issue 4, article id. 101.

[12] Zacharias, N., Finch, C. T., Girard, T. M., Henden, A., Bartlett, J. L., Monet, D. G., Zacharias, M. I. The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4) // The Astronomical Journal. 2013. V.145, Issue 2, article id. 44

[13] Cutri, R.M., Skrutskie, M.F., van Dyk, S., Beichman, C.A., Carpenter, J.M., Chester, T., Cambresy, L., Evans, T., Fowler, J., Gizis, J., Howard, E., Huchra, J., Jarrett, T., Kopan, E.L., Kirkpatrick, J.D., Light, R.M., Marsh, K.A., McCallon, H., Schneider, S., Stiening, R., Sykes, M., Weinberg, M., Wheaton, W.A., Wheelock, S., Zacarias, N. VizieR Online Data Catalog: 2MASS All-Sky Catalog of Point Sources (Cutri+ 2003) // VizieR Online Data Catalog. 2003. 2246.

[14] Jordi, K., Grebel, E. K., Ammon, K. Empirical color transformations between SDSS photometry and other photometric systems // Astronomy and Astrophysics. 2006. V.460, Issue 1. - P.339-347, DOI: 10.1051/0004-6361:20066082.

[15] Trujillo, I., Aguerri, J. A. L., Cepa, J., Gutie' rrez, C. M. The effects of seeing on Se' rsic profiles – II. The Moffat PSF // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2001. V.328, Issue 3. P.977-985, DOI: 10.1046/j.1365-8711.2001.04937.x

А. Серебрянский¹, С. Серебряков¹, А. Ергешев¹

«В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Обсерватория, 23, Алматы, Қазақстан

ҮЛКЕН АУҚЫМДАҒЫ ЗБА-БАҚЫЛАУ МӘЛІМЕТТЕРІН ФОТОМЕТРЛЕУ ЖӘНЕ АҒЫМДЫҚ АСТРОМЕТРИЯНЫҢ ӘДІСНАМАСЫ

Аннотация. Іздеу кампаниялары немесе аспанды шолуда ұзақ уақыт бақылау жүргізгенде, ЗБА-суреттердегі объектілер саны максималды болғанда және оның астрометриялық және фотометрлік зерттеулерін жүргізудің ЗБА-бақылауларының алдын-ала өңдеу процесінің өңделген әдіснамасы берілген. Цейсс-1000 (ТШАО) телескобында астероид Фазтонның үлен ауқымды бақылау мәліметтерінің талдау әдіснамасының нәтижелері көрсетілген.

Тірек сөздер: ЗБА-бақылаулары: мәліметтердің талдаулары, әдіснама: астрометрия, фотометрия, ағымдық мәліметтерді өңдеу.

А. Серебрянский¹, С. Серебряков¹, А. Ергешев¹

¹Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Обсерватория-23, Алматы, Казахстан

МЕТОДИКА ПОТОВОЙ АСТРОМЕТРИИ И ФОТОМЕТРИИ БОЛЬШОГО МАССИВА ПЗС-НАБЛЮДЕНИЙ

Аннотация. Дано описание разработанной методики процесса предварительной обработки ПЗС-наблюдений, последующей астрометрии и фотометрии максимального количества объектов на ПЗС изображениях, которые получают при продолжительных наблюдениях, обзорах неба или поисковых кампаниях. Показан результат работы методики анализа большого массива ПЗС-изображений на примере данных наблюдений астероида Фазтон, выполненных на телескопе Цейсс-1000 (ТШАО).

Ключевые слова: ПЗС-наблюдения: анализ данных, методы: астрометрия, фотометрия, потоковая обработка данных.

Information about authors:

Serebryanskiy Aleksandr - Fesenkov Astrophysical Institute, Head of Dpt. «Observational Astrophysics», alex@aphi.kz;

Serebryakov Stepan - Fesenkov Astrophysical Institute, engineer, serebryakov@aphi.kz;

Ergeshev Abdulazim - Fesenkov Astrophysical Institute, инженер, ergeshev@aphi.kz

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 48 – 58

UDC 521.1

M. Zh. Minglibayev^{1,2}, S.A. Shomshekova^{1,2}

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

²Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan

minglibayev@gmail.com, shomshekova.saule@gmail.com

**ANALYTICAL EXPRESSIONS OF THE PERTURBING FUNCTIONS
IN TWO PLANETARY THREE- BODY PROBLEM
WITH MASSES VARYNG NON-ISOTROPICALLY
WHEN AVAILABLE FOR REACTIVE FORCES**

Abstract. The paper considers a two-planetary exoplanetary system with variable masses in the absolute coordinate system. The equations of motion are described with the Meshchersky equations. The masses of the parent star and the planets are considered variable, varying at different rates. The general case is investigated when the masses of bodies change with time anisotropically, at different rates. As a consequence of an anisotropic change in mass, reactive forces appear that significantly affect the dynamics of the exoplanetary system at the non-stationary stage of its evolution. The equations of motion have no integral, so the problem is investigated by perturbation theory methods developed for such non-stationary systems. The initial equations for the use of perturbation theory are the equations of motion in a relative coordinate system with the origin at the center of the parent star with mass. The methods of perturbation theory are used based on aperiodic motion along a quasiconic section. The motion of two planets, within the framework of the problem of three point bodies with variable masses varying anisotropically in the presence of reactive forces, are described by the equations of perturbed motion in the form of the Lagrange equation. Perturbing functions are expressed through the osculating elements of two planets. Analytical expressions for the expansion of perturbing functions into a series are obtained. The work highlights the main and indirect part of the perturbing functions is singled out. Exactly to the square of the eccentricities of the planets, actual decompositions are performed. The derived formulas allow us to study the evolution of orbital elements due to the variability of the masses of the parent star and planets. They allow us to describe dynamic effects in the two-planetary three-body problem with variable masses as a single planetary system at the non-stationary stage of its evolution. To perform complex analytical calculations, the Mathematica software package was used.

Key words: three-body problem with variable masses, non-stationary exoplanet systems, stars with variable masses, aperiodic motion, protoplanetary disk.

1. Introduction. Our solar system is considered a fairly evolved system (4.5 billion years). All orbits of the solar system are close to circular orbits $e \approx 0$, except for the orbit of Mercury. Mercury has eccentricity $e \approx 0.2$ the inclination of the plane of the orbit is 7 degrees. The great planets of the solar system, which is particularly well seen in the example of Saturn, "freezing" of the orbits has already occurred. Well-evolved systems have gone through so-called "freezing" of orbits (stable orbits are concentrated in one plane near the plane of the equator of the star).

Many exoplanetary systems (currently there are more than 4000 of them), we observe large variations in the slopes of the orbital planes to the equator of the star, which may indicate different evolutionary tracks of such systems. There is a known one exoplanet that moves in the opposite direction from the direction of the orbital motion (retrograde orbit) - an exoplanet called WASP-17b, located in the constellation Scorpio [2]. According to statistical analysis, it is known that the number of planets in specific exoplanetary systems varies from one to seven planets. In the exoplanetary system TRAPPIST-1, seven planets were discovered [3]. The stars of the spectral class G, which includes our Sun, have the

largest number of exoplanetary systems. Venus is the only planet whose own rotation does not coincide with the direction of rotation of other planets in the solar system. This suggests that, because of the diversity of exoplanetary systems, there is a need for detailed studies of their dynamic evolution, especially at their non-stationary stages.

2. Research methods. Consider an exoplanetary system consisting of three intergravitating spherical celestial bodies with changing masses. Let, $m_0 = m_0(t)$ - the central parent star, $m_1 = m_1(t)$ - the inner planet and $m_2 = m_2(t)$ - the outer planet with variable masses. The motion of two planets, in the framework of the problem of three spherical bodies (which interact as material points) with variable masses changing anisotropically, in the presence of reactive forces, in an absolute coordinate system, are described by Meshchersky's equations [4]. The problem will be considered in a relative coordinate system with the origin at the center, the parent star, with mass $m_0 = m_0(t)$. Masses of bodies vary in different rates

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2} \quad (2.1)$$

anisotropically. The problem is complicated, so we will investigate the problem using perturbation theory methods based on aperiodic motion along a quasiconical cross section [5]. It is expedient to proceed from the equation of motion in the relative coordinate system [4]. We will use the equations of perturbed motion in the form of the Lagrange equation. To write in explicit form the equation of perturbed motion in the form of the Lagrange equation, it is necessary to express through the osculating orbital elements of the perturbing functions for two planets.

The equations of the perturbed motion of two planets in a relative coordinate system will be written in the form [4]

$$\ddot{\vec{r}}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} \vec{r}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} \tilde{W}_1, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2} \vec{r}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} \tilde{W}_2, \quad (2.3)$$

$$\tilde{W}_1 = \tilde{U}_1 + F_1 + P_1, \quad (2.4)$$

$$F_1 = F_{1x}x_1 + F_{1y}y_1 + F_{1z}z_1, \quad P_1 = \frac{\ddot{\gamma}_1}{2\gamma_1} r_1^2, \quad (2.5)$$

$$\mu_2 = fm_2, \quad r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, \quad \gamma_1 = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)} = \gamma_1(t), \quad (2.6)$$

$$\tilde{W}_2 = \tilde{U}_2 + F_2 + P_2, \quad (2.7)$$

$$F_2 = F_{2x}x_2 + F_{2y}y_2 + F_{2z}z_2, \quad P_2 = \frac{\ddot{\gamma}_2}{2\gamma_2} r_2^2, \quad (2.8)$$

$$\mu_1 = fm_1, \quad r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad \gamma_2 = \frac{m_0(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_2(t)} = \gamma_2(t), \quad (2.9)$$

\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 - force functions of the Newtonian interaction of bodies, and we will assume that $r_1 < r_2$.

We express all the terms of the perturbing functions, through the orbital elements of the unperturbed motion. Out of them, the most complex is the expansion in a series of force functions of Newtonian

interaction of bodies. It is expedient to distinguish the principal and the indirect part of the perturbing functions

$$\tilde{U}_1 = \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2} U_{12n} - \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2} \alpha U_{1\text{косв}} \quad (2.10)$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2} U_{22n} - \frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2} \frac{1}{\alpha^2} U_{2\text{косв}}, \quad (2.11)$$

$$\alpha = \alpha(t) = \frac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2} < 1, \quad (2.12)$$

$$\tilde{U}_{12n} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{12}} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right), \quad \tilde{U}_{1\text{косв}} = \left(\frac{r_1}{\gamma_1 a_1} \right) \left(\frac{\gamma_2 a_2}{r_2} \right)^2 \cos \psi, \quad (2.13)$$

$$\tilde{U}_{22n} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{21}} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{1}{r_{21}} \right), \quad \tilde{U}_{2\text{косв}} = \left(\frac{r_2}{\gamma_2 a_2} \right) \left(\frac{\gamma_1 a_1}{r_1} \right)^2 \cos \psi. \quad (2.14)$$

Expressions in the right-hand parts of these formulas are expanded in a series along the osculating elements of aperiodic motion along a quasiconical section. The expansions of the perturbing functions (2.5), (2.8) are not particularly complicated, since the analytical expressions for the coordinates and the square of the modulus of the radius vector are simple [5]

$$x = \gamma \rho [\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i], \quad (2.15)$$

$$y = \gamma \rho [\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i], \quad (2.16)$$

$$z = \gamma \rho [\sin u \cdot \sin i], \quad (2.17)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 \rho^2. \quad (2.18)$$

Their expansions in series are known [5,6]. Also, decompositions of the quantities $(r/\gamma a) = (\rho/a)$, $(\gamma a/r)^2 = (a/\rho)^2$ in the indirect part of the perturbing function (2.13), (2.14).

2.1 The decomposition of the perturbing function principal part. As noted above, the main difficulty lies in the expansion of the principal part of the perturbing function \tilde{U}_{12n} , \tilde{U}_{22n} . According to the vector $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ follows

$$r_{12}^2 = r_2^2 - 2\vec{r}_1\vec{r}_2 + r_1^2 = r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \psi + r_1^2 \quad (2.19)$$

where, ψ - the angle between two radius-vectors.

We denote

$$\Delta^2 = r_{12}^2 = r_{21}^2 = r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \psi + r_1^2 \quad (2.20)$$

$$\Delta_0^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(u_1 - u_2), \quad (2.21)$$

$$\tilde{\Psi} = \cos \psi - \cos(u_1 - u_2), \quad (2.22)$$

where, $u_1 = \omega_1 + \theta_1$ и $u_2 = \omega_2 + \theta_2$ - the true longitudes of the inner and outer planets, respectively.

Then from (2.19) taking into account the notation (2.20)-(2.22) we obtain

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + (-2r_1r_2\tilde{\Psi}) = \Delta_0^2 \left[1 - \frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2} \tilde{\Psi} \right]. \quad (2.23)$$

From the inequality (2.23) follows that

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2} \tilde{\Psi}}}. \quad (2.24)$$

Using the well-known formula

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots$$

let's expand the second factor in the right-hand side of (2.24). As a result, we get

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + r_1r_2\tilde{\Psi} \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^2 \frac{1}{\Delta_0^5} + \frac{5}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^3 \frac{1}{\Delta_0^7} + \dots \quad (2.25)$$

Generalizing formula (2.25), we can write

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + r_1r_2\tilde{\Psi} \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^2 \frac{1}{\Delta_0^5} + \frac{5}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^3 \frac{1}{\Delta_0^7} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} r_1r_2\tilde{\Psi} \right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}. \quad (2.26)$$

We express the right-hand side of (2.26) in terms of the orbital elements of the two planets. For this, it is necessary to express the quantities $\Delta_0^{-(2i+1)}$ and $\tilde{\Psi}$ through the orbital elements. Expressions in terms of orbital elements of quantities $r_1 = \gamma_1\rho_1$, $r_2 = \gamma_2\rho_2$, simple enough and known [8-10]. First, we obtain the necessary formulas for the expansion of the quantity determined by formula (2.22).

For the first summand of (2.22) we have

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2} = \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \cdot \frac{z_2}{r_2} = \\ &= \left(\frac{x_1}{\gamma_1\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{x_2}{\gamma_2\rho_2} \right) + \left(\frac{y_1}{\gamma_1\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{y_2}{\gamma_2\rho_2} \right) + \left(\frac{z_1}{\gamma_1\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{z_2}{\gamma_2\rho_2} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Correspondingly, it follows from (2.15) - (2.17) that the coordinates of points can be written in the form

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{\gamma_1\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{x_2}{\gamma_2\rho_2} \right) &= [\{\cos u_1\} \cos \Omega_1 - \{\sin u_1\} \sin \Omega_1 \cos i_1] \cdot [\{\cos u_2\} \cos \Omega_2 - \{\sin u_2\} \sin \Omega_2 \cos i_2] \\ \left(\frac{y_1}{\gamma_1\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{y_2}{\gamma_2\rho_2} \right) &= [\{\cos u_1\} \sin \Omega_1 + \{\sin u_1\} \cos \Omega_1 \cos i_1] \cdot [\{\cos u_2\} \sin \Omega_2 + \{\sin u_2\} \cos \Omega_2 \cos i_2] \\ \left(\frac{z_1}{\gamma_1\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{z_2}{\gamma_2\rho_2} \right) &= [\{\sin u_1\} \sin i_1] \cdot [\{\sin u_2\} \sin i_2] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Formulas (2.27), (2.28) define the expression $\cos \psi$ in terms of orbital elements. In (2.22), it is still necessary to expand the second term in series

$$\begin{aligned}
 \cos(u_1 - u_2) &= \cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 = \\
 &= \cos(\omega_1 + \theta_1) \cos(\omega_2 + \theta_2) + \sin(\omega_1 + \theta_1) \sin(\omega_2 + \theta_2) = \\
 &= [\cos \omega_1 \{\cos \theta_1\} - \sin \omega_1 \{\sin \theta_1\}] [\cos \omega_2 \{\cos \theta_2\} - \sin \omega_2 \{\sin \theta_2\}] + \\
 &+ [\sin \omega_1 \{\cos \theta_1\} + \cos \omega_1 \{\sin \theta_1\}] [\sin \omega_2 \{\cos \theta_2\} + \cos \omega_2 \{\sin \theta_2\}]
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

The expression in curly brackets decomposes into an infinite series in powers of eccentricity [6]. As a result, we obtain an analytical expression $\tilde{\Psi}$ through the orbital elements of two planets.

The situation is more complicated in the expansion in a series of quantities $\Delta_0^{-(2i+1)}$. Equations (2.21) can be rewritten as

$$\begin{aligned}
 \Delta_0^2 &= a_1^2 \gamma_1^2 \left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)^2 + a_2^2 \gamma_2^2 \left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)^2 - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 \left(\frac{\rho_1}{a_1}\right) \left(\frac{\rho_2}{a_2}\right) \cos(u_1 - u_2) = a_1^2 \gamma_1^2 (1 + R_1)^2 + \\
 &+ a_2^2 \gamma_2^2 (1 + R_2)^2 - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 (1 + R_1)(1 + R_2) \cos(u_1 - u_2) = a_1^2 \gamma_1^2 + a_2^2 \gamma_2^2 - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 \cos(u_1 - u_2) + \\
 &+ a_1^2 \gamma_1^2 (2R_1 + R_1^2) + a_2^2 \gamma_2^2 (2R_2 + R_2^2) - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 (R_2 + R_1 + R_1 R_2) \cos(u_1 - u_2)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

We denote by

$$\rho_0^2 = [\gamma_1^2 a_1^2 + \gamma_2^2 a_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 a_1 a_2 \cos(u_1 - u_2)] , \tag{2.31}$$

$$R_{12} = a_1^2 \gamma_1^2 (2R_1 + R_1^2) + a_2^2 \gamma_2^2 (2R_2 + R_2^2) - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 (R_2 + R_1 + R_1 R_2) \cos(u_1 - u_2) ,$$

where, R_1, R_2 the remaining parts of the expansion of the radius-vector modules depend on the first and above the degree of eccentricity. Then it follows from (2.30) that

$$\Delta_0^2 = \rho_0^2 + R_{12} . \tag{2.32}$$

Therefore, we can write

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{R_{12}}{\rho_0^2}\right)^{-1/2} , \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho_0} &= [\gamma_1^2 a_1^2 + \gamma_2^2 a_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 a_1 a_2 \cos(u_1 - u_2)]^{-1/2} = \\
 &= \frac{1}{\gamma_2 a_2} [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(u_1 - u_2)]^{-1/2} .
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

We rewrite formula (2.33) in the form

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \left(1 + \frac{R_{12}}{\rho_0^2}\right)^{-(i+1/2)} . \tag{2.35}$$

Expanding the right-hand side of (2.35) in a Taylor series with ρ_0 respect to, we obtain

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r_1 - \gamma_1 a_1) \frac{\partial}{\partial(\gamma_1 a_1)} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right) + (r_2 - \gamma_2 a_2) \frac{\partial}{\partial(\gamma_2 a_2)} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right) + \dots \tag{2.36}$$

We denote by

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1}{\gamma_1 a_1} - 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2}{\gamma_2 a_2} - 1. \tag{2.37}$$

From the known series expansion follows

$$\begin{aligned} \frac{r}{\gamma a} = \frac{\rho}{a} = & 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + \\ & + \frac{e^4}{3}(\cos 2M - \cos 4M) + O(e^5). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Therefore, ε_1 has order $O(e_1)$, where ε_2 has $O(e_2)$.

Let denote the $D_{m,n}$ differential operator

$$D_{m,n} = (\gamma_1 a_1)^m (\gamma_2 a_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial (\gamma_1 a_1)^m \partial (\gamma_2 a_2)^n}. \tag{2.39}$$

Then from (2.36) we obtain

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[1 + \varepsilon_1 D_{1,0} + \varepsilon_2 D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\varepsilon_1^2 D_{2,0} + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 D_{1,1} + \varepsilon_2^2 D_{0,2}) + \dots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \tag{2.40}$$

However, from the relation (2.34) it follows that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= \left\{ \frac{1}{\gamma_2 a_2} [1 - \alpha^2 - 2\alpha \cos(u_1 - u_2)]^{-1/2} \right\}^{(2i+1)} = \\ &= (\gamma_2 a_2)^{-(2i+1)} [1 - \alpha^2 - 2\alpha \cos(u_1 - u_2)]^{-(i+1/2)} = \\ &= (\gamma_2 a_2)^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \cos[j(u_1 - u_2)], \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s} \tag{2.42}$$

The quantities $b_s^{(j)}(\alpha)$ in the formula (2.42) are called the Laplace coefficients, each of which can be represented as a uniformly convergent series in α for all $\alpha < 1$ [7,6].

Let's denote

$$\begin{aligned} A_{i,j,m,n} &= D_{m,n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right) = \\ &= (\gamma_1 a_1)^m (\gamma_2 a_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial (\gamma_1 a_1)^m \partial (\gamma_2 a_2)^n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

As a result, formula (2.40) has the form

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{i,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{i,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2). \tag{2.44}$$

if we generalize this expression, we get

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(u_1 - u_2). \quad (2.45)$$

In calculating the partial derivatives with respect $A_{i,j,k,l-k}$ to $(\gamma_1 a_1)$ and $(\gamma_2 a_2)$ one should be careful, since $(\gamma_1 a_1)$ and $(\gamma_2 a_2)$ are also implicitly contained in the Laplace coefficients $b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha)$.

Substituting (2.45) into (2.13), we have

$$U_{12i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \left(\frac{\rho_1}{a_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{a_2} \right) \tilde{\Psi} \right)^i \frac{(\gamma_1 a_1)^i (\gamma_2 a_2)^{i+1}}{2} \times \\ \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon_{1k} \varepsilon_{2l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(u_1 - u_2) \quad (2.46)$$

We note that in the expression (2.46) the inclinations i_1 and i_2 are contained only in the quantity of $\tilde{\Psi}$.

2.2 The actual expansion of the perturbing functions to within second powers of small quantities. Let's consider the actual expansions of the perturbing functions to within second powers of small quantities. Up to second degrees of eccentricities we have [10]

$$r_1 = \gamma_1 \rho_1 = \gamma_1 a_1 \left(\frac{\rho_1}{a_1} \right) \approx \gamma_1 a_1 \left[1 + \frac{e_1^2}{2} + (-e_1) \cos M_1 - \frac{e_1^2}{2} \cos 2M_1 \right] \quad (2.47)$$

$$r_2 = \gamma_2 \rho_2 = \gamma_2 a_2 \left(\frac{\rho_2}{a_2} \right) \approx \gamma_2 a_2 \left[1 + \frac{e_2^2}{2} + (-e_2) \cos M_2 - \frac{e_2^2}{2} \cos 2M_2 \right]. \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &\approx \sin \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) + e_1 \sin 2\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) - \frac{7}{8} \sin \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) \right) \\ \cos \theta_1 &\approx \cos \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) + e_1 (\cos 2\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) - 1) + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) - \frac{7}{8} \cos \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) \right) \\ \sin \theta_2 &\approx \sin \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) + e_2 \sin 2\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) + e_2^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) - \frac{7}{8} \sin \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) \right) \\ \cos \theta_2 &\approx \cos \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) + e_2 (\cos 2\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) - 1) + e_2^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) - \frac{7}{8} \cos \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

where formula $M = \lambda - (\Omega + \omega)$ is being considered.

Using the above decomposition, we finally express the right-hand side of (2.22) in terms of the orbital elements.

Naturally, such cumbersome and complex analytical calculations are advisable to perform modern methods of computer algebra. We used the system of analytical computation Mathematica [11]

As a result, the right-hand side of (2.22) has the form

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \cos \psi - \cos(u_1 - u_2) = \\
&= \frac{1}{64} (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1^2 + 8(\cos(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + 1) + \sin(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1 + 8 \cos(\lambda_1 - \Omega_1)) \times \\
&\times (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2^2 + 8(\cos(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + 1) + \sin(2\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2 + 8 \cos(\lambda_2 - \Omega_2)) + \\
&+ \sin(i_1) \sin(i_2) (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1^2 + 8(\cos(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + 1) + \sin(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1 + 8 \sin(\lambda_1 - \Omega_1)) \times \\
&\times (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2^2 + 8(\cos(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + 1) + \sin(2\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2 + 8 \sin(\lambda_2 - \Omega_2)) - \\
&- (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1^2 + 8(\cos(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + 1) + \sin(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1 + 8 \sin(\lambda_1 - \Omega_1)) \times \\
&\times (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2^2 + 8(\cos(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + 1) + \sin(2\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2 + 8 \sin(\lambda_2 - \Omega_2)) + \\
&+ (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) (\cos(i_1) \cos(\Omega_1) + \sin(\Omega_1)) e_1^2 + 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) \times \\
&\times (\cos(i_1) \cos(\Omega_1) + \sin(\Omega_1)) \left(\cos\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) \right) e_1 + \\
&+ 8(\cos(i_1) \cos(\Omega_1) \sin(\lambda_1 - \Omega_1) + \cos(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\Omega_1)) (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) (\cos(i_2) \cos(\Omega_2) + \sin(\Omega_2)) e_2^2 + \\
&+ 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) (\cos(i_2) \cos(\Omega_2) + \sin(\Omega_2)) \left(\cos\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) \right) e_2 + \\
&+ 8(\cos(i_2) \cos(\Omega_2) \sin(\lambda_2 - \Omega_2) + \cos(\lambda_2 - \Omega_2) \sin(\Omega_2)) + \\
&+ (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) (\cos(\Omega_1) - \cos(i_1) \sin(\Omega_1)) e_1^2 + \\
&+ 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) (\cos(\Omega_1) - \cos(i_1) \sin(\Omega_1)) \left(\cos\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) \right) e_1 + \\
&+ 8 \cos(\lambda_1 - \Omega_1) \cos(\Omega_1) - 8 \cos(i_1) \sin(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\Omega_1)) (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) (\cos(\Omega_2) - \cos(i_2) \sin(\Omega_2)) e_2^2 + \\
&+ 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) (\cos(\Omega_2) - \cos(i_2) \sin(\Omega_2)) \left(\cos\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) - \right. \\
&\left. - \sin\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) \right) e_2 + 8 \cos(\lambda_2 - \Omega_2) \cos(\Omega_2) - 8 \cos(i_2) \sin(\lambda_2 - \Omega_2) \sin(\Omega_2)))).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

For the actual expansion of the quantities $\Delta_0^{-(2i+1)}$ from formula (2.44), we have

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{0,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{0,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{0,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2), \tag{2.51}$$

$$\frac{1}{\Delta_0^3} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{1,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{1,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{1,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{\Delta_0^5} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{2,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{2,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{2,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.53)$$

where, according to (2.43), (2.42) are denoted by

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right) = (\gamma_1 a_1)^m (\gamma_2 a_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial (\gamma_1 a_1)^m \partial (\gamma_2 a_2)^n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right), \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{2} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{i+1/2}}. \quad (2.55)$$

To obtain the expansion in an explicit form, up to a second order of small quantities, it suffices to retain the terms $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ in (2.51) - (2.53).

For example, consider $A_{1,-3,0,1}$. According to the formula (2.54), we can write

$$A_{1,-3,0,1} = D_{0,1} \left((a_2 \gamma_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) \right) = (\gamma_2 a_2) \frac{\partial}{\partial (\gamma_2 a_2)} \left((a_2 \gamma_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) \right) = -3(\gamma_2 a_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) - (\gamma_1 a_1) (\gamma_2 a_2)^{-4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[b_{3/2}^{-3}(\alpha) \right] = -3(\gamma_2 a_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) - (\gamma_1 a_1) (\gamma_2 a_2)^{-4} \frac{d}{d\alpha} \left[b_{3/2}^{-3}(\alpha) \right]. \quad (2.56)$$

Similarly, other coefficients $A_{i,j,m,n}$ in formulas (2.51) - (2.53) are calculated.

3. Results. The performed analytical calculations lead us to the final results. In principle, we obtained the expansions of the perturbing functions up to any order with respect to small quantities.

Indeed, substituting the obtained analytical expressions (2.51) - (2.53), (2.47) - (2.48), (2.50) into formulas (2.25) and (2.13) we obtain the expansions of the principal part of the perturbing function. Obtained explicit formulas also give the possibility of writing in an analytic form the indirect parts of the perturbing functions. Also, using the obtained analytical expressions, we can write. As noted above, the expressions for the perturbing functions (2.5), (2.8) in terms of orbital elements are simple enough and follow from formulas (2.15) - (2.18).

Thus, the complete expressions of the perturbing function (2.4), (2.7) are expressed in terms of the orbital elements of the two planets.

Using the obtained formulas, the actual expansions of the perturbing functions are found to within a second order with respect to small quantities.

4. Discussion. In the paper, we examined two exoplanets in a relative coordinate system with the origin at the center of the parent star. The general formulas for the expansion in a series of perturbing functions in the two-planar three-body problem with masses varying anisotropically at various rates, based on aperiodic motion along a quasiconic section, are obtained for the first time. The relations obtained make it possible to expand the perturbing functions with any accuracy with respect to eccentricities and inclinations.

The results of this work open up new promising opportunities in the study of the dynamics of nonstationary gravitating systems. The obtained equations will be effectively used to study the dynamic evolution of exoplanetary systems because of an anisotropic change in the masses of the parent star and planets. In this case, the effects of the decrease in the mass of the parent star and the growth of the mass of the planets will be taken into account because of the accretion of matter from the remnants of the protoplanetary disc.

The research has been done according to PhD training program MES RK and PTF MES RK № BR05236322.

REFERENCES

- [1] Morbidelli A., Dynamical Evolution of Planetary Systems, Planets, Stars and Stellar Systems, 2013, *SSPS*, V3, 63. DOI:10.1007/978-94-007-5606-9_2. (in English).
- [2] Bayliss., Daniel D.R., Winn J.N. Confirmation of a Retrograde Orbit for Exoplanet WASP-17b. *ApJ* 2010.722.L.224. DOI:10.1088/2041-8205/722/2/L224. (in English).
- [3] Bolmont E., Selsis F., et al., Water loss from terrestrial planets orbiting ultracool dwarfs: Implications for the planets of TRAPPIST-1 – *MNRAS* 2017. V.464. P.3228. DOI:10.1093/mnras/stw2578. (in English).
- [4] Minglibaev M.Dzh., Maemerova G.M., Shomshekova S.A. Differencial'nye uravneniya otноситel'nogo dvizheniya nestacionarnykh jekzoplanetnykh sistem. *KazNPU Vestnik* 2017 g., T.57, №1, s. 147-152. (in Russian).
- [5] Minglibaev M.Dzh. Dinamika gravitirujushhih tel s peremennymi massami i razmerami. Postupatel'noe i postupatel'no-vrashhatel'noe dvizhenie. *LAP LAMBERT Academic Publishing*, Germanija, 2012, 229 s. ISBN:978-3-659-29945-2.
- [6] Mjurrej K., Dermott S. Dinamika Solnechnoj sistemy. Per.s angl.pod.red. I.I.Shevchenko. *M.:Fizmatlit*, 2010g.588s. ISBN:978-5-9221-1121-8.
- [7] Shar'le K. Nebesnaja mehanika. *M.: Nauka*, 1966. 628 s.
- [8] Duboshin G.N. Nebesnaja mehanika: Osnovnye zadachi i metody. *M.: Nauka*, 1975. 799 s.
- [9] Subbotin M.F. Vvedenie v teoreticheskuyu astronomiju. *M.: Nauka*, 1968. 800 s.
- [10] Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoj mehanike i astrodinamike. Pod.red.G.N.Duboshina *M.Nauka*.1976.
- [11] Prokopenja A.N. Reshenie fizicheskikh zadach s ispol'zovaniem sistemy Mathematica. Brest: *Izdatel'stvo BGTU*, 2005. 260 s.

УДК 521.1

М. Дж. Минглибаев^{1,2}, С.А. Шомшекова^{1,2}¹әл-Фараби атындағы ҚҰУ, Алматы, Қазақстан;²«В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Қазақстан

**РЕАКТИВТІ КҮШТІ ЕСЕПКЕ АЛЫП АНИЗОТРОПТЫ АЙНЫМАЛЫ МАССАДАҒЫ
ЕКІ ПЛАНЕТАЛЫ ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІНІҢ ҰЙЫТҚУШЫ ФУНКЦИЯНЫҢ
АНАЛИТИКАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕРІ**

Аннотация. Бұл жұмыста абсолютті координаталар жүйесіндегі айнымалы массалы екі планеталы экзопланеталық жүйе қарастырылған. Қозғалыс тендеулері Мещерский тендеулерімен сипатталады. Центрлік жұлдыздың және планеталардың массалары айнымалы әртүрлі қарқынмен өзгереді. Денелердің массалары уақыт бойынша анизотропты, әртүрлі қарқынмен өзгереді жалпы жағдай зерттеледі. Экзопланеталы жүйе эволюциясының бейстационар сатысында массаның анизотропты өзгеруі айтарлықтай оның динамикасына әсерін тигізеді. Қозғалыс тендеуінің интегралы болмағандықтан, бұл мәселе бейстационар жүйелерге өңделген ұйытқу теориясының әдістерімен зерттеледі. Ұйытқу теориясын қолдануға массалы центрлік жұлдыз салыстырмалы координаталар жүйесінің қозғалыс тендеуінің басы ретінде қолданылады. Квазиконусты қима бойынша периодты емес қозғалыс негізінде ұйытқу теориясының әдістері қолданылады. Екі планетаның қозғалысы реактивті күшті ескергенде массалары айнымалы анизотропты өзгереді үш нүкте дене есебінің шеңберінде ұйытқу тендеуінің қозғалысы Лагранж тендеулерінің формасында сипатталады. Ұйытқу функциялары екі планетаның оскуляцияланған элементтері арқылы өрнектеледі. Ұйытқу функцияларының қатарға жіктелуінің аналитикалық тендеулері алынды. Жұмыста ұйытқу функциясының басты және жанама бөлігі көрсетілді. Планеталардың эксцентриситеттерінің квадраттарына дейінгі дәлдіктегі нақты жіктеуі орындалды. Алынған формулалар центрлік жұлдыз және планеталардың массаларының айнымалылығына байланысты орбиталық элементтердің эволюциясын зерттеуге қолданылады. Қарастырылған екі планеталы үш дене есебінің бейстационар айнымалы эволюция сатысындағы динамикалық эффектілерді сипаттайды. Күрделі аналитикалық есептеулерді орындауда Mathematica пакет бағдарламасын қолдандық.

Түйін сөздер: айнымалы массалы үш дене есебі, бейстационар экзопланеталық жүйелер, айнымалы массалы жұлдыздар, аперидикалық қозғалыс, протопланеталық диск.

М.Дж. Минглибаев^{1,2}, С.А. Шомшекova^{1,2}

¹КазНУ им. аль-Фараби., Алматы, Казахстан;

²ДТОО «Астрофизический Институт им. Фесенкова», Алматы, Казахстан

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФУНКЦИИ
В ДВУХПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ
С АНИЗОТРОПНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МАССАМИ
ПРИ НАЛИЧИИ РЕАКТИВНЫХ СИЛ**

Аннотация. В работе рассматривается двухпланетная экзопланетная система с переменными массами в абсолютной системе координат. Уравнения движения описываются с уравнениями Мещерского. Массы родительской звезды и планет считается переменными, изменяющимися в различных темпах. Исследуется общий случай, когда массы тел меняются со временем анизотропно, в различных темпах. Как следствия анизотропного изменения масс появляются реактивные силы, которые существенно влияет на динамику экзопланетной системы на нестационарном этапе ее эволюции. Уравнения движения не имеют ни одного интеграла, поэтому проблема исследуются методами теории возмущении разработанных для таких нестационарных систем. Исходными для использования теории возмущений являются уравнения движения в относительной системе координат с началом в центре родительской звезды. Используется методы теории возмущении на базе апериодического движения по квазиконическому сечению. Движение двух планет, в рамках задачи трех точечных тел с переменными массами изменяющимися анизотропно при наличии реактивных сил, описываются уравнениями возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа. Возмущающие функции выражаются через оскулирующие элементы двух планет. Получены аналитические выражения разложения в ряд возмущающих функции. В работе выделено главная и косвенная часть возмущающих функции. С точностью до квадрата эксцентриситетов планет выполнены фактические разложения. Найденные формулы позволяют исследовать эволюции орбитальных элементов из за переменности масс родительской звезды и планет. Они позволяют описывать динамических эффектов в рассматриваемой двухпланетной задаче трех тел с переменными массами как единая планетная система на нестационарном этапе ее эволюции. Для выполнения сложных аналитических вычислений использовали пакет программу Mathematica.

Ключевые слова: задача трех тел с переменными массами, нестационарные экзопланетные системы, звезды с переменными массами, апериодическое движения, протопланетный диск.

Information about authors:

Minglibayev Mukhtar Zhumabekovich - Post address: Almaty, Zharokov st, 288, 35, Affiliation: al-Farabi Kazakh National University, Fesenkov Astrophysical Institute, Chief Researcher. Tel: 2476086, e-mail: minglibayev@gmail.com

Shomshekova Saule - Post address: Almaty, Shelihova st. 163. Affiliation: al-Farabi Kazakh National University, Fesenkov Astrophysical Institute, Researcher. Tel: 2607591, e-mail: shomshekova.saule@gmail.com

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 59 – 62

UDC 524.386

L.N. Kondratyeva, F.K. Rspaev, E.K. Denissyuk, M.A. Krugov

Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan
lu_kondr@mail.ru, eddenis@mail.ru, mkrugov@astroclub.kz

NEW RESULTS OF STUDY OF THE PLANETARY NEBULA M1-77

Abstract. The object M1-77 is known as the young low excitation planetary nebula. The variability of the brightness and the radial velocities of the metal lines lead some authors to the idea of the binary nature of the central star in the object. In this paper, the new photometric and spectral results obtained for the object M1-77 in 2009 – 2017, are discussed. Irregular variations of brightness in B, V, and R filters with an amplitude of $\sim 0^m.4$ were detected. During our observations, the absolute fluxes in the emission lines H α , [NII] and [SII] increased approximately as a factor 20. Significant changes of the fluxes began in 2011. Simultaneously, an increase of the electron density of the gas in the nebula was recorded. It can be assumed that the reason of the observed events is the reset of an additional mass of gas that has entered the nebula.

Key words: planetary nebulae, emission lines; individual: M1-77.

Introduction. The young planetary nebula M1-77 with the coordinates $\alpha(2000.0) = 21^h 19^m$, $\delta(2000.0) = + 46^\circ 19'$ was discovered in 1946 [1]. Different estimations for the distance were obtained: 2.4, 2.5 and 2.83 kpc [2, 3, 4]. It is assumed that the central star has the low effective temperature $\sim 20000\text{K}$. The diameter of the nebula is $\sim 7''$ [2, 5]. Photometric observations [6] revealed rapid changes in the brightness of the object within the range $0^m.1 - 0^m.2$.

In the spectrum, the emission lines HI, [NII] [SII] are observed on the background of a strong continuum. The relative intensities of the emission lines are presented in [5]. Absolute fluxes are given in [7]. According to [5], the radial velocity, measured from the emission lines H α and [NII], equals to -84 ± 3 km/s. Rapid, within a few hours, changes in radial velocity were detected by De Marko [8]. One possible explanation is the binary nature of the central star in the object M1-77 [9].

Observations and processing In Fesenkov Astrophysical Institute the spectral observations of the M1-77 object are mainly performed on the telescope AZT-8 (70cm). CCD camera SBIG STT-3200 (2184x1472, 6.8 μ) is used as radiation receiver at the output of the spectrograph. The available spectral range for observations is $\sim 3500 \text{ \AA}$ (4000 - 7500 \AA).

Additional spectral observations were made on a 1-meter telescope installed at the Tien-Shan Observatory. The telescope is equipped with a new diffraction spectrograph. At the output of the spectrograph there is a CCD camera SBIG Atik-16200 (4500x3600, 6 μ). It has an increased sensitivity in the ultraviolet and, in principle, makes it possible to obtain spectrograms in the range from 3600 \AA to 7500 \AA . During observations, the spectrograms of the studied object are obtained with a narrow (2'' - 3'') and with a wide (7'' - 10'') entrance slit. Observations of a standard star with a known energy distribution are performed with a wide slit, which ensures the passage and recording of the full entire radiation flux. Standard processing of the files consists of subtracting the dark background, taking into account the flat field and the atmospheric absorption. The spectral sensitivity of the apparatus is determined by comparing the observed energy distribution in the spectrum of the standard with the data of the Catalog. After taking into account all the corrections, the values of the radiation fluxes in absolute energy units are determined. Spectrograms obtained with a narrow slit and with a resolution of 0.25 - 0.5 \AA are used to study the structure of emission lines.

For the photometric observations of the object, the telescope AZT-8 and the 1-meter telescope (Assy-Turgen Observatory) were used. A set of B V R filters and the following CCD cameras are used: SBIG ST-8 (1530x1020, 9 μ) (AZT-8) and SBIG ST-7 (756x510, 9 μ) (1 meter telescope Assy-Turgen).

The procedure for initial image processing consists of standard operations using Bias, Dark and Flat files. Image measurements are performed using the MaximDI-6 standard software package. The calculation of atmospheric extinction and reduction of the obtained estimates of magnitudes to the standard system B V R is carried out using a system of corresponding equations.

Results The results of photometric observations are given in Table 1. Columns 3 -5 give values of B V R values for M1-77. Columns 6-8 contain similar data for a check star. The amplitudes of the brightness variability of the object M1-77 equal to 0^m.4, 0^m.3 and 0^m.3, in the BVR filters, respectively, while the changes of the brightness of the check star in the same filters are, respectively, 0^m.14, 0^m.02 and 0^m.07 (Fig. 1).

Table 1 – Results of photometric observations of M1-77

Dates of observations	JD-2400000	M1-77			TYC 33589		
		B	V	R	B	V	R
1	2	3	4	5	6	7	8
09.08.2007	54322.324	12.94±0.01	12.15±0.01	11.29±0.01	11.44±0.01	10.95±0.01	
21.06.2012	56100.374	12.65±0.05	11.83±0.01	11.17±0.03	11.30±0.05	10.94±0.01	10.57±0.01
01.10.2013	56567.155	12.86±0.03	12.15±0.03	11.34±0.03	11.43±0.03	10.96±0.03	10.57±0.02
03.10.2013	56569.153	12.84±0.03	12.11±0.02	11.34±0.01	11.44±0.02	10.96±0.01	10.55±0.03
31.07.2014	56870.390	13.06±0.04	12.18±0.02	11.43±0.01	11.43±0.01	10.94±0.02	10.50±0.01
01.09.2014	56902.217	12.96±0.04	12.24±0.02	11.49±0.01	11.44±0.01	10.95±0.02	10.53±0.01
13.07.2015	57217.134	12.91±0.03	12.23±0.02	11.38±0.01	11.43±0.02	10.96±0.02	10.55±0.01
13.07.2016	57951.160	12.93±0.04	11.38±0.01	11.42±0.01	11.44±0.01	10.95±0.01	10.55±0.01

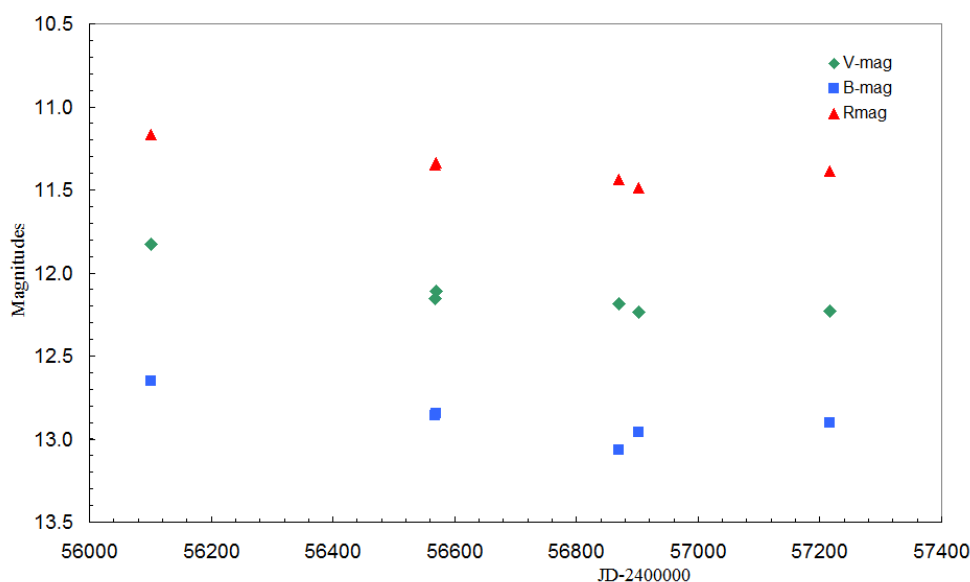


Fig 1 - B V R magnitudes of the object M1-77 and a check star

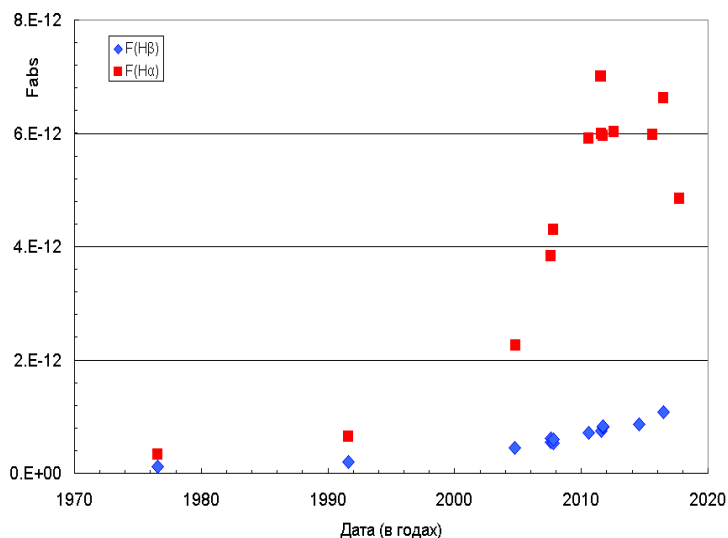
In the spectrum of M1-77, the radiation fluxes in the lines H β , H α , [NII], 6548, 6583 \AA and [SII], 6717, 6731 \AA were measured. The results are presented in Table 2. In the second row, power multipliers for fluxes are given. The accuracy of the values is $\sim 10 - 15\%$. In the last column of the Table 2, the electron density estimates obtained from the ratio of the intensities of the emission lines [SII], 6717, 6731 \AA are given.

Table 2 – Absolute fluxes of the emission lines in the spectrum of M1-77

Дата	JD-2400000	H β	[NII], 6548	H α	[NII], 6583	[SII], 6717	[SII], 6731	Ne cm ⁻³
К		10 ¹³	10 ¹³	10 ¹²	10 ¹³	10 ¹³	10 ¹³	
21.07.1976	42951.338	1.20	0.31	0.334	0.98			
09.08.1991	48447.333	2.06	0.85	0.645	2.48	0.27	0.29	1000±900
18.09.2004	53253.242	4.43						
11.10.2004	53290.175		1.29	2.26	4.82	0.36	0.43	1200±700
09.08.2007	54322.302	5.44						
12.08.2007	54325.318	6.09						
13.08.2007	54326.300		4.23	3.82	12.1	0.44	0.50	1300±700
10.10.2007	54384.146	5.38	4.41	4.30	12.4	0.49	0.52	1200±700
15.10.2007	54389.087	5.97						
19.07.2010	55397.342	7.15	6.64	5.91	21.3			
07.07.2011	55750.424		7.08	5.91	22.2		1.32	
27.07.2011	55770.307		7.10	5.93	22.0			
03.08.2011	55777.345		7.09	6.00	22.1	0.83	1.34	4700±1500
06.08.2011	55780.327	7.45						
01.09.2011	55806.225	8.11						
02.09.2011	55807.186	8.25	7.05	5.96	22.3	0.76	1.30	4800±1500
21.06.2012	56099.402		6.80	6.02	19.6	0.79	1.13	4800±1500
31.07.2014	56870.310	8.55						
17.08.2015	57252.301		5.87	5.98	18.7	0.82	1.23	4600±1500
09.06.2016	57914.375	10.6	6.28	6.63	20.5	0.79	1.34	4800±1500
16.09.2017	58013.135		4.99	4.85	15.5	0.59	0.87	4500±1500

During our observations, significant changes in all emission lines were registered. The radiation flux in the H β line increased by a factor of 10, the fluxes of the H α and [NII] lines were increased approximately as a factor of 20 (Fig. 2). The maximum emission in the lines of the "red" spectral region was observed in 2010 -2011. In this period, an increase of the electron density of the gas is also noted. A high level of values of these parameters is preserved to the present.

The behavior of the H β line is somewhat different from the one described above, it's flux increasing continued until 2016. This is due to a change, in this case - a decrease, in the absorption coefficient.

Figure 2 - Changes of the emission lines H β and H α fluxes in different years

Conclusion In the course of our research, we obtained data on the photometric reason of variability. If the central source is a binary system, then the interaction between the stellar components (unstable stellar wind), can also affect the brightness changes.

The spectral variability is manifested in the change of radiation fluxes in all emission lines. Most likely, this is due to the release of an additional mass of gas, replenished the nebula. This is evidenced by

the observed increase in the electron density of the gas. Such event - the reset of the secondary shell is not unique, but rather rare in the evolution of planetary nebulae.

The work was supported by the funding program BR05236322 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

- [1] Minkovski R. New emission nebulae// PASP. 1946. V. 58. P. 305.
- [2] Perek L. Planetary nebulae in the central region of the Galaxy// Bull Astron Czech. 1963. V. 14. P. 201.
- [3] Hoener G., Weinberger R. Candidates for promising extinction distances: Sh1-89, NGC 7048, M1-77//1988. A&ASS. V. 72. P.383.
- [4] Cahn J., Kaler J. Distances and distribution of planetary nebulae// ApJS. 1971. V.22. P. 319.
- [5] Sabbadin F. Ortolani S., et al. A peculiar planetary nebula// A&A. 1983. V. 123. P. 147.
- [6] Hander G. Photometric variations of the central star of M1-77 and suspected variability of the central star of VV3-5//IBVS. 1995. No 4244.
- [7] De Marco O., Bond H., Harmer D. et al. Indication of a large fraction of spectroscopic binaries among nuclei of planetary nebulae// ApJ. 2004. V.602. L93. DOI: [10.1086/382156](https://doi.org/10.1086/382156)
- [8] De Marco O., Wortel S., Bond H., The bizarre spectral variability of central stars of planetary nebulae// Asymmetrical Planetary Nebulae – apn4.conf. 2007.
- [9] Frew D., Bojicic S., Parker A. A catalog of integrated H α fluxes for 1258 galactic planetary nebulae// MNRAS. 2013. V. 431. 2. DOI: [10.1093/mnras/sts393](https://doi.org/10.1093/mnras/sts393)

УДК 524.386

МРНТИ 41.25.15

Л.Н. Кондратьева, Ф.К. Рыспаев, Э.К. Денисюк, М.А.Кругов

«В.Г.Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Қазақстан

М1-77 ПЛАНЕТАРЛЫҚ ТҰМАНДЫҚТЫҢ ЖАҢА НӘТИЖЕЛЕРІ

Аннотация. М1-77 объектісі аса белсенді емес жас планетарлық тұмандық ретінде белгілі. Бұл объектінің орталық жұлдызының табиғатының қасиеттеріне байланысты, яғни металдық сызықтардың сәулелік жылдамдығы және жарқырауының айнымалылығы, оның қос объекті болуы ықтимал деген идеяны кейбір авторлар келтіреді. Бұл жұмыста, 2009-2017 жылдар аралығындағы М1-77 объектісі үшін жаңа фотометрлік және спектрлік мәліметтер алынған. Амплитудасы $\sim 0^m.4$ жұлдыздық шамадағы В, V және R фильтрларында жарқырау тербелісінің бірқалыпсыздығы табылды. Біз бақылау жүргізген уақытта H α , [NII] және [SII] эмиссиялық сызықтарында сәулеленуінің абсолюттік ағыны шамамен 20 есеге арты. Ағынның өзгерісі 2011 жылдан басталды. Сонымен қатар, бір уақытта қабықшадағы газдың электрлік тығыздығының артқандығы тіркелді. Бұдан шығатын тұжырым, бақылған құбылыстарға себеп, тұмандықта артқан қосымша газ массасының шығарылуы деп болжауға болады.

Түйін сөздер: планетарлық тұмандықтар, эмиссиялық сызықтар; иондық сызықтар, жеке объектілер: М1-77.

УДК 524.386

МРНТИ 41.25.15

Л.Н. Кондратьева, Ф.К. Рспаев, Э.К. Денисюк, М.А. Кругов

Астрофизический Институт им Фесенкова, Алматы, Казахстан

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАНЕТАРНОЙ ТУМАННОСТИ М1-77

Аннотация. Объект М1-77 известен как молодая планетарная туманность низкого возбуждения. Переменность блеска и лучевых скоростей металлических линий приводит некоторых авторов к идее о двойственной природе центральной звезды в этом объекте. В данной работе приводятся новые фотометрические и спектральные данные, полученные для объекта М1-77 в 2009 - 2017 гг. Обнаружены нерегулярные колебания блеска в В, V и R фильтрах с амплитудой $\sim 0^m.4$. За время наших наблюдений абсолютные потоки излучения в эмиссионных линиях H α , [NII] и [SII] увеличились примерно в 20 раз. Существенные изменения потоков начались в 2011г. Одновременно было зарегистрировано повышение электронной плотности газа в оболочке. Можно предположить, что причиной наблюдаемых событий является выброс дополнительной массы газа, пополнившей туманность.

Ключевые слова: планетарные туманности, эмиссионные линии; ионные линии; индивидуальные объекты: М1-77.

Information about authors:

Kondratyeva L.N. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Fesenkov Astrophysical Institute. lu_kondr@mail.ru

Rspaev F.K. - Scientific researcher, Fesenkov Astrophysical Institute.

Denisyuk E.K. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Fesenkov Astrophysical Institute. eddenis@mail.ru

Krugov M.A. - Engineer, Fesenkov Astrophysical Institute. mkrugov@astroclub.kz

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 63 – 66

UDC 524.386

L.A. Pavlova, L.N. Kondratyeva

Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan

E mail: lapavlova44@mail.ru, lu_kondr@mail.ru**MECHANISMS FOR FORMING THE INHOMOGENEOUS STRUCTURE OF PLANETARY NEBULAE**

Abstract. The inhomogeneous distribution of gas in planetary nebulae manifests in the form of numerous jets, globules and filaments. Details of the heterogeneous structure are found not only in extended, sufficiently evolved objects, but also in young compact objects which dynamic age does not exceed 1000 years. The problem of the formation of heterogeneity in the early stages of the planetary nebulae evolution is relevant recent years. The interaction of the hot fast wind of the central star with the substance ejected at the stage of the "red" giant under the influence of a slow but powerful wind, is considered as a possible mechanism. In this case, the formation of jets and globules occurs under the shock waves that accompany the stellar wind.

The central sources in some planetary nebulae are binary stellar systems. The processes of mass exchange between stellar components can also lead to the formation of an inhomogeneous shell structure.

In this paper, we consider the results of modern methods for studying planetary nebulae, including observations on space telescopes, which allow to evaluate the reality and effectiveness of the proposed mechanisms for the formation of heterogeneous structures.

Key words: planetary nebulae, mechanisms of forming the inhomogeneous structures.

Introduction The inhomogeneous structure of planetary nebulae is the subject of study by theorists and experimenters. It was assumed that polar jets, large-scale globules and bipolar structures are formed by the interaction of the residual stellar wind of the red giant and the hot wind of the central star. However, the study of a large group of young objects, shows that envelopes with a dynamic age <2000 years already exhibit a complete set of inhomogeneities found in large nebulae [1]. Thus, it turns out that inhomogeneities are formed at even earlier stages of the evolution of planetary nebulae, at a low central star temperature and before the appearance of a fast stellar wind.

Recent years, the search and analysis of inhomogeneities in the structure of young planetary nebulae have become a favorite topic of many researchers [2-8]. An assumption was made about the role of the accretion disk as a source of bipolar emissions [4,5]. Modern observations of planetary nebulae on space telescopes, obtained with high resolution, give new information for the creation of new models describing the formation and evolution of these objects.

In 1983 San Kwok [6] proposed a model of interacting winds to explain the structure of planetary nebulae. According to the model, the hot high-velocity wind of the central star interacts with matter ejected at the "red" giant stage. As a result, the outer boundary of the shell is formed. The details of the inhomogeneity in the distribution of gas in the nebula, namely jets, globules, possibly arise due to shock waves, which in turn are the source of radiation in the X-ray region.

In some cases, the inhomogeneous structure of the nebula is formed due to the mass exchange processes between the components of the binary stellar system in the center of the nebula. By now, nebulae with double central sources are 12-15% of their total number.

Zones of low ionization are found in images of many planetary nebulae. The gas in these zones has the same electronic temperature as the neighboring regions, but a low electron density. Modern methods of observation show that shock ionization "works" in the low-excitation zones, while the main envelope is ionized by ultraviolet quanta of the central source.

The results of modern observations on space telescopes

Photometric and spectral observations in the far infrared and submillimetric spectral ranges were carried out on the Herschel space telescope. Images of 18 planetary nebulae and a spectrogram of all the stars evolving from the Asymptotic branch of the red giants to the stage of planetary nebulae were obtained [10]. The obtained data allow, among other things, to assess the physical state and chemical composition of matter in the vicinity of the studied objects.

Images obtained with high resolution on the Hubble telescope have great importance for the study of the structure of nebulae. Thus, observations of ten compact planetary nebulae, which were carried out on this telescope, allow to discover for the first time numerous fine details of an inhomogeneous structure: arcs, two-dimensional rings, tori and halo [11]. Obtained data lead to the suggestion that such heterogeneous structures are inherent in most planetary nebulae and are formed in the early stages of evolution. Assuming that the cause of the formation of inhomogeneities can be the interaction of the early wind of the red giant and the later wind of the central star, the authors note that there must be several stages of fast stellar wind, different in duration and in direction. Such assumption is useful for explanation of the observed age difference between structural details within a single shell [12, 13].

So-called "hot bubbles" - central cavities filled with hot gas, are observed in many planetary nebulae [14]. They are formed under the action of a fast shock heated stellar wind. The stellar wind pushes out the substance thrown out at the stage of the red giant. Such zones should be "visible" in the X-ray range. Indeed, observations of the NGC 3234 nebula, performed on the XMM-Newton telescope, recorded soft diffuse X-Ray radiation with a temperature of 2.35×10^6 K and a luminosity of $2 \cdot 10^{30}$ erg / sec (for $D = 0.55$ kpc), which is formed in a hot bubble. An analysis of the chemical composition of plasma - the source of diffuse X-ray in different nebulae indicates that it is actually created by a hot stellar wind, but traces of the residual gas of the cold envelope are still present. Perhaps, these are dense features formed in collimating flows or filaments, formed during additional ejection of gaseous fragments from the central star. Hard X-ray radiation coming from the central star, can be created by coronal emission from the invisible component of a binary star or by a shock wave arising in a fast stellar wind.

A fairly rare event in the evolution of planetary nebulae - a repeated ejection of the envelope, is recorded in two objects. The old, highly evolved nebula A30 became famous after a dense shell of a new generation, practically devoid of hydrogen, was discovered near its central star [15]. Estimates of its dynamic age: 850 ± 200 years are obtained from a change in the angular size, the known velocity of expansion, and distance [16]. The complex structure of this new envelope is clearly visible on the images obtained with the Hubble telescope. Numerous jets indicate the movement of gas fragments from the center to the periphery. The X-ray radiation of an object can be divided into two components: a point source in the central star direction and an extended source corresponding to the position of the new envelope. The interaction of the modern stellar wind with the material of the secondary shell leads to shock heating of the plasma, which becomes the source of diffuse X-ray radiation. The origin of the X-ray radiation from the central star is still unclear.

Low - ionization zones in the form of globules are observed on the images of many planetary nebulae, including those obtained on the Hubble telescope. Studies have shown that the gas in these zones has the same electronic temperature as the neighboring regions, but a low electron density. Modern methods of observation made it possible to establish that the shock ionization mechanism "works" in the low-excitation zones, while the main envelope is ionized by ultraviolet quanta from a central source [17].

An analysis of the latest data obtained for the central stars of planetary nebulae in different spectral ranges, was carried out in [18]. Studies show that about 12-15% of the central stars, (according to some estimates, up to 30%), are binary systems. The orbital periods for these close binary systems are generally less than one day. A correlation between the central source binarity (the position of the orbital plane) and the spatial orientation of the envelope is traced. The interaction between the components of the central stellar system can lead to formation of bipolar shapes, as well as to the appearance of additional structural inhomogeneities.

Conclusions

The problem of the heterogeneous structure of planetary nebulae, even in the early stages of evolution, is very urgent and requires its solution. The corresponding mechanisms responsible for the

formation of inhomogeneities should be taken into account for the creation of more advanced models of real objects. One such mechanism is the interaction of hot and cold stellar winds, which is confirmed by observations in the X-ray range. Moreover, in order to explain the presence in the nebula of globules and jets of different ages, a pulsating mode of the fast stellar wind operation is proposed. It has also been established that nebulae with the binary central stars may differ in the shape and chemical composition of the envelope. Also, it is quite possible that their evolution is somewhat different from the evolution of the remaining planetary nebulae.

The work was supported by the funding program BR05236322 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

- [1] Kwok S. Morphological Structures of Planetary Nebulae// PASA. **2010**. V. 27. P. 174. DOI: [10.1071/AS09027](https://doi.org/10.1071/AS09027).
- [2] Sahai R., Morris M., Contreras C., Claussen M. Understanding the immediate progenitors of planetary nebulae// IAUS . 2012. V. 283. P. 180. DOI: [10.1017/S1743921312010915](https://doi.org/10.1017/S1743921312010915).
- [3] Sahai R., Morris M., Villars G. Young planetary nebulae: Hubble space telescope imaging and a new morphological classification system// AJ. **2011**. V. 141. P. 134. DOI: [10.1088/0004-6256/141/4/134](https://doi.org/10.1088/0004-6256/141/4/134).
- [4] Bright S., De Marco O., Chesneau O., et al. Observing Compact Disks Inside Pre-Planetary Nebulae with the Very Large Telescope Interferometer// AAS. **2012**. V. 283. P. 115. DOI: [10.1017/S1743921312010800](https://doi.org/10.1017/S1743921312010800).
- [5] Velázquez P., Raga A., Riera A., et al. Multipolar young planetary nebulae modelled as a precessing and orbiting jet with time-dependent ejection velocity// MNRAS. **2012**. V. 419. P. 3529. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.19991](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19991).
- [6] Miszalski B., Boffin H., Corradi R. Carbon dwarf wearing a Necklace: first proof of accretion in a post-common-envelope binary central star of a planetary nebula with jets// MNRAS . **2013**. V. 428. L39. DOI: [10.1093/mnras/slt011](https://doi.org/10.1093/mnras/slt011).
- [7] Gledhill T. M.; Forde, K. P. A fast bipolar H₂ outflow from IRAS 16342-3814: an old star reliving its youth // MNRAS. 2012. V. 421. – P. 346. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.20309.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20309.x).
- [8] Guillén, P., Vázquez R., Miranda L., et al. Multiple outflows in the planetary nebula NGC 6058// MNRAS. **2013**. V. 432. P. 2676. DOI: [10.1093/mnras/stt612](https://doi.org/10.1093/mnras/stt612).
- [9] Kwok S. From red giants to planetary nebulae// ApJ. **1982**. V. 258. P. 280.
- [10] Griet C, Van de Steene Herschel observations of planetary nebulae//Proceedings IAU Symp. **2016**. No 323. DOI: [10.1017/S1743921317001971](https://doi.org/10.1017/S1743921317001971).
- [11] Hsia C., Chau W., Zhang Y., et al. Hubble Space telescope observations and geometric models of compact multipolar planetary nebulae// ApJ. **2014**. V. 787. P. 25. doi: [10.1088/0004-637X/787/1/25](https://doi.org/10.1088/0004-637X/787/1/25)
- [12] Ottl S., Kimeswenger S., Zilstra A. Ionization structure of multiple-shell planetary nebulae. NGC 2438 // A&A. **2014**. V. 565. P. 87. DOI: [10.1051/0004-6361/201323205](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201323205).
- [13] Aller A., Miranda L., Olguin L., et al. On the Origin of Morphological Structures of Planetary Nebulae // MNRAS. **2015**. V. 446. P. 317. DOI: [10.1093/mnras/stu2106](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2106).
- [14] Ruizi N., Guerrero M. Physical structure of the planetary nebula NGC 3242 from the hot bubble to the nebular envelope// AJ. **2011**. V. 142. - P.91. DOI: [10.1088/0004-6256/142/3/91](https://doi.org/10.1088/0004-6256/142/3/91).
- [15] Jacoby G. Unusual structure of the planetary nebulae Abell 30 and Abell78//PASP, **1979**, V. 91, P. 754.
- [16] Guerrero M., Ruiz N., Hamann W., et al. Rebirth of X-Ray emission from the born-again planetary nebula A30// ApJ. **2012**. V. 755. P. 129. DOI: [10.1016/j.icarus.2012.09.025](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.09.025).
- [17] Akras S., Gon D., Low-ionization structures in planetary nebulae. Physical, kinematic and excitation properties// MNRAS. **2016**. V. 455. P. 930. DOI: [10.1093/mnras/stv2139](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2139).
- [18] Hillwig T., Jacoby G., Jones D., et al. Binarity in the central stars of planetary nebulae and its relation to stellar evolution// ASPC. **2017**. No 509.

УДК 524.386

Л.А. Павлова, Л.Н. Кондратьева

«В.Г.Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Қазақстан

ПЛАНЕТАРЛЫҚ ТУМАНДАРДЫҢ БІРКЕЛКІ ҚҰРЫЛЫМЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ МЕХАНИЗМДЕРІ

Аннотация. Планетарлық тумандардағы газдың біркелкі бөлінуі көптеген ағындар, глобулдер және талшықтар түрінде көрінеді. Гетерогенді құрылымның егжей-тегжейлері кеңейтілген, жеткілікті дамыған объектілерде ғана емес, сонымен қатар динамикалық жас 1000 жылдан асатын жас ықшам қабықтарда да кездеседі. Планетарлық тумандардың эволюциясының ерте кезеңдерінде біртектілікті қалыптастыру мәселесі соңғы жылдары өзекті болып табылады. Мүмкін болатын тетігі ретінде орталық жұлдыздың жылдамдығы жоғары жылдамдықты желдің баяу, бірақ күшті желдің

әсерінен «қызыл» гигант кезеңінде шығарылған затпен өзара әрекеттесуі қарастырылады. Бұл жағдайда жұлдыздар мен глобулдардың пайда болуы жұлдызды желмен жүретін соққы толқындарының әсерінен өтеді. Кейбір планеталық тумандардағы орталық көздер екі жұлдыздық жүйе болып табылады. Жұлдыздың құрамдас бөліктері арасындағы жаппай алмасу процестері біркелкі емес қабық құрылымын қалыптастыруға әкелуі мүмкін.

Осы мақалада планеталық тумандарды зерттеудің заманауи әдістерінің, соның ішінде ғарыштық телескоптардағы байқаудың, біркелкі емес құрылымдардың пайда болуына ұсынылған механизмдердің шынайылығы мен тиімділігін бағалауға мүмкіндік беретін нәтижелерін қарастырамыз

Түйін сөздер: планетарлық тумандықтар, қабықшаның құрылымын қалыптастыру механизмдері,

Л.А. Павлова, Л.Н. Кондратьева

Астрофизический Институт им Фесенкова, Алматы, Казахстан

МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ ПЛАНЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ

Аннотация. Неоднородное распределение газа в планетарных туманностях проявляется в форме многочисленных джетов, глобул и волокон. Детали неоднородной структуры обнаружены не только в протяженных, достаточно прэволюционировавших объектах, но и в молодых компактных оболочках, динамический возраст которых не превышает 1000 лет. Проблема формирования неоднородности на ранних этапах эволюции планетарных туманностей является актуальной на протяжении последних лет. В качестве возможного механизма рассматривается взаимодействие горячего высокоскоростного ветра центральной звезды с веществом, выброшенным на стадии «красного» гиганта под действием медленного, но мощного ветра. В этом случае образование джетов и глобул происходит под действием ударных волн, которые сопровождают звездный ветер. Центральные источники в некоторых планетарных туманностях являются двойными звездными системами. Процессы обмена массами между звездными компонентами также могут приводить к формированию неоднородной структуры оболочки.

В данной работе рассматриваются результаты современных методов исследований планетарных туманностей, включая наблюдения на космических телескопах, которые позволяют оценить реальность и эффективность предполагаемых механизмов образования неоднородных структур.

Ключевые слова: планетарные туманности, механизмы формирования структуры оболочки.

Information about authors:

Pavlova L.A. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Fesenkov Astrophysical Institute, lapavlova44@mail.ru;
Kondratyeva L.N. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Fesenkov Astrophysical Institute. lu_kondr@mail.ru

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 67 – 73

UDC 517.951

IRSTI 27.31.15

A.T.Assanova¹, A.P.Sabalakhova², Z.M.Toleukhanova³

¹ Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;

² South-Kazakhstan State University named after M.O.Auezov, Shymkent, Kazakhstan;

³ Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

E-mail: anarasanova@list.ru; sabalahova@mail.ru; zauresh03@mail.ru

ON THE SOLVING OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Abstract. The initial-boundary value problem for the special system of the third-order partial differential equations is considered. We study the existence of classical solutions to initial-boundary value problem for the special system of the third-order partial differential equations and offer the methods for constructing their approximate solutions. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of classical solution to initial-boundary value problem for the system of the third order partial differential equations are established. By introduction of new unknown function, we have reduced the considered problem to an equivalent problem consisting of a nonlocal problem for the system of hyperbolic equations of the second order with functional parameter and an integral relation. We have offered the algorithm to find an approximate solution to the investigated problem and have proved its convergence. Sufficient conditions for the existence of unique solution to the equivalent problem with parameter are established. Conditions of unique solvability to the initial-boundary value problem for the system of partial differential equations of the third order are obtained in the terms of initial data.

Key Words: partial differential equation of the third order, initial-boundary value problem, nonlocal problem, system of hyperbolic equations, solvability, algorithm.

1. Introduction. In recent decades, there has been a great interest to initial-boundary value problems for partial differential equations and systems of the third order. This is due to the appearance of such problems in the mathematical modeling of various natural science processes [1-6]. Quite a number of works devoted to the investigation of various problems for partial differential equations of the third order with two independent variables, bibliography and analysis can be seen in [1,2,5]. The system of partial differential equations of the third order began to be studied relatively recently [5]. In the present work, we consider the special system of partial differential equations of the third order at a rectangular domain. The boundary condition for time variable is specified as a combination of values from the partial derivatives of the required solution on the first and the second orders by spatial variable. We investigate the questions of existence and uniqueness of the classical solution to initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the third order and its applications.

Methods. To solve the the considered problem we use a method of introduction additional functional parameters [7-25]. The original problem is reduced to an equivalent problem consisting from nonlocal problem for a system of hyperbolic equations of the second order with functional parameters and integral relations. Sufficient conditions of the unique solvability to investigated problem are established in the terms of initial data. Algorithms of finding a solution to the equivalent problem are constructed. Conditions of unique solvability to initial-boundary value problem for a system of partial differential equations of the third order are established in the terms of coefficient of system and boundary matrices.

2. *Statement of problem.* At the domain $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ we consider the following initial-boundary value problem for the special system of partial differential equations

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = A(t, x)u + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & K_0(x) \frac{\partial^2 u(t_0, x)}{\partial x^2} + L_0(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \Big|_{t=t_0} + M_0(x) \frac{\partial u(t_0, x)}{\partial x} + P_0(x)u(t_0, x) + K_1(x) \frac{\partial^2 u(t_1, x)}{\partial x^2} + \\ & + L_1(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \Big|_{t=t_1} + M_1(x) \frac{\partial u(t_1, x)}{\partial x} + P_1(x)u(t_1, x) + K_2(x) \frac{\partial^2 u(t_2, x)}{\partial x^2} + L_2(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \Big|_{t=t_2} + \\ & + M_2(x) \frac{\partial u(t_2, x)}{\partial x} + P_2(x)u(t_2, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \psi_0(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where $u(t, x) = \text{col}(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$ is an unknown function, the $n \times n$ -matrix $A(t, x)$ and n -vector function $f(t, x)$ are continuous on Ω , the $n \times n$ -matrices $K_i(x)$, $L_i(x)$, $M_i(x)$, $P_i(x)$ and n -vector-function $\varphi(x)$ are continuous on $[0, \omega]$, $i = 0, 1, 2$, $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 \leq T$, the n -vector-functions $\psi_0(t)$ and $\psi_1(t)$ are continuously differentiable on $[0, T]$. The initial data satisfy the condition of approval.

A function $u(t, x) \in C(\Omega, R^n)$ having partial derivatives $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, R^n)$ is called a classical solution to the problem (1)--(4) if it satisfies system (1) for all $(t, x) \in \Omega$, and boundary conditions (2), (3) and (4).

We investigate the questions of existence and uniqueness of the classical solutions to the initial-boundary value problem for the system of partial differential equations of the third order (1)--(4) and the approaches to constructing its approximate solutions. For this goals, we applied the method of introduction of the additional functional parameters proposed in [7-25] for solving nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives. Considered problem is provided to nonlocal problem for system of hyperbolic equations of the second order including additional function and integral relation. The algorithm of finding the approximate solution of the investigated problem is proposed and its convergence proved. Sufficient conditions of the existence unique classical solution to the problem (1)--(4) are obtained in the terms of initial data.

3. *Scheme of the method and reduction to equivalent problem.*

We introduce a new unknown function $v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ and write the problem (1)--(4) in the following form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A(t, x)u + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & K_0(x) \frac{\partial v(t_0, x)}{\partial x} + L_0(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + M_0(x)v(t_0, x) + K_1(x) \frac{\partial v(t_1, x)}{\partial x} + L_1(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} + \\ & + M_1(x)v(t_1, x) + K_2(x) \frac{\partial v(t_2, x)}{\partial x} + L_2(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_2} + M_2(x)v(t_2, x) + \\ & + P_0(x)u(t_0, x) + P_1(x)u(t_1, x) + P_2(x)u(t_2, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (6)$$

$$v(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$u(t,x) = \psi_0(t) + \int_0^x v(t,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Omega. \quad (8)$$

Here the condition (3) is taken into account in (8).

A pair functions $(v(t,x), u(t,x))$, where the function $v(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ has partial derivatives $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, the function $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ has partial derivatives $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} \in C(\Omega, R^n)$, is called a solution to the problem (5)--(8) if it satisfies the system of hyperbolic equations (5) for all $(t,x) \in \Omega$, the boundary conditions (6), (7), and the integral relation (8).

At fixed $u(t,x)$ the problem (5)--(7) is the nonlocal problem for the system of hyperbolic equations with respect to $v(t,x)$ on Ω . The integral relation (8) allows us to determine the unknown function $u(t,x)$ for all $(t,x) \in \Omega$.

4. Algorithm. The unknown function $v(t,x)$ will be determined from the nonlocal problem for the system of hyperbolic equations (5)--(7). The unknown function $u(t,x)$ will be found from integral relation (8).

If we know the function $u(t,x)$, then from the nonlocal problem (5)--(7) we find the function $v(t,x)$. Conversely, if we know the function $v(t,x)$, then from the nonlocal problem (5)--(7) we find the function $u(t,x)$. Since the functions $u(t,x)$ and $v(t,x)$ are unknown together for finding of the solution to the problem (5)--(8) we use an iterative method. The solution to the problem (5)--(8) is the pair functions $(v^*(t,x), u^*(t,x))$ we defined as a limit of a sequence of pairs $(v^{(m)}(t,x), u^{(m)}(t,x))$, $m = 0, 1, 2, \dots$, according to the following algorithm:

Step 0. 1) Suppose in the right-hand part of the system (5) $u(t,x) = \psi_0(t)$, from the nonlocal problem (5)--(7) we find the initial approximation $v^{(0)}(t,x)$ for all $(t,x) \in \Omega$;

2) From the integral relation (8) under $v(t,x) = v^{(0)}(t,x)$, we find the function $u^{(0)}(t,x)$, for all $(t,x) \in \Omega$.

Step 1. 1) Suppose in the right-hand part of the system (5) and boundary condition (6) $u(t,x) = u^{(0)}(t,x)$, from the nonlocal problem (5)--(7) we find the first approximation $v^{(1)}(t,x)$ for all $(t,x) \in \Omega$.

2) From the integral relation (8) under $v(t,x) = v^{(1)}(t,x)$, we find the function $u^{(1)}(t,x)$ for all $(t,x) \in \Omega$.

And so on.

Step m. 1) Suppose in the right-hand part of the system (5) and boundary condition (6) $u(t,x) = u^{(m-1)}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x) = \tilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, from the nonlocal problem (5)--(7) we find the m -the approximation $v^{(m)}(t,x)$ for all $(t,x) \in \Omega$:

$$\frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial t \partial x} = A(t,x)u^{(m-1)}(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & K_0(x) \frac{\partial v^{(m)}(t_0, x)}{\partial x} + L_0(x) \frac{\partial v^{(m)}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + M_0(x) v^{(m)}(t_0, x) + K_1(x) \frac{\partial v^{(m)}(t_1, x)}{\partial x} + L_1(x) \frac{\partial v^{(m)}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} + \\
 & + M_1(x) v^{(m)}(t_1, x) + K_2(x) \frac{\partial v^{(m)}(t_2, x)}{\partial x} + L_2(x) \frac{\partial v^{(m)}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_2} + M_2(x) v^{(m)}(t_2, x) + \\
 & + P_0(x) u^{(m-1)}(t_0, x) + P_1(x) u^{(m-1)}(t_1, x) + P_2(x) u^{(m-1)}(t_2, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$v^{(m)}(t, 0) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

2) From the integral relation (8) under $v(t, x) = \tilde{v}^{(m)}(t, x)$, we find the function $u^{(m)}(t, x)$ for all $(t, x) \in \Omega$:

$$u^{(m)}(t, x) = \psi_0(t) + \int_0^x v^{(m)}(t, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (12)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

5. The main result.

The following theorem gives conditions of feasibility and convergence of the constructed algorithm and the conditions of the existence unique solution to the problem (5)--(8).

Theorem 1. *Suppose that*

- i) *the $n \times n$ -matrix $A(t, x)$ and n -vector function $f(t, x)$ are continuous on Ω ;*
- ii) *the $n \times n$ -matrices $K_i(x)$, $L_i(x)$, $M_i(x)$, $P_i(x)$ and n -vector-function $\varphi(x)$ are continuous on $[0, \omega]$, $i = 0, 1, 2$;*
- iii) *the n -vector-functions $\psi_0(t)$ and $\psi_1(t)$ are continuously differentiable on $[0, T]$;*
- iv) *the $n \times n$ -matrix $Q(x) = K_0(x) + K_1(x) + K_2(x)$ is invertible for all $x \in [0, \omega]$.*

Then nonlocal problem for the system of hyperbolic equations with integral relation (5)--(8) has a unique solution.

Theorem 2. *Suppose that the conditions i) - iv) of Theorem 1 are fulfilled.*

Then the initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the third order (1)--(4) has a unique classical solution.

The proof of the theorems is similar to the scheme of the proof of theorems [20].

6. *Special case.* Now, we consider a special initial-boundary value problem for the system of partial differential equations

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = A(t, x)u + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (13)$$

$$S_0(x)u(t_0, x) + S_1(x)u(t_1, x) + S_2(x)u(t_2, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (14)$$

$$u(t, 0) = \psi_0(t), \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

For this case, the matrix $Q(x)$ is not invertible. Therefore, we will additionally assume that the $n \times n$ -matrices $S_i(x)$ and the n -vector function $\varphi(x)$ are twice continuously differentiable on $[0, \omega]$, $i = 0, 1, 2$. In addition, the compatibility conditions of the initial data are fulfilled: $S_0(0)\psi_0(t_0) + S_1(0)\psi_0(t_1) + S_2(0)\psi_0(t_2) = \varphi(0)$,

$$\dot{S}_0(0)\psi_0(t_0) + \dot{S}_1(0)\psi_0(t_1) + \dot{S}_2(0)\psi_0(t_2) + S_0(0)\psi_1(t_0) + S_1(0)\psi_1(t_1) + S_2(0)\psi_1(t_2) = \dot{\varphi}(0).$$

Using the properties of matrices $S_i(x)$ and $\varphi(x)$ we twice differentiate relation (14) with respect to x . We have

$$S_0(x) \frac{\partial^2 u(t_0, x)}{\partial x^2} + S_1(x) \frac{\partial^2 u(t_1, x)}{\partial x^2} + S_2(x) \frac{\partial^2 u(t_2, x)}{\partial x^2} + 2\dot{S}_0(x) \frac{\partial u(t_0, x)}{\partial x} + 2\dot{S}_1(x) \frac{\partial u(t_1, x)}{\partial x} + 2\dot{S}_2(x) \frac{\partial u(t_2, x)}{\partial x} + \ddot{S}_0(x)u(t_0, x) + \ddot{S}_1(x)u(t_1, x) + \ddot{S}_2(x)u(t_2, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (17)$$

We obtain the original problem (1)–(4) again, where $K_i(x) = S_i(x)$, $L_i(x) = 0$, $M_i(x) = 2\dot{S}_i(x)$, $P_i(x) = \ddot{S}_i(x)$, $i = 0, 1, 2$.

The following assertion is valid.

Theorem 3. Suppose that

- i) the $n \times n$ -matrix $A(t, x)$ and n -vector function $f(t, x)$ are continuous on Ω ;
- ii) the $n \times n$ -matrices $S_i(x)$ and n -vector-function $\varphi(x)$ are twice continuously differentiable on $[0, \omega]$, $i = 0, 1, 2$;
- iii) the n -vector-functions $\psi_0(t)$ and $\psi_1(t)$ are continuously differentiable on $[0, T]$;
- iv) the compatibility conditions of the initial data are fulfilled:
 $S_0(0)\psi_0(t_0) + S_1(0)\psi_0(t_1) + S_2(0)\psi_0(t_2) = \varphi(0)$,
 $\dot{S}_0(0)\psi_0(t_0) + \dot{S}_1(0)\psi_0(t_1) + \dot{S}_2(0)\psi_0(t_2) + S_0(0)\psi_1(t_0) + S_1(0)\psi_1(t_1) + S_2(0)\psi_1(t_2) = \dot{\varphi}(0)$;
- v) the $n \times n$ -matrix $\tilde{Q}(x) = S_0(x) + S_1(x) + S_2(x)$ is invertible for all $x \in [0, \omega]$.

Then initial-boundary value problem for the system of partial differential equations of the third order (13)–(16) has a unique classical solution.

Funding. These results are partially supported by grant of the Ministry of education and science of the Republic Kazakhstan No. AP 05131220 for 2018-2020.

REFERENCES

- [1] Ptashnyck B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations, Naukova Dumka, Kiev (1984) (in Russian).
- [2] Nakhushiev A.M. Problems with shift for a partial differential equations, Nauka, Moscow (2006). ISBN: 5-02-034076-6
- [3] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On initial-boundary value problems in bounded and unbounded domains for a class of nonlinear hyperbolic equations of the third order, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **324**:2 (2006), 1242–1261.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.12.067
- [4] Dzhokhadze O.M. The Riemann function for higher-order hyperbolic equations and systems with dominated lower terms, Differential Equations, **39**:10 (2003), 1440–1453.
DOI: 0012-2661/03/3910-1440
- [5] Andreev A.A., Yakovleva J.O. The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables, Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences, **15**:3(24) (2011), 35–41. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu996>
- [6] Assanova A.T., Imanchiev A.E. Solvability of multipoint-integral boundary value problem for a third-order differential equation and parametrization method, in: Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, T.Sh. Kalmenov et al. (eds.), Springer International Publishing, Cham, **216** (2017), 113–122. https://doi.org/10.1007/978-3-319-67053-9_11
- [7] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics, Computational Mathematics and Mathematical Physics. **42**:11 (2002), 1609–1621.
- [8] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations, Doklady Mathematics. **68**:1 (2003), 46–49.
- [9] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations, Differential Equations. **39**:10 (2003), 1414–1427. 0012-2661/03/3910-1414
- [10] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane, Ukrainian Mathematical Journal. **56**:4 (2004), 682–694.
0041-5995/04/5604-0682
- [11] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations, Differential Equations. **41**:3 (2005), 352–363.

0012-2661/05/4103-0352

[12] Asanova A.T. A nonlocal boundary value problem for systems of quasilinear hyperbolic equations, *Doklady Mathematics*. **74**:3 (2006), 787--791.

DOI: 10.1134/S1064562406060019

[13] Asanova A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations, *Differential Equations*. **45**:3 (2009), 385--394. DOI: 10.1134/S0012266109030082

[14] Asanova A.T. On a boundary-value problem with data on noncharacteristic intersecting lines for systems of hyperbolic equations with mixed derivative, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. **187**:4 (2012), 375--386. 1072-3374/12/1874-0375

[15] Asanova A.T. On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations, *Ukrainian Mathematical Journal*. **65**:3 (2013), 349--365.

0041-5995/13/6503-0349

[16] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **402**:1 (2013), 167--178. doi:10.1016/j.jmaa.2013.01.012

[17] Asanova A.T. Well-posed solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with impulse effects, *Ukrainian Mathematical Journal*. **67**:3 (2015), 333--346. DOI: 10.1007/s11253-015-1083-3

[18] Asanova A.T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. **63** (2015), 1--13. doi: 10.14232/ejqtde.2015.1.63

[19] Asanova A.T., Imanchiev A.E. On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations, *Eurasian Mathematical Journal*. **6**:4 (2015), 19--28.

[20] Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, **212**:3 (2016), 213--233.

DOI: 10.1007/s10958-015-2660-6

[21] Asanova A.T. Criteria of solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives, *Russian Mathematics*. **60**:1 (2016), 1-17.

DOI: 10.3103/S1066369X16050017

[22] Assanova A.T. On the solvability of nonlocal boundary value problem for the systems of impulsive hyperbolic equations with mixed derivatives, *Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*. **5**:2 (2016), 153--165. DOI: 10.5890/DNC.2016.06.005

[23] Assanova A.T. Periodic solutions in the plane of systems of second-order hyperbolic equations, *Mathematical Notes*. **101**:1 (2017), 39--47. DOI: 10.1134/S0001434617010047

[24] Assanova A.T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle, *Russian Mathematics*. **61**:5 (2017), 7--20.

DOI: 10.3103/S1066369X17050024

[25] Asanova A.T., Kadirbaeva Zh. M., and Bakirova E. A. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions, *Ukrainian Mathematical Journal*. **69**:8 (2018), 1175--1195.

DOI: 10.1007/s11253-017-1424-5

УДК 517.951

МРНТИ 27.31.15

А.Т. Асанова¹, А.П. Сабалахова², З.М. Толеуханова³

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

²Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова, Шымкент, Казахстан

³Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Исследуются вопросы существования классического решения начально-краевой задачи для специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и предлагаются методы построения их приближенных решений. Установлены достаточные условия существования и единственности классического решения системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Путем введения новой неизвестной функции исследуемая задача сведена к эквивалентной задаче, состоящей из нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка с функциональным параметром и интегрального соотношения. Предложены алгоритмы нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказана их сходимость. Установлены достаточные условия существования единственного решения эквивалентной

задачи с параметром. Условия однозначной разрешимости начально-краевой задачи для специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка получены в терминах исходных данных.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, начально-краевая задача, нелокальная задача, система гиперболических уравнений, разрешимость, алгоритм.

УДК 517.951

МРНТИ 27.31.15

А.Т. Асанова¹, А.П. Сабалахова², З.М. Толеуханова³

¹Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

²М.О.Ауезов ат. Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

³Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

ҮШІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеулердің арнайы жүйесі үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады. Үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеулердің арнайы жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептің классикалық шешімінің бар болуы мәселелері мен олардың жуық шешімдерін тұрғызу әдістері зерттелген. Үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептің классикалық шешімінің бар болуы мен жалғыздығының жеткілікті шарттары тағайындалған. Жаңа белгісіз функция енгізу жолымен зерттеліп отырған есеп гиперболалық тендеулер жүйесі үшін параметрі бар бейлокал есептен және интегралдық қатынастан тұратын пара-пар есепке келтірілген. Зерттеліп отырған есептің жуық шешімін табу алгоритмдері ұсынылған және олардың жинақтылығы дәлелденген. Параметрі бар пара-пар есептің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары тағайындалған. Үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеулердің арнайы жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептің бірімәнді шешілімділігінің шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

Түйін сөздер: үшінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеу, бастапқы-шеттік есеп, бейлокал есеп, гиперболалық тендеулер жүйесі, шешілімділік, алгоритм.

Information about authors:

Assanova Anar Turmaganbetkyzy, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, chief scientific researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, anarasanova@list.ru;

Sabalakhova Aigul Pernebayevna, South-Kazakhstan State University after M.O.Auezov, head teacher, sabalakhova@mail.ru;

Toleukhanova Zauresh Makhsenovna, Kazakh State Women's Teacher Training University, head teacher, zauresh03@mail.ru

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 74 – 80

A.A. Kulzhumiyeva¹, Zh.A. Sartabanov²

¹M. Utemisov West-Kazakhstan State University, Uralsk, Kazakhstan;

²K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

E-mail: aiman-80@mail.ru, sartabanov42@mail.ru

COEFFICIENT CRITERION OF EXISTENCE OF MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF A LINEAR SYSTEM OF FOUR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS ON DIAGONAL

Abstract. In the note, we considered a linear system of four differential equations with the differentiation operator D_e in the direction of the main diagonal of the space of time variables (τ, t) . We conducted a study of the (θ, ω, ω) -periodicity of the solutions of the linear system of equations with variables but constants coefficients on the diagonal which depend on variables of the eigenvalues of the characteristic equation. The coefficient criterion of the properties of separation and sign-definiteness of distinct real, multiple and complex conjugate eigenvalues are found. Periodicity and continuous differentiability of eigenvalues are investigated. The coefficient sufficient conditions for the existence of periodic solutions are established. The concepts of variable frequency and variable period are introduced.

Investigation of the problems of partial differential equations is closely connected with the theory of ordinary differential equations [1-5]. It is known that the study of the problems of multiperiodic solutions of systems of first-order partial differential D_e -equations originates in the works [6-8]. This investigation on the formulation of the question adjoins previous studies [9-14].

Key words: linear system, differentiation operator, eigenvalues, characteristic equation, real and imaginary parts, diagonal minors.

Consider a linear system

$$D_e x = A(\sigma)x, \quad (1)$$

where $A(\sigma)$ an $n \times n$ -matrix has the properties of periodicity and smoothness of the form

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m, \quad (2)$$

$\sigma = t - e\tau$ is called the characteristic of the operator $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$, $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$,

$t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$, $e = (1, \dots, 1)$ – m -vector, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product, $k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ – a multiple vector-period, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – the unknown vector.

We form the characteristic equation

$$\det[A(\sigma) - \lambda E] = 0, \quad (3)$$

where E – the identity matrix. The equation (3) for a fixed value $\sigma \in R^m$ is solvable in the field of complex numbers and has roots of the form $\lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) + i\beta_j(\sigma)$, $(j = \overline{1, n})$.

The elucidation of the question of the properties of smoothness, periodicity, sign-definiteness and separation of the eigenvalues of the system (1) in the general case is a serious problem.

But in the well-known particular cases, the roots of equation (3) are determined in the radicals and it is possible to solve this problem on the basis of the conditions imposed on the coefficients of the system.

When investigating various problems of non-linear systems corresponding to the linear system (1), it is important to know that the eigenvalues of the matrix $A(\sigma)$ have the following properties:

1⁰. Continuous differentiability: $\lambda_j(\sigma) \in C_{\sigma}^{(e)}(R^m)$, $j = \overline{1, n}$.

2⁰. Periodicity: $\lambda_j(\sigma + k\omega) = \lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, $\sigma \in R^m$, $k \in Z^m$.

3⁰. Property of having a fixed sign $\lambda_j(\sigma)$ for each $j = \overline{1, n}$:

a) $\lambda_j(\sigma) < 0$, $\forall \sigma \in R^m$ or

b) $\lambda_j(\sigma) = 0$, $\forall \sigma \in R^m$ or

c) $\lambda_j(\sigma) > 0$, $\forall \sigma \in R^m$.

4⁰. Separation of eigenvalues:

a) for $j \neq l$ $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_l(\sigma)$, $\forall \sigma \in R^m$ or

b) for $j \neq l$ $\lambda_j(\sigma) = \lambda_l(\sigma)$, $\forall \sigma \in R^m$,

i.e. for each value, the eigenvalue $\lambda_j(\sigma)$ has constant multiplicity $k_j = const$ for all $\sigma \in R^m$.

5⁰. Each of the sets $Re\{\lambda_j(\sigma)\}$ and $Im\{\lambda_j(\sigma)\}$ has properties 1⁰-4⁰.

We note that if eigenvalues of the matrix $A(\sigma)$ possess these indicated properties, then the system (1) has a solution of the same structure as in the case of constant coefficients.

For the purpose of illustration, we consider the case when equation (1) in scalar form has the form

$$D_e x_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}(\sigma) x_j, \quad j = \overline{1, 4}, \tag{4}$$

the equation (3) is always solvable in radicals, and the characteristic equation of the matrix $A(\sigma) = [a_{ij}(\sigma)]_i^4$ can be represented in the form

$$\lambda^4 - a_1(\sigma)\lambda^3 + a_2(\sigma)\lambda^2 - a_3(\sigma)\lambda + a_4(\sigma) = 0, \tag{5}$$

where coefficients $a_j(\sigma)$ are determined by the sum of all diagonal minors $M_j(\sigma)$ of order j , in particular, $a_1(\sigma) = SpA(\sigma)$, $a_4(\sigma) = \det A(\sigma)$ and the coefficients $a_2(\sigma)$ and $a_3(\sigma)$ are determined by expressions

$$a_2(\sigma) = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j < \beta_j}}^6 \begin{vmatrix} a_{\alpha_j \alpha_j}(\sigma) & a_{\alpha_j \beta_j}(\sigma) \\ a_{\beta_j \alpha_j}(\sigma) & a_{\beta_j \beta_j}(\sigma) \end{vmatrix},$$

$$a_3(\sigma) = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j < \beta_j < \gamma_j}}^4 \begin{vmatrix} a_{\alpha_j \alpha_j}(\sigma) & a_{\alpha_j \beta_j}(\sigma) & a_{\alpha_j \gamma_j}(\sigma) \\ a_{\beta_j \alpha_j}(\sigma) & a_{\beta_j \beta_j}(\sigma) & a_{\beta_j \gamma_j}(\sigma) \\ a_{\gamma_j \alpha_j}(\sigma) & a_{\gamma_j \beta_j}(\sigma) & a_{\gamma_j \gamma_j}(\sigma) \end{vmatrix}.$$

Substituting

$$\lambda = \eta - \frac{a(\sigma)}{4} \tag{6}$$

we reduce equation (5) to the form

$$\eta^4 + p(\sigma)\eta^2 + q(\sigma)\eta + r(\sigma) = 0, \quad (7)$$

where $p(\sigma) = a_2(\sigma) - \frac{3}{8}a_1^2(\sigma)$, $q(\sigma) = a_3(\sigma) - \frac{1}{2}a_1(\sigma)a_2(\sigma) + \frac{1}{8}a_1^3(\sigma)$,

$$r(\sigma) = \frac{1}{16}a_1^2(\sigma)a_2(\sigma) - \frac{1}{4}a_1(\sigma)a_3(\sigma) - \frac{3}{256}a_1^4(\sigma) + a_4(\sigma).$$

Then, left-hand side of this equation identically rearranges by means of an accessory parameter ρ :

$$\left(\eta^2 + \frac{p(\sigma)}{2} + \rho\right)^2 - \left[2\rho\eta^2 - q(\sigma)\eta + \left(\rho^2 + p(\sigma)\rho - r(\sigma) + \frac{p^2(\sigma)}{4}\right)\right] = 0. \quad (8)$$

We now choose ρ so that the polynomial in square brackets becomes a complete square. For this, it must have one double root, i.e. equality must hold

$$q^2(\sigma) - 4 \cdot 2\rho \left(\rho^2 + p(\sigma)\rho - r(\sigma) + \frac{p^2(\sigma)}{4}\right) = 0,$$

which is a cubic equation in unknown ρ :

$$8\rho^3 + 8\rho^2 p(\sigma) - 2\rho[4r(\sigma) - p^2(\sigma)] - q^2(\sigma) = 0. \quad (9)$$

Substituting

$$\rho = \mu - \frac{p(\sigma)}{3}$$

we reduce equation (9) to the form

$$\mu^3 + p_1(\sigma)\mu + q_1(\sigma) = 0 \quad (10)$$

with coefficients

$$p_1(\sigma) = \frac{1}{12}p^2(\sigma) - r(\sigma), \quad q_1(\sigma) = -\frac{1}{108}p^3(\sigma) + \frac{1}{8}q^2(\sigma) + \frac{1}{3}p(\sigma)r(\sigma).$$

We calculate the discriminant $\Delta(\sigma)$ of equation (10)

$$\Delta(\sigma) = -108 \left(\frac{q_1^2(\sigma)}{4} + \frac{p_1^3(\sigma)}{27} \right)$$

and require that it be sign-definite:

- a) $\Delta(\sigma) < 0$, $\sigma \in R^m$ or
 - b) $\Delta(\sigma) = 0$, $\sigma \in R^m$ or
 - c) $\Delta(\sigma) > 0$, $\sigma \in R^m$.
- (11)

If any of the conditions (11) is satisfied, equation (10), and, consequently, equation (9), in accordance with the conditions for the existence of the real roots of the cubic equations, has at least one real root

$\mu = \mu_0(\sigma)$. Then we assume that $\rho = \rho_0(\sigma) = \mu_0(\sigma) - \frac{p(\sigma)}{3}$ is sign-definite, namely, we set

$$\rho_0(\sigma) = \mu_0(\sigma) - \frac{p(\sigma)}{3} > 0. \quad (12)$$

For this value ρ , the polynomial in square brackets in (8) has a double root $\frac{q(\sigma)}{4\rho_0(\sigma)}$. Therefore, equation (8) simplifies to

$$\left(\eta^2 + \frac{p(\sigma)}{2} + \rho_0(\sigma)\right)^2 - 2\rho_0(\sigma)\left(\eta - \frac{q(\sigma)}{4\rho_0(\sigma)}\right)^2 = 0,$$

which splits into two quadratic equations, the roots are determined by the formulas

$$\eta_i(\sigma) = \frac{\sqrt{\rho_0(\sigma)} \pm \sqrt{\delta(\sigma)}}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$\eta_j(\sigma) = \frac{-\sqrt{\rho_0(\sigma)} \pm \sqrt{\delta(\sigma)}}{\sqrt{2}}, \quad j = 3, 4,$$

where the function $\delta(\sigma)$ has the form

$$\delta(\sigma) = -\rho_0(\sigma) - p(\sigma) - \frac{q(\sigma)}{\sqrt{2\rho_0(\sigma)}}. \quad (14)$$

We impose the conditions of sign-definiteness on the function $\delta(\sigma)$:

- a) $\delta(\sigma) < 0$, $\sigma \in R^m$ or
- b) $\delta(\sigma) = 0$, $\sigma \in R^m$ or
- c) $\delta(\sigma) > 0$, $\sigma \in R^m$.

Obviously, in the case (15a), equation (9) has four distinct real roots, in case (15b) it has two distinct double roots, and in case (15c) there are four mutually conjugate complex roots, and

$$\operatorname{Re} \eta_j(\sigma) \neq 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad \sigma \in R^m. \quad (16)$$

In the case of sign-negative $\rho_0(\sigma)$ and sign-positive $\delta(\sigma)$, i.e. under conditions

$$\rho_0(\sigma) < 0, \quad \delta(\sigma) > 0, \quad \sigma \in R^m \quad (17)$$

roots $\eta_j(\sigma)$, $j = \overline{1, 4}$ are complex-valued with nonzero real parts, therefore, we have property (16).

Under condition

$$\rho_0(\sigma) < 0, \quad \delta(\sigma) < 0, \quad \sigma \in R^m \quad (18)$$

these roots are either pure imaginary or zero.

As can be seen from the above eigenvalues $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, 4}$ of matrix $A(\sigma)$ of the system (4) are determined by the relations (6), (12), (13), (14), which by conditions (2), (11), (12), (15), (17) and (18) have the properties 1⁰-5⁰.

In other words, eigenvalues $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, 4}$ of the matrix $A(\sigma) = [a_{ij}(\sigma)]_4^4$ are complex-valued functions of real arguments $\sigma \in R^m$ and its are continuously differentiable, ω -periodic, either coincide or do not intersect, their real and imaginary parts have definite signs or are identically equal to zero.

Thus, the results obtained can be formulated as the following lemma.

Lemma 1. If one of the conditions (15), (17) or (18) is fulfilled along with the conditions (2), (11), (12), then eigenvalues $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, 4}$ of matrix $A(\sigma) = [a_{ij}(\sigma)]_4^4$ of the system (4) have the properties 1⁰-5⁰.

Obviously, under the conditions (2), (11) and (18), the eigenvalues $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, 4}$ of the systems (4), according to Lemma 1, are either pure imaginary or identically zero. Consequently, the homogeneous system (4), in accordance with the general theory [15-16], admits multiperiodic solutions x in $\tau \in R$ with frequencies $\nu_j(\sigma) = \operatorname{Im} \lambda_j(\sigma)$ in the case $\operatorname{Im} \lambda_j(\sigma) \neq 0$ and constant solutions $x = \text{const}$ in the case of zero eigenvalues.

Thus, we give the following lemma.

Lemma 2. Under conditions (2), (11), and (18) the system (4) has an infinitely many of multiperiodic in τ solutions $x = x(\tau, \sigma)$ nonzero, and their periods are equal to $\theta_j(\sigma) = 2\pi\nu_j^{-1}(\sigma)$, $\sigma \in R^m$, $j = \overline{1,4}$.

If conditions (2), (11), (12) and one of the conditions (15) or (17) are satisfied, then, according to Lemma 1, inequality (16) is satisfied.

Then homogeneous linear system (4) does not have bounded solutions with bounded initial conditions except for the zero solution.

Hence the lemma holds.

Lemma 3. Assume that conditions (2), (11), (12) and one of the conditions (15) or (17) are satisfied. Then, system (4) does not have multiperiodic solutions $x(\tau, \sigma)$ except for trivial.

If the conditions of Lemma 3 are satisfied, the eigenvalues $\lambda_j(\sigma)$ can be represented in the form

$$\lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) \pm i\beta_j(\sigma), \quad j = \overline{1,4}, \quad \sigma \in R^m$$

with ω -periodic smooth in σ real and imaginary parts, and, according to (16), we have $\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) \neq 0$. For definiteness, we shall suppose that

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) < 0, \quad j = \overline{1,4}, \quad \sigma \in R^m. \quad (19)$$

We also note that ω -periodicity of the solutions x of system (1) under conditions of Lemma 1 is determined by ω -periodicity of the initial data in $t \in R^m$ if $\tau = 0$.

Then it is easy to show that matriciant $X(\tau, \sigma)$ of the system (4) satisfies the estimate

$$|X(\tau, \sigma)| \leq \gamma e^{-\delta\tau}, \quad \tau \in R \quad (20)$$

where $\gamma \geq 1$, $\delta > 0$ are constants and

$$X(\tau, \sigma + k\omega) = X(\tau, \sigma), \quad k \in Z^m, \quad \sigma \in R^m. \quad (21)$$

We introduce an inhomogeneous system of equations

$$D_e x_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}(\sigma) x_j + f_j(\tau, t, \sigma), \quad j = \overline{1,4}, \quad (22)$$

where $f_j(\tau, t, \sigma)$ satisfy the condition

$$f_j(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + q\omega) = f_j(\tau, t, \sigma) \in C_{\tau, t, \sigma}^{(0, e, e)}(R \times R^m \times R^m), \quad k, q \in Z^m, \quad (23)$$

the period $\theta = \theta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in R^m$ and has properties

$$\theta(\sigma + k\omega) = \theta(\sigma) \in C_{\sigma}^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m. \quad (24)$$

Putting $x = (x_1, \dots, x_4)$ and $f(\tau, t, \sigma) = (f_1(\tau, t, \sigma), \dots, f_4(\tau, t, \sigma))$ system (22) can be represented in the vector-matrix form

$$D_e x = A(\sigma)x + f(\tau, t, \sigma) \quad (22')$$

which is convenient for the formulation of the following theorem.

Theorem. Under conditions of Lemma 3 with the additional condition (19), (23), and (24) system (22) has a unique (θ, ω, ω) -periodic solution

$$x^*(\tau, t, \sigma) = \int_{-\infty}^{\tau} X(\tau - s, \sigma) f(s, t - e\tau + es, \sigma) ds. \quad (25)$$

Proof. The existence of the function $x^*(\tau, t, \sigma)$ is ensured by the convergence of improper integral (25) by theorem and estimate (20). Given that

$$D_e X(\tau, \sigma) = A(\sigma)x + X(\tau, \sigma)$$

it is not difficult to verify that by (25) it is possible to represent the solution of system (22'), hence, of the system (22). On the basis of (21), (23) and (24), it is easy to verify that this solution is of (θ, ω, ω) -periodicity. The uniqueness follows from the estimate (20).

In conclusion, we note that idea of a method of obtaining the results of this study can be generalized to the more general case with nonlinearities on the basis of the methods of [17-20].

REFERENCES

- [1] Vazov V. (1968) Asymptotic decomposition of solutions of ordinary differential equations. M.: Mir. (in Russ.)
- [2] Samoilenko A.M. (1987) The elements of mathematical theory of multifrequency oscillations. Invariant tors. M.: Nauka. (in Russ.)
- [3] Lappo-Danilevskiy I.A. (1957) Using functions from matrix to the theory of linear systems of ordinary differential equations. M.: GITTL. (in Russ.)
- [4] Zubov V.I. (1979) Theory of oscillations. M.: High school. (in Russ.)
- [5] Kharasahal V.H. (1970) Almost periodic solutions of ordinary differential equations. Alma-Ata: Nauka. (in Russ.)
- [6] Umbetzhanov D.U. (1979) Almost multiperiodic solutions of partial differential equations. Alma-Ata: Nauka. (in Russ.)
- [7] Sartabanov Zh.A. (1989) About single method of studying periodic solutions of equations in partial derivatives of special form // News. Physico-mathematical series. № 1. P.42-48. (in Russ.)
- [8] Sartabanov Zh.A. (2004) The condition of periodicity solutions of differential systems with multivariate time // News. Physico-mathematical series. № 5. P.44-48. (in Russ.)
- [9] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) Periodic in multivariate time of solutions of system equations with differential operator according to the direction of vector field // Eurasian Mathem. Journal. № 1. - P. 62-72. (in Russ.)
- [10] Kulzhumiyeva A.A. (2008) Research of periodic solutions lead to canonic form of systems with linear differential operator in multivariate time // Eurasian Mathem. Journal. № 2. - P. 69-73. (in Russ.)
- [11] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) Periodic with variable period solutions of system of differential equations of multivariate time // Mathematical journal. t.7. № 2(24). - P.52-57. (in Russ.)
- [12] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) To the question of periodic solutions in multivariate time of system D_α -equations // Bulletin of the Orenburg university. № 3. - P.155-157. (in Russ.)
- [13] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2016) On reducibility of linear D_e -system with constant coefficients on the diagonal to D_e -system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. №4(84). P. 88-93. (in Russ.)
- [14] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2017) On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. № 1. v. 8. P. 67-75.
- [15] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2013) Periodic solutions of system of differential equations with multivariate time. Uralsk: RIC WKSU. (in Russ.)
- [16] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2017) Reduction of linear homogeneous D_e -systems to the Jordan canonical form // Известия НАН РК. Серия физ-мат. 2017, №5(315). С.5-12.
- [17] Muhambetova B.Zh., Sartabanov Zh.A., Kulzhumiyeva A.A. (2015) Multiperiodic solutions of systems of equations with one quasi-linear differential operator in partial derivatives of the first order // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. № 2(78). P. 112-117. (in Russ.)
- [18] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2007) Periodic with multivariate time solutions of system of the quasi-linear differential equations in partial derivative // International Conference «Analysis and Singularities», dedicated to 70th anniversary of V.I. Arnold. Moscow. P.156-158.
- [19] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2009) Oscillations in quasi-linear system with operator of the differentiation on diagonals of multivariate time // International Conference «Modern problems of mathematics, mechanics and their applications» dedicated to the 70-th anniversary of rector of MSU academic V.A. Sadovnichy. Moscow. P.203.
- [20] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. (2017) Constructing of the periodic solution of quasilinear system // Herald L.N. Gumilyov ENU. №6(121). Part 1. P.25-29.

А.А. Кульжумиева¹, Ж.А. Сартабанов²

¹М. Өтемісов атындағы Батыс-Қазақстан мемлекеттік университеті, Орал, Қазақстан;

²Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ТӨРТ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕСІНІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМІНІҢ БАР БОЛУЫНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТІК БЕЛГІЛЕРІ

Аннотация. Заметкада (τ, t) уақыттық айнымалыларының кеністігінің негізгі диагоналының бағыты бойынша D_e дифференциалдау операторлы төрт дифференциалдық тендеулердің сызықты жүйесі қарастырылған. Характеристикалық тендеудің меншікті мәндерінің айнымалыларынан тәуелділікте айнымалы, бірақ диагоналда тұрақты коэффициентті қарастырылатын сызықты тендеулер жүйесінің шешімінің (θ, ω, ω) -периодтылығын зерттеу жүргізілген. Өртүрлі нақты, еселі және комплекс түйіндік меншікті мәндердің ажыратылу және таңба анықталған қасиеттерінің коэффициенттік белгілері анықталған. Меншікті мәндердің үзіліссіз дифференциалданатындығы және периодтылығы зерттелген. Периодты шешімдердің бар болуының коэффициентті жеткіліктілік шарттары орнатылған. Айнымалы период және айнымалы жиілік ұғымдары енгізілген.

Дербес туындылы тендеулер мәселесін зерттеу қарапайым дифференциалдық тендеулер [1-5] сұрақтарымен тығыз байланысты. Бірінші ретгі дербес туындылы D_e -тендеулер жүйесінің көппериодты шешімдері сұрақтарының зерттеуі өз бастауын [6-8] еңбектерінен алатындығы белгілі. Сұрақтың қойылуы бойынша берілген зерттеу бұрын жүргізілген зерттеулерге [9-14] қосылады.

Түйін сөздер: сызықты жүйе, дифференциалдық оператор, меншікті мәндер, характеристикалық тендеу, нақты және жорамал бөліктер, диагональдық минорлар.

УДК 35В10

А.А. Кульжумиева¹, Ж.А. Сартабанов²

¹Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, Уральск, Казахстан;

²Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актөбе, Казахстан

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ НА ДИАГОНАЛИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. В заметке рассмотрена линейная система четырех дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования D_e по направлению главной диагонали пространства временных переменных (τ, t) . Проведено исследование (θ, ω, ω) -периодичности решений рассматриваемой линейной системы уравнений с переменными, но постоянными на диагонали коэффициентами в зависимости от переменных собственных значений характеристического уравнения. Выяснены коэффициентные признаки свойств разделенности и знакоопределенности различных вещественных, кратных и комплексно сопряженных собственных значений. Исследованы периодичность и непрерывная дифференцируемость собственных значений. Установлены коэффициентные достаточные условия существования периодических решений. Введены понятия переменной частоты и переменного периода.

Исследование проблем уравнений в частных производных тесно связано с вопросами теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1-5]. Известно, что исследование вопросов многопериодических решений систем D_e -уравнений в частных производных первого порядка берет свое начало в трудах [6-8]. Данное исследование по постановке вопроса примыкает к ранее проведенным исследованиям [9-14].

Ключевые слова: линейная система, дифференциальный оператор, собственные значения, характеристическое уравнение, действительные и мнимые части, диагональные миноры.

Сведения об авторах:

Кульжумиева Айман Амангельдиевна - кандидат физико-математических наук, Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, aiman-80@mail.ru;

Сартабанов Жайшылык Алмаганбетович - доктор физико-математических наук, профессор, Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, sartabanov42@mail.ru

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 81 – 89

UDC 681.5:614.8

**A. Musabekov, A. Saribayev, S. Kurakbayeva, A. Kalbayeva,
S. Ismailov, F. Satybaldieva, N. Musabekov, T. Aubakirova**

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan
taslima.aubakirova@mail.ru, Musabekov_A@rambler.ru, saribayev63@mail.ru, feruza201200@gmail.com,
nazarbek_2008@inbox.ru

THE INVESTIGATION OF EQUATION AND ALGORITHM OF THE MIRROR CONCENTRATING SYSTEM MOVEMENT

Abstract. For optimal control of the mirror concentrating system the automated control system of heliostat identified for its possible errors. The equations of motion are considered tracking object, taking into account the geographical coordinates of the mirror concentrating system, the real situation of axes of rotation and accuracy is characteristics of the rotary support.

There are analyzed equations of mirror concentrating system motion on the basis of which it was concluded that motion algorithm must necessarily take into account the mirror concentrating system non vertical (the exact vertical position of bearing) azimuth (stationary) axis of rotation or θ and ψ angles describing the angle of the axis of rotation relative to the vertical space.

Keywords: automatic system, mirror concentrating systems, vector, coordinate system, heliostat, rotation.

Introduction. Most of the objects tracking can be divided into two types: the first type are objects that are moving relative to the Earth (airplanes, spacecraft, earth, moon) in its field of attraction; the second type are objects on the celestial sphere, apparent motion (Sun, stars). The difference between them is that the first types of movement are determined by the characteristics of the object itself, the second movement types defined by the law of motion of the Earth around its axis, the movement of the Earth around the Sun and the Sun in outer space. Great distance from the Earth to the stars, cause that tracking of the Sun or other stars should in principle is carried out according to the motion of the Earth around its axis. The equations of motion of the Earth are quite complicated, due to precession, and nutation of the Earth's axis of rotation.

There are known different approximation equations of motion of the Earth, by tabular in astronomy and approximate analytic equations [1-6].

Approximate analytical equations define the daily law of motion of the Earth (it is assumed that the decline permanently) or the apparent movement of the Sun around the Earth. These equations are simply transferred to the local geographic coordinate system (CS) (one of the axes is directed along the vertical space). To determine the feasibility of the algorithm for motion program control of mirror concentrating systems (MCS), it is necessary to assess its probable error. The automated management system heliostats (AMSH) may include the following errors: - error of determining the base (label) - Δ_N (independent error includes the pointing of the reflected beam on the receiver - Δ_{NO} , the error of the angle sensor EDI- Δ_{NV}), error of the gear - Δ_P and manufacturing errors and placing the axes of rotation MCS - Δ_O and errors of law of motion of

the object Δ_M . These errors result during the software control of MCS to errors in the orientation of MCS in azimuth Δ_A and Zenith Δ_h .

$$\Delta_A = A_p - A \tag{1}$$

$$\Delta_h = h_p - h, \tag{2}$$

where A , A_p and h , h_p – valid (with respect to the real axis) and calculated (relative to the local CS) azimuthal and zenithal angles of rotation of the hub.

There was analyzed the equations motion of object tracking (in particular, the Sun) according to the geographical coordinates of the MCS, the real position of the axes of rotation and accuracy characteristics of the rotary support. The relationship between the angular position of the Sun, MCS and its mode of operation (direct tracking of the Sun, or the direction of the rays to a given receiver) occurs through the vector reflection equation [7-10].

$$n = (b + c) / [2 * (1 + b * c)]^{0.5}, \tag{3}$$

where, the vector n determines the angle position of the MCS. For clarity, in (3) with the unit vector that defines the position of the Sun, directed to the Sun, the unit vector b determines the position of the reflected beam is directed from the MCS to the receiver. If the vectors c and b are given, then from (3) is uniquely determined by the position of the vector n or the MCS position in space. When looking through the optical sensor (incident or reflected beam of the Sun) needed in the equation and its solution fall away. For automated control of equation relative angles of rotation of the MCS (of heliostat) must be represented in explicit form.

The research part. The equation (3) shows that the position of the vector n in space or orientation does not depend on the type and scheme of the axes of rotation (equatorial, azimuthal-zenithal, etc.). However, it is obvious that the position of the rotation axes depends on the projection of the vector n or the angles and the angular velocity MCS (heliostat). Therefore, in order to specify the equations of motion of MCS, its axis of rotation must be specified. And to solve the problem, the laws of transformation of vectors b and c in time obviously must be known.

The denotation of the main parameters have characterized the position of the hub on the surface of the Earth and the basic coordinate system of the task (Figure 1).

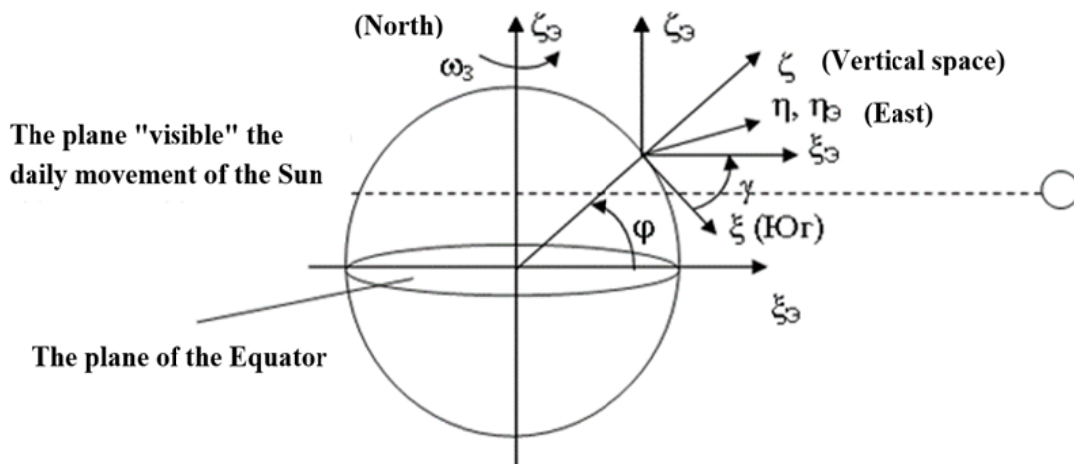


Figure 1 - Position of the hub on the surface of the Earth

Figure 1 shows that there are two main systems of coordinates – equatorial (CS_E), which determines the “visible” position and movement of the Sun in space depending on the location of installation of the hub on the Earth's surface – latitude φ and longitude λ_0 (if the reference of the longitude is relative to the local meridian it is obvious $\lambda = 0$) and local coordinate system (CS_M), which determines the orientation angles of the Sun, hub, and the reflected beam on the ground.

Because of the distance to the Sun, it is believed that the centers of these coordinate systems coincide. There are considered the equations of motion of MCS taking into account factors such as the inaccuracy of placing the axes of rotation. There are practically not considered the problem of the influence on the movement MCS inaccuracies of the position in space of the azimuthal and zenithal axes of rotation of MCS. Taking into account the method proposed in [8] - application of the matrix of rotations in general case of the problem is considered.

To describe the vectors c , b , n the following coordinate system (CS) are presented:

“equatorial” - CS_E , with the direction of the axes $O\xi_E$ - to the South, $O\eta_E$ - on East and $O\zeta_E$ - along the axis of rotation of the Earth (Figure 2);

"local" – CS_L , with the direction of the axes $O\xi$ to the South, $O\eta$ - East, and $O\zeta$ - vertical space (figure 2);

"initial" – CS_I , the coordinate system that defines the initial position of the axes of rotation relative to the CS_L , with the directions of the axes OZ - stationary or azimuthal rotation axis, OY is movable along the "zenithal" of the axis of rotation and OX so directed that it forms with the axes OY and OZ right coordinate system;

"connected" – CS_C associated with the hub or its central normal n , the axis directions OX_H – normal hub (heliostat), and OY_H and OZ_H form OX_H right cartesian CS.

In the initial moment of time, CS_H and CS_I are the same. These two CS, in general, is sufficient for the analysis of the kinematics of the hub and in the general case, when there is an "inclination" of the horizontal axis of rotation at an angle of χ . Thus, even with the χ formally, we can apply the same sequence of transitions between the CS, or

$$CS_E \xrightarrow{\gamma, \theta, \psi, \chi, \alpha, \beta} CS_L \rightarrow CS_I \rightarrow CS_H \quad (4)$$

Where γ , θ , ψ , χ , α , β - the angles of crossing between the CS (Figure 2). It is noted that in contrast to [9-12], corners θ , ψ , do not characterize the directional inclination of the vertical axis, and the inaccuracy of its position with respect to the vertical.

As can be seen in contrast to (1) the need to consider the more general case, account for the angular inclinations of the horizontal axis of rotation about a vertical axis of rotation of the hub (heliostat). In this scheme, the transition between CS_H and CS_I , which includes the angular deviation of the horizontal axis of rotation is advantageously carried out in the form of a single rotation of the horizontal axis of the MCS at a constant angle χ .

For the algorithm of the movement of mirror concentrating systems, in principle there is no need in detailing the schemes of transition or angle of crossing between the CS, however in practice it matters because you need to snap these angles to possible bases of reference and to take into account the native playback capabilities of the corners, large 90^0 . There is assumed that a positive reference angle is clockwise, the other samples will be discussed. In view of the general schemes, transitions $CS_E \rightarrow CS_L \rightarrow CS_I$ will remain unchanged. Thus, the subject taken in [5,8,9] of the rules of rotations, transitions between CS are of the form (Figure 2).

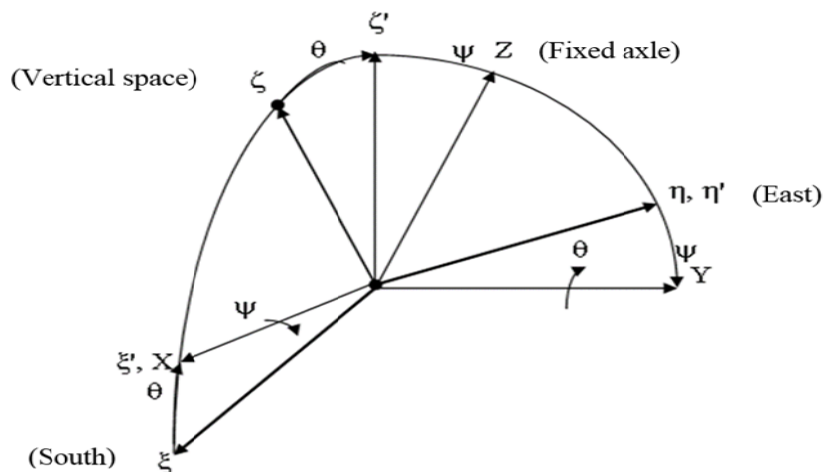


Figure 2 - Scheme of the transition from CS_L to CS_I

There are presented briefly these transitions. The transition from equatorial system CS_E to local CS_L taking into account that $\gamma = 90 - \varphi$ is the following:

"direct transition"

$CS_E \rightarrow CS_L$

	ξ_E	η_E	ζ_E
ξ	$\sin \varphi$	0	$-\cos \varphi$
η	0	1	0
ζ	$\cos \varphi$	0	$\sin \varphi$

"reverse transition"

$CS_L \rightarrow CS_E$

	ξ	η	ζ
ξ_E	$\sin \varphi$	0	$\cos \varphi$
η_E	0	1	0
ζ_E	$-\cos \varphi$	0	$\sin \varphi$

(5)

The transition from SC_L to SC_I (figure 2) connected with the vertical axis of MCS (heliostat) it is necessary to consider that in this case the angles θ and ψ are small (determine the actual position of the vertical axis of rotation relative to vertical), or

"direct transition" - $CS_L \rightarrow CS_I$

	ξ	η	ζ
X	1	0	θ
Y	$\theta * \psi$	1	$-\psi$
Z	$-\theta$	ψ	1

(6)

The following is correspondingly obtained:

"reversetransition" - $CS_I \rightarrow CS_L$

	ξ	η	ζ
X	1	$\theta * \psi$	$-\theta$
Y	0	1	$\sin \psi$
Z	θ	$-\psi$	1

(7)

There is considered the scheme of transition from CS_I to CS_H taking into account the angle of inclination of the horizontal axis of rotation at an angle of χ (figure 3).

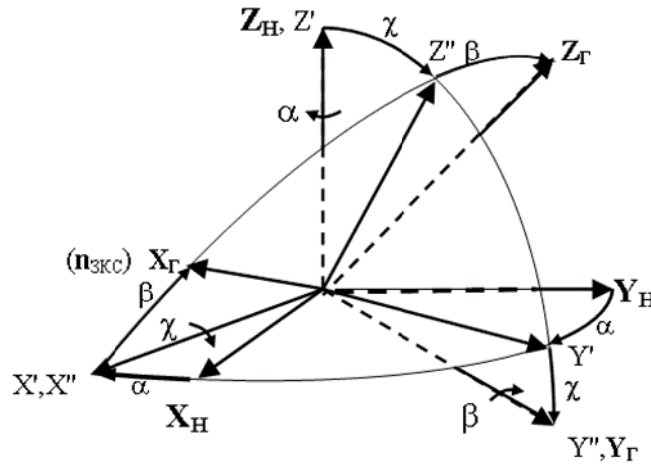


Figure 3 - Diagram of turning angles from CS_I to CS_H

There is the following matrix of transition between CS_I and CS_H from figure 3.

"direct transition" - $CS_I \rightarrow CS_H$

	x	y	z
x_H	$\cos \alpha * \cos \beta$	$-\sin \alpha * \cos \beta$	$\sin \beta * \cos \chi$
y_H	$\sin \alpha * \cos \chi$	$\cos \alpha * \cos \chi$	$-\sin \chi$
z_H	$-\cos \alpha * \sin \beta$	$\sin \alpha * \sin \beta$	$\cos \beta * \cos \chi$

(8)

"reversetransition" - $CS_H \rightarrow CS_I$

	x_H	y_H	z_H
x	$\cos \alpha * \cos \beta$	$\sin \alpha * \cos \chi$	$-\cos \alpha * \sin \beta$
y	$-\sin \alpha * \cos \beta$	$\cos \alpha * \cos \chi$	$\sin \alpha * \sin \beta$
z	$\sin \beta * \cos \chi$	$-\sin \chi$	$\cos \beta * \cos \chi$

(9)

Since all these matrices are singular, then the reverse transition is realized by simple rotation matrix elements around the diagonal of its left diagonal. It is noted that the angles of rotation of the hub (heliostat) - α , β must be found from a solution of equations, usually given are the vector of incident solar radiation and its direction after the reflection, or the vector b. There are various ways of determining rotation angles α , β – spherical triangles, the scalar product, the trigonometric functions, but the easiest way is the definition of rotation angles from matrix equations in [6] is stated. The essence of the method concluded in the following: the position of the vector n in the two systems of coordinates, then transition matrices of the resulting joint system of equation for determination of angles of rotation of the hub α and β in the rotation axes.

Results and discussion. This scheme is applicable for determining the angles of rotation of the hub. The first go the vectors b and c. When using the matrix of transition between CS these vectors, it is desirable to determine in the CS, where their representation is most clear and simple [14-16]. So for the vector c is equatorial CS (figure 4), from which it follows that in CS_E

$$c_{\xi E} = \cos \lambda * \cos \delta ; c_{\eta E} = - \sin \lambda * \cos \delta ; c_{\zeta E} = \sin \delta ; \quad (10)$$

where λ - width of the Sun, is

$$\lambda = \omega_{Earth} * t \quad (11)$$

where ω_{Earth} - angular velocity of rotation of the Earth and t is the time of day, measured from noon δ - longitude of the Sun.

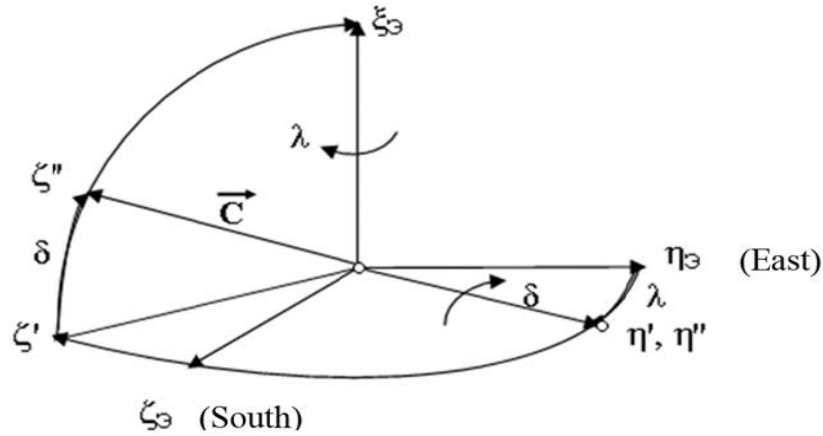


Figure 4 - Definition of the components of the unit vector of the Sun in the equatorial coordinate system CS_E

The unit vector of the reflected beam b is conveniently set in the CS_L and its components, such as peer - to- b_ξ, b_η, b_ζ .

Translate in CS_L and the vector c , using the transition matrix

$$\begin{aligned} c_\xi &= \cos \lambda * \cos \delta * \sin \varphi - \sin \delta * \cos \varphi \\ c_\eta &= c_{\eta E} - \sin \lambda * \cos \delta \\ c_\zeta &= \cos \lambda * \cos \delta * \cos \varphi + \sin \delta * \sin \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

the components of the vector n in the CS_L are equal,

$$n_\xi = (b_\xi + c_\xi)/M; n_\eta = (b_\eta + c_\eta)/M; n_\zeta = (b_\zeta + c_\zeta)/M, \quad (12)$$

where, for brevity, denoted by $M = (2*(1+ bc))^{0.5}$. Further, from matrix, the smallness of the angles θ and ψ is given, that the components of n in CS_I is equal to the next equations:

$$\begin{aligned} n_x &= n_\zeta + n_\eta * \theta + n_\zeta * \theta \\ n_y &= n_\zeta * \theta * \psi + n_\eta - n_\zeta * n \psi \end{aligned} \quad (13)$$

$$n_z = -n_\zeta * \theta + n_\eta * \psi + n_\zeta$$

On the other hand, from the CS_H , we know that in CS_H components n is equal to: 1, 0, 0, or turning them into CS_I with matrices the next equations are obtained:

$$\begin{aligned}n_X^* &= \cos\alpha * \cos\beta \\n_Y^* &= -\sin\alpha * \cos\beta \\n_Z^* &= \cos\chi * \sin\beta\end{aligned}\tag{14}$$

Since it is one and the same vector, the left parts of (13) and (14) are equal to

$$\begin{aligned}n_X &= n_X^* \\n_Y &= n_Y^* \\n_Z &= n_Z^*\end{aligned}\tag{15}$$

whence, it follows that the right parts (13) and (14) must be equal, or get a system of three equations:

$$\cos\alpha * \cos\beta = n_X = n_\zeta + n_\eta * 0 + n_\zeta * \theta\tag{16}$$

$$-\sin\alpha * \cos\beta = n_Y = n_\zeta * \theta * \psi + n_\eta - n_\zeta * n\psi\tag{17}$$

$$\cos\chi * \sin\beta = n_Z = -n_\zeta * \theta + n_\eta * \psi + n_\zeta\tag{18}$$

Given that the angle of χ horizontal axis relative to vertical is constant, from (17) the expression for the angle of rotation of the MCS around the horizontal axis β is obtained,

$$\beta = \arcsin(n_Z / \cos\chi)\tag{19}$$

and for the "azimuth" angle MCS around the vertical axis of rotation α

$$\alpha = \arcsin\left\{-n_Y / \left[1 - (n_Z / \cos\chi)^2\right]^{0.5}\right\}\tag{20}$$

In the particular case when $\chi = 0$, at the expression is obtained as (1) equation.

Conclusion.

Thus, from the analysis of the obtained equations of motion of MCS it can conclude that the algorithms of the movement MCS to consider nevertheless (the exact vertical location of the support) azimuthal (fixed) rotation axis, or the angles θ and ψ characterizing the angle of inclination of the axis of rotation relative to the vertical. Also, it was noted that the influence of the angle of inclination of the horizontal (zenithal) axis of rotation on the equations of motion is negligible and may be ignored. In general, from the analysis of the equations of motion of MCS, it follows that the equations of motion of all stellar bodies (except satellites) will be the same and in fact are determined by the equation of motion of the Earth. This means that software control of the orientation of the MCS at the Sun or any other star will be the same.

REFERENCES

- [1] Archer B. 1980. Comments on "Calculating the position of the Sun", Solar Energy 25, 91.
[2] Ismailov S.U., Musabekov A. A. 2013. Management tasks Research orientation solar MCS The scientific journal "Bulletin KazATC them M. Tynyshpayev" No 3. Almaty, 49-54 pp.

- [3] R. Walraven. Calculating the position of the sun. // Solar Energy, 1978. 20, P.393-397
- [4] Joseph J. 1988. The Astronomical Almanac's Algorithm For Approximate Solar Position Solar Energy. Vol. 40. No. 3, 227-235 pp.
- [5] Saribayev S.A., Abdurakhmanov A., Akbarov P.Y., Fayzeyev S.A., Klitshev S., Abdel-Majid A.A., Abdel-Salam A.F. . 2006. The High Temperature Solar Furnace of Tabbin Institute for Metallurgical Studies, Ministry of Industry and Technological Development, ARE. Bulletin-TIMS, Volume 82 July 2003, Total page 12, Egipt, Cairo.
- [6] S.A.Saribayev, Abdurakhmanov A.,Bakhrarov S.A, Klitshev S.I. 2010. Method definitions not verticality azimuthal axis of the rotation mirror concentrating systems. "Applied Solar Energy" No 2, 67-70 pp.
- [7] Saribayev S.A., Abdurakhmanov A.A, Fazilov A.A, Orlov S.A. 2010. Influence non vertical azimuth axis of rotation of the concentrator (heliostat) the accuracy of the software tracking. The "Applied Solar Energy" No 4, 80-82 pp.
- [8]Saribayev S.A., Abdurakhmanov A.,S.ABakhrarov, S.I. Klitshev., Orlov S.A. Method definitions not verticality azimuthal axis of rotation. Patent IAP 04953, No 9.
- [9] Serik U. Ismailov, Abdushukur S. Sarybaev, Akhmetbek A. Musabekov, Serik K. Dossybekov, Gani A. Besbaev2014. Application of Wireless Means of Communication and Independent Power Supply for Centralized Control and Monitoring Heliostatic Units International Conference of Industrial Technologies and Engineering (ICITE), Shymkent, 322-325 pp.
- [10] Satybaldiyeva, F.A., Beysembekova, R.N., Sarybaev, A.S., Esenbekova, G.J. 2017, Journal of Theoretical and Applied Information Technology 95(21), 5848-5858 pp.
- [11] Abdullin, E., B. Automation of coordinate measurements in mechanical engineering: Tutorial / EB Abdullin. SPb., 2016. - 160 P.
- [12] Borodin, I. F. Automation of technological processes and automatic control systems (ACS) / I. F. Borodin. M.: Koloss, 2006. 352 P.
- [13] Klyuev, A. S. The automation of configuration management systems / A. S. Klyuev, V. J. Rotach, V. F. Kuzishin. Moscow: Alliance, 2015. 272 P.
- [14] Skhirtladze, A. G. Automation of technological processes and production: Textbook / A. G. Skhirtladze, A. V. Fedotov, V. G. Khomchenko. Moscow: Outline, 2012. 565 P.
- [15] The question, K. P. Automation of measuring, testing and control / K. P. Question. - Moscow: , 2006. 312 P.
16. Martakov, A. I. automation of technological processes and production. Fundamentals of professional activity / A. I. Martyanov. - Moscow: MGIU, 2010. 384 P.

**А. Мусабеков, А.Сарибаев, С. Куракбаева, А. Калбаева,
С. Исмаилов, Ф. Сатыбалдиева, Н.Мусабеков, Т.Аубакирова**

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті,
Шымкент, Қазақстан

АЙНА ШОҒЫРЛАНДЫРУШЫ ЖҮЙЕНІҢ ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУІ МЕН АЛГОРИТМІН ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Айна шоғырландырушы жүйені оңтайлы басқару үшін оның мүмкіндік қателіктері автоматтандырылған гелиостатты басқару жүйесінде анықталды. Айна шоғырландырушы жүйесінің географиялық координатты ескере отырып, нысананың ізіне түсу қозғалыс тендеуі, айналу білігінің айқын орналасуы және тірек-бұрылыс құрылғының дәлдік сипаттамалары қарастырылды.

Айна шоғырландырушы жүйенің алынған қозғалыс тендеулері оның қорытындысы негізінде жасалғаны талдалған. Айна шоғырландырушы жүйенің қозғалыс алгоритмінде келесі аталғандарды міндетті түрде есепке алу керек: тіктік еместік (оның тіктік тіректің орналасуы), азимуттық (қозғалыссыз) айналу білігі немесе θ және ψ бұрыштар біркелкі тік орнына айналу білігінің көлбеу бұрышын сипаттаушы.

Түйін сөздер: автоматты жүйе, айна шоғырландырушы жүйе, вектор, біріктіру жүйесі, гелиостат, айналу.

**А. Мусабеков, А.Сарибаев, С. Куракбаева, А. Калбаева,
С. Исмаилов, Ф. Сатыбалдиева, Н.Мусабеков, Т.Аубакирова.**

Южно-Казахстанский государственный университет имени М.Ауезова, Шымкент, Казахстан.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМА ДВИЖЕНИЯ ЗЕРКАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. В автоматизированной системе управления гелиостатом для оптимального управления зеркальной концентрирующей системой определены её возможные погрешности. Рассмотрены уравнения движения объекта слежения с учетом географических координат зеркальной концентрирующей системы, реального положения осей вращения и точностными характеристиками опорно-поворотного устройства.

Проанализированы полученные уравнения движения зеркальной концентрирующей системы, на основе которого сделан вывод. В алгоритмах движения зеркальной концентрирующей системы необходимо обязательно учитывать следующее: не вертикальность (точное вертикальное расположение опоры) азимутальной (неподвижной) оси вращения или углы θ и ψ , характеризующие угол наклона оси вращения относительно вертикали места.

Ключевые слова: автоматическая система, зеркальная концентрирующая система, вектор, координирующая система, гелиостат, вращение.

Information about authors:

Musabekov A. - candidate of technical science, associate professor, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Saribayev A. - candidate of technical science, associate professor, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Kurakbayeva S. - candidate of technical science, associate professor, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Kalbayeva A. - candidate of technical science, associate professor, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Ismailov S. - candidate of technical science, associate professor, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Satybaldieva F. - master, PhD student, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Musabekov N. - master, PhD student, Department «Automation, telecommunication and management» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

Aubakirova T. - PhD, associate professor, Department «Life safety and Environmental protection» M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan;

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 90 – 106

УДК 517.94

M.I. Akylbayev¹, A.Beisebayeva², A.Sh. Shaldanbaev²

¹"Regional Social-Innovative University", Shymkent;

²SKSU named M.Auezov, Shymkent;

musabek_kz@mail.ru, akbope_a@mail.ru, shaldanbaev51@mail.ru.

CRITERIA FOR STRONG CONVERGENCE OF SOLUTIONS SINGULARLY OF THE PERTURBED CAUCHY PROBLEM

Abstract: The first-order integral equation with a non-smooth right-hand side is solved by the deviating argument method. It is shown that the solution of the corresponding singularly perturbed Cauchy problem converges to the solution of a non-perturbed problem. The criteria of strong convergence and the spectral properties of the auxiliary problem are used. The square root of a class of Sturm-Liouville operators is found.

Keywords: strong convergence, spectrum, spectral decomposition, square root of the operator, equation with deviating argument, Hilbert-Schmidt theorem.

1. Introduction

We consider a singularly perturbed Cauchy problem

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y &= \varepsilon y'(x) + a y(x) = f(x), x \in (0, 1] \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1)-(1.2}$$

in space $L^2(0,1)$, where a is the complex constant, $\varepsilon > 0$ is a small parameter, and $f(x) \in L^2(0,1)$.

For what values of the constant a the solution of problem (1.1) - (1.2) converges strongly to the solution of the problem $L_0 y_0 = a y_0(x) = f(x)$, for $\varepsilon \rightarrow +0$?

The solution of problem (1.1) - (1.2) has the form $y(x, \varepsilon, f) = L_\varepsilon^{-1} f(x)$, hence, we are talking about the strong convergence of the sequence of operators L_ε^{-1} to the operator $L_0^{-1} = I/a$, where is the I unit operator. Since the right-hand side of (1.1) is not assumed to be smooth, we mean the strong solutions of problem (1.1) - (1.2), and (1.1) is understood almost everywhere in $(0,1)$.

To clarify the formulation of the problem, we give the corresponding definitions [1, c.11].

Definition 1.1. Let's $\{A_n\}$ a sequence of bounded operators. It is said that this sequence converges uniformly to the operator A , if $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Definition 1.2. A sequence $\{A_n\}$ of linear operators (generally speaking, unbounded) with a common domain of definition is called strongly convergent on D (to the operator) if for any $u \in D$

$$\|A_n u - Au\| \rightarrow 0 \text{ at } n \rightarrow \infty.$$

Definition 1.3 A sequence $\{A_n\}$ is called weakly convergent (to A) if for any $u \in D$ sequence the $\{A_n u\}$ sequence converges weakly to Au , in other words, this means that $(A_n u, \psi) \rightarrow (Au, \psi)$ for any $u \in D$ and any $\psi \in H = L^2(0,1)$.

The inverse operator L_ε^{-1} of problem (1.1) - (1.2) has the form $L_\varepsilon^{-1} f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt$

and, obviously, this operator is completely continuous in the space $H = L^2(0,1)$. If $\|L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1}\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, then the operator L_0^{-1} is also completely continuous. Since it is not so, uniform convergence is not possible. If $a > 0$, then, weak convergence holds, which was proved in [2]. The main difference between the formulation of the problem and the known singularly perturbed problems [3-12] is that we do not require the right-hand side of a certain smoothness, so all known methods are not applicable in this situation. Our method is based on the spectral decomposition of Volterra operators [13-17].

The aim of the paper is to establish a criterion for strong convergence of a sequence of operators L_ε^{-1} to an operator L_0^{-1} , for $\varepsilon \rightarrow +0$.

2. Research methods

In our investigations we rely on the following Banach-Steinhaus theorem.

The Banach-Steinhaus theorem. In order that the sequence of linear bounded operators A_n strongly converges, it is necessary and sufficient that the norms of the operators A_n be uniformly bounded, and that the sequences $A_n x$ be convergent for all x of some dense in H the set [18, c.129].

Consider in space $H = L^2(0,1)$ the Sturm-Liouville boundary value problem

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \mu y(x); \\ y(0) &= 0, y'(1) + by(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)-(2.2)$$

where $b - const, b > 0; \mu -$ is the spectral parameter.

If $\mu = 0$, then the general solution of equation (2.1) has the form $y(x) = A + Bx$, where $A, B - const$. Substituting this expression into the boundary conditions (2.2), we obtain $A = 0; B + b \cdot B = 0, B(1 + b) = 0$, since $b > 0, B = 0$, i.e. $y(x) \equiv 0$.

If $\mu \neq 0$, then the general solution of equation (2.2) has the form,

$$y(x, \mu) = A \cos \sqrt{\mu} x + \frac{B \sin \sqrt{\mu} x}{\sqrt{\mu}} (\mu \neq 0), \quad (2.3)$$

Where $A, B -$ arbitrary constants depend (in general) on the spectral μ parameter. Substituting (2.3) into the boundary conditions (2.2), we obtain a system of equations with respect to unknown constants A, B .

Consequently, the eigenvalues of the Sturm-Liouville operator are the squares of the roots of the characteristic function

$$\Delta(\mu) = \cos \sqrt{\mu} + b \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} = 0. \quad (2.4)$$

For real values b the problem (2.1) - (2.2) is self-adjoint, therefore all the zeros of the function (2.4) are real, that is, if μ_0 it is a zero of a function $\Delta(\mu)$, then it is a real quantity, then $\sqrt{\mu_0}$ a real or purely imaginary quantity.

If $\cos\sqrt{\mu_0} = 0$, then $\sin\sqrt{\mu_0} = \pm 1$, so $\Delta(\lambda_0) = \pm \frac{b}{\sqrt{\mu_0}} \neq 0$; if $\sin\sqrt{\mu_0} = 0$, then $\Delta(\mu_0) = \pm 1 \neq 0$;

if $\mu_0 = 0$, then $\square(0) = 1 + b > 1$. Using these circumstances, we transform equations to a form convenient for investigation.

$$\Delta(\mu) = \frac{b \cos\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \cdot \left(tg\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{\mu}}{b} \right) = 0.$$

Thus, the zeros of the function $\Delta(\lambda)$ coincide, with nonzero zeros of the function $F(\sqrt{\mu}) = tg\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu}/b$.

Assuming, $\nu = \sqrt{\mu}$ for convenience, we investigate the zeros of functions $F(\nu) = tg\nu + \nu/b$ which, as we have already noted, are real or purely imaginary. Since the function $F(\nu)$ is odd, if ν_0 it is a zero of this function, then it $-\nu_0$ is also its zero, and since $(-\nu_0)^2 = \nu_0^2$, the "negative" zeros of the functions $F(\nu)$ do not give new eigenvalues, so it suffices to restrict the right half-axis $\nu > 0$ and the upper part of the imaginary axis $\nu = i\tau (\tau > 0)$.

If $\nu = i\tau (\tau > 0)$, then $F(i\tau) = tgi\tau + \frac{i\tau}{b} = \left(th\tau + \frac{\tau}{b} \right) i \neq 0$ the function $\Delta(\mu)$ does not have negative zeros, in other words, the Sturm-Liouville problem (2.1) - (2.2) does not have negative eigenvalues.

If $\nu > 0$, then $F(\nu) = tg\nu + \frac{\nu}{b}$, and it is obvious that this function does not vanish in those intervals, where $tg\nu \geq 0$, i.e. when $n\pi \leq \nu \leq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$, therefore, we study the intervals $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq \nu \leq n\pi, n = 1, 2, \dots$.

It is obvious that $F(n\pi - \frac{\pi}{2}) = -\infty, F(n\pi) = \frac{n\pi}{b} > 0$, when $n = 1, 2, \dots$, the derivative of the function in this interval $F(\nu)$ is positive, since $F'(\nu) = \frac{1}{\cos^2 \nu} + \frac{1}{b} > \frac{1}{b} > 0$. Consequently, in the interval $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi \right) n = 1, 2, \dots$ exactly one root of the equation is contained $F(\nu) = 0$. Thus, if $b > 0$, then the function $F(\nu)$ has no imaginary roots, i.e. all its roots are real, while the positive roots are localized in intervals

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < \nu_n < n\pi, n = 1, 2, \dots; F(\nu_n) = 0$$

Now we investigate the behavior of these roots $\nu_n = \nu_n(b), n = 1, 2, \dots$ for $b \rightarrow +\infty$. From the equation $F(\nu_n) = 0$, we have.

$$tg\nu_n = -\nu_n/b, (n = 1, 2, \dots), \rightarrow \nu_n = n\pi + \arctg\left(-\frac{\nu_n}{b}\right) = n\pi - \arctg\frac{\nu_n}{b}$$

Consequently, $\lim_{b \rightarrow +\infty} \nu_n(b) = n\pi - \arctg 0 = n\pi, n = 1, 2, \dots$.

When the parameter b is changed, the roots $v_n(b)(n=1,2,\dots)$ do not stick together, as can be seen from inequality

$$v_{n+1}(b) - v_n(b) = (n+1)\pi - \arctg \frac{v_{n+1}(b)}{b} - n\pi + \arctg \frac{v_n(b)}{b} = \pi + \arctg \frac{v_n(b)}{b} - \arctg \frac{v_{n+1}(b)}{b} > \pi + 0 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}.$$

Consequently, $\inf_{b>0, m, n} |v_n(b) - v_m(b)| \geq \frac{\pi}{2}, m, n = 1, 2, \dots$

We estimate the rates of aspiration to its boundary values $v_n(b), n=1,2,\dots$ of the roots at $b \rightarrow +\infty$. By Lagrange's formula [19, p.226], we have

$$F(n\pi) - F(v_n) = \frac{n\pi}{b} - 0 = F'(\xi_n)(n\pi - v_n) = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\cos^2 \xi_n} \right) (n\pi - v_n),$$

$$n\pi - v_n = \frac{\frac{n\pi}{b}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{\cos^2 \xi_n}} = \frac{n\pi}{1 + \frac{b}{\cos^2 \xi_n}}, v_n(b) < \xi_n < n\pi,$$

$$0 < n\pi - v_n < \frac{n\pi}{1+b}, \forall b > 0.$$

Now we find the normalized eigenfunctions of the boundary-value problem (2.1) - (2.2) corresponding to the eigenvalues $\mu_n = v_n^2, \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right)^2 < \mu_n < (n\pi)^2, n=1,2,\dots$. It is not difficult to see that the eigenfunctions have the form $\varphi_n(x) = B_n \cdot \sin v_n x, n=1,2,\dots$, where B_n the normalized coefficients, we calculate these coefficients.

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = B_n^2 \cdot \int_0^1 \sin^2 v_n x dx = B_n^2 \cdot \int_0^1 \frac{1 - \cos 2v_n x}{2} dx = \frac{B_n^2}{2} \left[x - \frac{\sin 2v_n x}{2v_n} \right]_0^1 = \frac{B_n^2}{2} \left[1 - \frac{\sin 2v_n}{2v_n} \right] = 1;$$

Consequently
$$B_n(b) = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{\sin 2v_n}{2v_n}}}, \tag{2.5}$$

So $\lim_{b \rightarrow +\infty} B_n(b) = \sqrt{2}$

Let's find the limit $\lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$. By the Lagrange formula

$$\sin n\pi x - \sin v_n x = x \cdot \cos \xi_n (n\pi - v_n), v_n < \xi_n < n\pi; n=1,2,\dots$$

$$|\sin n\pi x - \sin v_n x| \leq |x|(n\pi - v_n) < \frac{|x|n\pi}{1+b}, \forall b > 0, \Rightarrow \|\sin n\pi x - \sin v_n x\| < \frac{n\pi}{1+b} \|x\| \leq \frac{n\pi}{1+b}, \forall b > 0. \tag{2.6}$$

Then, by (2.5) - (2.6), we obtain that $\|\varphi_n(x) - \sqrt{2} \sin n\pi x\| \rightarrow 0$, for $b \rightarrow +\infty$.

Indeed

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(x) - \sqrt{2} \sin n\pi x\| &= \|B_n \sin v_n x - \sqrt{2} \sin n\pi x\| = \|B_n \sin v_n x - \sqrt{2} \sin v_n x + \sqrt{2} \sin v_n x - \sqrt{2} \sin n\pi x\| \leq \\ &\leq |B_n - \sqrt{2}| \|\sin v_n x\| + \sqrt{2} \|\sin v_n x - \sin n\pi x\| \leq |B_n - \sqrt{2}| + \frac{\sqrt{2}n\pi}{1+b} \rightarrow 0 \text{ at } b \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Since the boundary value problem (2.1) - (2.2) is self-adjoint, its normalized eigenfunctions $\{\varphi_n(x)\}, n=1,2,\dots$ form an orthonormal basis of the space $L^2(0,1)$. We have proved the following lemma.

Lemma 2.1. If $b > 0$, then the Sturm-Liouville boundary value problem

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \mu y(x), x \in (0,1); \\ y(0) &= 0, y'(1) + b \cdot y(1) = 0 \end{aligned} \tag{2.1)-(2.2}$$

has an infinite set of positive eigenvalues $\mu_n (n=1,2,\dots)$ localized in the intervals $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 < \mu_n < (n\pi)^2, n=1,2,\dots$

$$\text{Own functions: } \varphi_n(x) = B_n \cdot \sin \sqrt{\mu_n} x, B_n(b) = \sqrt{2 / \left(1 - \frac{\sin 2v_n}{2v_n}\right)}, n=1,2,\dots,$$

corresponding to these eigenvalues, form an orthonormal basis of the space $H = L^2(0,1)$.

The following equalities hold:

$$1) \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{\mu_n(b)} = n\pi; \tag{2.7}$$

$$2) \lim_{b \rightarrow +\infty} B_n(b) = \sqrt{2}; \tag{2.8}$$

$$3) \|\varphi_n(x) - \sqrt{2} \sin n\pi x\| \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow +\infty, \text{ где } n = 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

Lemma 2.2. (about the square root). If b is an arbitrary complex constant, and λ is an eigenvalue of the Sturm-Liouville boundary value problem

$$Lz = -z'' + b^2 z = \lambda z(x), x \in (0,1); \tag{2.10}$$

$$z(0) = 0, z'(1) + bz(1) = 0, \tag{2.11}$$

then the quantity $\pm\sqrt{\lambda}$ is an eigenvalue of the Cauchy problem

$$\begin{cases} Bz = z'(x) + bz(x) = \pm\sqrt{\lambda}z(1-x), x \in (0,1] \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{2.12)-(2.13}$$

and conversely, if $\pm\sqrt{\lambda}$ it is an eigenvalue of the Cauchy problem (2.12) - (2.13), then $z(x)$ it is an eigenfunction of the boundary-value problem (2.10) - (2.11) corresponding to the eigenvalue λ .

Evidence.

Assuming $\mu = \lambda - b^2$ from (2.10), we have $-z''(x) = \mu z(x)$. The general solution of this equation has the form

$$z(x, \sqrt{\mu}) = A \cos \sqrt{\mu} x + \frac{B \sin \sqrt{\mu} x}{\sqrt{\mu}}, A, B - const. \tag{2.14}$$

If $\mu = 0$, then $z(x,0) = A + Bx$, then from the boundary conditions (2.11) we obtain

$$\begin{aligned} z(x,0)|_{x=0} = A = 0, &\Rightarrow z(x,0) = Bx, \Rightarrow z'(x,0) = B, \\ [z'(x,0) + b \cdot z(x,0)]_{x=1} = B + b \cdot B = B(1+b) = 0, &\Rightarrow B = 0, z(x,0) \equiv 0. \end{aligned}$$

If $\mu \neq 0$, then substituting (2.14) into the boundary conditions (2.11), we obtain

$$z(x, \sqrt{\mu}) \Big|_{x=0} = A = 0, \Rightarrow z(x, \sqrt{\mu}) = B \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu} x}{\sqrt{\mu}} (\mu \neq 0), \Rightarrow z'(x, \sqrt{\mu}) = B \cdot \cos \sqrt{\mu} x, \Rightarrow B \cos \sqrt{\mu} + b \cdot \frac{B \sin \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} =$$

$$B \cdot \left(\cos \sqrt{\mu} + b \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \right) = 0$$

Thus, the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem (2.10) - (2.11) have the form

$$z(x, \sqrt{\mu}) = \frac{B \cdot \sin \sqrt{\mu} x}{\sqrt{\mu}}, \quad (2.15)$$

Where $\{\sqrt{\mu}\}$ - are the roots of equation

$$\cos \sqrt{\mu} + b \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} = 0. \quad (2.16)$$

By virtue of formulas (2.15) - (2.16), we have

$$z(1-x, \sqrt{\mu}) = \frac{B \sin \sqrt{\mu} (1-x)}{\sqrt{\mu}} = B \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} x - \cos \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} x}{\sqrt{\mu}} = B \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \cos \sqrt{\mu} x - \cos \sqrt{\mu} \cdot \frac{B \sin \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} =$$

$$= -B \frac{\cos \sqrt{\mu}}{b} \cos \sqrt{\mu} x - \cos \sqrt{\mu} - z(x, \sqrt{\mu}) = -\cos \sqrt{\mu} \cdot \left[\frac{B \cos \sqrt{\mu}}{b} + z(x, \sqrt{\mu}) \right] = -\cos \sqrt{\mu} \cdot \left[\frac{B \cos \sqrt{\mu}}{b} + z(x, \sqrt{\mu}) \right] = -\cos \sqrt{\mu} \left[\frac{z'(x, \sqrt{\mu})}{b} + z(x, \sqrt{\mu}) \right],$$

$$b \cdot z(1-x, \sqrt{\mu}) = -\cos \sqrt{\mu} \cdot [z'(x, \sqrt{\mu}) + b \cdot z(x, \sqrt{\mu})], \Rightarrow z'(x, \sqrt{\mu}) + b \cdot z(x, \sqrt{\mu}) = -\frac{b}{\cos \sqrt{\mu}} \cdot z(1-x, \sqrt{\mu}); \quad (2.17)$$

From equation (2.16), we have

$$\operatorname{tg} \sqrt{\mu} = -\sqrt{\mu} / b, \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\mu} = 1 + \frac{\mu}{b^2} = \frac{b^2 + \mu}{b^2} = \frac{\lambda}{b^2}, \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\mu}} = \frac{\lambda}{b^2},$$

$$\cos^2 \sqrt{\mu} = \frac{b^2}{\lambda}, \lambda = \frac{b^2}{\cos^2 \sqrt{\mu}}, \pm \sqrt{\lambda} = \frac{b}{\cos \sqrt{\mu}}, \Rightarrow z'(x, \sqrt{\mu}) + bz(x, \sqrt{\mu}) = \sqrt{\lambda} z(1-x, \sqrt{\mu}).$$

It is obvious from the boundary condition (2.11) that $z(0) = 0$.

Note that $\lambda = \sqrt{\mu + b^2}$, there fore $\lambda = \pm \sqrt{\mu + b^2}$, and the signs before the radical are chosen according to the rule $\cos \sqrt{\mu} = \pm \frac{b}{\sqrt{\mu + b^2}}$

Conversely, if (2.12) - (2.13) holds, then putting $x = 1$ in (2.12), we obtain $z'(1) + b - z(1) = 0$.

Differentiating equations (2.12), we obtain

$$z''(x) + bz'(x) = \mp \sqrt{\lambda} z'(1-x) = \mp \sqrt{\lambda} \left[\pm \sqrt{\lambda} z(x) - bz(1-x) \right] = -\lambda z(x) \pm \sqrt{\lambda} bz(1-x), \Rightarrow$$

$$z''(x) + b \cdot \left[\pm \sqrt{\lambda} z(1-x) - bz(x) \right] = -\lambda z(x) \pm bz(1-x), z''(x) - b^2 z(x) = -\lambda z(x)$$

$$-z''(x) + b^2 z(x) = \lambda z(x).$$

Corollary 2.1. If $\varphi_n(x)$ the normalized eigenfunction of the Sturm-Liouville problem (2.10) - (2.11), then we have the formula

$$\varphi'_n(x) \cdot \cos \sqrt{\mu_n} = -b \cdot \left[\varphi_n(1-x) + \varphi_n(x) \cdot \cos \sqrt{\mu_n} \right], \quad (2.18)$$

where are μ_n eigenvalues, and $\varphi_n(x)$ the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem:

$$-\varphi_n''(x) = \mu_n \varphi_n(x); z_n(0) = 0, z_n'(1) + bz_n(1) = 0.$$

The formula (2.18) is a simple consequence of formula (2.17).

Lemma 2.3. If b the real quantity is different from zero, then we have the formula

$$e^{-bx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-bx}, \varphi_n) * \varphi_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(1)}{b} \cos \sqrt{\mu_n} * \ln(x), \quad (2.19)$$

where $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) are orthonormal eigenfunctions of the boundary value problem:

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \mu y(x), x \in (0, 1); \\ y(0) &= 0, y'(1) + by(1) = 0 \end{aligned}$$

Evidence.

$$\begin{aligned} (e^{bx}, \varphi_n) &= \int_0^1 e^{bx} \varphi_n(x) dx = \int_0^1 \frac{\varphi_n(x) de^{bx}}{b} = \frac{\varphi_n(x)e^{bx}}{b} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{bx} \varphi_n'(x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} dx = \left| -\frac{\varphi_n'(x)}{b} = \frac{\varphi_n(1-x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} + \varphi_n(x) \right| = \\ &= \frac{\varphi_n(1)e^b}{b} + \int_0^1 \frac{e^{bx} \varphi_n(1-x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} dx + \int_0^1 e^{bx} \varphi_n(x) dx = \frac{\varphi_n(1)e^b}{b} + \int_0^1 \frac{e^{b(1-x)} \varphi_n(x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} dx + (e^{bx}, \varphi_n), \\ \frac{\varphi_n(1)e^b}{b} + \int_0^1 \frac{e^{b(1-x)} \varphi_n(x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} dx &= 0, \Rightarrow \frac{\varphi_n(1)}{b} = -\int_0^1 \frac{e^{-bx} \varphi_n(x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} dx = -\frac{(e^{-bx}, \varphi_n)}{\cos \sqrt{\mu_n}}. \end{aligned}$$

Consequently

$$e^{-bx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-bx}, \varphi_n) * \varphi_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(1) \cos \sqrt{\mu_n}}{b} * \varphi_n(x).$$

Lemma 2.4. If a and ε ($\varepsilon \neq 0$) are arbitrary complex constants, then the operators

$$A_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x); D(A_\varepsilon) = \{y(x) \in C(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\},$$

and

$$B_\varepsilon z = \varepsilon z'(x) + \operatorname{Re} a z(x); D(B_\varepsilon) = \{z(x) \in C(0,1) \cap C[0,1], z(0) = 0\}$$

similar to each other and the similarity operator is the multiplication operator

$$V_\varepsilon f(x) = e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} f(x)$$

Evidence.

Assuming, $y = V_\varepsilon z = e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} \cdot z(x)$, we have $y(0) = z(0) = 0$, and

$$\begin{aligned} A_\varepsilon y &= \varepsilon \cdot \left[e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} z'(x) - \frac{jma}{\varepsilon} i \cdot e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} z(x) \right] + a * e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} z(x) = e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} [\varepsilon - z'(x) - \\ &- jma \cdot i \cdot z(x) + \operatorname{Re} a \cdot z(x) + ijma \cdot z(x)] = e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} [\varepsilon z'(x) + \operatorname{Re} a \cdot z(x)] = V_\varepsilon B_\varepsilon z(x) \Rightarrow \\ A_\varepsilon V_\varepsilon z &= V_\varepsilon B_\varepsilon z, \Rightarrow V_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon V_\varepsilon = B_\varepsilon \end{aligned}$$

Corollary 2.2. The norms of operators A_ε^{-1} B_ε^{-1} are the same. In fact,

$$B_\varepsilon^{-1} = V_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon^{-1} V_\varepsilon, \Rightarrow \|B_\varepsilon^{-1}\| \leq \|V_\varepsilon^{-1}\| \cdot \|A_\varepsilon^{-1}\| \cdot \|V_\varepsilon\| \leq \|A_\varepsilon^{-1}\|, \text{ similarly from equality,}$$

$$A_\varepsilon^{-1} = V_\varepsilon B_\varepsilon^{-1} V_\varepsilon^{-1}, \text{ имеем } \|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \|B_\varepsilon^{-1}\| \text{ we have, therefore, } \|A_\varepsilon^{-1}\| = \|B_\varepsilon^{-1}\|.$$

3. Research results

Theorem 3.1. If $y(x, \varepsilon, f)$ is a solution of a singularly perturbed Cauchy problem

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), x \in [0, 1] \quad (3.1)$$

$y(0) = 0$, (3.2) where $a = \text{const} > 0$, $f(x)$, $a > 0$, $f(x) \in L^2(0, 1)$, then the expansion

$$y(x, \varepsilon, f) = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, \phi_n) \cos \sqrt{\mu_n} * \phi_n(x), \quad (3.3)$$

where $Sf(x) = f(1-x)$, μ_n are the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem

$$-y''(x) = \mu - y(x), x \in (0, 1); \quad (3.4)$$

$$y(0) = 0, y'(1) + \frac{a}{\varepsilon} y(1) = 0, \quad (3.5)$$

A $\phi_n(x)$ -normalized eigenfunctions of this problem corresponding to these eigenvalues.

Evidence.

Let there be $y_N(x, \varepsilon, f)$ a partial sum of the series (3.3), then, by virtue of formula (2.18), we have

$$\begin{aligned} y_N(x, \varepsilon, f) &= -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^N (st, \phi_n) \cos \sqrt{\mu_n} * \phi_n(x), \\ y'_N(x, \varepsilon, f) &= -\frac{1}{a} * \sum_{n=1}^N (st, \phi_n) * \cos \sqrt{\mu_n} * \phi'_n(x) = \\ &= (\cos \sqrt{\mu_n} * \phi'_n(x) = -\frac{a}{\varepsilon} \cdot [\phi_n(1-x) + \phi_n * \cos \sqrt{\mu_n}]) = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^N (sf, \phi_n) \\ &\left\{ -\frac{a}{\varepsilon} [\phi_n(1-x) + \phi_n(x) \cos \sqrt{\mu_n}] \right\} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} * \sum_{n=1}^N (st, \phi_n) * [\phi_n(1-x) + \phi_n(x) \cos \sqrt{\mu_n}], \\ \varepsilon y_N(x, \varepsilon, f) &= \sum_{n=1}^N (sf, \phi_n) * \phi_n(1-x) + \sum_{n=1}^N (st, \phi_n) \cos \sqrt{\mu_n} \phi_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^N (f, S\phi_n) * S\phi_n(x) - ay_N(x, \varepsilon, f), \Rightarrow \varepsilon y'_N(x, \varepsilon, f) \\ &+ ay_N(x, \varepsilon, f) = \sum_{n=1}^N (f, S\phi_n) * S\phi_n(x), \end{aligned}$$

Where $S\phi_n(x) = \phi_n(1-x)$, $n=1, 2, \dots$, Since, $B = \frac{a}{\varepsilon} > 0$, by Lemma 2.1, the system $\{\phi_n(x)\}, n=1, 2, \dots$, forms an orthonormal basis of the space $L^2(0, 1)$. The operator S is unitary, therefore it takes an orthonormal basis to an orthonormal basis, hence the system $\{S\phi_n\}, n=1, 2, \dots$, is also an orthonormal basis of the space $L^2(0, 1)$. Therefore, the function

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N (f, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x)$$

is a partial sum of the Fourier series $f(x)$ of the function in the system $\{S\varphi_n\}, n=1, 2, \dots;$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f(x)$$

in space $L^2(0,1)$. Thus, we have proved the limiting relation

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon y'_N(x, \varepsilon, f) + ay_N(x, \varepsilon, f) = f_N(x) \rightarrow f(x), \text{ for } N \rightarrow \infty.$$

Now we show that the sequence $\{y_N\}, N=1, 2, \dots$ also converges in $L^2(0,1)$, for this it is sufficient to show its fundamental property in $L^2(0,1)$,

$$\|y_{N'} - y_{N''}\|^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{N'}^{N''} |(st, \varphi_n) \cos \sqrt{\mu_n} \varphi_n(x)|^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{N'}^{N''} |(st, \varphi_n)|^2 \cos^2 \sqrt{\mu_n} \leq \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{N'}^{N''} |(st, \varphi_n)|^2 < \varepsilon, \forall N', N'' > N(\varepsilon)$$

since, the Parseval equality holds

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Sf, \varphi_n)|^2 = \|Sf\|^2 = (Sf, Sf) = (S^2 f, f) = \|f\|^2 < +\infty$$

By definition, the function $y(x, \varepsilon, f) = \lim_{N \rightarrow \infty} y_N(x, \varepsilon, f)$ is a strong solution of the singularly perturbed Cauchy problem (1.1) - (1.2) in the space $L^2(0,1)$.

Corollary 3.1. If $a > 0$, then inequality

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{a^2}. \tag{3.6}$$

Evidence.

It follows from (3.3) that

$$\begin{aligned} \|y(x, \varepsilon, f)\|^2 &= \|L_\varepsilon^{-1} f(x)\|^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(Sf, \varphi_n)|^2 \cos^2 \sqrt{\mu_n} \leq \left| \mu_n > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \sqrt{\mu_n} - \text{veuy} \right| \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} |(Sf, \varphi_n)|^2 = \\ &= \frac{\|Sf\|^2}{a^2} = \frac{(st, Sf)}{a^2} = \frac{\|f\|^2}{a^2}, \rightarrow \|y(x, \varepsilon, f)\| = \|L_\varepsilon^{-1} f\| \leq \frac{\|f\|}{a}, \rightarrow \|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Theorem 3.2. If $a > 0$, and $f(x) \in W_2^n[0,1], n \geq 0$, then the strong solution of the singularly perturbed Cauchy problem

$$\begin{aligned} \varepsilon y'(x) + a \cdot y(x) &= f(x), x \in (0,1]; \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

belongs to the space $W_2^{n+1}[0,1]$, and satisfies the estimate

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) e^{-\frac{ax}{\varepsilon}} \right] \varepsilon^k}{a^{k+1}} \right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{a^{k+1}} \|f^{(n)}(x)\|.$$

Evidence.

By Theorem 3.1, the strong solution of problem (3.1) - (3.2) has the form

$$y(x, \varepsilon, f) = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, \varphi_n) \cos \sqrt{\mu_n} \varphi_n(x),$$

where the Fourier coefficients of the function in the system We calculate these coefficients.

$$(Sf, \varphi_n) = \left(f, \frac{\varphi_n'(x)}{b} - \frac{\varphi_n(1-x)}{\cos \sqrt{\mu_n}} \right) = -\frac{(Sf, \varphi_n')}{b} - \frac{(Sf, S\varphi_n)}{\cos \sqrt{\mu_n}} = -\frac{(Sf, \varphi_n')}{b} - \frac{(f, \varphi_n)}{\cos \sqrt{\mu_n}}$$

Where $b = a/\varepsilon > 0$

$$(Sf, \varphi_n') = \int_0^1 Sf d\varphi_n = Sf \cdot \varphi_n(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (Sf)' \varphi_n(x) dx = f(0)\varphi_n(1) - ((Sf)', \varphi_n),$$

$$(Sf, \varphi_n) = -\frac{f(0)\varphi_n(1)}{b} + \frac{((Sf)', \varphi_n')}{b} - \frac{(f, \varphi_n)}{\cos \sqrt{\mu_n}};$$

Therefore

$$(Sf, \varphi_n) \cos \sqrt{\mu_n} = -f(0) \frac{\varphi_n(1)}{b} \cos \sqrt{\mu_n} - (f, \varphi_n) + \frac{((Sf)', \varphi_n')}{b} \cos \sqrt{\mu_n}$$

Substituting the obtained formula, in Fourier the representation of the solution $y(x, \varepsilon, f)$, and using Lemma 2.3, we have

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (sf, \phi_n) \cos \sqrt{\mu_n} \cdot \phi_n(x) = \\ &= -\frac{1}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[f(0) \frac{\phi_n(1)}{b} \cos \sqrt{\mu_n} - (f, \phi_n) + \frac{((sf)', \phi_n')}{b} \cos \sqrt{\mu_n} \right] \cdot \phi_n(x) = \\ &= \frac{f(0)}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(1)}{b} \cos \sqrt{\mu_n} \cdot \phi_n(x) + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n(x) - \frac{1}{a \cdot b} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ((sf)', \phi_n') \cos \sqrt{\mu_n} \cdot \phi_n(x) = \\ &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-bx}, \phi_n) \cdot \phi_n(x) - \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} ((sf)', \phi_n') \cos \sqrt{\mu_n} \cdot \phi_n(x) = \\ &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{-bx} + \frac{1}{ab} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (sf', \phi_n) \cos \sqrt{\mu_n} \cdot \phi_n(x) = \\ &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{-bx} - \frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (sf', \phi_n) \cos \sqrt{\mu_n} \cdot \phi_n(x) \right] = \\ &= \frac{f(x) - f(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a} - \frac{\varepsilon}{a} \cdot y(x, \varepsilon, f') \end{aligned} \tag{3.7}$$

Replacing, in this formula f by f' , we get

$$y(x, \varepsilon, f') = \frac{f'(x)}{a} - \frac{f'(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'')$$

Consequently,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} \left[\frac{f'(x)}{a} - \frac{f'(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f') \right] = \\ &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} \left[\frac{f'(x)}{a} - \frac{f'(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'') \right] = \\ &= \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \left[f'(x) - f'(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \cdot \frac{\varepsilon}{a^2} + \frac{\varepsilon^2}{a^2} y(x, \varepsilon, f'') = \\ &= \frac{f(x) - f(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a} - \left[f'(x) - f'(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \cdot \frac{\varepsilon}{a^2} + \frac{\varepsilon^2}{a^2} y(x, \varepsilon, f'') \end{aligned}$$

Suppose that the formula

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \varepsilon^k}{a^{k+1}} + (-1)^n \frac{\varepsilon^n}{a^n} y(x, \varepsilon, f^{(n)}) \quad (3.8)$$

is true. Then, by virtue of formula (3.7), we have

$$y(x, \varepsilon, f^k) = \frac{f^n(x)}{a} - \frac{f_n(0)}{a} \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f^{(n+1)}),$$

Consequently,

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \varepsilon^k}{a^{k+1}} + (-1)^n \frac{\varepsilon^n}{a^n} \left[\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f^{(n+1)}) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \varepsilon^k}{a^{k+1}} + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon^{n+1}}{a^{n+1}} y(x, \varepsilon, f^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Thus, the validity of (3.8) is proved, from which the theorem follows:

$$\begin{aligned} &\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{R=0}^{n-1} \frac{(-1)^R \left[f^{(R)}(x) - f^{(R)}(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \varepsilon^R}{a^{R+1}} \right\|^2 = \frac{\varepsilon^{2n}}{a^{2n}} \left\| y(x, \varepsilon, f^{(n)}) \right\|^2 = \\ &= \frac{\varepsilon^{2n}}{a^{2n}} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} \left| (sf^{(n)}, \varphi_m) \right|^2 \cos^2 \sqrt{\mu_m} \leq \frac{\varepsilon^{2n}}{a^{2n+2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left| (sf^{(n)}, \varphi_m) \right|^2 \leq \frac{\varepsilon^{2n}}{a^{2n+2}} \|sf^{(n)}\|^2 \leq \frac{\varepsilon^{2n}}{a^{2n+2}} \|f^{(n)}\|^2, \end{aligned}$$

those.

$$\left\| y(x, \varepsilon, f) - \sum_{R=0}^{n-1} \frac{(-1)^R \left[f^{(R)}(x) - f^{(R)}(0) \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right] \varepsilon^R}{a^{R+1}} \right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}} \cdot \|f^{(n)}(x)\|.$$

Theorem 3.3. If a the real value is nonzero, then the sequence of operators L_ε^{-1} converges strongly to the operator $L_0^{-1} = I/a$, for $\varepsilon \rightarrow +0$, if and only if $a > 0$.

Evidence.

A) Necessity. Let $f(x)$ an arbitrary absolutely continuous function satisfying the condition $f(0) \neq 0$, then from formula (3.7), we have

$$L_\varepsilon^{-1} f(x) - L_0^{-1} f(x) = -\frac{f(0)}{a} \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} L_\varepsilon^{-1} f'(x), \Rightarrow \left| \frac{f(0)}{a} \right| \cdot \left\| e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} \right\| \leq \|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\| \leq \frac{\varepsilon}{|a|} \|L_\varepsilon^{-1} f'(x)\|, \Rightarrow$$

$$\frac{|f(0)|}{|a|} \cdot \frac{\left| \left(1 - e^{-\frac{2a}{\varepsilon}} \right) \right| \varepsilon}{2|a|} \leq \|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\| + \frac{\varepsilon}{|a|} \|L_\varepsilon^{-1} f'\|;$$

If $a < 0$, then $\left| \left(1 - e^{-\frac{2a}{\varepsilon}} \right) \right| = e^{-\frac{2a}{\varepsilon}} - 1 > \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{\varepsilon} \right)^2 \geq \frac{2a^2}{\varepsilon^2}, \Rightarrow$

$$\frac{\left| \left(1 - e^{-\frac{2a}{\varepsilon}} \right) \right| \varepsilon}{2a^2} > \frac{1}{\varepsilon}, \Rightarrow \frac{|f(0)|}{\varepsilon} \leq \|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\| + \frac{\varepsilon}{|a|} \|L_\varepsilon^{-1} f'\|; \tag{3.9}$$

Suppose that strong convergence holds, when $L_\varepsilon^{-1} \rightarrow L_0^{-1}$, then $\varepsilon \rightarrow +0$ the left-hand side of (3.9) tends to $+\infty$, and the right-hand side tends to zero, which is impossible, hence, if strong convergence holds $L_\varepsilon^{-1} \rightarrow L_0^{-1}$, then certainly $a > 0$.

B) Sufficiency. Let $a > 0$, then, by virtue of inequality (3.6), we have $\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{a} \forall \varepsilon > 0$

Assuming $f = S\varphi_m$, from the formula (3.3), we have $L_\varepsilon^{-1} S\varphi_m = -\frac{1}{a} \cos \sqrt{\mu_m} \cdot \varphi_m(x), m = 1, 2, \dots$

If $\varepsilon \rightarrow +0$, then $b = a / \varepsilon \rightarrow +\infty$, by Lemma 2.1, we have

$$\sqrt{\mu_m} \rightarrow m\pi, \|\varphi_m(x) - \sqrt{2} \sin m\pi x\| \rightarrow 0, \text{ at } \varepsilon \rightarrow +0.$$

$$\text{Then } -\frac{1}{a} \cos \sqrt{\mu_m} \cdot \varphi_m(x) \rightarrow \frac{(-1)^{m+1}}{a} \sqrt{2} \sin m\pi x = \frac{\sqrt{2} \sin m\pi (1-x)}{a} = \frac{S}{a} \sqrt{2} \sin m\pi x.$$

Assuming, for convenience $\varphi_m^0(x) = \sqrt{2} \sin m\pi x, m = 1, 2, \dots$, we have

$$\begin{aligned} \|L_\varepsilon^{-1} S\varphi_m^0 - L_0^{-1} S\varphi_m^0\| &\leq \|L_\varepsilon^{-1} S\varphi_m^0 - L_\varepsilon^{-1} S\varphi_m\| + \|L_\varepsilon^{-1} S\varphi_m - L_0^{-1} S\varphi_m^0\| \leq \|L_\varepsilon^{-1}\| \cdot \|S\varphi_m^0 - S\varphi_m\| + \|L_\varepsilon^{-1} \varphi_m - L_0^{-1} S\varphi_m^0\| \leq \\ &\leq \frac{\|\varphi_m^0 - \varphi_m\|}{a} + \left\| L_\varepsilon^{-1} S\varphi_m - \frac{S}{a} \varphi_m^0 \right\| \rightarrow 0 \text{ at } \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Therefore $\|L_\varepsilon^{-1}S\varphi_m^0 - L_0^{-1}S\varphi_m^0\| \rightarrow 0$, when $\varepsilon \rightarrow +0$. The system $\varphi_m^0(x) = \sqrt{2} \sin m\pi x, m = 1, 2, \dots$ forms an orthonormal basis of space $L^2(0,1)$, therefore the system $\{S\varphi_m^0\}, m = 1, 2, \dots$ is also the basis of this space. Consequently, the linear span of these vectors $\{S\varphi_m^0\}, m = 1, 2, \dots$ forms a dense set in space $L^2(0,1)$. Then the assertion of the theorem follows from the Banach-Steinhaus theorem.

Remark 3.1. Formula (3.7) is true for any complex value a with nonzero real part.

Proof 1. In fact, the solution of the Cauchy problem

$$\begin{aligned} y'(x) + a \cdot y(x) &= f(x), x \in (0, 1] \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

has the form

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt, \quad (3.10)$$

therefore the following chain of equalities holds

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f') &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} f'(t) dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} df = \frac{f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}}{\varepsilon} \Big|_0^x - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} \cdot \frac{a}{\varepsilon} = \\ &= \frac{f(x) - f(0) e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{\varepsilon} - \frac{a}{\varepsilon} y(x, \varepsilon, f), \Rightarrow \varepsilon y(x, \varepsilon, f') = f(x) - f(0) e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - a y(x, \varepsilon, f), \Rightarrow a y(x, \varepsilon, f) = \\ &= f(x) - f(0) e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \varepsilon y(x, \varepsilon, f'), y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} \cdot y(x, \varepsilon, f'). \end{aligned}$$

Proof 2. By Lemma 2.4, the operators $A_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + a \cdot y(x); y(0) = 0$ and $B_\varepsilon z = \varepsilon z'(x) + a \cdot z(x); z(0) = 0$ are similar to each other, where the similarity operator is

$$V_\varepsilon f(x) = e^{-i \frac{jma}{\varepsilon} x} \cdot f(x)$$

The formula (3.7) is valid for real numbers a , and therefore

$$B_\varepsilon^{-1} f = \frac{f(x)}{\operatorname{Re} a} - \frac{f(0)}{\operatorname{Re} a} e^{\frac{\operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re} a} B_\varepsilon^{-1}(f'), \Rightarrow \operatorname{Re} a B_\varepsilon^{-1} f = f(x) - f(0) e^{\frac{\operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} - \varepsilon B_\varepsilon^{-1}(f').$$

By virtue of similarity, the following formula holds: $V_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon^{-1} = B_\varepsilon^{-1} V_\varepsilon^{-1}$. If $f = V_\varepsilon^{-1} \varphi$, where ε is fixed, then

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a V_{\varepsilon}^{-1} A_{\varepsilon}^{-1} \varphi &= V_{\varepsilon}^{-1} \varphi - \varphi(0) e^{-\frac{\operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} - \varepsilon B_{\varepsilon}^{-1} \left(\frac{d}{dx} V_{\varepsilon}^{-1} \varphi \right); \\ \frac{d}{dx} V_{\varepsilon}^{-1} \varphi &= \frac{d}{dx} e^{-i \frac{j m a}{\varepsilon} x} \varphi = i \frac{j m a}{\varepsilon} V_{\varepsilon}^{-1} \varphi + V_{\varepsilon}^{-1} \varphi', \Rightarrow \\ \operatorname{Re} a V_{\varepsilon}^{-1} A_{\varepsilon}^{-1} \varphi &= V_{\varepsilon}^{-1} \varphi - \varphi(0) e^{-\frac{\operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} - i j m a B_{\varepsilon}^{-1} V_{\varepsilon}^{-1} \varphi - \varepsilon B_{\varepsilon}^{-1} V_{\varepsilon}^{-1} \varphi', \Rightarrow \\ a V_{\varepsilon}^{-1} A_{\varepsilon}^{-1} \varphi &= V_{\varepsilon}^{-1} \varphi - \varphi(0) e^{-\frac{\operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} - \varepsilon V_{\varepsilon}^{-1} A_{\varepsilon}^{-1} \varphi', \Rightarrow \\ a A_{\varepsilon}^{-1} \varphi &= \varphi - \varphi(0) \cdot e^{-\frac{\operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} - \varepsilon A_{\varepsilon}^{-1} \varphi', \Rightarrow \\ A_{\varepsilon}^{-1} \varphi &= \frac{\varphi(x)}{a} - \frac{\varphi(0)}{a} \cdot e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} - \frac{\varepsilon}{a} A_{\varepsilon}^{-1} \varphi'; \end{aligned}$$

Hence, $y(x, \varepsilon, \varphi) = \frac{\varphi(x)}{a} - \frac{\varphi(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, \varphi')$, as required.

Proof 3. Integrating by parts the right-hand side of (3.10), we have

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon, f) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt = \frac{1}{a} \int_0^x f(t) de^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} = \\ &= \frac{f(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}}{a} \Big|_0^x - \frac{1}{a} \int_0^x f'(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt = \frac{f(x) - f(0) e^{-\frac{a}{\varepsilon} x}}{a} \cdot \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'). \end{aligned}$$

Theorem 3.4. A sequence of operators L_{ε}^{-1} strongly converges to an operator L_0^{-1} , for $\varepsilon \rightarrow +0$, in a space $H = L^2(0, 1)$ if and only if the following inequality holds:

$$\operatorname{Re} a > 0 \tag{3.11}$$

Evidence.

A) **Necessity.** Let the sequence of operators L_{ε}^{-1} strongly converge to the operator L_0^{-1} . It is not difficult to see that the function $z(x, \varepsilon) = e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} - 1$ is a solution of the Cauchy problem $\varepsilon z'(x) + a \cdot z(x) = -a; z(0) = 0$, so we have formulas

$$z(x, \varepsilon) = L_{\varepsilon}^{-1}(a) = -a L_{\varepsilon}^{-1}(1), \Rightarrow e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} = 1 - a L_{\varepsilon}^{-1}(1), \Rightarrow \left\| e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} \right\| \leq 1 + |a| \|L_{\varepsilon}^{-1}\|;$$

Let us calculate the left-hand side of this inequality:

$$\left\| e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} \right\|^2 = \int_0^1 e^{-\frac{a}{\varepsilon} x} - e^{-\frac{\bar{a}}{\varepsilon} x} dx = \int_0^1 e^{-\frac{2 \operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} dx = -\frac{\varepsilon}{2 \operatorname{Re} a} e^{-\frac{2 \operatorname{Re} a}{\varepsilon} x} \Big|_0^1 = \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{Re} a} \left(1 - e^{-\frac{2 \operatorname{Re} a}{\varepsilon}} \right).$$

Consequently, for any a , with $\operatorname{Re} a \neq 0$, the following inequality holds

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2 \operatorname{Re} a} \left(1 - e^{-\frac{2 \operatorname{Re} a}{\varepsilon}} \right)} \leq 1 + |a| \|L_{\varepsilon}^{-1}\|.$$

If $\operatorname{Re} a < 0$, then $\left| 1 - e^{-\frac{2\operatorname{Re} a}{\varepsilon}} \right| = e^{-\frac{2\operatorname{Re} a}{\varepsilon}} - 1 > \frac{1}{2} \left(-\frac{2\operatorname{Re} a}{\varepsilon} \right)^2 = \frac{2(\operatorname{Re} a)^2}{\varepsilon^2}$, therefore

$$\frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{1 - e^{-\frac{2\operatorname{Re} a}{\varepsilon}}}{\operatorname{Re} a} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \frac{2(\operatorname{Re} a)^2}{\varepsilon^2 |\operatorname{Re} a|} \geq \frac{|\operatorname{Re} a|}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \frac{|\operatorname{Re} a|}{\varepsilon} \leq 1 + |a| \|L_\varepsilon^{-1}\|.$$

Therefore, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|L_\varepsilon^{-1}\| = +\infty$ and this circumstance contradicts the Banach-Steinhaus theorem, since, according to this theorem, the sequence of norms $\|L_\varepsilon^{-1}\|$ is uniformly bounded. Thus, if $\operatorname{Re} a \neq 0$, and strong convergence takes place $L_\varepsilon^{-1} \rightarrow L_0^{-1}$, then certainly $\operatorname{Re} a > 0$.

If $\operatorname{Re} a = 0$, then from Lemma 2.2, we have $\|L_\varepsilon^{-1}\| = \|A_\varepsilon^{-1}\| = \|B_\varepsilon^{-1}\|$ where $B^{-1}f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(t) dt$.

Then, by the Hardy inequality [20], we therefore have $\|L_\varepsilon^{-1}\| = \|A_\varepsilon^{-1}\| = \|B_\varepsilon^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2}{\pi}$, in this case $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|L_\varepsilon^{-1}\| = +\infty$, which contradicts the Banach-Steinhaus theorem.

Thus, if the sequence of operators L_ε^{-1} converges strongly to an operator I/a , then the inequality holds $\operatorname{Re} a > 0$.

Proof. Let $\operatorname{Re} a > 0$, and $f(x)$ an arbitrary function in the class $C_0^\infty(0,1)$, then, by (3.7), we have

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a} e^{\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{\varepsilon}{a} y(x, \varepsilon, f'),$$

and since $f(0) = 0$, then $\left\| y(x, \varepsilon, f) - \frac{f(x)}{a} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{|a|} \|y(x, \varepsilon, f')\| \leq \frac{\varepsilon}{|a|} \frac{\|f'(x)\|}{\operatorname{Re} a} \rightarrow 0$

at $\varepsilon \rightarrow +0$, and this means that $\|L_\varepsilon^{-1}f - L_0^{-1}\| \rightarrow 0$, with $\varepsilon \rightarrow +0$, and $\operatorname{Re} a > 0$ for any $f(x) \in C_0^\infty(0,1)$.

By Lemma 2.2, and Corollary 3.1, we have $\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} a}$.

Consequently, the assertion of Theorem 3.4 follows from the Banach-Steinhaus theorem, since linear manifolds of functions from the class are everywhere dense in space $H = L^2(0,1)$.

Theorem 3.5. If $\operatorname{Re} a = 0$, $a \neq 0$ then, the sequence of operators L_ε^{-1} strongly converges to an L_0^{-1} operator, for $\varepsilon \rightarrow +0$, in a subset $DCW_2^1(0,1)$, if and only if

$$D = \{f(x) \in W_2^1(0,1), f(0) = 0\}$$

Evidence. Let the sequence of operators L_ε^{-1} strongly converge to an L_0^{-1} operator, for $\varepsilon \rightarrow +0$, in some subset $DCW_2^1(0,1)$. Then from the representation

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x) - f(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a} - \frac{1}{a} \int_0^x f'(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt, \quad \text{fair for any } f(x) \in D, \quad \text{we have}$$

$$\frac{|f(0)|}{|a|} \leq \left\| \frac{f(x)}{a} - L_\varepsilon^{-1} f \right\| + \frac{1}{|a|} \left\| \int_0^x f'(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt \right\|.$$

The first term on the right-hand side of this inequality tends to zero when $\varepsilon \rightarrow +0$, by virtue of the Riemann-Lebesgue lemma, and Lebesgue's theorem on bounded convergence $f(0)=0$, and consequently the necessity of this condition is proved.

Conversely, if $f(x) \in D$ i.e. $f(x) \in W_2^1(0,1)$ and $f(0)=0$, in view of the same representation, we have $\left\| L_\varepsilon^{-1} f - \frac{f(x)}{a} \right\| = \frac{1}{|a|} \left\| \int_0^x f'(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt \right\|.$

The right-hand side of this formula tends to zero, when $\varepsilon \rightarrow +0$, by virtue of the Riemann-Lebesgue lemma, and Lebesgue's theorems on bounded convergence.

Theorem 3.6. If $\operatorname{Re} a = 0$, then the sequence of operators L_ε^{-1} is weakly convergent to the operator L_0^{-1} , for $\varepsilon \rightarrow +0$, in the subset $W_2^1(0,1) \subset L^2(0,1)$.

Evidence.

From the representation (3.7), we have $(L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f) = \frac{-f(0)}{a} e^{-\frac{a}{\varepsilon}x} - \frac{1}{a} \int_0^x f'(t) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)} dt.$

By the Riemann-Lebesgue lemma, the first term on the right-hand side of this formula converges weakly to zero for $\varepsilon \rightarrow +0$, and the second term strongly converges to zero in the subset $W_2^1(0,1) \subset L^2(0,1)$, by the same Riemann-Lebesgue lemma and Lebesgue's theorem on bounded convergence.

In connection with this theorem, the question arises: is it possible for $\operatorname{Re} a = 0$ weak convergence in the whole space $H = L^2(0,1)$?

Suppose that a sequence of operators L_ε^{-1} converges weakly to an operator L_0^{-1} , for $\varepsilon \rightarrow +0$, in the whole space $H = L^2(0,1)$, that is, for any $f \in L^2(0,1)$, the sequence of elements $\{L_\varepsilon^{-1} f\}$ converges weakly to an element $L_0^{-1} f$. Then, by the criterion for weak convergence (see, for example, [18], p.185), the sequence of norms $\{\|L_\varepsilon^{-1} f\|\}$ is bounded $\{L_\varepsilon^{-1} f\}$; The sequence is bounded for each fixed f of $H = L^2(0,1)$. Hence, by the principle of uniform boundedness, the sequence is bounded, and this is impossible $\{\|L_\varepsilon^{-1}\|\}$, since, for $\operatorname{Re} a = 0$, there is a formula $\|L_\varepsilon^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2}{\pi}$ that is incompatible with the assertion obtained.

4. Discussion

- 1) If $\operatorname{Re} a > 0$, then L_ε^{-1} converges strongly to L_0^{-1} in H .
- 2) If $\operatorname{Re} a \leq 0$, then there is not even a weak convergence in H .
- 3) If $\operatorname{Re} a = 0$ and $f \in W_2^1(0,1)$, then for $f(0)=0$ a sequence $\{L_\varepsilon^{-1} f\}$ converges to L_0^{-1} strongly, but for $f(0) \neq 0$ converges weakly.

REFERENCES

- [1] Maslov VP Asymptotic methods and perturbation theory, M.: Nauka, **1988**. 312 p.
[2] Shal'danbaev A.Sh. On a singularly perturbed Cauchy problem in space // Matematicheskii zhurnal. Almaty. **2008**. tom. №8 (30), p.88-97.
[3] Vasilieva AB, Butuzov V.F. Asymptotic methods in theories of singular perturbations. M: Vyssh. shk. **1990**. 200s.
[4] Vishik MI, Lyusternik AA Regular degeneration and the boundary layer for linear differential equations with a small parameter. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, **1957**. №5. p.3-122.
[5] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (**1950**), (in Russian).
[6] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singular Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,
[7] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
[8] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (**1972**).
[9] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (**1968**).
[10] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (**1970**).
[11] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using a method of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (**2015**); doi: 10.1063 / 1.4930498
[12] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (**2016**); doi: 10.1063 / 1.4959704
[13] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41-48 (**2004**), (in Russian).
[14] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (**2009**).
[15] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (**2010**).
[16] A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
[17] Orazov I., Shaldanbaev A, Sh, Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument // Abstract and Applied Analysis. Volume 2013 (2013) .Article ID 128363,6 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.
[18] VA Trenogin / Functional analysis.-M.: Science, **1980**.
[19] Course of differential and integral calculus, vol.1-M: Science, **1969**.
[20] Hardy. G, Littlewood. D, Polia G. Inequalities. M.: NL, **1948**.

УДК 517.94

М.И. Ақылбаев¹, А.Бейсебаева², А. Ш. Шалданбаев²

¹РЦИУ «Региональный социально-инновационный университет» г.Шымкент;

²ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

КРИТЕРИИ СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Аннотация: Методом отклоняющегося аргумента решено интегральное уравнение первого порядка с негладкой правой частью. Показано, что решение соответствующей сингулярно возмущенной задачи Коши сходится к решению невозмущенной задачи. При этом использованы критерии сильной сходимости и спектральные свойства вспомогательной задачи. Найден корень квадратный от одного класса операторов Штурма-Лиувилля.

Ключевые слова: сильная сходимость, спектр, спектральное разложение, квадратный корень от оператора, уравнение с отклоняющимся аргументом, теорема Гильберта-Шмидта.

УДК 517.94

М.И. Ақылбаев¹, А. Бейсебаева², А. Ш. Шалданбаев³

¹«Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университет» Шымкент, қ.;

²М.Әуезов атындағы ОҚМУ, Шымкент, қ.

СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИ ЕСЕБІНІҢ ӘЛДІ ЖҪЙНЫҚТАЛУЫНЫҢ КЕПЛДІГІ

Аннотация: Аргументін ауытқыту әдісімен бос мүшесі кедір-бұдыр берінші ретті интегралдық теңдеу шешілген. Бұл есепке сәйкес сингуляр әсерленген Кошидің есебінің шешімі бастапқы теңдеудің шешіміне күшті жыйнақталатыны көрсетілді. Бұл үшін күшті жыйнақталудың үзілді кесілді белгісі мен көмекші есептің спектралдік қасиеттері қолданылды. Жолшыбай Штурм-Лиувилл операторының бір түрінің квадрат түбірі табылды.

Түйін сөздер: әлді жыйнақталу, спектралді таралым, оператордың квадрат түбірі, аргументі ауытқыған теңдеу, Гилберт-Шмидтің теоремасы.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 107 – 116

UDC 539.23; 539.216.1

**Ye. Yerlanuly^{1,3}, D.G. Batryshev^{1,3}, T.S. Ramazanov², M.T. Gabdullin³,
N.E. Ahmetzhanov³, N.E. Ahanova^{3,4}, O. Omirzhanov¹**

¹Laboratory of Engineering Profile, Al-Farabi Kazakh National University;

²Scientific and Research Institute of Experimental and Theoretical Physics,
Al-Farabi Kazakh National University;

³National Nanotechnological Laboratory of Opened Type, Al-Farabi Kazakh National University
Kazakhstan, 050040, Almaty, Al-Farabiavenue, 71;

⁴Kazakh-British Technical University, Kazakhstan, 050000, Almaty, Tole bi st. 59

yerlanuly@physics.kz batryshev@physics.kz ramazan@physics.kz gabdullin@physics.kz nazym@physics.kz

EFFECT OF PLASMA PARAMETERS ON THE SYNTHESIS OF CARBON NANOMATERIALS BY THE PECVD METHOD

Abstract: This work covers an experimental study of the effect of plasma parameters on the synthesis of carbon materials by the PECVD method. It was found that, depending on PECVD synthesis parameters in particular, temperature, discharge power, gas pressure, percentage of gas mixture and etc., a various carbon nanomaterials are synthesized. The obtained samples were analyzed by using of analytical equipment such as Quanta 3D scanning electron microscope (SEM, FEI USA), NThegra Spectra Raman spectroscopy and Leica optical microscope. Thus, the morphology and quality of the structure of the obtained samples (carbon nanoparticles (CNP), carbon nanofibres (CNF) and nanotubes (CNTs), carbon nanowalls (CNWs) and multilayered graphene sheets) were studied by optical and electron microscopies, as well as by the method of combined light scattering. Found, that with the increase of power of the radio-frequency discharge, the production of qualitative nanostructures is complicated by formation of their nanoclusters. For the synthesis of CNT, it is necessary to control the thickness of catalytic nanolayer, since the quality of CNT structures can be worsened by the formation of thicker nanofibers. The obtained experimental results can be used to determine the optimum PECVD synthesis condition to synthesize various carbon nanomaterials.

Keywords: carbon nanoparticles, carbon nanofibers, carbon nanotubes, carbon nanowalls, multilayer graphene, radio-frequency (RF) discharge plasma.

УДК 539.23; 539.216.1

**Е. Ерланулы^{1,3}, Д.Г. Батрышев^{1,3}, Т.С. Рамазанов²,
М.Т. Габдуллин^{3,4}, Н.А. Ахметжанов³, Н.Е. Аханова^{3,4}, О. Омержанов¹**

¹Лаборатория инженерного профиля, КазНУ им. аль-Фараби,

²Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. аль-Фараби,

³Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, КазНУ им. аль-Фараби,
Казахстан, 050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71

⁴Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан, 050000 Алматы, ул. Толе-би, 59

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ НА СИНТЕЗ УГЛЕРОДНЫХ НАНОМАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ PECVD

Аннотация. Данная работа посвящена экспериментальному исследованию влияния параметров плазмы на синтез углеродных материалов методом PECVD. Установлено, что в зависимости от параметров PECVD синтеза в частности, температуры, мощности разряда, давление газа, процентное соотношение смеси газов и

т.д., синтезируются различные углеродные наноматериалы. Полученные образцы были исследованы с помощью аналитических оборудований, таких как сканирующий электронный микроскоп Quanta 3D (СЭМ, FEIUSA), Рамановский спектроскоп NThegraSpectra, оптический микроскоп Leica. Таким образом, с помощью оптической и электронной микроскопии, а также методом комбинированного рассеяния света были исследованы морфология и качество структуры полученных образцов: углеродные наночастицы (УНЧ), углеродные нановолокна (УНВ) и нанотрубки (УНТ), углеродные наностены (УНТ) и многослойные графеновые листы. Установлено, что с увеличением мощности ВЧ разряда получение качественных наностен усложняется формированием их нанокластеров. Для синтеза УНТ необходимо контроль толщины каталитического нанослоя, так как качество структур УНТ может ухудшиться формированием более толстых нановолокон. Полученные результаты могут быть использованы для определения оптимальных условий PECVD метода для синтеза различных углеродных наноматериалов.

Ключевые слова: углеродные наночастицы, углеродные нановолокна, углеродные нанотрубки, углеродные наностены, многослойный графен, плазма высокочастотного разряда

Введение

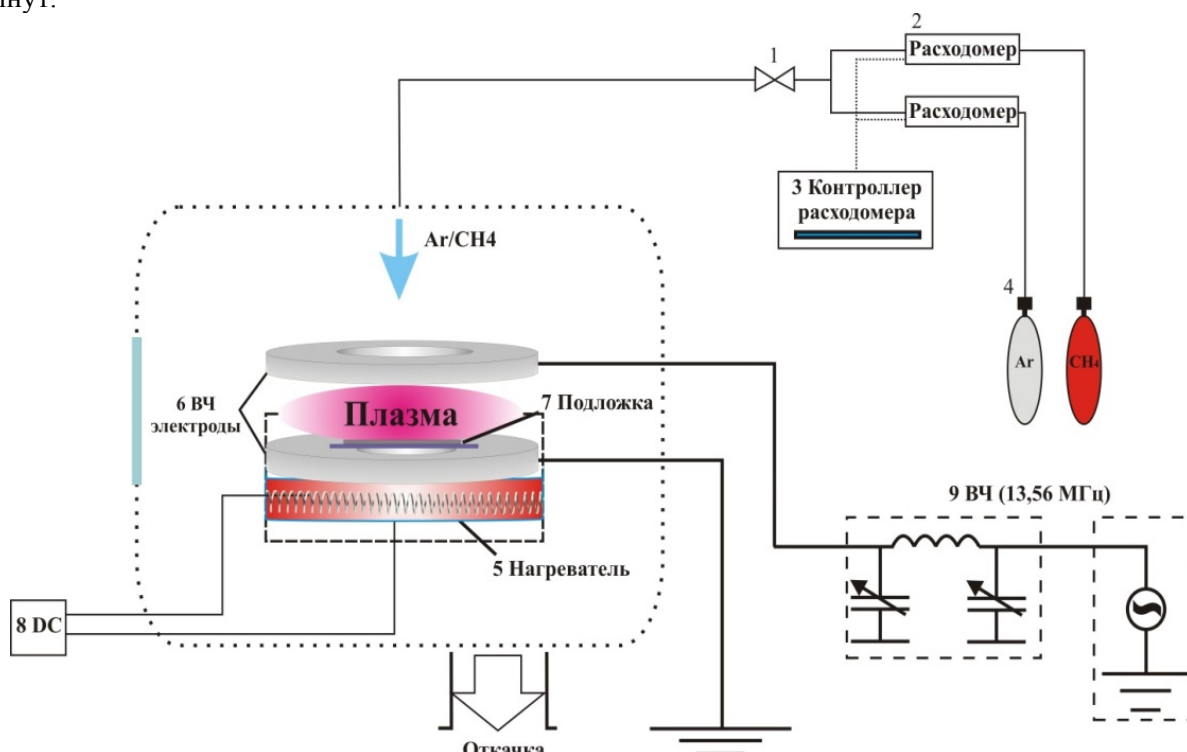
Анализ состояния и тенденции развития объектов nanoиндустрии в настоящее время позволяет сделать вывод о том, что одной из наиболее перспективных областей нанотехнологии является получение углеродных наноматериалов (УНМ). Как известно углерод существует в твердой фазе в нескольких модификациях, свойства которых резко отличаются друг от друга: углеродные наночастицы [1-2], углеродные нановолокна, углеродные нанотрубки [3-4], графен [5-6], углеродные наностены [7-8], фуллерен [9] и т.п. Актуальность УНМ обусловлена с широким спектром их практического применения в различных отраслях промышленности. Например, углеродные наночастицы могут найти свое применение для очистки воды [10,11], для автомобильных шин в качестве армирующих наполнителей [12], для определения раковых клеток на ранней стадий [13] и т.д. Ученые также предлагают использовать углеродные нанотрубки, в качестве армирующих элементов для получения высококачественного бетона [14,15] в строительстве, уникальные свойства УНТ также применяются в медицинских в целях для дезинфекции воды, создания антимикробных покрытий, препаратов [16] и для адресной доставки лекарств [17]. В энергетике УНТ и их композиты используются для хранения водорода [18], для создания высокоемкостных конденсаторов [19] энергий. Уникальные полупроводниковые свойства графена позволяют их применять в электронике для создания высокочувствительных сенсоров, полупроводниковых элементов и [20,23] т.д. Что касается углеродных наностен (УНС), то они являются одной из аллотропных модификации углерода, представляющие собой вертикально ориентированные графеновые листы [24,25], которые находят свое применение для хранения энергии в качестве абсолютно черного тела, для болометров [26] и солнечных элементов [27] в качестве электродов для суперконденсаторов [28,29] и т.д. Таким образом, учитывая актуальность УНМ, в данной работе будет исследован процесс химического осаждения из газовой фазы с усиленной плазмой (PECVD) углеродных наноматериалов при различных параметрах плазмы.

Эксперимент

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1. Как видно из рисунка, PECVD установка состоит из рабочей камеры, системы ВЧ электродов (6), нагревательного элемента (5), позволяющий уменьшить влияние мощности ВЧ разряда на процесс диссоциации углеродсодержащего газа для газофазного процесса осаждения УНТ, источника питания нагревательного элемента (8), ВЧ генератора (9) для поджига плазмы, вакуумной системы и системы напуска газа. Подложку с катализатором, в данном случае никель, располагают на поверхности нижнего электрода.

Эксперимент проводился следующим образом. Для начала отжигали кремниевую подложку с каталитическим нанослоем для формирования островков нанокластера никеля. Для этого подложку загружают в рабочую камеру на поверхность нижнего электрода и создают условие вакуума, после установления вакуума, подают поток рабочего газа аргона (Ar) до давления порядка 1 Тор, зажигают ВЧ плазму в диапазоне мощности 1-25 Вт, включают нагревательный элемент при температуре 400⁰С и обрабатывают в течение 10 минут, данный процесс хорошо описан в работе

[30]. Далее для роста УНТ в рабочую камеру напускается дополнительно реакционный углеродосодержащий газ – метан до давления 1,1-1,6 Тор, затем процесс синтеза длится 15-30 минут.



1 – вентиль, 2 – газовые расходомеры, 3 – контроллер газовых расходомеров, 4 – баллоны газов аргона и метана, 5 – нагревательный элемент, 6 – высокочастотные (ВЧ) электроды, 7 – подложка, 8 – источник для нагревательного элемента, 9 – ВЧ генератор с самосогласующим устройством

Рисунок 1 – Структура PECVD установки для синтеза нанокompозитных материалов на основе УНТ

На рисунке 2 приведены фото кремниевых подложек с никелевым катализатором до и после синтеза УНТ методом PECVD. Видно, что после синтеза УНТ поверхность подложки имеет сажевое образование, что свидетельствует о возможных осаждениях углеродных наноструктур.

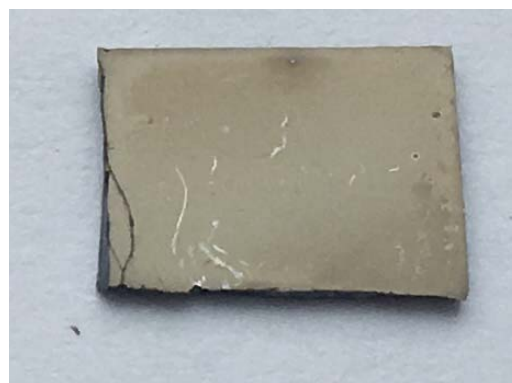


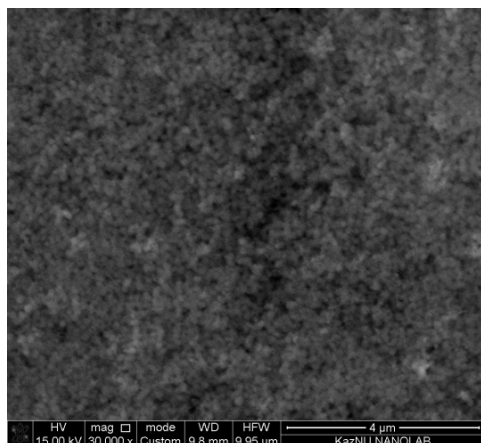
Рисунок 2 – Кремниевые подложки с никелевым катализатором до (слева) и после (справа) синтеза УНТ методом PECVD

Результаты и обсуждения

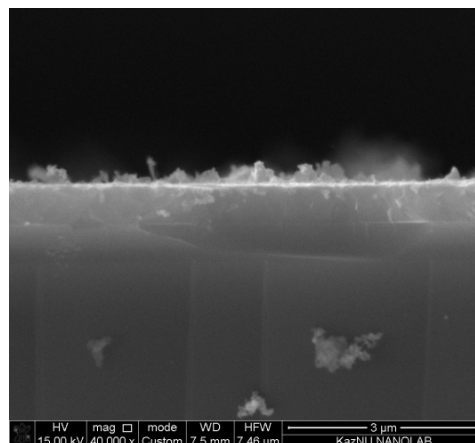
Полученные образцы в результате экспериментальных работ методом PECVD были исследованы с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), а также методом комбинационного рассеяния света (КРС).

СЭМ и КРС анализы полученных образцов при температурах среды 400-450⁰С, давлении 1,3 Тор, мощности разряда в диапазоне 1-10 Вт представлены на рисунке 3. Как показывают результаты исследования, поверхность полученных образцов имеет осаждение в виде углеродных наночастиц с размерами порядка 50-100 нм и углеродную пленку. Отсутствие УНТ объясняется низкой температурой синтеза для формирования нанокластеров.

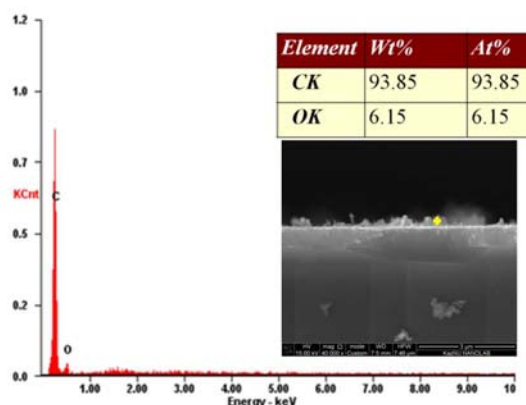
Далее, экспериментальные работы были проведены при температуре 500⁰С, давлении газа метан/аргон 1-1,8 Тор и мощности разряда в диапазоне 1-25 Вт.



а – СЭМ изображение, угол съемки 0⁰



б – СЭМ изображение, угол съемки 90⁰



в – химический состав

Рисунок 3 – СЭМ анализ образцов после PECVD синтеза при температуре 400-450⁰С и мощности разряда 1-10Вт

В экспериментах при следующих условиях синтеза: давление 1-1,8 Тор, мощность ВЧ 1-7 Вт, температура 500⁰С и длительность синтеза 20 минут, были получены углеродные нановолокна (1-5 Вт) и нанотрубки (5-7 Вт), этому свидетельствуют полученные результаты СЭМ и КРС анализов, а также оптической микроскопии.

Оптические микрофотографии и СЭМ изображения полученных образцов углеродных нановолокон и нанотрубок представлены на рисунках 4 и 5 соответственно.

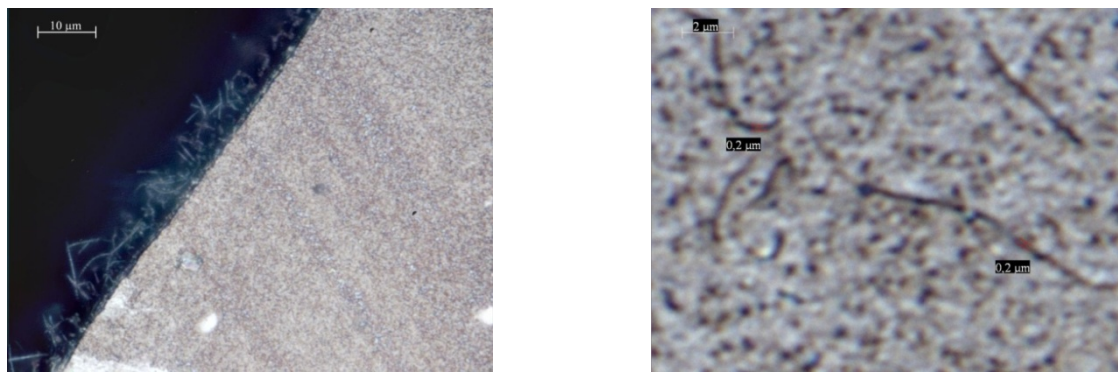
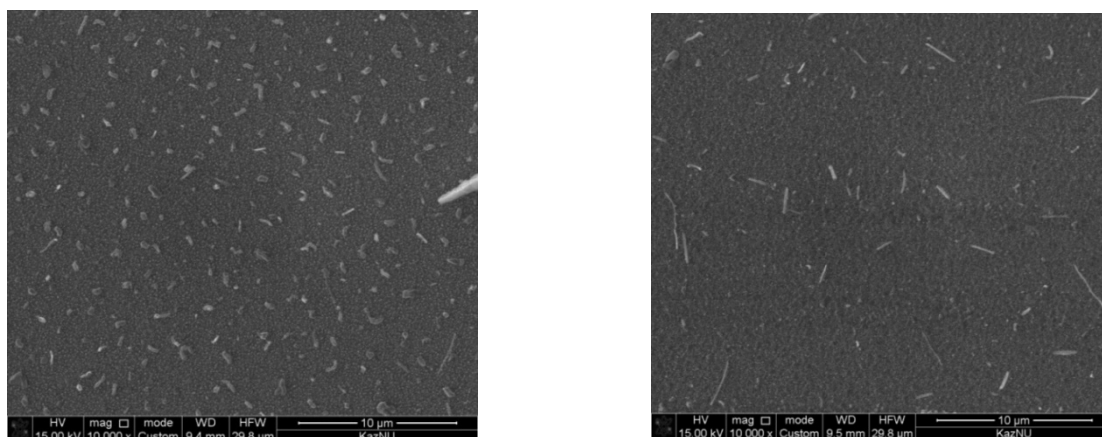


Рисунок 4 – Фотографии оптической микроскопии углеродных нановолокон при мощности разряда 1-5 Вт температуре 500°C



а - нановолокна

б – нанотрубки и нановолокна

Рисунок 5 – СЭМ изображения углеродных нановолокон и нанотрубок при мощности разряда 1-7 Вт температуре 500°C

Рамановский анализ полученных образцов приведен на рисунке 6. Полученный спектр типичен спектру многостенных углеродных нанотрубок (МУНТ) с G модой, которая обычно наблюдается у графит подобных материалах, D модой, которая ассоциируются с дефектами в структуре, второй гармоникой D моды - $G'(2D)$ мода и $G+D$ модой природа, которой еще до конца не ясна.

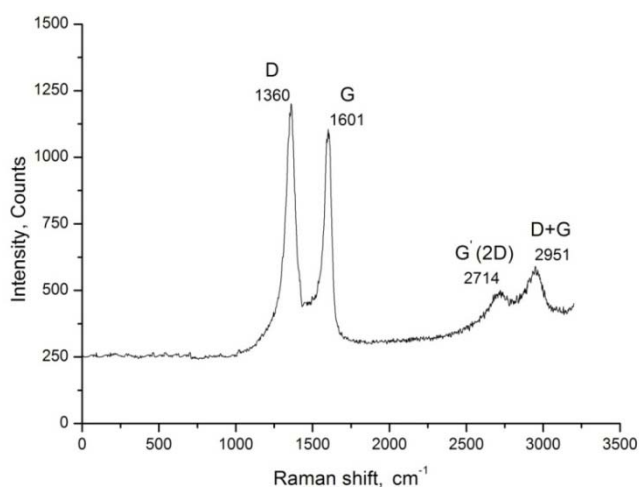


Рисунок 6 – Рамановский спектр полученного нановолокна (нанотрубки) при мощности разряда 1-7 Вт температуре 500°C

Из спектра видно, что качество МУНТ не высокое. Отношение интенсивностей D и G пиков, отвечающее за совершенство графеновой структуры составляет 1,1, где для УНТ оно равняется порядка 1,5 и выше. К этому, положение и частичное слияние D и G пиков свидетельствуют об аморфности структуры. Вероятной причиной ухудшения качества МУНТ объясняется наличием в структуре нановолокон, структура которых намного толще и менее совершенна.

При увеличении мощности разряда в диапазоне 10-15 Вт было обнаружено образование углеродных наностен, этому свидетельствуют полученные результаты СЭМ, КРС анализов (рисунки 7-9).

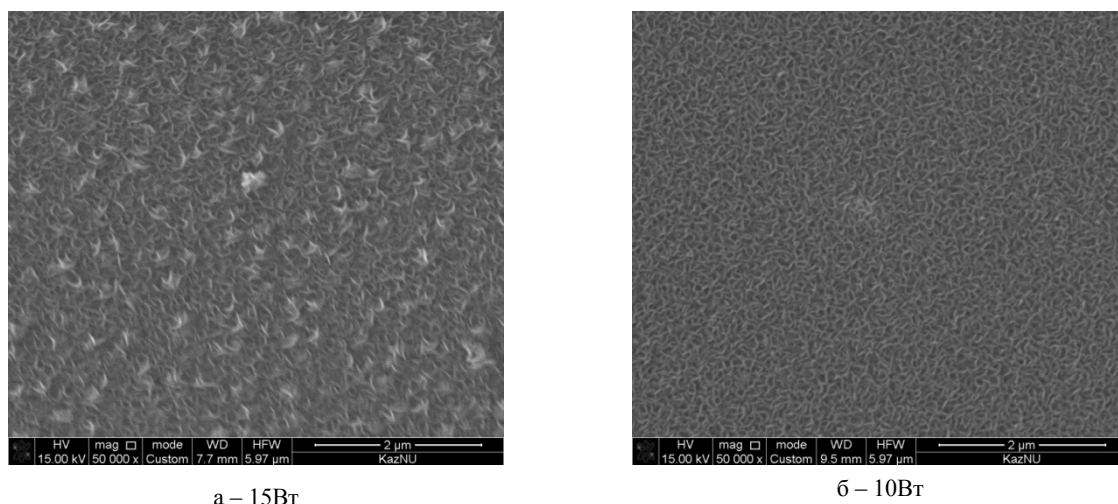


Рисунок 7 – СЭМ изображения УНС, синтезированных на подложках Ni/Si при мощности разряда 15 Вт (а) и 10 Вт (б) температуре 500°C

Как видно из СЭМ изображений, после процесса синтеза на поверхности кремниевой подложки формируются вертикальные углеродные листы, которые являются УНС. При увеличении значения мощности разряда можно наблюдать агломерацию нанослоев – образование нанокластеров стен (рисунок 7а и 8).

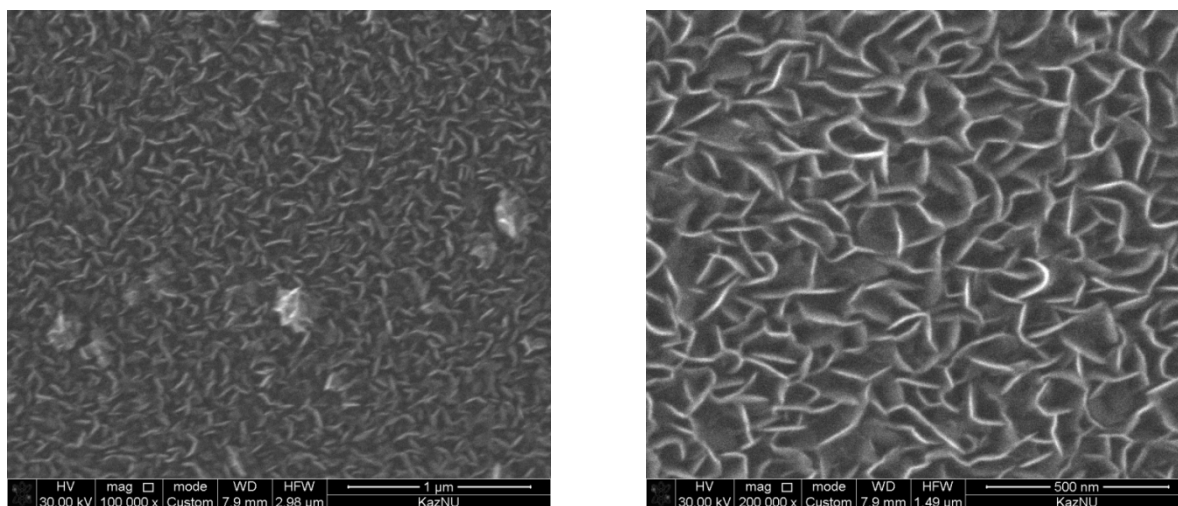


Рисунок 8 – СЭМ изображения УНС, синтезированных на подложках Ni/Si при мощности разряда 15 Вт и температуре 500°C

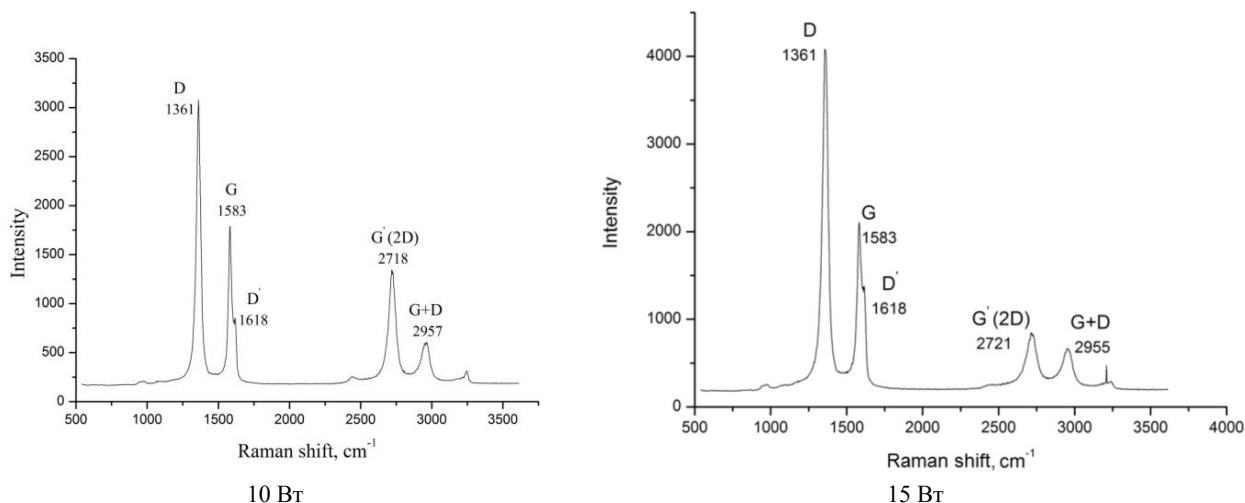
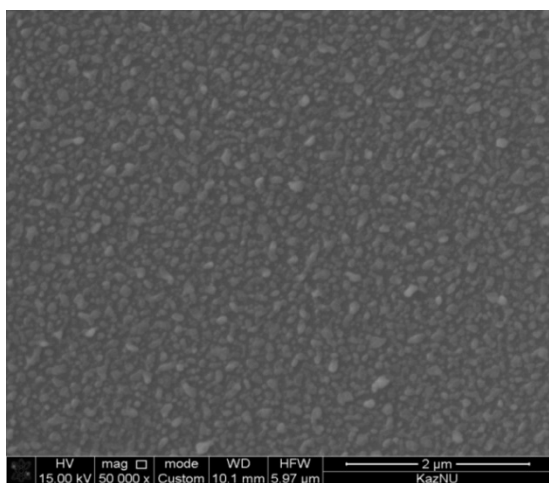


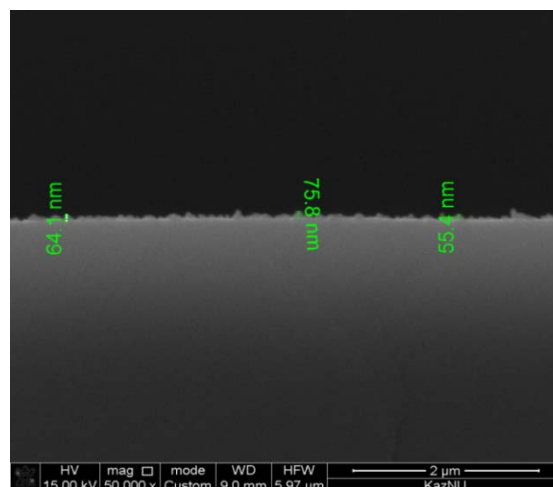
Рисунок 9 – Рамановский спектр УНС, синтезированный на подложке Ni/Si при мощности разряда 10 и 15 Вт температуре 500⁰С

Рамановский спектр полученных образцов соответствует типичному спектру УНС [31-33], при этом G-мода, которая обычно наблюдается у графитовых материалах, расщеплена и на ней выделяется D'-пик, также в спектре присутствуют характерные D-пик, связанный с дефектами в структуре, 2D(G') - пик, который соответствует второму порядку D-моды и моды G+D. Соотношение интенсивностей мод D и G говорит о степени дефектности кристаллической решетки графенового листа, полученное значение, которое колеблется в пределах от 1,7 до 1,9. Расчетная длина корреляции в плоскости L_a варьируется от 2,5 до 2,3 нм, область в котором УНС можно считать бездефектным. Как уже упоминалось выше, при увеличении значения мощности разряда происходит агломерация наностен, к тому же отношение $I(D)/I(G)$ увеличивается, что свидетельствует об образовании дефектов в структуре.

При дальнейшем увеличении мощности разряда в диапазоне 20-25 Вт, при тех же параметрах температуры и давления были получены многослойные графеновые листы (рисунок 10,11). Как видно из СЭМ анализа на поверхности кремниевой подложки были образованы островки многослойного графена, толщиной порядка 50-75 нм. Рамановское исследование свидетельствует, что полученный спектр соответствует спектру графита, длина корреляции в плоскости L_a равна 2 нм, отношение $I(D)/I(G)$ составляет 1,4.



а – СЭМ изображение, угол съемки 0⁰



б – СЭМ изображение, угол съемки 90⁰

Рисунок 10 – СЭМ анализ образцов после PECVD синтеза при температуре 500⁰С и мощности разряда 15-25 Вт

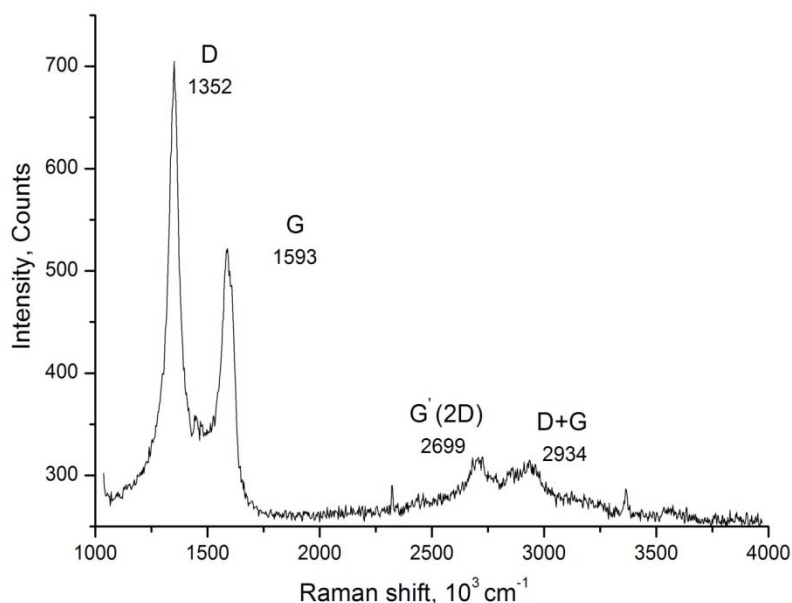


Рисунок 11 – Рамановский спектр образцов после PECVD синтеза при температуре 500⁰С и мощности разряда 15-25 Вт

В таблице 1 представлены параметры синтеза углеродных наноматериалов методом PECVD.

Таблица 1 – Параметры синтеза углеродных наноматериалов методом PECVD

Получаемый продукт	Параметры синтеза			
	Давление, Тор	Температура, ⁰ С	Мощность, Вт	Смесь газа
Углеродные наночастицы	1.1-1.6	400-450	1-15	Ar/CH ₄
Углеродные нановолокна и нанотрубки	1.1-1.6	500	1-7	Ar/CH ₄
Углеродные наностены	1.1-1.6	500	8-15	Ar/CH ₄
Многослойный графен	1.1-1.6	500	20-25	Ar/CH ₄

Заключение

Таким образом, были получены и исследованы различные углеродные наноматериалы. Экспериментально было выявлено, что от мощности разряда зависит тип синтезируемого наноматериала. При температурах 400-450⁰С и мощности разряда 1-15 Вт синтезируются углеродные наночастицы, при увеличении температуры до 500⁰С формируются углеродные наноструктуры, в частности при мощностях 1-7 Вт – углеродные нановолокна и нанотрубки, 8-15 Вт – углеродные наностены, 20-25 Вт многослойный графен. Полученные результаты эксперимента могут быть использованы для определения оптимальных условий PECVD метода для синтеза различных углеродных наноматериалов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Nanoparticle Technology Handbook, Masuo Hosokawa, Kiyoshi Nogi, Makio Naito, Toyokazu Yokoyama (eds.), Elsevier Science, 2007.

- [2] S. C. Ray, Arindam Saha, Nikhil R. Jana, Rupa Sarkar, Fluorescent Carbon Nanoparticles: Synthesis, Characterization, and Bioimaging Application// *J. Phys. Chem. C*, **2009**, 113 (43), pp. 18546–18551.
- [3] T. Ikuno, S. Takahashi, K. Kamada, S. Ohkura, S. Honda, M. Katayama, T. Hirao, K. Oura, Influence of the plasma condition on the morphology of vertically aligned carbon nanotube films grown by RF plasma chemical vapor deposition// *Surface Review and Letters*, **2003**. Vol. 10, No. 4. P.611-615.
- [4] T.Kato, R. Hatakeyama, Formation of Freestanding Single-Walled Carbon Nanotubes by Plasma-Enhanced CVD// *Chem. Vap. Deposition*. **2006**, 12, P. 345–352.
- [5] Ning G.Q., Wang H., Zhang X.X., Xu C.G., Chen G.J., Gao J.N., Synthesis and methane storage of binder-free porous graphene monoliths// *PARTICULOLOGY*. **2013**. Vol. 11 №4. P.415-420.
- [6] Shibuta Y., Arifin R., Shimamura K., Oguri T., Shimojo F., Yamaguchi S., Low reactivity of methane on copper surface during graphene synthesis via CVD process: Ab initio molecular dynamics simulation // *CHEMICAL PHYSICS LETTERS*. **2014**. Vol. 610. P.33-38.
- [7] S.Y. Kim, S. K. Shin, H. Kim, Y.-H. Jung, H. Kang, W. S. Choi, G. B. Kweon, Synthesis of Carbon Nanowalls by Microwave PECVD for Battery Electrode // *TRANSACTIONS ON ELECTRICAL AND ELECTRONIC MATERIALS*. **2015**. Vol. 16, No. 4, pp. 198-200
- [8] S. Kurita, A. Yoshimura, H. Kawamoto, T. Uchida, K. Kojima, M. Tachibana, P. Molina-Morales, H. Nakai, Raman spectra of carbon nanowalls grown by plasma-enhanced chemical vapor deposition// *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*. **2005**. 97, 104320.
- [9] Kroto, H. W.; Heath, J. R.; O'Brien, S. C.; Curl, R. F.; Smalley, R. E., C-60 - Buckminsterfullerene. *Nature* **1985**, 318, (6042), 162-163.
- [10] R. Khaydarov R. Khaydarov Email author O. Gapurova, Application of Carbon Nanoparticles for Water Treatment// *Water Treatment Technologies for the Removal of High-Toxicity Pollutants*. **2009**. pp. 253-258.
- [11] Simpson A., Pandey R.R., Chusuei C.C., Ghosh K., Patel R., Wanekaya A.K., Fabrication characterization and potential applications of carbon nanoparticles in the detection of heavy metal ions in aqueous media// *CARBON*. **2018**. V.127. P.122-130.
- [12] <http://carboninspired.com/blog/?p=561&lang=en>
- [13] Lu Yю, Wei J.Y., Yao D.S., Pan Z.M., Yao Y., Application of carbon nanoparticles in laparoscopic sentinel lymph node detection in patients with early-stage cervical cancer// *PLOS ONE*. **2017**. V.12, No 9 – e0183834.
- [14] Raki, L.; Beaudoin, J.J.; Alizadeh, R.; Makar, J.M.; Sato, T. Cement and concrete nanoscience and nanotechnology// *Materials*. **2010**. Vol. 3. P. 918-942.
- [15] Cwirzen A.; Habermehl-Cwirzen K.; Penttala V., Surface decoration of carbon nanotubes and mechanical properties of cement/carbon nanotube composites// *Adv. Cem. Res.* **2008**. Vol. 20. P. 65-73.
- [16] Coccinia T., Rodab E., Sarigiannisc D.A., Mustarellid P., Quartaroned E., Profumoe A., Manzoa L. Effects of water-soluble functionalized multi-walled carbon nanotubes examined by different cytotoxicity methods in human as-trocyte D384 and lung A549 cells// *Toxicology*. **2010**. Vol.269. P. 258-269
- [17] Dumortier H., Lacotte S., Pastorin G., Marega R., Wu W., Bonifazi D., Briand J.P., Prato M., Muller S., Bianco A. Functionalized carbon nanotubes are non-cytotoxic and pre-serve the functionality of primary immune cells// *NanoLett.* **2006**. № 6. P. 1522-1528.
- [18] Frackowiak E., Béguin F., Electrochemical Storage of Energy in Carbon Nanotubes and Nanostructured Carbons// *Carbon*. **2002**. Vol.40.P.1775-1787.
- [19] Frackowiak E, Jurewicz K, Delpoux S, Béguin F. Nanotubular materials for supercapacitors// *J. Power Sourc.* **2001**. Vol.97– P.822–825.
- [20] Elias D.C., Nair R.R., Mohiuddin T.M.G., Morozov S.V., Blake P., Halsall M.P. et al. *Science* 323 610 2009.
- [21] Seah T.H., Poh H.L., Chua C.K., Sofer Z., Pumera M., Towards Graphene Applications in Security: The Electrochemical Detection of Trinitrotoluene in Seawater on Hydrogenated Graphene// *Electroanalysis*. **2014**. Vol. 26, №1. P. 62-68
- [22] Gharekhanlou B., Tousaki S.B., Khorasani S: Bipolar transistor based on graphane. *Phys. Conf. Ser* 2010, 248:012061.
- [23] Savchenko A: Transforming graphene. *Sci* 2009, 323:589.
- [24] Y.H. Wu, P.W. Qiao, T.C. Chong, Z.X. Shen. *Adv. Mater.* 14 (**2002**) 64.
- [25] S. Kurita, A. Yoshimura, H. Kawamoto, T. Uchida, K. Kojima, M. Tachibana, P. Molina-Morales, H. Nakai. *J. App. Phys.* 97 (2005) 104320.
- [26] V.A. Krivchenko et al, *Sci. Rep.* 3 (**2013**) 3328.
- [27] S.Y. Kim et al. *J. Trans. Electrical and electronic materials* 16 (**2015**) 198-200.
- [28] S. Hassan, M. Suzuki, Sh. Mori and A. Abd El-Moneim, *RSC Adv.* 4 (**2014**) 20479.
- [29] H. Matsumura. *Thin Solid Films* 395 (**2001**)1.
- [30] Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Yerlanuly Ye., Synthesis of carbon nanotubes by plasma enhanced chemical vapor deposition method in radio-frequency capacitive discharge // *NAS RK, physico-mathematical series*. **2016**. Vol.310, № 6, P. 10-16
- [31] S. Kurita, A. Yoshimura, H. Kawamoto, T. Uchida, K. Kojima, M. Tachibana, P. Molina-Morales, H. Nakai. *J. App. Phys.* 97 (**2005**) 104320.
- [32] S. Matsumoto, Y. Sato, M. Kamo, N. Setaka. *Jpn. J. Appl. Phys.* 21 (**1982**)183.
- [33] R. Liu, Ya. Chi, L. Fang, Zh. Tang and X. Yi., *J. Nanoscience and Nanotechnology* 14 (**2014**) 1647–1657

Е. Ерланұлы^{1,3}, Д.Ф. Батрышев^{1,3}, Т.С. Рамазанов², М.Т. Габдуллин³,
Н.А. Ахметжанов³, Н.Е. Аханова^{3,4}, О.Омиржанов¹

¹Инженерлі бейіндегізертхана, әл-ФарабиатындағыҚазҰУ;

²Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ;

³Ашық түрдегі ұлттық нанотехнологиялық зертхана, әл-Фарабиатындағы ҚазҰУ,
Қазақстан, 050040 Алматы, әл-Фараби, 71;

⁴Қазақстан-Британтехникалық университеті, Қазақстан, 050000 Алматы, Төлеби көш., 59

ПЛАЗМА ПАРАМЕТРЛЕРІНІҢ КӨМІРТЕКТІ НАНОМАТЕРИАЛДАРДЫҢ PECVD ӘДІСІМЕН СИНТЕЗІНЕ ӘСЕРІ

Аннотация: Аталған жұмыс плазма параметрлерінің көміртекті наноматериалдардың PECVD әдісімен синтезіне әсерін эксперименталды зерттеуге арналған. PECVD параметрлеріне, температура, разряд қуаты, газ қысымы, газдардың пайыздық үлесіне байланысты әртүрлі көміртекті наноматериалдар синтезделетіні анықталды. Алынған үлгілер сканерлеуші электрондық микроскоп Quanta 3D (СЭМ, FEI USA), Рамандық спектрометр NThegra Spectra, оптикалық микроскоп Leica сияқты аналитикалық қондырғылар көмегімен зерттелді. Осылайша, оптикалық және электрондық микроскоп, және де комбинациялық жарық шашырау көмегімен құрылымдардың морфологиясы мен сапасы зерттелді: көміртекті нанобөлшектер (КНБ), көміртекті наноталшық (КНТ) пен нанотүтікше (КНТ), көміртекті наноқабырға (КНҚ) және көпқабатты графен парақшалары. ЖЖ разряд қуатын өсірген кезде наноқабырғалардың нанокластерге құрылуы қиындайдытыны анықталды. КНТ синтезі үшін каталитикалық наноқыбықтықшаның қалыңдығын басқару қажет, себебі КНТ құрылымы нашарлап наноталшықтың өсуіне алып келеді. Алынған нәтижелер, PECVD әдісімен әртүрлі көміртекті наноматериалдарды синтездеуде қолданылуы мүмкін.

Түйін сөздер: көміртекті нанобөлшектер, көміртекті наноталшықтар, көміртекті нанотүтікшелер, көміртекті наноқабырғалар, көпқабатты графен, жоғары жиілікті разряд плазмасы.

Сведения об авторах:

Батрышев Д.Ф. - КазНУ им. аль-Фараби, Ст. преподаватель. Аль-Фараби 71а, физ-тех, 123 каб. e-mail batryshev@physics.kz;

Рамазанов Т.С. - КазНУ им. аль-Фараби, Профессор. Аль-Фараби 71а, физ-тех, 332 каб. Телефоны, e-mail ramazan@physics.kz;

Габдуллин М.Т. - КазНУ им. аль-Фараби, Ст. преподаватель. Аль-Фараби 71а, физ-тех, 427 каб. e-mail gabdullin@physics.kz

Ерланұлы Е. - КазНУ им. аль-Фараби, Инженер, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 120 каб. Телефоны: +77073234341 e-mail yerlanuly@physics.kz

Аханова Н.Е. – ННЛОТ, Ученый секретарь, Аль-Фараби 71а, физ-тех, 120 каб. e-mail: nazym@physics.kz

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 117 – 121

UDC 539.172.12

**N. Burtebaev¹, Zh.K. Kerimkulov^{1,3}, D.M. Zazulin^{1,2}, D.K. Alimov¹,
Y.S. Mukhamejanov^{1,2}, A.E. Kurahmedov³, A. Chunkibayeva³, E.N. Edilbayev⁴**¹Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan;²al-Farabi KazNU, Almaty, Kazakhstan;³L.N Gumilev ENU, Astana, Kazakhstan;

A.Yasay IKTU, Turkestan, Kazakhstan

e-mail: diliyo@mail.ru

**EXPERIMENTAL STUDY OF $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ REACTION
AT LOW ENERGIES**

Abstract. Differential process sections of the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ have been measured at the UKP-2-1 accelerator (Almaty, Kazakhstan) at the energy of incident protons from 300 to 1000 keV and $\theta_{\text{lab}} = 50^\circ - 140^\circ$ in increments of about 20° . The total error of the experimental data does not exceed 30%. Integral cross sections of the reaction $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ at $E_{p, \text{lab}} = 300 - 1000$ keV were defined. S-factors for the $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction at $E_{p, \text{lab}} = 300 - 1000$ keV were calculated, which will be useful for reliable normalization of the experimental data obtained by the “Trojan horse” method in earlier works.

Keywords: differential cross sections, integral cross section, astrophysical S-factor.

УДК 539.172.12

**Н. Буртебаев¹, Ж.К. Керимкулов^{1,3}, Д.М. Зазулин^{1,2}, Д.К. Алимов¹,
Е.С. Мухамеджанов^{1,2}, А.Е. Курахмедов³, А. Чункибаева³, Е.Н. Еділбаев⁴**¹Институт ядерной физики, Алматы, Казахстан;²КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;³ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;

МКТУ им. А.Ясауи, Туркестан, Казахстан

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ**

Аннотация. На ускорителе УКП-2-1 (Алматы, Казахстан) измерены дифференциальные сечения процесса $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ в области энергий налетающих протонов от 300 до 1000 кэВ и при $\theta_{\text{лаб.}} = 50^\circ - 140^\circ$ с шагом около 20° . Полная погрешность экспериментальных данных не превышает 30%. Определены интегральные сечения реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ при $E_{p, \text{лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ. Вычислены S - Факторы реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ при $E_{p, \text{лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ, которые будут полезными для надежной нормировки экспериментальных данных полученных методом “Троянского коня” в более ранних работах.

Ключевые слова: дифференциальные сечения, интегральные сечения, астрофизический S-фактор.

Введение. Реакция развала $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ происходящая при низких энергиях в последние годы привлекает большое внимание исследователей во многом благодаря тому, что она играет важную роль в таких областях, как ядерная физика, физика термоядерной плазмы и астрофизика.

Бор в земной коре состоит из двух изотопов ^{11}B (доля около 80%) и ^{10}B (доля около 20%). Оба изотопа являются кандидатами в альтернативное топливо будущих термоядерных реакторов, одним из основных достоинств которого является отсутствие нейтронов в выходных каналах реакций с этими ядрами. С другой стороны продуктом реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ является радиоактивный элемент ^7Be с достаточно большим периодом полураспада 53.2 дня, и это создает определенные проблемы безопасности. Новые прецизионные измерения сечений $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ могут оказать заметное влияние на конструктивные особенности будущих термоядерных установок.

С точки зрения ядерной физики реакция $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ интересна тем, что с ее помощью можно подробно изучить схему уровней ядра ^{11}C .

Экспериментальные результаты для реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ в области низких энергий скудны и противоречивы. Так в работе [1] получены интегральные сечения этой реакции для $E_{p, \text{лаб.}} = 21 - 146$ кэВ, в работе [2] – для $E_{p, \text{лаб.}} = 60 - 180$ кэВ, в [3] - для $E_{p, \text{лаб.}} = 121 - 460$ кэВ, в [4] – для $E_{p, \text{лаб.}} = 531 - 1613$ кэВ, в [5] – для $E_{p, \text{лаб.}} = 330 - 530$ кэВ и в [6] – для $E_{p, \text{лаб.}} = 2790 - 6995$ кэВ. Причем сечения работ [1] и [3] в перекрывающейся области различаются в 1.8 раз [1].

Чтобы разрешить вышеприведенное несоответствие между работами [1] и [3], а также для более надежной нормировки экспериментальных данных полученных методом “Троянского коня” [7] необходимы новые измерения сечений реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ в широких энергетическом и угловом диапазонах

Экспериментальная методика и результаты измерений.

Измерения дифференциальных сечений реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ были проведены на протонном канале ускорителя УСП-2-1 ИЯФ РК. Калибровка энергии пучка протонов осуществлялась с помощью реакций, имеющих узкие, хорошо выделенные, резонансы [8,9]. Для этой цели использовались реакции $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$ при $E_{p, \text{лаб.}} = 632, 773, 992, 1089$ кэВ и $^{19}\text{F}(p,\alpha\gamma)^{16}\text{O}$ при $E_{p, \text{лаб.}} = 340$ кэВ. Точность калибровки при этом составляла ± 1 кэВ. Энергетический разброс пучка протонов не превышал 1.2 кэВ.

Пучок протонов проводился через коллимационную систему (два коллиматора диаметрами по 1.5 мм, расположенными на расстоянии 420 мм друг от друга) и формировался на мишени (расположенной на расстоянии 100 мм от последнего коллиматора) в пятно диаметром 1.5 мм. В целях минимизации количества протонов, рассеянных на торцах коллиматоров толщина их передней стенки в районе отверстий доводилась до 0.1 мм. Альфа-частицы – продукты реакции $^{10}\text{B}(p,\alpha_0)^7\text{Be}$ регистрировались кремниевым детектором фирмы ORTEC (диаметр чувствительной области 8 мм, толщина – 0.2 мм), расположенным на расстоянии 240 мм от области рассеяния и под углами от 50^0 до 140^0 . Второй аналогичный детектор, расположенный под углом 160^0 по отношению к падающему пучку, использовался в качестве монитора. Энергетическое разрешение детекторов около 15 кэВ. Набор спектров осуществлялся с помощью программы MAESTRO 32 фирмы ORTEC. Тщательная юстировка системы коллиматоров, а также подвижного устройства с детектором для измерения угловых распределений, позволила уменьшить погрешность в определении угла до ± 0.20 . Цилиндр Фарадея (трубка диаметром 15 мм и длиной 150 мм), расположенный на расстоянии 120 мм от мишени, был подсоединен к интегратору тока. Детекторы оснащались защитными трубками, которые исключали регистрацию протонов, рассеянных на торце последнего коллиматора и на цилиндре Фарадея во всем диапазоне положений детекторов. Интегратор посылал цифровой импульс на пересчетное устройство, как только собирал порцию заряда (0.1, 1 или 10 нано-кулон). Это позволяло определять накопленный заряд с погрешностью не более чем 1.5% в диапазоне токов от 10 до 50 нА.

В качестве мишеней применялись тонкие пленки ^{10}B (изотопное обогащение около 80%), изготовленные с помощью электронно-лучевого напыления на установке ВУП-2. Во время экспериментов использовалось несколько самоподдерживающихся пленок толщиной около 50 мкг/см². Определение толщин мишеней проводилось с точностью 10% ядерно-физическим методом, разработанным ранее [10]. Пример спектра, полученного при облучении протонами мишени, показан на рисунке 1.

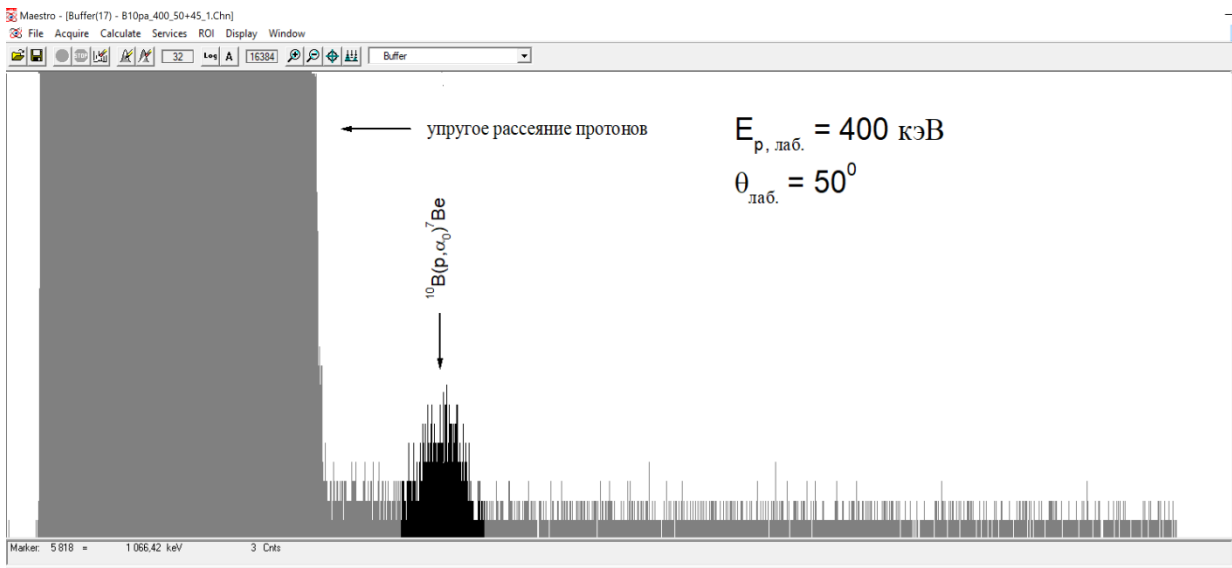


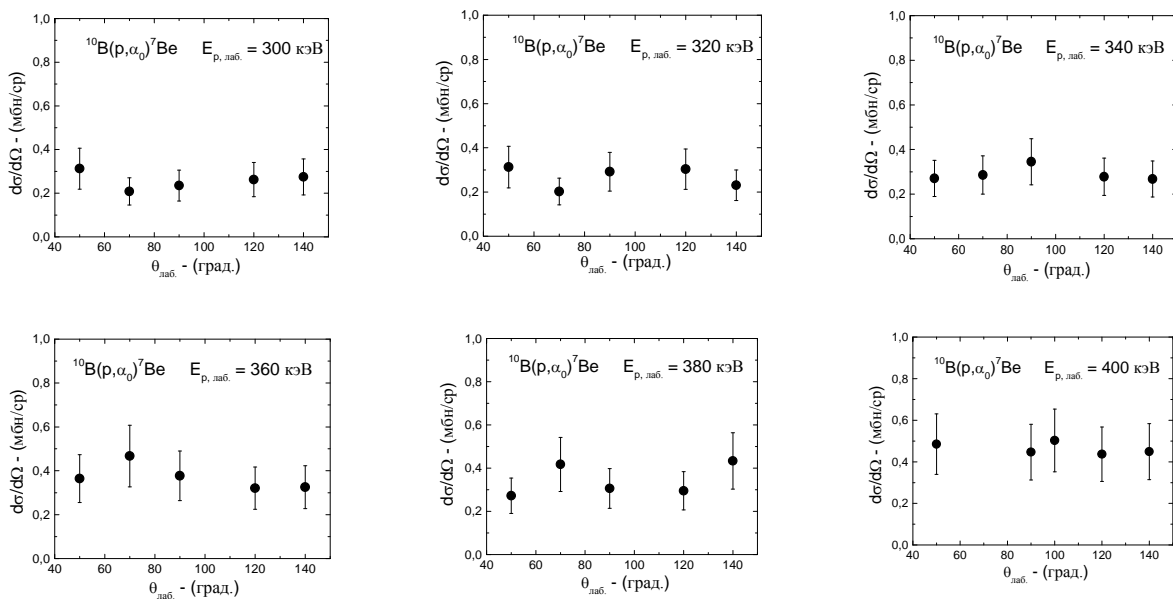
Рисунок 1 – Пример спектра заряженных частиц

В настоящей работе с 30% погрешностью были измерены дифференциальные сечения реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ для $E_{p, \text{лаб.}} = 300, 320, 340, 360, 380, 400, 500, 600, 700, 800, 900$ и 1000 кэВ и при $\theta_{\text{лаб.}} = 50, 70, 90, 120$ и 140 градусов. На рисунке 2 представлены полученные результаты. Из рисунка видно, что угловые распределения реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ в области $E_{p, \text{лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ в пределах погрешности изотропны.

Для получения интегральных сечений для каждой энергии сначала находилось среднее значение дифференциальных сечений, а затем это среднее значение умножалось на 4π . Результат настоящей работы по определению интегральных сечений реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ приведен вместе с литературными данными на рисунке 3. Астрофизические $S - \Phi$ Факторы, показанные на рисунке 4, были вычислены по формуле:

$$S(E) = E \cdot \sigma(E) \cdot \exp(2 \cdot \pi \cdot \eta), \text{ с } 2 \cdot \pi \cdot \eta = 4.73 \cdot E^{-0.5},$$

где E энергия в системе центра масс, выраженная в МэВ. Из рисунков 3 и 4 видно, что в пределах погрешности в перекрывающихся областях наши и литературные данные совпадают.



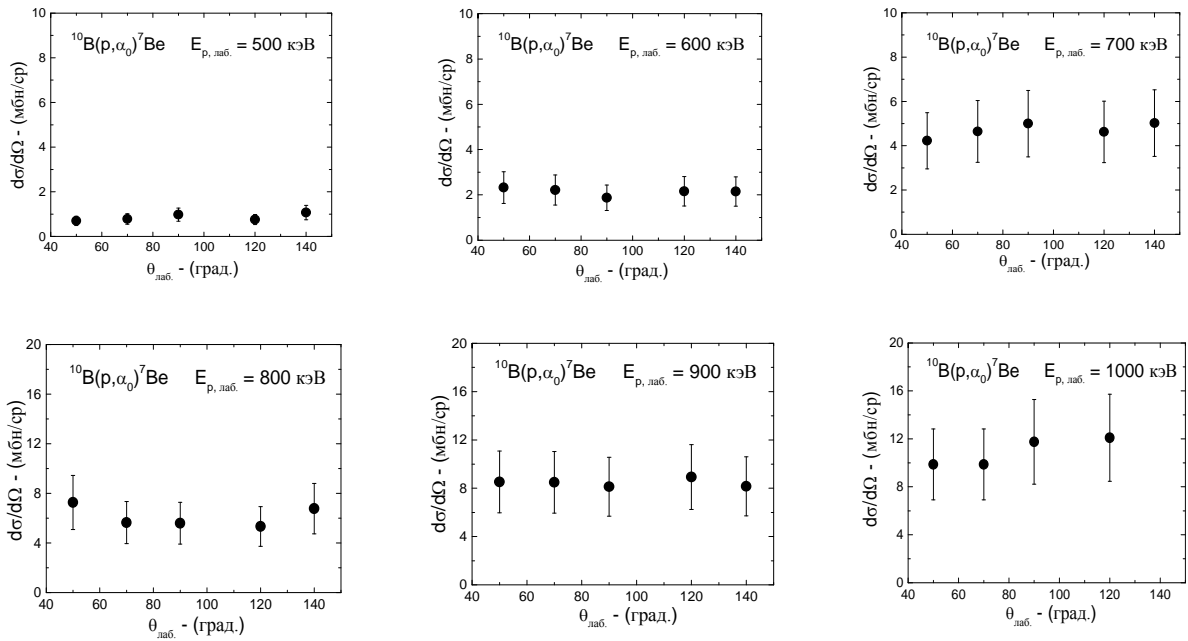


Рисунок 2 – Дифференциальные сечения реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ (в форме угловых распределений)

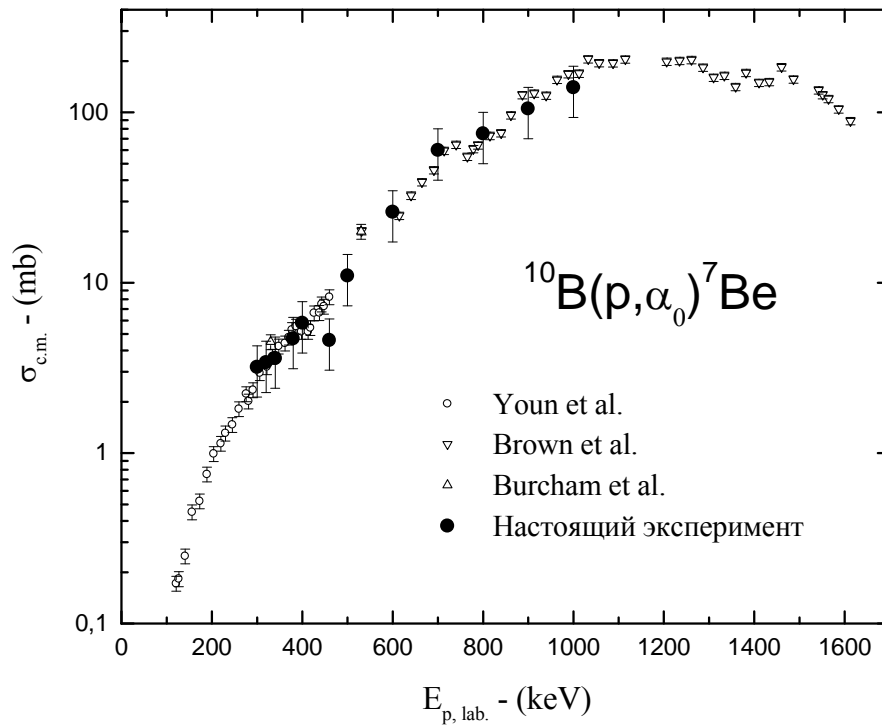
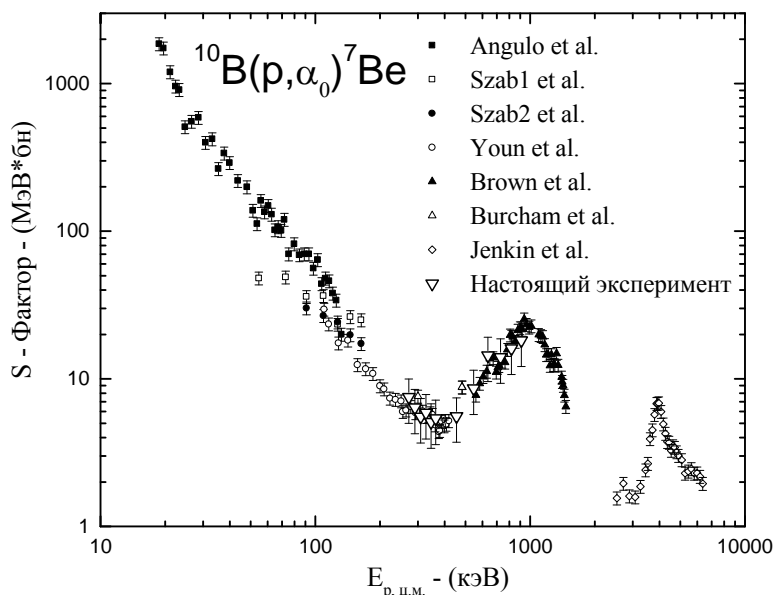


Рисунок 3 – Интегральные сечения реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$. Также представлены результаты предыдущих экспериментальных работ

Рисунок 4 – S-Факторы реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$.

Также представлены результаты предыдущих экспериментальных работ

Заключение. Проведены эксперименты по измерению дифференциальных сечений реакции $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ в диапазоне энергий налетающих протонов от 300 до 1000 кэВ и в области углов $50^\circ - 140^\circ$ с шагом около 20° . Измерения выполнены с погрешностью не более 30%. Новые данные по интегральным сечениям и S - Факторам данной реакции, представленные в настоящей работе, хорошо согласуются с литературными данными в перекрывающихся областях энергий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Angulo C., Engstler S., Raimann G., Rolfs C., Schulte W.H., Somorjai E // Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei. – 1993. – Vol. 345, – P. 333-334.
 [2] Szabo J., Csikal J., M. Varnagy // Nuclear Physics A. – 1972. – Vol. 195, – P 527-533.
 [3] Youn M., Chung H.T., Kim J.C., Bhang H.C. // Nuclear Physics A. – 1991. – Vol. 533, – P. 321-332.
 [4] Brown A.B., Snyder C.W., Fowler W.A., Lauritsen C.C. // Physical Review. – 1951. – Vol. 82, – P. 159-181.
 [5] Burcham W.E., Freeman Joan M. // Philosophical Magazine. – 1950. – Vol. 41, – P. 337-345.
 [6] Jenkin J.G., Earwaker L.G., Titterton E.W. // Nuclear Physics. – 1964. – Vol. 50, – P. 516-529.
 [7] Baur G. // Physics Letters B. – 1986. – Vol. 178, – P. 135-138.
 [8] Butler J.W. // U. S. Naval Research Laboratory. NRL Report. – 1959. – P. 5282.
 [9] Lyons P.B., Toevs J.W., Sargood D.G. // Nuclear Physics A. – 1969. – Vol. 130, – P. 1-24.
 [10] Burtebayev N., Igamov S.B., Peterson R.J., Yarmukhamedov R., Zazulin D.M. // Physical Review C. – 2008. – Vol. 78, – P. 035802.

ӘОК 539.172.12

Н. Буртебаев¹, Ж.К. Керимкулов^{1,3}, Д.М.Зазулин^{1,2}, Д.К. Алимов¹,
 Е.С. Мухамеджанов^{1,2}, А.Е. Курахмедов³, А. Чункибаева³, Е.Н.Еділбаев⁴

¹Ядролық физика институты, Алматы, Қазақстан

²әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан

³Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

⁴А.Ясауи атындағы ХҚТУ, Түркістан, Қазақстан

ТӨМЕНГІ ЭНЕРГИЯЛАРДА $^{10}\text{B}(p, \alpha)^7\text{Be}$ РЕАКЦИЯСЫН ЭКСПЕРИМЕНТТІК ЗЕРТТЕУ

Аннотация. УКП-2-1 үдеткішінде (Алматы, Қазақстан) атқыланатын протондардың 300 -1000 кэВ энергиялар аймағында $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ процесінің дифференциалдық қимасы $\theta_{\text{лаб.}} = 50^\circ - 140^\circ$ бұрыштарда 20° қадаммен өлшенді. Эксперименттік мәліметтердің толық қателігі 30% аспайды. $E_{p, \text{лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ энергияда $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ реакциясының интегралдық қимасы анықталды. $E_{p, \text{лаб.}} = 300 - 1000$ кэВ энергияда $^{10}\text{B}(p, \alpha_0)^7\text{Be}$ реакциясының S – факторы есептелді, бұл алдыңғырақ жұмыстарда «Трояндық конь» әдісімен алынған эксперименттік мәліметтерді сенімді нормалау үшін маңызды болып саналады.

Түйін сөздер: дифференциалдық қима, интегралдық қима, астрофизикалық S-фактор.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 122 – 133

A. Serebryanskiy, S. Serebryakov, A. Ergeshev

Fesenkov Astrophysical Institute, Observatory-23, Almaty, Kazakhstan

E-mail: alex@aphi.kz, serebryakov@aphi.kz, ergeshev@aphi.kz

**METHODOLOGY OF PIPELINE DATA REDUCTION
FOR ASTROMETRY AND PHOTOMETRY
OF A LARGE ARRAY OF CCD OBSERVATIONS**

Abstract. We provide the description of the methodology of preliminary data reduction of the CCD observations and following astrometry and photometry analysis of large number of objects in CCD images during uninterrupted observations, surveys or search campaigns. The result of the method of analysis of a large array of CCD images on the example of the observations of Phaeton asteroid, made on the telescope Zeiss-1000 on the Tien Shan Observatory is presented.

Key words: CCD-observations: data analysis, methods: astrometry, photometry, pipeline for data reduction.

МРНТИ: 41.51.27, 41.51.41

УДК 520.2/.8, 520-16/-17; 520.88

А. Серебрянский, С. Серебряков, А. Ергешев

Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Обсерватория-23, Алматы, Казахстан

**МЕТОДИКА ПОТОКОВОЙ АСТРОМЕТРИИ И ФОТОМЕТРИИ
БОЛЬШОГО МАССИВА ПЗС-НАБЛЮДЕНИЙ**

Аннотация. Дано описание разработанной методики процесса предварительной обработки ПЗС-наблюдений, последующей астрометрии и фотометрии максимального количества объектов на ПЗС изображениях, которые получаются при продолжительных наблюдениях, обзорах неба или поисковых кампаниях. Показан результат работы методики анализа большого массива ПЗС-изображений на примере данных наблюдений астероида Фазтон, выполненных на телескопе Цейсс-1000 (ТШАО).

Ключевые слова: ПЗС-наблюдения: анализ данных, методы: астрометрия, фотометрия, потоковая обработка данных.

Введение

Одной из задач в Астрофизическом институте им. В.Г. Фесенкова (АФИФ) на 2018-2020 гг. является проведение ПЗС-наблюдений с целью поиска и классификации переменных звезд, а также продолжительных наблюдений отдельных объектов для уточнения параметров их переменности блеска. Параллельно идут мониторинговые наблюдения по поиску объектов потенциально опасных для Земли (ОСЗ – объекты, сближающиеся с Землей), малоизученных астероидов и комет, а также определение и уточнение физических характеристик известных ОСЗ. В результате таких наблюдений на обсерваториях Ассы-Тургень (АТО) и Тянь-Шань (ТШАО) получают массивы ПЗС-данных, насчитывающие до нескольких тысяч кадров за одну ночь [1]. Большая часть этих ПЗС-изображений уже сейчас имеет достаточно большое поле (32'×32'). В ближайшем будущем планируется увеличение поля на некоторых инструментах до нескольких

градусов и количество объектов на одном ПЗС-кадре, для которых необходимо получать фотометрическую и астрометрическую информацию может достигать нескольких тысяч, а количество получаемых кадров - нескольких тысяч за ночь наблюдений. Становится понятным, что обычная процедура анализа ПЗС-изображений в «ручном» режиме будет требовать слишком больших затрат времени и приведет к возрастанию вероятности ошибок из-за человеческого фактора. Усложняет задачу и разнообразие режимов наблюдений (см. «Сортировка данных»).

Таким образом, задача разработки методики автоматизированного процесса обработки ПЗС-наблюдений и получение астрометрической и фотометрической информации по каждому объекту на ПЗС-кадре в формате, максимально удобном для проведения дальнейшего анализа становится актуальной в астрономии.

Такие методики, естественно, разрабатывались и раньше, в других группах и обсерваториях. Однако, эффективность каждой конкретной методики напрямую зависит от специфики поставленной задачи на решение которой она направлена, а также особенностей приемной аппаратуры и условий наблюдений.

Выбор методики автоматического анализа данных в нашем случае определяется конкретной целью - поиском переменных звезд по изменению блеска в интервале периодов от нескольких минут до нескольких часов, с использованием ПЗС и EMCCD приемников с полем не меньше $20' \times 20'$, с различными параметрами усиления сигнала и наблюдениями в разных длинах волн (полный список используемых параметров приведен в разделе «Сортировка данных»).

Методы

В качестве основного инструмента поиска и идентификации переменных звезд предполагается применение методов анализа кривых блеска, полученных на основе фотометрии звезд с использованием ПЗС-приемников. Поскольку обзорные (поисковые) наблюдения достаточно рутинные, требуют, как можно более продолжительных наблюдений в каком-то одном режиме работы оборудования, правильным решением будет максимально автоматизировать сам процесс наблюдений. Автоматизация позволяет использовать максимально эффективно все доступное время наблюдений, значительно уменьшить или вовсе исключить ошибки, обусловленные человеческим фактором, более эффективно осваивать бюджетные средства, выделенные на научные исследования.

Автоматизация процесса наблюдений:

Помимо вышеперечисленных фактов необходимость автоматизации процесса наблюдений продиктована и ростом количества инструментов, установленных или планируемых к установке на ТШАО и АТО, а также спецификой выполняемых ими задач, разнообразием требований к приемной аппаратуре при разных типах наблюдений. В частности, среди различных опций лишь для одного инструмента, с определенным навесным оборудованием можно выделить следующие параметры: объект наблюдений, его приоритет, условия видимости, необходимая продолжительность наблюдений, комбинация фильтров, значения экспозиций, необходимость получения калибровочных кадров и кадров стандартных площадок и т.д. Сложность процесса наблюдений возрастает нелинейно при необходимости проводить замену навесного оборудования для наблюдения в течение одной ночи различных программных объектов.

Оптимизация процесса анализа наблюдательного материала не ограничена лишь автоматизацией процесса наблюдений, но включает и такие шаги как менеджмент данных (сортировка и сохранность в базе данных), подготовка к анализу и непосредственно сам анализ с выводом результатов в удобном для пользователей формате. Эти этапы схематически показаны на Рисунке 1.

Задача автоматизации процесса наблюдений успешно решается в АФИФ и детальное описание ее реализации будет представлено в отдельной публикации.



Рисунок 1 - Последовательность основных шагов анализа данных ПЗС-наблюдений

Сортировка данных:

Для эффективного использования полученных данных и удобства их анализа научным сообществом, наблюдения должны быть соответственным образом упорядочены (сортированы) и сохранены в базе данных. Процесс автоматической сортировки данных наблюдений существенно упрощает последующую процедуру их анализа и позволяет значительно минимизировать влияние человеческого фактора при его проведении. Один из возможных алгоритмов сортировки данных ПЗС-наблюдений, базирующийся на анализе информации в заголовке fits-файлов, реализован нами в среде Python и показан на Рисунке 2. В частности, представленная методика автоматически сортирует данные по директориям с определенными датами наблюдений. В каждой такой директории создаются соответствующие поддиректории по имени объекта (например, по международному номеру по каталогу), используемому фильтру и т.д., как показано на Рисунке 2. Такая сортировка не только упрощает последующий анализ данных, но и значительно облегчает сам процесс наблюдений, поскольку наблюдателю нет необходимости отслеживать уникальность присвоенного ID (или имени файла) ПЗС-кадра, а достаточно правильно прописывать план наблюдений на текущий сеанс, а соответствующая информация автоматически вносится через определенные ключи в заголовок fits-файла. Одновременно с сортировкой наблюдательного материала изображения могут проверяться, например, на наличие ошибок гидирования, стабильности температуры, при этом есть возможность автоматически генерировать отчет по статистике наблюдений и необходимый запрос на получение калибровочных изображений, если таковых не обнаружено.

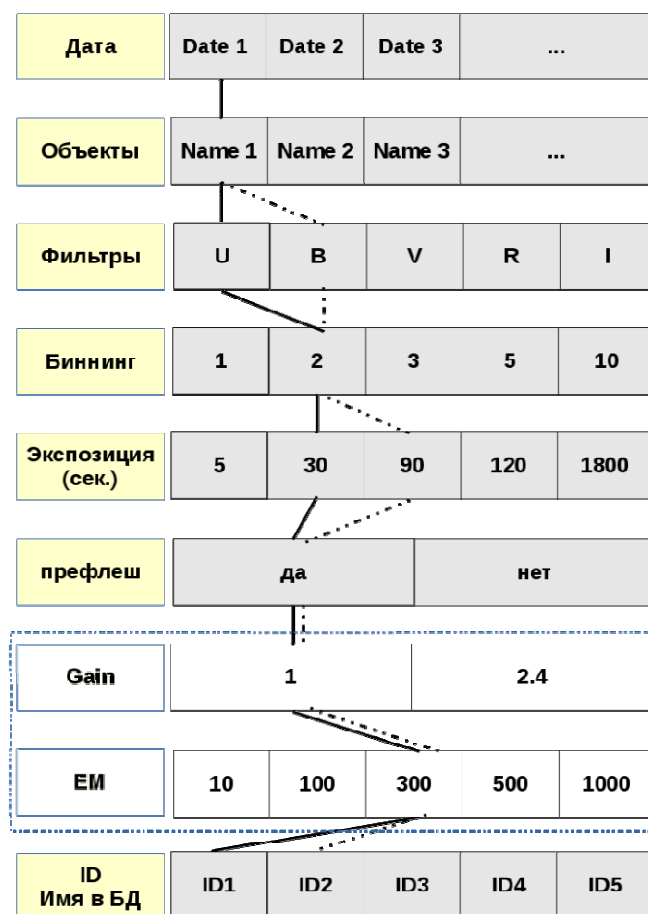


Рисунок 2 - Схема автоматической сортировки данных ПЗС-наблюдений по соответствующим параметрам наблюдений. Сплошной и пунктирной линией показаны примеры комбинаций параметров. Параметры Gain и EM соответствуют наблюдениям, выполняемым с применением EMCCD и для обычных CCD не применяются

Предварительная калибровка данных:

Следующим этапом подготовки данных наблюдений для дальнейшего анализа является учет инструментальных систематических шумов в ПЗС-изображениях. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, интересующиеся могут подробно ознакомиться с ним в работе [2]. К систематическим шумам относятся темновой ток, ток смещения и неравномерность чувствительности по полю ПЗС приемника. Для минимизации случайных ошибок при учете систематических шумов, соответствующие калибровочные кадры необходимо усреднить по достаточному количеству изображений (обычно не меньше 10). В качестве основного инструмента анализа астрономических данных ПЗС-наблюдений используется пакет IRAF (<http://iraf.noao.edu/>). Усредненные ПЗС-кадры тока смещения (MasterBias) могут быть получены процедурой zerocombine (iraf.imred.ccdred), а темнового тока (MasterDark) процедурой darkcombine (iraf.imred.ccdred). MasterDark должен быть получен для каждой из комбинаций изображений объекта исследований, представленных на Рисунке 2 (за исключением выбора фильтров). MasterBias и MasterDark являются аддитивными шумами и должны быть вычтены из ПЗС-изображения объекта (при этом соответственно сначала MasterBias вычитается из MasterDark), а неоднородность чувствительности ПЗС приемника по полю является мультипликативной составляющей, поэтому на нее следует делить ПЗС-изображение объекта. Усредненный ПЗС-кадр плоского поля (MasterFlat) должен быть получен для каждого фильтра, в котором велись наблюдения объекта и правильным образом скорректирован за темновой ток. Для получения MasterFlat используется процедура flatcombine (iraf.imred.ccdred). Учет систематических шумов осуществляется процедурой ccdproc (iraf.imred.ccdred).

Методика автоматической потоковой фотометрии объектов на ПЗС кадрах:

Так как основной задачей является поиск переменных звезд по анализу кривых блеска, то методика должна выполнять следующие шаги: 1) автоматически привязывать сетку экваториальных координат к ПЗС-кадру, 2) обнаруживать все источники на поле ПЗС-кадра, 3) определять среди них звезды различных каталогов, 4) проводить апертурную и PSF-фотометрию и 5) выводить данные в удобном для дальнейшего анализа формате.

Для наглядности и облегчения понимания всего процесса фотометрии на рисунке 3 представлена его блок-схема.

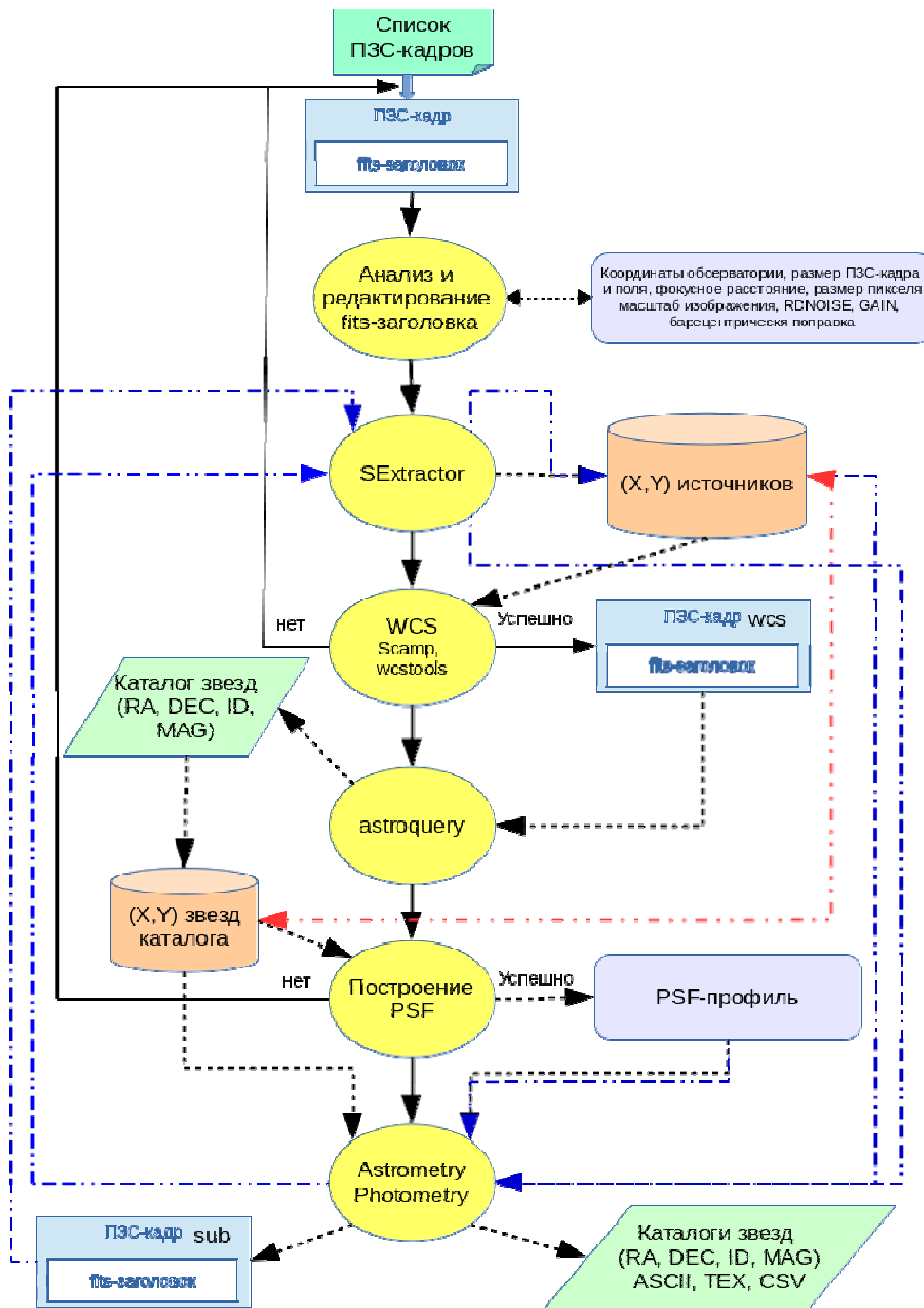


Рисунок 3 - Блок-схема процедуры автоматической апертурной и PSF-фотометрии и астрометрии всех источников, обнаруженных на поле ПЗС-изображения

В качестве среды выбрана комбинация операционной системы Linux с языком высокого уровня python. Такой выбор сделан по нескольким причинам. Во-первых, как Linux, так и python находятся в открытом доступе с открытым кодом (стандартная общественная лицензия, GNU GPL). Во-вторых, python - это один из самых динамично развивающихся языков высокого уровня, он достаточно прост и предоставляет широкие возможности для привлечения к работе большого количества людей, включая студентов и аспирантов. В-третьих, в среду python интегрирован пакет IRAF - pyraf (http://www.stsci.edu/institute/software_hardware/pyraf). Алгоритмы и методы этого пакета многократно протестированы, хорошо документированы и интегрированы во многие современные пакеты анализа данных ПЗС-наблюдений. Все функции и библиотеки iraf доступны и могут быть напрямую импортированы в среду python.

К настоящему моменту python-сообществом разработано большое количество приложений для работы с цифровыми изображениями, анализа астрономических каталогов, представления графической и иной информации непосредственно в формате, пригодном для публикации или использования другими приложениями. Наиболее популярной платформой python для анализа научных данных является Anaconda, развиваемая компанией Continuum Analytics (<https://www.anaconda.com/>). Мы используем эту платформу для установки канала AstroConda со всеми соответствующими пакетами (<http://astroconda.readthedocs.io/en/latest/index.html>). Весь процесс установки и конфигурации достаточно прост.

Рассмотрим теперь подробно каждый из блоков, показанных на Рисунке 3. В начале работы формируется список из ПЗС-кадров, прошедших предварительную обработку. Для этого используются процедуры `getcwd` и `listdir`, импортированные из `iraf.os` в среде python. Далее, для сокращения, будем обозначать \leftarrow процесс импортирования соответствующих пакетов и методов в python. На этом этапе проверяется наличие соответствующих директорий для сохранения результатов работы и соответствующих log-файлов (`path.exists`, `makedirs` \leftarrow `iraf.os`).

Результаты наблюдений сохраняются в формате fits [3], в заголовке которого прописаны все параметры наблюдений. Работа с fits-файлами осуществляется через пакет `astropy.io.fits`. Заголовок fits-файла анализируется с целью определения таких параметров как координаты обсерватории (`coordinates` \leftarrow `astropy` [4]), размера ПЗС-кадра и FOV (Filed Of View - ширина поля ПЗС кадра в угловых минутах дуги), фокусное расстояние f в мм, размер пикселя в мкм, масштаб изображения в угловых секундах на пиксел. Для анализа наблюдений, полученных в разные эпохи, особенно для анализа кривых блеска переменных звезд, желательно использовать барицентрические моменты времени. Для этого рассчитывается барицентрическая поправка (`time` \leftarrow `astropy`).

Следующим этапом является автоматическая привязка к ПЗС-кадру сетки экваториальных координат - wcs (world coordinat system). Эта задача может выполняться двумя методами: с использованием пакетов `wcstools` [5,6,7] или `scamp` [8]. Для этого в fits-заголовке помимо таких параметров как центр изображения, масштаб изображения, прописываются предварительные значения основных параметров wcs, а также определяется геометрия кадра (то есть, необходимость инвертирования и поворота ПЗС-кадра). Необходимой информацией для `wcstools` и `scamp` является также список объектов, а точнее координаты (X, Y) источника на поле ПЗС-кадра. Для обнаружения этих источников используется пакет `SExtractor` [9]. Тип выходного каталога для правильной работы процедуры прописывания сетки координат должен быть FITS_LDAC (Leiden Data Analysis Center). Найденные положения источников, то есть координаты (X, Y) источников, и положение центра кадра во второй системе экваториальных координат на эпоху наблюдений 2000 используются для привязки сетки координат. Точность процедуры привязки координат можно оценить по выходному комбинированному файлу невязок, который автоматически генерируется процедурой `scamp`. Пример карты невязок приведен на Рисунке 4. По осям X и Y отложены, соответственно, разности координат между каталожными значениями и значениями, полученными из измерений, а также показаны соответствующие распределения разностей.

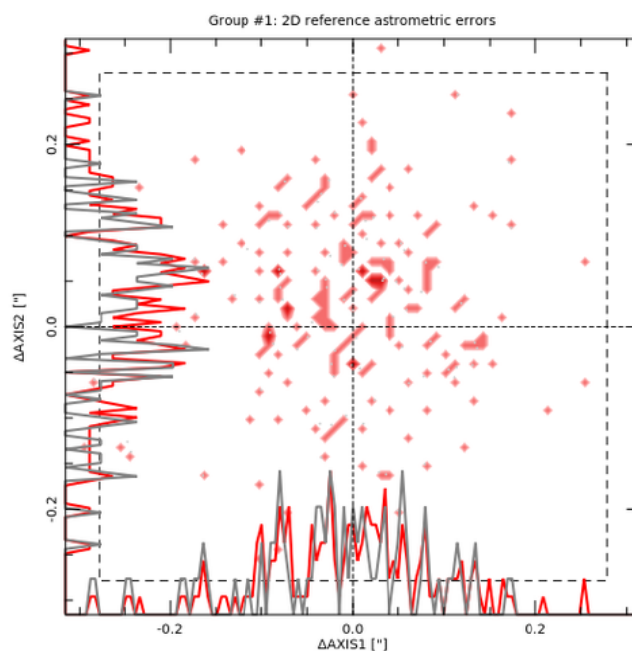


Рисунок 4 - Пример 2D-карты невязок координат по результатам работы процедуры scamp, на примере анализа данных ПЗС-наблюдений с полем $19' \times 19'$, выполненных на Цейсс-1000, обсерватории ТШАО (ноябрь, 2017 г.).

В случае успешного выполнения процедуры wcs-привязки, анализируемый ПЗС-кадр с обновленным fits-заголовком передается далее, для поиска на кадре звезд каталога.

Сканирование каталогов с целью поиска известных объектов:

Следующим этапом методики является идентификация на поле ПЗС-кадра звезд, которые вошли в те или иные каталоги. К примеру, это могут быть каталоги фотометрических стандартов или каталог переменных звезд. В первом случае эти звезды могут быть использованы для пересчета инструментальных звездных величин в стандартную фотометрическую систему, а во втором случае идентифицированные звезды могут быть исключены из дальнейшего анализа, как переменные или заподозренные в переменности. Возможности пакета astroquery [10] (Vizier ← astroquery.vizier) позволяют автоматически идентифицировать звезды для интересующих нас каталогов из базы данных Vizier. В нашей реализации процесса анализа данных используется каталоги URAT1 [11], UCAC4 [12] или 2MASS [13]. Значения звездных величин в системе ugriz (фотометрическая система SDSS) пересчитываются в систему UBVRI, в которой проводятся наблюдения на ТШАО. Для этого используются следующие уравнения пересчета [14]:

$$\begin{aligned}
 B - g &= (0.313 \pm 0.003) \cdot (g - r) + (0.291 \pm 0.002) \\
 V - g &= (-0.565 \pm 0.001) \cdot (g - r) - (0.016 \pm 0.001) \\
 V - I &= (0.675 \pm 0.002) \cdot (g - i) + (0.364 \pm 0.002), \text{ если } g - i \leq 2.1 \\
 V - I &= (1.11 \pm 0.02) \cdot (g - i) - (0.52 \pm 0.05), \text{ если } g - i > 2.1 \\
 R - r &= (-0.153 \pm 0.003) \cdot (r - i) - (0.117 \pm 0.003) \\
 R - I &= (0.93 \pm 0.005) \cdot (r - i) + (0.259 \pm 0.002)
 \end{aligned}$$

Экваториальные координаты обнаруженных звезд каталога пересчитываются в координаты (X, Y) положения на ПЗС-кадре с использованием библиотеки astLib (astWCS ← astLib), положения звезд проверяются на близость к границе поля ПЗС-кадра и отсеиваются, если они расположены слишком близко к краю изображения (обычно меньше ширины профиля звезды). Результирующий каталог звезд формируется в удобные таблицы с использованием возможности astropy.table (Table, Column ← astropy.table) и передается далее для построения PSF-профиля, используемого для PSF-фотометрии всех обнаруженных на кадре источников.

Есть несколько причин, почему мы выбрали именно такой метод построения PSF-функции. Во-первых, мы используем звезды каталога, а не просто обнаруженные источники на поле ПЗС-кадра, среди которых могли бы оказаться и случайные источники. Во-вторых, мы, одновременно с построением PSF-профиля, проводим фотометрию звезд каталогов, что позволяет нам, в будущем, проводить пересчет в стандартную фотометрическую систему, если не было проведено наблюдений стандартных площадок. Это особенно полезно, если наблюдения должны проводиться непрерывно. В-третьих, последующее вычитание звезд, вошедших в каталог, позволяет обнаружить и провести фотометрию звезд, не вошедших в каталоги. Именно такие звезды являются основной целью поисковых наблюдений.

Для построения правильного PSF-профиля в автоматическом режиме необходимо убедиться, что профили выбранных звезд достаточно далеки от края изображения и при этом не перекрываются между собой. Мы используем следующие критерии выбора PSF-звезд:

$$3 \cdot R_{PSF} < X < N_{pix} - 3 \cdot R_{PSF} \quad \text{и} \quad 3 \cdot R_{PSF} < Y < N_{pix} - 3 \cdot R_{PSF},$$

$$FWHM_{PSF} \cdot scale / 2 < r_{ij} < R_{PSF} \cdot 2 \cdot scale,$$

где $r_{ij} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\Delta x, \Delta y$ - взаимные расстояния между центрами профилей звезд. Здесь $N_{pix} = N_{AXIS1}$ - размер ПЗС-изображения в пикселах, $R_{PSF} = 4 \cdot FWHM_{PSF} - 1$ - радиус PSF-профиля, $FWHM_{PSF} = \frac{seeing}{scale} + 0.1$ - предварительная оценка полной ширины на половине максимума PSF-профиля, при $seeing = 2''.5$ (определяется качеством астроклимата обсерватории). Значение $scale = \frac{\mu m}{f} \cdot 206.265$ - масштаб изображения в угловых секундах на пиксел, где $\mu m = XPIXSZ$ - физический размер пикселя в мкм, $f = FOCALLEN$ - эквивалентное фокусное расстояние инструмента в мм. После селекции звезд по предварительным критериям, значения $FWHM_{PSF}$ уточняются автоматической аппроксимацией профилей отобранных звезд процедурой `radprof` пакета IRAF. Общее количество PSF-звезд, выбранных по таким критериям, обычно не превышает 25. Полученные уточненные параметры профилей используются для спецификации параметров фотометрии. Апертура фотометрии $A_p = 5 \cdot \sigma$ где σ для гауссовского профиля связана с $FWHM_{PSF}$ выражением $\sigma = \frac{FWHM_{PSF}}{2\sqrt{2 \ln(2)}}$, внутренний радиус кольца, в котором

определяется фон неба $R_{inner}^{sky} = 6 \cdot \sigma$, внешний радиус этого кольца $R_{outer}^{sky} = R_{inner}^{sky} + 5.0$.

Радиус PSF-профиля, используемого для аппроксимации $R_{fit} = FWHM_{PSF} + 0.75$. Выбор вида функции PSF-профиля может быть автоматическим или задан пользователем. В нашей реализации используется профиль `moffat` с $\beta=2.5$ [15] и в случае, если построение неудачно, используется профиль «`reppu2`» (сложный профиль у которого центральная часть описывается функцией Гаусса, а крылья распределения описываются функцией Лоренца с параметром $\beta=1$, при этом функции Гаусса и Лоренца могут быть вытянуты в различных направлениях), показавшие лучший результат. Для нормировки PSF-профиля сначала процедурой `daophot.phot` оценивается значение потока апертурной фотометрией. Затем процедура `daophot.pstselect` выбирает звезды для построения PSF-профиля и `daophot.psf` строит сам PSF-профиль.

В случае успешного построения профиля, он передается на следующий этап обработки. Если по каким-либо причинам PSF-профиль не удастся построить, то программа переходит к следующему ПЗС-кадру.

Вычитание звезд каталога из ПЗС-кадра и поиск новых объектов:

Следующим этапом является фотометрия звезд каталогов и последующее их вычитание с поля ПЗС-кадра. Для этого повторно проводится апертурная фотометрия уже всех звезд каталога

процедурой `phot.daophot`. Полученные значения апертурной фотометрии, PSF-профиль и соответствующие координаты источников используются для процедуры PSF-фотометрии с использованием `allstar.daophot`. В результате на выходе помимо результатов фотометрии мы получаем изображения с вычтенными звездами каталога, для которых была успешно выполнена фотометрия. Эти изображения используются для поиска источников (`SExtractor`), не вошедших в каталоги, представляющих для нас наибольший интерес. После этого формируется обобщенный список объектов. На этом этапе можно вновь пересчитать PSF-профиль с проверкой близости профилей звезд. После этого процедурой `allstar.daophot` проводится PSF-фотометрия всех звезд списка одновременно. Этот процесс на Рисунке 3 показан синей пунктирной линией.

Полученный ПЗС-кадр с вычетом всех обнаруженных и успешно прошедших фотометрию звезд, в идеале, должен представлять файл с фоновым шумом. Пример последовательного вычитания обработанных звезд показан на Рисунке 5.

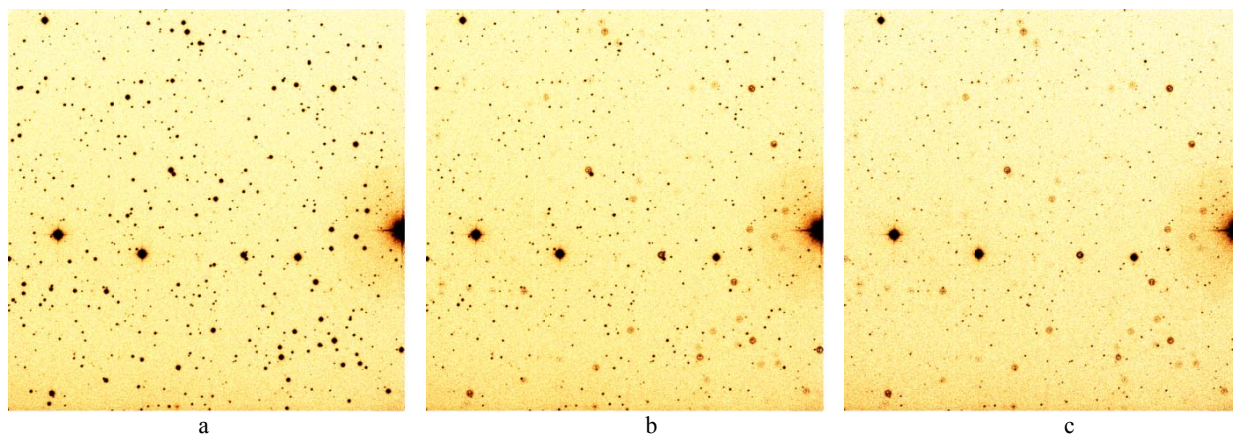


Рисунок 5 - ПЗС-изображения с последовательным вычитанием звезд: а) исходное ПЗС-изображение, б) после фотометрии и вычитания звезд каталога, с) после фотометрии и вычитания источников, не вошедших в каталог. Оставшиеся звезды на поле передержаны и были исключены из процесса анализа

Вывод результатов анализа:

Для удобства дальнейшего анализа, представления результатов непосредственно для публикации или обмена между заинтересованными группами, результаты анализа выдаются в виде табличных значений как в обычном текстовом формате, так и в формате `csv` и `tex`. Такие таблицы автоматически генерируются отдельно для звезд каталога и объектов, не вошедших в каталоги. Для звезд каталогов таблицы содержат следующую информацию: номер по каталогу (`resno`), координаты объекта в каталоге в долях градуса (`RAJ2000`, `DEJ2000`), значения звездных величин по каталогу (`Bmag`, `Vmag`, `Rmag`, `Imag`), координаты объекта по каталогу в формате ч:м:с, гр:м:с (`RA (h:m:s)`, `DEC (d:m:s)`), значения магнитуды в определенном фильтре (`V_Johnson`), ошибку магнитуды (`errV_Johnson`), наблюдаемые значения координат в формате ч:м:с, гр:м:с (`RA_obs`, `DEC_obs`), барицентрическая Юлианская дата (`OBS-TIME`) и воздушная масса на момент наблюдений (`AIRMASS`). Табличные данные для объектов не вошедших в каталоги содержат следующую информацию: номер по внутреннему (локальному) каталогу (`resno`), значения магнитуды в определенном фильтре (`V_Johnson`), ошибку магнитуды (`errV_Johnson`), наблюдаемые значения координат в формате ч:м:с, гр:м:с (`RA_obs`, `DEC_obs`), барицентрическая Юлианская дата (`OBS-TIME`) и воздушная масса на момент наблюдений (`AIRMASS`).

Результаты

Описанная методика опробована на наблюдениях астероида Фаэтон, выполненных на Цейс-1000 обсерватории ТШАО в период с 16.11.2017 г. по 22.11.2017 г. включительно. Всего было получено более 280 ПЗС изображений в каждом из трех фильтров BVR. То есть общее количество изображений более 800. На поле каждого ПЗС-изображения идентифицируется несколько десятков звезд каталогов и, следовательно, количество фотометрических оценок и астрометрических

измерений может достигать несколько десятков тысяч. Если учитывать регистрируемые источники, не вошедшие в каталоги (представляющие наибольший для нас интерес), то количество фотометрических измерений для данного конкретного примера составляет несколько сотен тысяч! Тем не менее, весь процесс фотометрии всего этого массива наблюдений в автоматическом режиме занимает лишь несколько часов.

Разработанная методика автоматизированного процесса фотометрии всех источников на поле ПЗС-кадра может быть использована и для поиска объектов с большим собственным движением (например, астероидов и других малых тел солнечной системы).

Результат такого анализа, на примере наблюдения поля астероида Фазтон (3200) показан на Рисунке 6. На данном рисунке показан участок $10' \times 10'$ с результатом автоматической астрометрии и фотометрии всех объектов наблюдений 19.11.2017г. на телескопе Цейсс-1000 (ТШАО). Размер кружков соответствует инструментальной звездной величине. Помимо основного объекта исследований (Фазтон), заметны еще два известных астероида, попавших в наблюдаемое поле (230273, 45156). При построении такой карты звезды каталогов, идентифицируемые по уникальному номеру, отображаются цветными символами в зависимости от звездной величины в трех фильтрах. Сами значения звездных величин и положений этих звезд автоматически выводятся в виде табличных значений во всех трех форматах (текстовый, csv, tex) для каждой из звезд каталога в отдельности и для каждого из фильтров, в которых велись наблюдения. Информация по другим, интересующим пользователя объектам, может быть получена, например, выделением соответствующей области на карте, показанной на Рисунке 6. Полученные табличные значения используются для построения и анализа кривых блеска. Результаты этого анализа будут представлены нами в отдельной публикации.

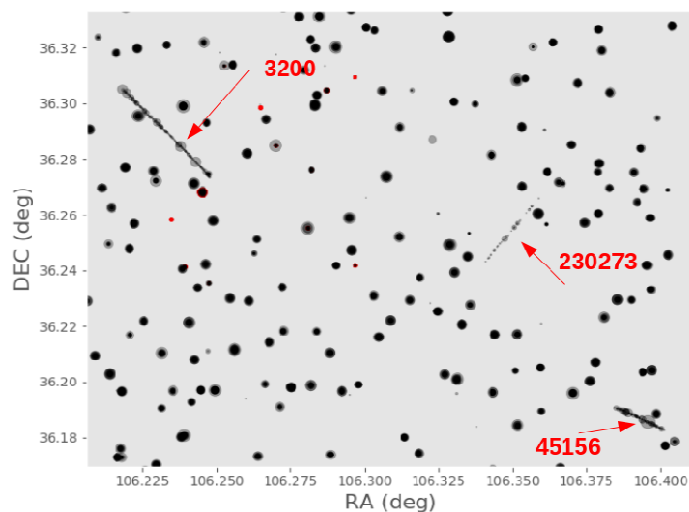


Рисунок 6 - Результаты автоматической фотометрии и астрометрии данных ПЗС-наблюдений, полученных на Цейсс-1000 (ТШАО). Показано поле размером $\sim 10' \times 10'$, на котором можно заметить треки трех астероидов

Обсуждение

Проведение обзорных и поисковых наблюдений с целью обнаружения транзиентов, быстро текущих процессов, поиска переменных звезд и т.д. на инструментах средней и малой апертуры (от 50 см до 1 метра) с достаточно большим полем подразумевает получение большого массива данных наблюдений. Особенно, если используется EMCCD для задач time-domain astrophysics. Это, в свою очередь, делает задачу быстрой, высокоточной обработки и анализа наблюдательного материала особенно актуальной.

Кроме того, наличие результатов различных обзоров неба в виде баз данных позволяет значительно повысить эффективность поиска новых объектов, информация о которых отсутствует в каталогах или быстро реагировать на необходимость проведения алертных и follow-up наблюдений особенно интересных объектов.

Описанная в этой статье методика была реализована в операционной системе Linux на базе языка высокого уровня python и использует общепризнанные и проверенные алгоритмы (реализации которых находятся в свободном доступе) анализа.

Продолжается работа по усовершенствованию методики. В частности, необходимо выработать критерии обновления параметров процедур обнаружения слабых объектов, рассмотреть возможность построения PSF профиля для данного инструмента, что не только должно повысить качество результатов PSF-фотометрии, но и сократить время анализа. Актуальной остается реализация задачи адаптации методик фотометрии треков объектов при различных режимах ведения телескопа, а также (в перспективе) фотометрии протяженных объектов (галактик, туманностей).

В заключении нужно отметить возможные источники ошибок фотометрии и астрометрии с использованием разработанной методики. Во-первых, предполагается, что функция PSF-профиля остается постоянной на протяжении всего сеанса наблюдений, что может не соблюдаться при сильно меняющихся погодных условиях наблюдений, неточности ведения телескопа (ветер, сбой автогидирования и пр.). В результате некорректного описания истинного профиля на изображениях после вычитания звезд остаются остатки, которые неверно могут быть интерпретированы как дополнительные источники, что в конечном счете приводит к ошибкам фотометрии. Во-вторых, предполагается, что зависимость формы PSF-профиля по полю ПЗС-кадра также является постоянной или меняется линейно. В случае, если это требование не соблюдается, то это также может привести к ошибкам фотометрии звезд и детектированию ложных источников. Для определения допустимых режимов адекватной работы и оценки области применения методики необходимо ее тестирование на искусственных данных сгенерированных с различным уровнем шумов и разной сложностью поля (плотность источников, непостоянство PSF-профиля звезд по полю ПЗС кадра и др.).

Благодарности

Работа выполнена в рамках Проекта № BR05236322 "Исследования физических процессов во внегалактических и галактических объектах и их подсистемах", финансируемого МОН РК. Авторы выражают благодарность Аймановой Г. К. за конструктивные замечания, предложения и редактирование статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Серебрянский А.В., Кругов М. А., Комаров А. А., Усольцева Л. А., Акниязов Ч. Б. Первые результаты наблюдений на новом оптическом комплексе на базе телескопа RC500 и EMCCD (Electron Multiplying Charge-Coupled Device) обсерватории Ассы-Тургень в Казахстане // *Астрономический вестник*. – 2018. - (в печати)
- [2] Howell S. B. *Handbook of CCD astronomy* // Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge cb2 2ru, UK Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. - 2006
- [3] Wells, D. C.; Greisen, E. W.; Harten, R. H. (1981) FITS - a Flexible Image Transport System // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. – 1981. - v. 44. - P. 363
- [4] Astropy collaboration Astropy: A community Python package for astronomy // *Astronomy & Astrophysics*. – 2013. – V.558, id.A33. - P.9. - DOI: 10.1051/0004-6361/201322068
- [5] Mink, D. // *ASP Conf. Ser.* – 1997. - V.125. - ADASS VI, ed. G. Hunt & H. E. Payne (San Francisco: ASP). – P.249
- [6] Mink, D. // *ASP Conf. Ser.* – 1999. - V.172. - ADASS VIII, ed. D. M. Mehringer, R. L. Plante, & D. A. Roberts (San Francisco: ASP). – P.498
- [7] Mink, D. // *ASP Conf. Ser.* – 2002. - V.281. - ADASS XI, ed. D. A. Bohlender, D. Durand, & T. H. Handley (San Francisco: ASP). – P.169
- [8] Bertin, E. Automatic Astrometric and Photometric Calibration with SCAMP, Software for Calibrating AstroMetry and Photometry // *Astronomical Data Analysis Software and Systems XV ASP Conference Series*. – 2006. - V.351, Proceedings of the Conference Held 2-5 October 2005 in San Lorenzo de El Escorial, Spain. Edited by Carlos Gabriel, Christophe Arviset, Daniel Ponz, and Enrique Solano. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. - P.112
- [9] Bertin, E. SExtractor: Software for source extraction // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. – 1996. - V.117. - P.393-404
- [10] Jenness, T., Robitaille, Th., Tollerud, E., Mumford, S., Cruz, K. Python in Astronomy // *Proceedings of the conference held 21-25 March, 2016 at the University of Washington eScience Institute in Seattle, WA, USA*. – 2016. - id.34
- [11] Zacharias, N., Finch, C., Subasavage, J., Bredthauer, G., Crockett, C., Divittorio, M., Ferguson, E., Harris, F., Harris, H., Henden, A., Kilian, C., Munn, J., Rafferty, T., Rhodes, A., Schultheiss, M., Tilleman, T., Wiedner, G. The First U.S. Naval Observatory Robotic Astrometric Telescope Catalog // *The Astronomical Journal*. – 2015. – V.150, Issue 4, article id. 101

[12] Zacharias, N., Finch, C. T., Girard, T. M., Henden, A., Bartlett, J. L., Monet, D. G., Zacharias, M. I. The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4) // The Astronomical Journal. – 2013. – V.145, Issue 2, article id. 44

[13] Cutri, R.M., Skrutskie, M.F., van Dyk, S., Beichman, C.A., Carpenter, J.M., Chester, T., Cambresy, L., Evans, T., Fowler, J., Gizis, J., Howard, E., Huchra, J., Jarrett, T., Kopan, E.L., Kirkpatrick, J.D., Light, R.M., Marsh, K.A., McCallon, H., Schneider, S., Stiening, R., Sykes, M., Weinberg, M., Wheaton, W.A., Wheelock, S., Zacarias, N. VizieR Online Data Catalog: 2MASS All-Sky Catalog of Point Sources (Cutri+ 2003) // VizieR Online Data Catalog. – 2003. - 2246

[14] Jordi, K., Grebel, E. K., Ammon, K. Empirical color transformations between SDSS photometry and other photometric systems // Astronomy and Astrophysics. – 2006. – V.460, Issue 1. - P.339-347, DOI: 10.1051/0004-6361:20066082

[15] Trujillo, I., Aguerrri, J. A. L., Cepa, J., Gutie' rrez, C. M. The effects of seeing on Se' rsic profiles – II. The Moffat PSF // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2001. – V.328, Issue 3. - P.977-985, DOI: 10.1046/j.1365-8711.2001.04937.x

А. Серебрянский, С. Серебряков, А. Ергешев

«В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Обсерватория, 23, Алматы, Қазақстан

ҮЛКЕН АУҚЫМДАҒЫ ЗБА-БАҚЫЛАУ МӘЛІМЕТТЕРІН ФОТОМЕТРЛЕУ ЖӘНЕ АҒЫМДЫҚ АСТРОМЕТРИЯНЫҢ ӘДІСНАМАСЫ

Аннотация. Іздеу кампаниялары немесе аспанды шолуда ұзақ уақыт бақылау жүргізгенде, ЗБА-суреттердегі объектілер саны максималды болғанда және оның астрометриялық және фотометрлік зерттеулерін жүргізудің ЗБА-бақылауларының алдын-ала өңдеу процесінің өңделген әдіснамасы берілген. Цейс-1000(ТШАО) телескобында астероид Фазтонның үлен ауқымды бақылау мәліметтерінің талдау әдіснамасының нәтижелері көрсетілген.

Тірек сөздер: ЗБА-бақылаулары: мәліметтердің талдаулары, әдіснама: астрометрия, фотометрия, ағымдық мәліметтерді өңдеу.

Сведения об авторах:

Серебрянский Александр Владимирович - ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», зав.отделом «Наблюдательная астрофизика», alex@aphi.kz;

Серебряков Степан Сергеевич - ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», инженер, serebryakov@aphi.kz;

Ергешев Абдулазим Русланович - ДТОО «Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова», инженер, ergeshev@aphi.kz

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 134 – 143

UDC 521.1

M. Zh. Minglibayev^{1,2}, S.A. Shomshekova^{1,2}

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

²Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan

minglibayev@gmail.com, shomshekova.saule@gmail.com

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF THE PERTURBING FUNCTIONS IN TWO PLANETARY THREE- BODY PROBLEM WITH MASSES VARYING NON-ISOTROPICALLY WHEN AVAILABLE FOR REACTIVE FORCES

Abstract. The paper considers a two-planetary exoplanetary system with variable masses in the absolute coordinate system. The equations of motion are described with the Meshchersky equations. The masses of the parent star and the planets are considered variable, varying at different rates. The general case is investigated when the masses of bodies change with time anisotropically, at different rates. As a consequence of an anisotropic change in mass, reactive forces appear that significantly affect the dynamics of the exoplanetary system at the non-stationary stage of its evolution. The equations of motion have no integral, so the problem is investigated by perturbation theory methods developed for such nonstationary systems. The initial equations for the use of perturbation theory are the equations of motion in a relative coordinate system with the origin at the center of the parent star with mass. The methods of perturbation theory are used based on aperiodic motion along a quasiconic section. The motion of two planets, within the framework of the problem of three point bodies with variable masses varying anisotropically in the presence of reactive forces, are described by the equations of perturbed motion in the form of the Lagrange equation. Perturbing functions are expressed through the osculating elements of two planets. Analytical expressions for the expansion of perturbing functions into a series are obtained. The work highlights the main and indirect part of the perturbing functions is singled out. Exactly to the square of the eccentricities of the planets, actual decompositions are performed. The derived formulas allow us to study the evolution of orbital elements due to the variability of the masses of the parent star and planets. They allow us to describe dynamic effects in the two-planetary three-body problem with variable masses as a single planetary system at the non-stationary stage of its evolution. To perform complex analytical calculations, the Mathematica software package was used.

Key words: three-body problem with variable masses, non-stationary exoplanet systems, stars with variable masses, aperiodic motion, protoplanetary disk.

М.Дж. Минглибаев^{1,2}, С.А. Шомшекова^{1,2}

¹КазНУ им. аль-Фараби., Алматы, Казахстан;

²ДТОО «Астрофизический Институт им. Фесенкова», Алматы, Казахстан

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФУНКЦИИ В ДВУХПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С АНИЗОТРОПНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МАССАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕАКТИВНЫХ СИЛ

Аннотация. В работе рассматривается двухпланетная экзопланетная система с переменными массами в абсолютной системе координат. Уравнения движения описываются с уравнениями Мещерского. Массы родительской звезды и планет считается переменными, изменяющимися в различных темпах. Исследуется общий случай, когда массы тел меняются со временем анизотропно, в различных темпах. Как следствия

анизотропного изменения масс появляются реактивные силы, которые существенно влияют на динамику экзопланетной системы на нестационарном этапе ее эволюции. Уравнения движения не имеют ни одного интеграла, поэтому проблема исследуется методами теории возмущений разработанных для таких нестационарных систем. Исходными для использования теории возмущений являются уравнения движения в относительной системе координат с началом в центре родительской звезды. Используются методы теории возмущений на базе аperiодического движения по квазиконическому сечению. Движение двух планет, в рамках задачи трех точечных тел с переменными массами изменяющимися анизотропно при наличии реактивных сил, описываются уравнениями возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа. Возмущающие функции выражаются через оскулирующие элементы двух планет. Получены аналитические выражения разложения в ряд возмущающих функции. В работе выделены главная и косвенная часть возмущающих функций. С точностью до квадрата эксцентриситетов планет выполнены фактические разложения. Найденные формулы позволяют исследовать эволюции орбитальных элементов из за переменности масс родительской звезды и планет. Они позволяют описывать динамических эффектов в рассматриваемой двухпланетной задаче трех тел с переменными массами как единая планетная система на нестационарном этапе ее эволюции. Для выполнения сложных аналитических вычислений использовали пакет программу Mathematica.

Ключевые слова: задача трех тел с переменными массами, нестационарные экзопланетные системы, звезды с переменными массами, аperiодическое движения, протопланетный диск.

1. Введение. Наша Солнечная система считается достаточно проэволюционировавшей системой (4,5 млрд.лет). У всех планет Солнечной системы орбиты близки к круговым $e \approx 0$, кроме орбиты Меркурия. У Меркурия $e = 0.2$, наклонение плоскости орбиты 7 градусов. У больших планет Солнечной системы, что особенно хорошо видно на примере у Сатурна, «вымораживание» орбит уже произошло. У хорошо проэволюционировавших систем произошло так называемое «вымораживание» орбит (устойчивые орбиты концентрируются в одной плоскости вблизи плоскости экватора звезды) [1].

Во многих экзопланетных системах (в настоящее время их больше 4000) мы наблюдаем большие разбросы наклонов плоскостей орбит к экватору звезды, что может свидетельствовать о различных эволюционных треках таких систем. Также известна одна экзопланета, которая движется в противоположную сторону от направлений орбитального движения (ретроградной орбите) — это экзопланета под названием WASP-17b, находящаяся в созвездии Скорпиона [2]. По статистическому анализу известно, что количество планет в конкретных экзопланетных системах варьируются от одного до семи планет. В экзопланетной системе TRAPPIST-1 обнаружено семь планет [3]. Звезды спектрального класса G, куда входит наше Солнца, имеют наибольшее количество экзопланетных систем. Венера – единственная планета, собственное вращение которой не совпадает с направлением вращения других планет Солнечной системы. Это говорит о том, что из-за разнообразия экзопланетных систем вытекает необходимость детальных исследований их динамической эволюции, особенно на этапах их нестационарности.

2. Методика исследования. Рассмотрим экзопланетную систему состоящий из трех взаимогравитирующих сферических небесных тел с переменными массами. Пусть, $m_0 = m_0(t)$ - центральная родительская звезда, $m_1 = m_1(t)$ - внутренняя планета и $m_2 = m_2(t)$ - внешняя планета с переменными массами. Движение двух планет, в рамках задачи трех сферических тел (которые взаимодействуют как материальные точки) с переменными массами изменяющимися анизотропно, при наличии реактивных сил, в абсолютной системе координат, описываются уравнениями Мещерского [4]. Проблему рассмотрим в относительной системе координат с началом в центре, родительской звезды, с массой $m_0 = m_0(t)$. Массы тел меняются в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2} \quad (2.1)$$

анизотропно. Проблема сложная, поэтому задачу будем исследовать методами теории возмущений на базе аperiодического движения по квазиконическому сечению [5]. Целесообразно исходит из уравнении движения в относительной системе координат [4]. Будем использовать уравнения возмущенного движения в форме уравнении Лагранжа. Для написания в явной форме

уравнении возмущенного движения в форме уравнении Лагранжа необходимо выражать через оскулирующие орбитальные элементы возмущающих функции для двух планет.

Уравнения возмущенного движения двух планет в относительной системе координат напишем в виде [4]

$$\ddot{\vec{r}}_1 + f(m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} \vec{r}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} \tilde{W}_1, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2} \vec{r}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} \tilde{W}_2, \quad (2.3)$$

$$\tilde{W}_1 = \tilde{U}_1 + F_1 + P_1, \quad (2.4)$$

$$F_1 = F_{1x}x_1 + F_{1y}y_1 + F_{1z}z_1, \quad P_1 = \frac{\ddot{\gamma}_1}{2\gamma_1} r_1^2, \quad (2.5)$$

$$\mu_2 = fm_2, \quad r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, \quad \gamma_1 = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)} = \gamma_1(t), \quad (2.6)$$

$$\tilde{W}_2 = \tilde{U}_2 + F_2 + P_2, \quad (2.7)$$

$$F_2 = F_{2x}x_2 + F_{2y}y_2 + F_{2z}z_2, \quad P_2 = \frac{\ddot{\gamma}_2}{2\gamma_2} r_2^2, \quad (2.8)$$

$$\mu_1 = fm_1, \quad r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad \gamma_2 = \frac{m_0(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_2(t)} = \gamma_2(t), \quad (2.9)$$

\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 - силовые функции ньютоновского взаимодействия тел, причем будем считать, что $r_1 < r_2$.

Выразим все слагаемые возмущающие функции \tilde{W}_1, \tilde{W}_2 через орбитальные элементы невозмущенного движения. Из них, наиболее сложными является разложение в ряд силовых функции ньютоновских взаимодействия тел. Целесообразно выделить главную и косвенную часть возмущающих функции

$$\tilde{U}_1 = \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2} U_{12l} - \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2} \alpha U_{1\text{косв}}, \quad (2.10)$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2} U_{22l} - \frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2} \frac{1}{\alpha^2} U_{2\text{косв}}, \quad (2.11)$$

$$\alpha = \alpha(t) = \frac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2} < 1, \quad (2.12)$$

$$\tilde{U}_{12l} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{12}} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right), \quad \tilde{U}_{1\text{косв}} = \left(\frac{r_1}{\gamma_1 a_1} \right) \left(\frac{\gamma_2 a_2}{r_2} \right)^2 \cos \psi, \quad (2.13)$$

$$\tilde{U}_{22l} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{21}} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{1}{r_{21}} \right), \quad \tilde{U}_{2\text{косв}} = \left(\frac{r_2}{\gamma_2 a_2} \right) \left(\frac{\gamma_1 a_1}{r_1} \right)^2 \cos \psi. \quad (2.14)$$

Выражения в правых частях этих формул разлагаются в ряд по оскулирующим элементам аperiодического движения по квазиконическому сечению. Разложения возмущающих функции (2.5), (2.8) не представляют особой сложности, так как аналитические выражения координат и квадрата модули радиуса-вектора простые [5]

$$x = \gamma \rho [\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i], \quad (2.15)$$

$$y = \gamma\rho [\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i], \quad (2.16)$$

$$z = \gamma\rho [\sin u \cdot \sin i], \quad (2.17)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 \rho^2. \quad (2.18)$$

Их разложения в ряд известны [5,6]. Также известны разложения величин $(r/\gamma a) = (\rho/a)$, $(\gamma a/r)^2 = (a/\rho)^2$ в косвенной части возмущающей функции (2.13), (2.14).

2.1 Разложения главной части возмущающей функции. Как было отмечено выше, основная трудность заключается в разложении главной части возмущающей функции $\tilde{U}_{1,2l}$, $\tilde{U}_{2,2l}$. Из вектора $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ следует

$$r_{12}^2 = r_2^2 - 2\vec{r}_1\vec{r}_2 + r_1^2 = r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \psi + r_1^2 \quad (2.19)$$

где ψ - угол между двумя радиус-векторами.

Обозначим

$$\Delta^2 = r_{12}^2 = r_{21}^2 = r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \psi + r_1^2 \quad (2.20)$$

$$\Delta_0^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(u_1 - u_2), \quad (2.21)$$

$$\tilde{\Psi} = \cos \psi - \cos(u_1 - u_2), \quad (2.22)$$

где $u_1 = \omega_1 + \theta_1$ и $u_2 = \omega_2 + \theta_2$ - истинные долготы внутренних и внешней планет, соответственно.

Тогда из (2.19) учитывая обозначения (2.20)-(2.22) получим

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + (-2r_1r_2\tilde{\Psi}) = \Delta_0^2 \left[1 - \frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2} \tilde{\Psi} \right]. \quad (2.23)$$

Из равенства (2.23) следует

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2} \tilde{\Psi}}}. \quad (2.24)$$

Используя известную формулу

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots$$

разложим в ряд второй множитель в правой части формулы (2.24). В результате получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + r_1r_2\tilde{\Psi} \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^2 \frac{1}{\Delta_0^5} + \frac{5}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^3 \frac{1}{\Delta_0^7} + \dots \quad (2.25)$$

Обобщая формулу (2.25) можно написать

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + r_1r_2\tilde{\Psi} \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^2 \frac{1}{\Delta_0^5} + \frac{5}{2}(r_1r_2\tilde{\Psi})^3 \frac{1}{\Delta_0^7} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} r_1r_2\tilde{\Psi} \right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}. \quad (2.26)$$

Выразим правую часть формулы (2.26) через орбитальные элементы двух планет. Для этого необходимо выразит величины $\Delta_0^{-(2i+1)}$ и $\tilde{\Psi}$ через орбитальные элементы. Выражения через орбитальные элементы величин $r_1 = \gamma_1\rho_1$, $r_2 = \gamma_2\rho_2$ достаточно простые и известные [8-10]. Сначала получим необходимые формулы для разложения величины $\tilde{\Psi}$, определяемой формулой (2.22).

Для первой слагаемой формулы (2.22) имеем

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} = \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \cdot \frac{z_2}{r_2} = \\ &= \left(\frac{x_1}{\gamma_1 \rho_1} \right) \cdot \left(\frac{x_2}{\gamma_2 \rho_2} \right) + \left(\frac{y_1}{\gamma_1 \rho_1} \right) \cdot \left(\frac{y_2}{\gamma_2 \rho_2} \right) + \left(\frac{z_1}{\gamma_1 \rho_1} \right) \cdot \left(\frac{z_2}{\gamma_2 \rho_2} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Соответственно, из формулы (2.15)-(2.17) следует, что координаты точек могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{\gamma_1 \rho_1} \right) \cdot \left(\frac{x_2}{\gamma_2 \rho_2} \right) &= [\{\cos u_1\} \cos \Omega_1 - \{\sin u_1\} \sin \Omega_1 \cos i_1] \cdot [\{\cos u_2\} \cos \Omega_2 - \{\sin u_2\} \sin \Omega_2 \cos i_2] \\ \left(\frac{y_1}{\gamma_1 \rho_1} \right) \cdot \left(\frac{y_2}{\gamma_2 \rho_2} \right) &= [\{\cos u_1\} \sin \Omega_1 + \{\sin u_1\} \cos \Omega_1 \cos i_1] \cdot [\{\cos u_2\} \sin \Omega_2 + \{\sin u_2\} \cos \Omega_2 \cos i_2] \\ \left(\frac{z_1}{\gamma_1 \rho_1} \right) \cdot \left(\frac{z_2}{\gamma_2 \rho_2} \right) &= [\{\sin u_1\} \sin i_1] \cdot [\{\sin u_2\} \sin i_2] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Формулы (2.27), (2.28) определяют выражение $\cos \psi$ через орбитальные элементы. В формуле (2.22) нужно еще разлагать второе слагаемое в ряд

$$\begin{aligned} \cos(u_1 - u_2) &= \cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 = \\ &= \cos(\omega_1 + \theta_1) \cos(\omega_2 + \theta_2) + \sin(\omega_1 + \theta_1) \sin(\omega_2 + \theta_2) = \\ &= [\cos \omega_1 \{\cos \theta_1\} - \sin \omega_1 \{\sin \theta_1\}] [\cos \omega_2 \{\cos \theta_2\} - \sin \omega_2 \{\sin \theta_2\}] + \\ &+ [\sin \omega_1 \{\cos \theta_1\} + \cos \omega_1 \{\sin \theta_1\}] [\sin \omega_2 \{\cos \theta_2\} + \cos \omega_2 \{\sin \theta_2\}] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Выражение в фигурных скобках разлагается в бесконечный ряд по степеням эксцентриситета [6]. В результате получим аналитическое выражения $\tilde{\Psi}$ через орбитальные элементы двух планет.

Сложнее обстоит дела в разложение в ряд величины $\Delta_0^{-(2i+1)}$. Уравнения (2.21) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 &= a_1^2 \gamma_1^2 \left(\frac{\rho_1}{a_1} \right)^2 + a_2^2 \gamma_2^2 \left(\frac{\rho_2}{a_2} \right)^2 - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 \left(\frac{\rho_1}{a_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{a_2} \right) \cos(u_1 - u_2) = a_1^2 \gamma_1^2 (1 + R_1)^2 + \\ &+ a_2^2 \gamma_2^2 (1 + R_2)^2 - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 (1 + R_1)(1 + R_2) \cos(u_1 - u_2) = a_1^2 \gamma_1^2 + a_2^2 \gamma_2^2 - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 \cos(u_1 - u_2) + \\ &+ a_1^2 \gamma_1^2 (2R_1 + R_1^2) + a_2^2 \gamma_2^2 (2R_2 + R_2^2) - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 (R_2 + R_1 + R_1 R_2) \cos(u_1 - u_2) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Обозначим

$$\rho_0^2 = [\gamma_1^2 a_1^2 + \gamma_2^2 a_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 a_1 a_2 \cos(u_1 - u_2)] , \quad (2.31)$$

$$R_{12} = a_1^2 \gamma_1^2 (2R_1 + R_1^2) + a_2^2 \gamma_2^2 (2R_2 + R_2^2) - 2a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2 (R_2 + R_1 + R_1 R_2) \cos(u_1 - u_2) ,$$

где R_1, R_2 остальные части разложения модулей радиус-векторов зависящие от первой и выше степени эксцентриситетов. Тогда из формулы (2.30) следует

$$\Delta_0^2 = \rho_0^2 + R_{12} . \quad (2.32)$$

Поэтому можно написать

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{R_{12}}{\rho_0^2} \right)^{-1/2} , \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} &= \left[\gamma_1^2 a_1^2 + \gamma_2^2 a_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 a_1 a_2 \cos(u_1 - u_2) \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{\gamma_2 a_2} \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(u_1 - u_2) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Перепишем формулу (2.33) в виде

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \left(1 + \frac{R_{12}}{\rho_0^2} \right)^{-(i+1/2)} \quad (2.35)$$

Разлагая правую часть формулы (2.35) в ряд Тейлора по ρ_0 , получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r_1 - \gamma_1 a_1) \frac{\partial}{\partial(\gamma_1 a_1)} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + (r_2 - \gamma_2 a_2) \frac{\partial}{\partial(\gamma_2 a_2)} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \dots \quad (2.36)$$

Обозначим

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1}{\gamma_1 a_1} - 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2}{\gamma_2 a_2} - 1. \quad (2.37)$$

Из известного разложения в ряд следует

$$\begin{aligned} \frac{r}{\gamma a} = \frac{\rho}{a} &= 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8} (\cos M - \cos 3M) + \\ &+ \frac{e^4}{3} (\cos 2M - \cos 4M) + O(e^5) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Поэтому, ε_1 имеет порядок $O(e_1)$, а ε_2 имеет порядок $O(e_2)$.

Пусть $D_{m,n}$ обозначает дифференциальный оператор

$$D_{m,n} = (\gamma_1 a_1)^m (\gamma_2 a_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial(\gamma_1 a_1)^m \partial(\gamma_2 a_2)^n}, \quad (2.39)$$

тогда из (2.36) получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[1 + \varepsilon_1 D_{1,0} + \varepsilon_2 D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\varepsilon_1^2 D_{2,0} + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 D_{1,1} + \varepsilon_2^2 D_{0,2}) + \dots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \quad (2.40)$$

Однако, из соотношения (2.34) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= \left\{ \frac{1}{\gamma_2 a_2} \left[1 - \alpha^2 - 2\alpha \cos(u_1 - u_2) \right]^{-1/2} \right\}^{(2i+1)} = \\ &= (\gamma_2 a_2)^{-(2i+1)} \left[1 - \alpha^2 - 2\alpha \cos(u_1 - u_2) \right]^{-(i+1/2)} = \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$= (\gamma_2 a_2)^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \cos[j(u_1 - u_2)],$$

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s} \quad (2.42)$$

Величины $b_s^{(j)}(\alpha)$ в формуле (2.42) называются коэффициентами Лапласа, каждый из которых может быть представлен в виде равномерно сходящегося ряда по α для всех $\alpha < 1$ [7,6].

Обозначим

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right) =$$

$$(\gamma_1 a_1)^m (\gamma_2 a_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial (\gamma_1 a_1)^m \partial (\gamma_2 a_2)^n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right). \quad (2.43)$$

В результате формула (2.40) имеет вид

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[A_{i,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{i,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{i,j,0,1} + \dots \right] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.44)$$

если обобщить это выражение, то получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.45)$$

При вычислении частных производных $A_{i,j,k,l-k}$ по $(\gamma_1 a_1)$ и $(\gamma_2 a_2)$ следует быть внимательным, поскольку $(\gamma_1 a_1)$ и $(\gamma_2 a_2)$ также содержатся неявно в коэффициентах Лапласа $b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha)$.

Подставив (2.45) в (2.13), окончательно имеем

$$U_{12i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \left(\frac{\rho_1}{a_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{a_2} \right) \tilde{\Psi} \right)^i \frac{(\gamma_1 a_1)^i (\gamma_2 a_2)^{i+1}}{2} \times$$

$$\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(u_1 - u_2) \quad (2.46)$$

Заметим, что в выражении (2.46) наклонения i_1 и i_2 содержатся только в величине $\tilde{\Psi}$.

2.2 Фактическое разложение возмущающих функции с точностью до вторых степеней малых величин. Рассмотрим фактические разложения возмущающих функции с точностью до вторых степеней малых величин. С точностью до вторых степеней эксцентриситетов имеем [10]

$$r_1 = \gamma_1 \rho_1 = \gamma_1 a_1 \left(\frac{\rho_1}{a_1} \right) \approx \gamma_1 a_1 \left[1 + \frac{e_1^2}{2} + (-e_1) \cos M_1 - \frac{e_1^2}{2} \cos 2M_1 \right] \quad (2.47)$$

$$r_2 = \gamma_2 \rho_2 = \gamma_2 a_2 \left(\frac{\rho_2}{a_2} \right) \approx \gamma_2 a_2 \left[1 + \frac{e_2^2}{2} + (-e_2) \cos M_2 - \frac{e_2^2}{2} \cos 2M_2 \right]. \quad (2.48)$$

$$\sin \theta_1 \approx \sin \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) + e_1 \sin 2\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) - \frac{7}{8} \sin \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) \right)$$

$$\cos \theta_1 \approx \cos \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) + e_1 (\cos 2\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) - 1) + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3\lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) - \frac{7}{8} \cos \lambda_1 - (\Omega_1 + \omega_1) \right)$$

$$\sin \theta_2 \approx \sin \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) + e_2 \sin 2\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) + e_2^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) - \frac{7}{8} \sin \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) \right) \quad (2.49)$$

$$\cos \theta_2 \approx \cos \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) + e_2 (\cos 2\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) - 1) + e_2^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3\lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) - \frac{7}{8} \cos \lambda_2 - (\Omega_2 + \omega_2) \right),$$

где учтена формула $M = \lambda - (\Omega + \omega)$.

Используя приведенные разложение окончательно выразим правую часть формулы (2.22) через орбитальные элементы.

Естественно, такие громоздкие и сложные аналитические вычисления целесообразно выполнить современными методами компьютерной алгебры. Мы использовали систему аналитических вычисления Mathematica[11].

В результате правая часть формулы (2.22) имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \cos \psi - \cos(u_1 - u_2) = \\
&= \frac{1}{64} (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1^2 + 8(\cos(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + 1) + \sin(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1 + 8 \cos(\lambda_1 - \Omega_1)) \times \\
&\times (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2^2 + 8(\cos(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + 1) + \sin(2\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2 + 8 \cos(\lambda_2 - \Omega_2)) + \\
&+ \sin(i_1) \sin(i_2) (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1^2 + 8(\cos(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + 1) + \sin(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1 + 8 \sin(\lambda_1 - \Omega_1)) \times \\
&\times (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2^2 + 8(\cos(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + 1) + \sin(2\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2 + 8 \sin(\lambda_2 - \Omega_2)) - \\
&- (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1^2 + 8(\cos(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + 1) + \sin(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) e_1 + 8 \sin(\lambda_1 - \Omega_1)) \times \\
&\times (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2^2 + 8(\cos(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + 1) + \sin(2\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) e_2 + 8 \sin(\lambda_2 - \Omega_2)) + \\
&+ (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + \\
&+ 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) (\cos(i_1) \cos(\Omega_1) + \sin(\Omega_1)) e_1^2 + 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) \times \\
&\times (\cos(i_1) \cos(\Omega_1) + \sin(\Omega_1)) \left(\cos\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) \right) e_1 + \\
&+ 8(\cos(i_1) \cos(\Omega_1) \sin(\lambda_1 - \Omega_1) + \cos(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\Omega_1)) (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) (\cos(i_2) \cos(\Omega_2) + \sin(\Omega_2)) e_2^2 + \\
&+ 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) (\cos(i_2) \cos(\Omega_2) + \sin(\Omega_2)) \left(\cos\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) \right) e_2 + \\
&+ 8(\cos(i_2) \cos(\Omega_2) \sin(\lambda_2 - \Omega_2) + \cos(\lambda_2 - \Omega_2) \sin(\Omega_2)) + \\
&+ (-(7 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 9 \cos(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 7 \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - 9 \sin(3\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1)) (\cos(\Omega_1) - \cos(i_1) \sin(\Omega_1)) e_1^2 + \\
&+ 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) (\cos(\Omega_1) - \cos(i_1) \sin(\Omega_1)) \left(\cos\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\lambda_1 + \omega_1 + \Omega_1 + \frac{1}{2}\right) \right) e_1 + \\
&+ 8 \cos(\lambda_1 - \Omega_1) \cos(\Omega_1) - 8 \cos(i_1) \sin(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\Omega_1) (-(7 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 9 \cos(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \\
&+ 7 \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 9 \sin(3\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) (\cos(\Omega_2) - \cos(i_2) \sin(\Omega_2)) e_2^2 + \\
&+ 8 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) (\cos(\Omega_2) - \cos(i_2) \sin(\Omega_2)) \left(\cos\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) - \right. \\
&\left. - \sin\left(-2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2 + \frac{1}{2}\right) \right) e_2 + 8 \cos(\lambda_2 - \Omega_2) \cos(\Omega_2) - 8 \cos(i_2) \sin(\lambda_2 - \Omega_2) \sin(\Omega_2)).
\end{aligned}$$

(2.50)

Для фактического разложения величин $\Delta_0^{-(2i+1)}$ из формулы (2.44) имеем

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{0,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{0,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{0,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{\Delta_0^3} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{1,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{1,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{1,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{\Delta_0^5} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{2,j,0,0} + \varepsilon_1 A_{2,j,1,0} + \varepsilon_2 A_{2,j,0,1} + \dots] \cos j(u_1 - u_2), \quad (2.53)$$

где, согласно (2.43), (2.42) обозначены

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right) = (\gamma_1 a_1)^m (\gamma_2 a_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial (\gamma_1 a_1)^m \partial (\gamma_2 a_2)^n} \left((a_2 \gamma_2)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right), \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{2} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{i+1/2}}. \quad (2.55)$$

Для получения разложения в явном виде, с точностью до второго порядка малых величин, достаточно в формулах (2.51) - (2.53) сохранить слагаемые $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Например, рассмотрим $A_{1,-3,0,1}$. Согласно формуле (2.54) можно написать

$$A_{1,-3,0,1} = D_{0,1} \left((a_2 \gamma_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) \right) = (\gamma_2 a_2) \frac{\partial}{\partial (\gamma_2 a_2)} \left((a_2 \gamma_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) \right) = -3(\gamma_2 a_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) - (\gamma_1 a_1) (\gamma_2 a_2)^{-4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[b_{3/2}^{-3}(\alpha) \right] = -3(\gamma_2 a_2)^{-3} b_{3/2}^{(-3)}(\alpha) - (\gamma_1 a_1) (\gamma_2 a_2)^{-4} \frac{d}{d\alpha} \left[b_{3/2}^{-3}(\alpha) \right]. \quad (2.56)$$

Аналогично вычисляется другие коэффициенты $A_{i,j,m,n}$ в формулах (2.51) - (2.53).

3. Результаты. Выполненные аналитические вычисления приводят нас к окончательным результатам. Мы получили, в принципе, разложения возмущающих функции с точностью до любого порядка относительно малых величин.

Действительно, подставляя полученные аналитические выражения (2.51)-(2.53), (2.47)-(2.48), (2.50), в формулу (2.25) и (2.13) получим разложения главной части возмущающей функции $\tilde{U}_{1,2l}$. Полученные явные формулы также дадут возможность написания в аналитическом виде косвенные части возмущающих функции $\tilde{U}_{1,косв}$. Также, используя полученные аналитические выражения, можно написать $\tilde{U}_{2,2l}$, $\tilde{U}_{2,косв}$. Как было отмечено выше, выражения возмущающих функции (2.5), (2.8) через орбитальные элементы достаточно простые и следует из формул (2.15) - (2.18).

Таким образом, полные выражения возмущающей функции (2.4), (2.7) выражается через орбитальные элементы двух планет.

Используя полученных формул найдены фактические разложения возмущающих функции с точностью до второго порядка относительно малых величин.

4. Обсуждения. В работе мы рассмотрели двух экзопланет в относительной системе координат с началом в центре родительской звезды. Впервые получены общие формулы разложения в ряд возмущающих функции в двухпланетной задаче трех тел с массами изменяющимися анизотропно в различных темпах, на базе аperiodического движения по квазиконическому сечению. Полученные соотношения дают возможность разложения возмущающих функции с любой точностью относительно эксцентриситетов и наклонов.

Результаты настоящей работы открывает новые перспективные возможности в исследовании динамики нестационарных гравитирующих систем. Полученные уравнения будут эффективно использованы для исследования динамической эволюции экзопланетных систем из за анизотропного изменении масс родительской звезды и планет. При этом, будут учтены эффекты убывания массы родительской звезды и роста массы планет из за аккреции вещества из остатков протопланетного диска.

Работа выполнено по программе подготовки докторов PhD МОН РК и ПЦФ МОН РК № BR05236322.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Morbidelli A., Dynamical Evolution of Planetary Systems, Planets, Stars and Stellar Systems, 2013, SSPS,V3,63. DOI:10.1007/978-94-007-5606-9_2. (in English)
- [2] Bayliss., Daniel D.R, Winn J.N. Confirmation of a Retrograde Orbit for Exoplanet WASP-17b.- [ApJ 2010.722L.224B](#). DOI:10.1088/2041-8205/722/2/L224. (in English)
- [3] Bolmont E., Selsis F., et al., Water loss from terrestrial planets orbiting ultra cool dwarfs: Implications for the planets of TRAPPIST-1 – MNRAS 2017. V.464. P.3228. DOI:10.1093/mnras/stw2578. (in English).
- [4] Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Шомшекова С.А. Дифференциальные уравнения относительного движения нестационарных экзопланетных систем. КазНПУ Вестник 2017 г., Т.57, №1, с. 147-152. (in Russian)
- [5] Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2012, 229 с. ISBN:978-3-659-29945-2.
- [6] Нюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы // Пер.с англ.под ред. И.И.Шевченко. –М.:Физматлит, 2010г.588с. ISBN:978-5-9221-1121-8.
- [7] Шарлье К. Небесная механика. - М.: Наука, 1966. - 628 с.
- [8] Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. - М.: Наука, 1975. - 799 с.
- [9] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. - М.: Наука, 1968. - 800 с.
- [10] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред.Г.Н.Дубошина М.Наука.1976.
- [11] Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы Mathematica. - Брест: Издательство БГТУ, 2005. - 260 с.

УДК 521.1

М. Дж. Минглибаев^{1,2}, С.А. Шомшекова^{1,2}

¹әл-Фараби атындағы ҚҰУ, Алматы, Қазақстан

²«В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Қазақстан

РЕАКТИВТІ КҮШТІ ЕСЕПКЕ АЛЫП АНИЗАТРОПТЫ АЙНЫМАЛЫ МАССАДАҒЫ ЕКІ ПЛАНЕТАЛЫ ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІНІҢ ҰЙЫТҚУШЫ ФУНКЦИЯНЫҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕРІ

Аннотация. Бұл жұмыста абсолютті координаталар жүйесіндегі айнымалы массалы екі планеталы экзопланеталық жүйе қарастырылған. Қозғалыс теңдеулері Мещерский теңдеулерімен сипатталады. Центрілік жұлдыздың және планеталардың массалары айнымалы әртүрлі қарқынмен өзгереді. Денелердің массалары уақыт бойынша анизотропты, әртүрлі қарқынмен өзгертін жалпы жағдай зерттеледі. Экзопланеталы жүйе эволюциясының бейстационар сатысында массаның анизотропты өзгеруі айтарлықтай оның динамикасына әсерін тигізеді. Қозғалыс теңдеуінің интегралы болмағандықтан, бұл мәселе бейстационар жүйелерге өңделген ұйытқу теориясының әдістерімен зерттеледі. Ұйытқу теориясын қолдануға массалы центрілік жұлдыз салыстырмалы координаталар жүйесінің қозғалыс теңдеуінің басы ретінде қолданылады. Квазиконусты кима бойынша периодты емес қозғалыс негізінде ұйытқу теориясының әдістері қолданылады. Екі планетаның қозғалысы реактивті күшті ескергенде массалары айнымалы анизотропты өзгертін үш нүкте дене есебінің шеңберінде ұйытқу теңдеуінің қозғалысы Лагранж теңдеулерінің формасында сипатталады. Ұйытқу функциялары екі планетаның оскуляцияланған элементтері арқылы өрнектеледі. Ұйытқу функцияларының қатарға жіктелінуінің аналитикалық теңдеулері алынды. Жұмыста ұйытқу функциясының басты және жанама бөлігі көрсетілді. Планеталардың эксцентриситеттерінің квадраттарына дейінгі дәлдіктегі нақты жіктеуі орындалды. Алынған формулалар центрілік жұлдыз және планеталардың массаларының айнымалылығына байланысты орбиталық элементтердің эволюциясын зерттеуге қолданылады. Қарастырылған екі планеталы үш дене есебінің бейстационар айнымалы эволюция сатысындағы динамикалық эффектілерді сипаттайды. Күрделі аналитикалық есептеулерді орындауда Mathematica пакет бағдарламасын қолдандық.

Түйін сөздер: айнымалы массалы үш дене есебі, бейстационар экзопланеталық жүйелер, айнымалы массалы жұлдыздар, аперидикалық қозғалыс, протопланеталық диск.

Сведения об авторах:

Минглибаев Мухтар Джумабекович, д.ф.-м.н., профессор. Казахский национальный университет имени аль-Фараби. ДТОО Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, ГНС. Дом.адрес: Алматы, ул. Жарокова, д. 288, кв. 35. Телефон: 2476086, e-mail: minglibayev@gmail.com

Шомшекова Сауле Ахметбековна - PhD-докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби. ДТООАстрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, ГНС. Дом. адрес: Алматы, ул. Шелихова 163. Телефон: 2607591, e-mail: shomshekova.saule@gmail.com.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 144 – 148

UDC 524.386

L.N. Kondratyeva, F.K. Rspaev, E.K. Denissyuk, M.A. Krugov

Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan
lu_kondr@mail.ru, eddenis@mail.ru, mkrugov@astroclub.kz

NEW RESULTS OF STUDY
OF THE PLANETARY NEBULA M1-77

Abstract The object M1-77 is known as the young low excitation planetary nebula. The variability of the brightness and the radial velocities of the metal lines lead some authors to the idea of the binary nature of the central star in the object. In this paper the new photometric and spectral results obtained for the object M1-77 in 2009 – 2017, are discussed. Irregular variations of brightness in B, V, and R filters with an amplitude of $\sim 0^m.4$ were detected. During our observations, the absolute fluxes in the emission lines H α , [NII] and [SII] increased approximately as a factor 20. Significant changes of the fluxes began in 2011. Simultaneously, an increase of the electron density of the gas in the nebula was recorded. It can be assumed that the reason of the observed events is the reset of an additional mass of gas that has entered the nebula.

Key words: planetary nebulae, emission lines; individual: M1-77.

УДК 524.386

Л.Н. Кондратьева, Ф.К. Рспаев, Э.К. Денисюк, М.А. Кругов

Астрофизический Институт им Фесенкова, Алматы, Казахстан

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ПЛАНЕТАРНОЙ ТУМАННОСТИ M1-77

Аннотация. Объект M1-77 известен как молодая планетарная туманность низкого возбуждения. Переменность блеска и лучевых скоростей металлических линий приводит некоторых авторов к идее о двойственной природе центральной звезды в этом объекте. В данной работе приводятся новые фотометрические и спектральные данные, полученные для объекта M1-77 в 2009 - 2017 гг. Обнаружены нерегулярные колебания блеска в B, V и R фильтрах с амплитудой $\sim 0^m.4$. За время наших наблюдений абсолютные потоки излучения в эмиссионных линиях H α , [NII] и [SII] увеличились примерно в 20 раз. Существенные изменения потоков начались в 2011г. Одновременно было зарегистрировано повышение электронной плотности газа в оболочке. Можно предположить, что причиной наблюдаемых событий является выброс дополнительной массы газа, пополнившей туманность.

Ключевые слова: планетарные туманности, эмиссионные линии; ионные линии; индивидуальные объекты: M1-77.

Введение

Молодая планетарная туманность M1-77 с координатами $\alpha(2000.0)=21^h19^m$, $\delta(2000.0)=+46^\circ19'$ была обнаружена в 1946г [1]. Получены разные оценки расстояния до объекта: 2.4, 2.5 и 2.83 кпс [2-4]. Предполагается, что центральная звезда имеет низкую эффективную температуру $\sim 20000\text{K}$. Диаметр туманности составляет $\sim 7''$ [2, 5]. Фотометрические наблюдения [6] выявили быстрые изменения блеска объекта в пределах $0^m.1 - 0^m.2$.

В спектре на фоне сильного континуума наблюдаются эмиссионные линии H α , [NII] [SII]. Относительные интенсивности эмиссионных линий представлены в работе [5]. Абсолютные потоки излучения приводятся в [7]. По данным [5], лучевая скорость, измеренная по эмиссионным линиям H α и [NII], составляет -84 ± 3 км/сек. Быстрые, в течение нескольких часов, изменения лучевой скорости обнаружены De Marko [8]. Одно из возможных объяснений состоит в двойственной природе объекта [9].

Наблюдения и обработка В Астрофизическом Институте им. Фесенкова спектральные наблюдения объекта M1-77, в основном, выполняются на телескопе АЗТ-8 (70см). Приемником излучения на выходе спектрографов служит CCD камера SBIG STT-3200 (2184x1472, 6.8 μ). Доступный для наблюдений спектральный диапазон составляет ~ 3500 ангстрем (4000 – 7500 \AA).

Дополнительные спектральные наблюдения проводились на 1-метровом телескопе, установленном на Тянь-Шанской Обсерватории. Телескоп оснащен новым дифракционным спектрографом. На выходе спектрографа установлена CCD камера SBIG Atik-16200 (4500x3600, 6 μ). Она имеет повышенную чувствительность в ультрафиолете и, в принципе, дает возможность получать спектрограммы в диапазоне от 3600 \AA до 7500 \AA .

В процессе наблюдений спектрограммы исследуемого объекта получают с узкой (2" – 3") и с широкой (7" – 10") входной щелью. Наблюдения стандартной звезды с известным распределением энергии выполняются с широкой входной щелью, которая гарантирует прохождение и регистрацию всего потока излучения. Стандартная обработка файлов состоит из вычитания темного фона, учета ошибки поля и учета атмосферного поглощения. Спектральная чувствительность аппаратуры определяется при сопоставлении наблюдаемого распределения энергии в спектре стандарта данными Каталога. После учета всех поправок определяются значения потоков излучения в абсолютных энергетических единицах. Спектрограммы, полученные с узкой щелью и с разрешением 0.25 – 0.5 \AA , используются для исследования структуры эмиссионных линий.

Для фотометрических наблюдений объекта использовались телескоп АЗТ-8 и 1-метровый телескоп (Ассы-Тургеньской Обсерватории). Для регистрации блеска объектов используется набор В V R фильтров и следующие CCD камеры: ST-8 (1530x1020, 9 μ) фирмы SBIG (АЗТ-8) и ST-7 (756x510, 9 μ) фирмы SBIG (1-метровый телескоп Ассы-Тургень).

Процедура первичной обработки изображений состоит из стандартных операций с использованием служебных файлов Bias, Dark и Flat. Измерения изображений выполняются с использованием пакета стандартных программ MaximDL 6. Учет атмосферной экстинкции и приведения полученных оценок блеска к стандартной системе В V R проводится с помощью системы соответствующих уравнений.

Полученные результаты

Результаты фотометрических наблюдений приведены в Таблице 1. В столбцах 3 -5 даны значения В V R величин для M1-77. Столбцы 6 – 8 содержат аналогичные данные для звезды сравнения.

Таблица 1 – Результаты фотометрических наблюдений M1-77

Дата наблюдений	JD-2400000	M1-77			ГYC 33589		
		B	V	R	B	V	R
1	2	3	4	5	6	7	8
09.08.2007	54322.324	12.94 \pm 0.01	12.15 \pm 0.01	11.29 \pm 0.01	11.44 \pm 0.01	10.95 \pm 0.01	
21.06.2012	56100.374	12.65 \pm 0.05	11.83 \pm 0.01	11.17 \pm 0.03	11.30 \pm 0.05	10.94 \pm 0.01	10.57 \pm 0.01
01.10.2013	56567.155	12.86 \pm 0.03	12.15 \pm 0.03	11.34 \pm 0.03	11.43 \pm 0.03	10.96 \pm 0.03	10.57 \pm 0.02
03.10.2013	56569.153	12.84 \pm 0.03	12.11 \pm 0.02	11.34 \pm 0.01	11.44 \pm 0.02	10.96 \pm 0.01	10.55 \pm 0.03
31.07.2014	56870.390	13.06 \pm 0.04	12.18 \pm 0.02	11.43 \pm 0.01	11.43 \pm 0.01	10.94 \pm 0.02	10.50 \pm 0.01
01.09.2014	56902.217	12.96 \pm 0.04	12.24 \pm 0.02	11.49 \pm 0.01	11.44 \pm 0.01	10.95 \pm 0.02	10.53 \pm 0.01
13.07.2015	57217.134	12.91 \pm 0.03	12.23 \pm 0.02	11.38 \pm 0.01	11.43 \pm 0.02	10.96 \pm 0.02	10.55 \pm 0.01
13.07.2016	57951.160	12.93 \pm 0.04	11.38 \pm 0.01	11.42 \pm 0.01	11.44 \pm 0.01	10.95 \pm 0.01	10.55 \pm 0.01

Амплитуда колебаний блеска объекта M1-77 составляет: 0^m.4, 0^m.3 и 0^m.3, в фильтрах В V R, соответственно, в то время, как изменения блеска звезды сравнения в тех же фильтрах составляют, соответственно, 0^m.14, 0^m.014 и 0^m.07 (Рис 1).

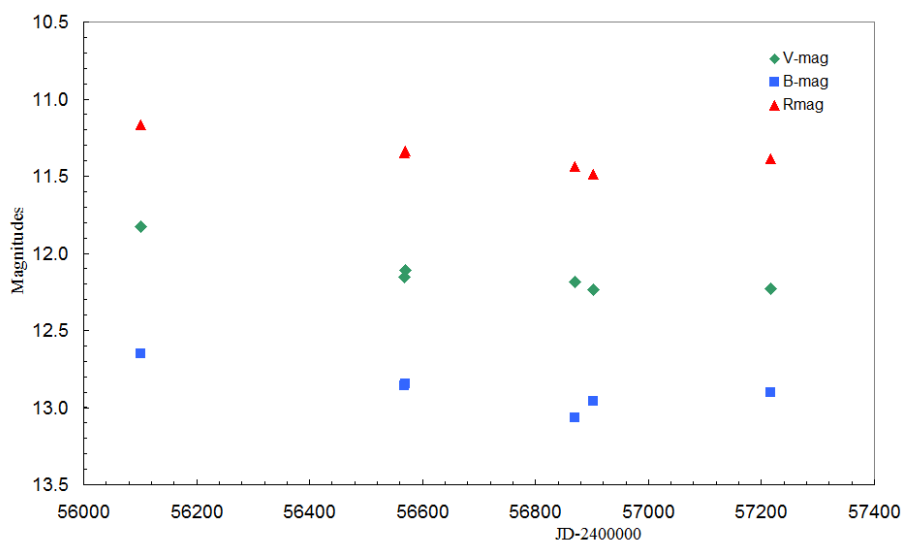


Рисунок 1 - В V R величины объекта M1-77 и звезды сравнения

В спектре M1-77 были измерены потоки излучения в линиях H β , H α , [NII], 6548, 6583 Å и [SII], 6717, 6731 Å. Результаты приведены Таблице 2. в Во второй строке даны степенные множители для потоков. Точность значений составляет ~15%. В последнем столбце Таблицы приводятся оценки электронной плотности, полученные по отношениям интенсивностей эмиссионных линий [SII], 6717, 6731 Å.

За период наших наблюдений произошло значительные изменения во всех эмиссионных линиях. Поток излучения в линии H β увеличился в 10 раз, потоки в линиях H α и [NII] - примерно в 20 раз (рисунок 2). Максимум излучения в линиях «красной» области спектра наблюдался в 2010 - 2011гг. времени. В этот период также отмечается повышение электронной плотности газа. Высокий уровень значений этих параметров сохраняется до настоящего времени

Таблице 2 - Абсолютные потоки излучения в эмиссионных линиях в спектре V1-77

Дата	JD-2400000	H β	[NII], 6548	H α	[NII], 6583	[SII], 6717	[SII], 6731	Ne см ⁻³
К		10 ¹³	10 ¹³	10 ¹²	10 ¹³	10 ¹³	10 ¹³	
21.07.1976	42951.338	1.20	0.31	0.33	0.98			
09.08.1991	48447.333	2.06	0.85	0.645	2.48	0.27	0.29	1000±900
18.09.2004	53253.242	4.43						
11.10.2004	53290.175		1.29	2.26	4.82	0.36	0.43	1200±700
09.08.2007	54322.302	5.44						
12.08.2007	54325.318	6.09						
13.08.2007	54326.300		4.23	3.82	12.1	0.44	0.50	1300±700
10.10.2007	54384.146	5.38	4.41	4.30	12.4	0.49	0.52	1200±700
15.10.2007	54389.087	5.97						
19.07.2010	55397.342	7.15	6.64	5.91	21.3			
07.07.2011	55750.424		7.08	5.91	22.2		1.32	
27.07.2011	55770.307		7.10	5.93	22.0			
03.08.2011	55777.345		7.09	6.00	22.1	0.83	1.34	4700±1500
06.08.2011	55780.327	7.45						
01.09.2011	55806.225	8.11						
02.09.2011	55807.186	8.25	7.05	5.96	22.3	0.76	1.30	4800±1500
21.06.2012	56099.402		6.80	6.02	19.6	0.79	1.13	4800±1500
31.07.2014	56870.310	8.55						
17.08.2015	57252.301		5.87	5.98	18.7	0.82	1.23	4600±1500
09.06.2016	57914.375	10.6	6.28	6.63	20.5	0.79	1.34	4800±1500
16.09.2017	58013.135		4.99	4.85	15.5	0.59	0.87	4500±1500

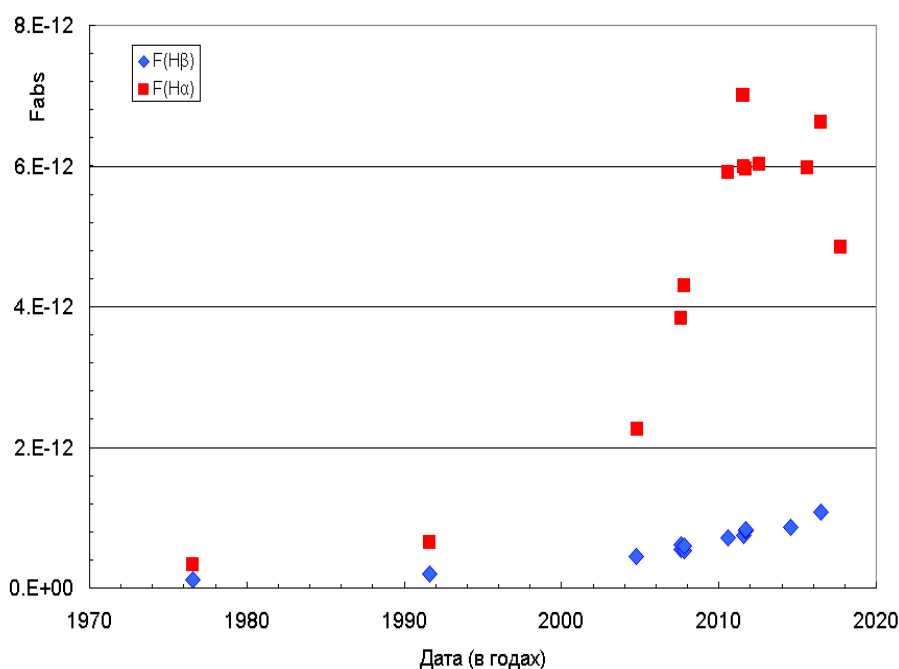


Рисунок 2 – Абсолютные потоки излучения в эмиссионных линиях H β и H α за разные годы

Поведение линии H β несколько отличается от выше описанного, для нее усиление потока продолжалось вплоть до 2016г. Это связано с изменением, в данном случае – с уменьшением, коэффициента поглощения.

Заключение

В процессе наших исследований получены данные о фотометрическом поведении объекта M1-77. Выявлены нерегулярные колебания блеска с амплитудой $\sim 0^m.4$. Источником переменности могут быть пульсации атмосферы центральной звезды. Если центральный источник является двойной системой, то взаимодействие между звездными компонентами (нестабильный звездный ветер), также может оказывать влияние на изменения блеска.

Спектральная переменность проявляется в изменении потоков излучения во всех эмиссионных линиях. Вероятнее всего, это связано с выбросом дополнительной массы газа, пополнившей туманность. Об этом свидетельствует наблюдаемое повышение электронной плотности газа. Само событие – сброс вторичной оболочки является не уникальным, но достаточно редким явлением в эволюции планетарных туманностей.

Работа выполнена при поддержке программы целевого финансирования BR05236322 Министерства Образования и науки РК.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Minkovski R. New emission nebulae// PASP. 1946. V. 58. – P. 305.
- [2] Perek L. Planetary nebulae in the central region of the Galaxy// Bull Astron Czech. 1963. V. 14. – P. 201.
- [3] Hoener G., Weinberger R. Candidates for promising extinction distances: Sh1-89, NGC 7048, M1-77//1988. – A&ASS. – V. 72. – P.383.
- [4] Cahn J., Kaler J. Distances and distribution of planetary nebulae// ApJS. 1971. V.22. – P. 319.
- [5] Sabbadin F. Ortolani S., et al. A peculiar planetary nebula// A&A. 1983. V. 123. – P. 147.
- [6] Hander G. Photometric variations of the central star of M1-77 and suspected variability of the central star of VV3-5//IBVS. 1995. No 4244.
- [7] De Marco O., Bond H., Harmer D. et al. Indication of a large fraction of spectroscopic binaries among nuclei of planetary nebulae// ApJ. 2004. V.602. – L93. DOI: 10.1086/382156

[8] De Marco O., Wortel S., Bond H., The bizarre spectral variability of central stars of planetary nebulae// *Asymmetrical Planetary Nebulae* – apn4.conf. 2007.

[9] Frew D., Bojicic S., Parker A. A catalog of integrated H α fluxes for 1258 galactic planetary nebulae// *MNRAS*. 2013. V. 431 – 2. DOI: 10.1093/mnras/sts393.

УДК 524.386

Л.Н. Кондратьева, Ф.К. Рыспаев, Э.К. Денисюк, М.А.Кругов

«В.Г.Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Қазақстан

M1-77 ПЛАНЕТАРЛЫҚ ТҰМАНДЫҚТЫҢ ЖАҢА НӘТИЖЕЛЕРІ

Аннотация. M1-77 объектісі аса белсенді емес жас планетарлық тұмандық ретінде белгілі. Бұл объектінің орталық жұлдызының табиғатының қасиеттеріне байланысты, яғни металдық сызықтардың сәулелік жылдамдығы және жарқырауының айнымалылығы, оның қос объекті болуы ықтимал деген идеяны кейбір авторлар келтіреді. Бұл жұмыста, 2009-2017 жылдар аралығындағы M1-77 объектісі үшін жаңа фотометрлік және спектрлік мәліметтер алынған. Амплитудасы $\sim 0^m.4$ жұлдыздық шамадағы В, V және R фильтрларында жарқырау тербелісінің бірқалыпсыздығы табылды. Біз бақылау жүргізген уақытта H α , [NII] және [SII] эмиссиялық сызықтарында сәулеленуінің абсолюттік ағыны шамамен 20 есеге артты. Ағынның өзгерісі 2011 жылдан басталды. Сонымен қатар, бір уақытта қабықшадағы газдың электрлік тығыздығының артқандығы тіркелді. Бұдан шығатын тұжырым, бақыланған құбылыстарға себеп, тұмандықта артқан қосымша газ массасының шығарылуы деп болжауға болады.

Түйін сөздер: планетарлық тұмандықтар, эмиссиялық сызықтар; иондық сызықтар, жеке объектілер: M1-77.

Информация об авторах:

Кондратьева Л.Н. – Кандидат Физ.-мат. Наук Астрофизический Институт им. Фесенкова lu_kondr@mail.ru;

Рыспаев Ф.К. – научный сотрудник Астрофизический Институт им. Фесенкова;

Денисюк Э.К. - Кандидат Физ.-мат. Наук Астрофизический Институт им. Фесенкова. eddenis@mail.ru;

Кругов М.А. – Инженер Астрофизический Институт им. Фесенкова mkrugov@astroclub.kz

NEWS**OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 149 – 152

UDC 524.386

L.A. Pavlova, L.N. KondratyevaFesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan
E mail: lapavlova44@mail.ru, lu_kondr@mail.ru**MECHANISMS FOR FORMING THE INHOMOGENEOUS
STRUCTURE OF PLANETARY NEBULAE**

Аннотация. The inhomogeneous distribution of gas in planetary nebulae manifests in the form of numerous jets, globules and filaments. Details of the heterogeneous structure are found not only in extended, sufficiently evolved objects, but also in young compact objects whose dynamic age does not exceed 1000 years. The problem of the formation of heterogeneity in the early stages of the planetary nebulae evolution is relevant in recent years. The interaction of the hot high-speed wind of the central star with the substance ejected at the stage of the "red" giant under the influence of a slow but powerful wind is considered as a possible mechanism.

In this case, the formation of jets and globules occurs under the shock waves that accompany the stellar wind. The central sources in some planetary nebulae are binary stellar systems. The processes of mass exchange between stellar components can also lead to the formation of an inhomogeneous shell structure.

In this paper, we consider the results of modern methods for studying planetary nebulae, including observations on space telescopes, which allow to evaluate the reality and effectiveness of the proposed mechanisms for the formation of heterogeneous structures.

Key words: planetary nebulae, mechanisms of forming the inhomogeneous structures.

УДК 524.386

Л.А. Павлова, Л.Н. Кондратьева

Астрофизический Институт им Фесенкова, Алматы, Казахстан

**МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ
ПЛАНЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ**

Аннотация. Неоднородное распределение газа в планетарных туманностях проявляется в форме многочисленных джетов, глобул и волокон. Детали неоднородной структуры обнаружены не только в протяженных, достаточно проэволюционировавших объектах, но и в молодых компактных оболочках, динамический возраст которых не превышает 1000 лет. Проблема формирования неоднородности на ранних этапах эволюции планетарных туманностей является актуальной на протяжении последних лет. В качестве возможного механизма рассматривается взаимодействие горячего высокоскоростного ветра центральной звезды с веществом, выброшенным на стадии «красного» гиганта под действием медленного, но мощного ветра. В этом случае образование джетов и глобул происходит под действием ударных волн, которые сопровождают звездный ветер. Центральные источники в некоторых планетарных туманностях являются двойными звездными системами. Процессы обмена массами между звездными компонентами также могут приводить к формированию неоднородной структуры оболочки.

В данной работе рассматриваются результаты современных методов исследований планетарных туманностей, включая наблюдения на космических телескопах, которые позволяют оценить реальность и эффективность предполагаемых механизмов образования неоднородных структур.

Ключевые слова: планетарные туманности, механизмы формирования структуры оболочки.

Введение

Неоднородная структура планетарных туманностей является предметом изучения теоретиков и экспериментаторов. Одно время предполагалось, что полярные джеты, крупномасштабные глобулы и биполярные структуры формируются при взаимодействии остаточного звездного ветра красного гиганта и горячего ветра центральной звезды. Однако, как показало исследование большой группы молодых объектов, оболочки с динамическим возрастом <2000 лет уже демонстрируют полный набор неоднородностей, обнаруживаемых в больших туманностях [1]. Таким образом, получается, что неоднородности формируются на еще более ранних стадиях эволюции планетарных туманностей, при низкой температуре центральной звезды и до появления быстрого звездного ветра. Последние годы поиск и анализ неоднородностей в структуре молодых планетарных туманностей стали излюбленной темой многих исследователей [2– 8]. Выдвинуто предположение о роли аккреционного диска, как источника биполярных выбросов [4,5]. Современные наблюдения планетарных туманностей на космических телескопах, полученные с высоким разрешением, дают новую информацию для создания новых моделей, описывающих формирование и эволюцию этих объектов.

В 1983г Сан Квок [1] предложил модель взаимодействующих ветров для объяснения структуры планетарных туманностей. Согласно модели горячий высокоскоростной ветер центральной звезды взаимодействует с веществом, выброшенным на стадии «красного» гиганта под действием медленного, но мощного звездного ветра. В результате формируется внешняя граница оболочки. Детали неоднородности в распределении газа в туманности, а именно джеты, глобулы, возможно, возникают при прохождении ударных волн, которые в свою очередь являются источником излучения, наблюдаемого в рентгеновской области.

В некоторых случаях неоднородная структура туманности формируется, благодаря процессам обмена массами между компонентами двойной звездной системы в центре туманности. К настоящему времени туманности с двойными центральными источниками составляют 12 – 15% от их общего числа.

Зоны низкой ионизации обнаружены на изображениях многих планетарных туманностей. Газ в этих зонах имеет такую же электронную температуру, как и соседние области но отличаются низкой электронной плотностью. Современные методы наблюдений позволили установить, что в зонах низкого возбуждения «работает» ударный механизм ионизации, в то время как основная масса оболочки ионизируется ультрафиолетовыми квантами центрального источника.

Результаты современных наблюдений на космических телескопах

На космическом телескопе Гершеля выполнялись фотометрические и спектральные наблюдения в далеком инфракрасном и субмиллиметровом диапазонах спектра. Были получены изображения 18 планетарных туманностей и спектрограммы всех звезд, эволюционирующих от Асимптотической ветви красных гигантов до стадии планетарных туманностей [10]. Полученные данные позволяют, кроме всего прочего, оценить физическое состояние и химический состав вещества в окрестностях исследуемых объектов.

Огромное значение для исследования структуры туманностей играют изображения, получаемые с высоким разрешением на телескопе Хаббла. Так, именно на этом телескопе были выполнены наблюдения десяти компактных планетарных туманностей, и в них впервые были обнаружены многочисленные мелкие детали неоднородной структуры: дуги, двумерные кольца, торы и гало [11]. На основе полученных данных было высказано предположение о том, что подобные неоднородные структуры присущи большинству планетарных туманностей и формируются они на ранних стадиях эволюции. Полагая, что причиной образования неоднородностей может быть взаимодействие раннего ветра красного гиганта и более позднего ветра центральной звезды, авторы отмечают, что должно быть несколько стадий быстрого звездного ветра, разных по длительности и по направлению. По крайней мере, подобное предположение способно объяснить наблюдаемое различие в возрасте разных деталей структуры в пределах одной оболочки [12, 13].

Во многих планетарных туманностях наблюдаются так называемые «hot bubbles» - центральные полости, заполненные горячим газом [14]. Они формируются под действием

быстрого звездного ветра, нагретого ударной волной. Звездный ветер выталкивает из центра вещество, выброшенное на стадии красного гиганта. Подобные зоны должны быть «видны» в рентгеновском диапазоне. Действительно, наблюдения туманности NGC 3234, выполненные на телескопе XMM-Newton, зарегистрировали мягкое диффузное X-Ray излучение с температурой $2.35 \cdot 10^6$ К и светимостью $2 \cdot 10^{30}$ эрг/сек (для $D=0.55$ кпс), которое образуется в центральной зоне, в «hot bubbles». Анализ химического состава плазмы - источника диффузного рентгеновского излучения для разных туманностей свидетельствует о том, что оно действительно создается горячим звездным ветром, но присутствуют следы остаточного газа холодной оболочки. Возможно, это плотные образования, сформировавшиеся в коллимирующих потоках или волокна, образовавшиеся в процессе дополнительных выбросов фрагментов газа из центральной звезды

В некоторых планетарных туманностях обнаружено жесткое рентгеновское излучение, приходящее от центральной звезды. Его источником может быть корональная эмиссия от невидимой компоненты двойной звезды или ударная волна, возникающая в быстром звездном ветре.

Достаточно редкое событие в эволюции планетарных туманностей – повторный сброс оболочки зарегистрировано в двух объектах. Старая, сильно проэволюционировавшая туманность A30, стала знаменитой после того, как около ее центральной звезды была обнаружена плотная оболочка нового поколения, практически лишенная водорода [15]. Оценки ее динамического возраста: 850 ± 200 лет, получены по изменению углового размера, известной скорости расширения, и расстояния [16]. Сложная структура этой оболочки хорошо просматривается на снимках, полученных на телескопе Хаббла. Многочисленные джеты указывают на движение газовых фрагментов от центра к периферии. Рентгеновское излучение объекта можно разделить на две компоненты: точечный источник в направлении на центральную звезду и протяженный, соответствующий положению новой оболочки. Взаимодействие современного звездного ветра с веществом вторичной оболочки приводит к ударному нагреву плазмы, которая является источником диффузного X-ray излучения. Происхождение рентгеновского излучения центральной звезды пока непонятно.

На изображениях многих планетарных туманностей, полученных, в том числе, на телескопе Хаббла, просматриваются зоны низкой ионизации в виде глобул. Исследования показали, что газ в этих зонах имеет такую же электронную температуру, как и соседние области, но отличаются низкой электронной плотностью. Современные методы наблюдений позволили установить, что в зонах низкого возбуждения «работает» ударный механизм ионизации, в то время как основная масса оболочки ионизируется ультрафиолетовыми квантами центрального источника [17].

Анализ последних данных, полученных для центральных звезд планетарных туманностей в разных спектральных диапазонах, проведен в работе [18]. Исследования показывают, что около 12-15% , по некоторым оценкам, до 30% центральных звезд являются двойными. Орбитальные периоды для этих тесных двойных систем, в основном меньше одного дня. Намечается связь между двойственностью центрального источника (положением плоскости орбиты) и пространственной ориентацией оболочки. Взаимодействие между компонентами центральной звездной системы может приводить к формированию биполярных форм оболочек, а также к появлению дополнительных структурных неоднородностей.

Заключение

Проблема неоднородной структуры планетарных туманностей, в том числе на ранних стадиях эволюции, очень актуальна и требует своего решения. Соответствующие механизмы, ответственные за формирование неоднородностей, должны учитываться для создания более совершенных моделей реальных объектов. Один из подобных механизмов – взаимодействие горячего и холодного звездных ветров, находит свое подтверждение при наблюдениях в рентгеновском диапазоне. Более того, для того, чтобы объяснить присутствие в туманности глобул и джетов разного возраста, требуется пульсирующий режим работы быстрого звездного ветра.

Также удалось установить, что туманности с двойными центральными звездами могут отличаться формой и химическим составом оболочки. Также, вполне возможно, что их эволюция несколько отличается от эволюции остальных планетарных туманностей.

Работа выполнена при поддержке программы целевого финансирования BR05236322 Министерства Образования и науки РК.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kwok S. Morphological Structures of Planetary Nebulae// PASA. 2010. V. 27. P. 174. DOI: [10.1071/AS09027](https://doi.org/10.1071/AS09027).
- [2] Sahai R., Morris M., Contreras C., Claussen M. Understanding the immediate progenitors of planetary nebulae// IAUS. 2012. V. 283. –P. 180. DOI: [10.1017/S1743921312010915](https://doi.org/10.1017/S1743921312010915).
- [3] Sahai R., Morris M., Villars G. Young planetary nebulae: Hubble space telescope imaging and a new morphological classification system//AJ. 2011. V.141. – P.134. DOI: [10.1088/0004-6256/141/4/134](https://doi.org/10.1088/0004-6256/141/4/134).
- [4] Bright S., De Marco O., Chesneau O., et al. Observing Compact Disks Inside Pre-Planetary Nebulae with the Very Large Telescope Interferometer// AAS. 2012. – V.283. – P. 115. DOI: [10.1017/S1743921312010800](https://doi.org/10.1017/S1743921312010800).
- [5] Velázquez P., Raga A., Riera A., et al. Multipolar young planetary nebulae modelled as a precessing and orbiting jet with time-dependent ejection velocity// MNRAS. 2012. V. 419. –P. 3529. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.19991](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19991).
- [6] Miszalski B., Boffin H., Corradi R. Carbon dwarf wearing a Necklace: first proof of accretion in a post-common-envelope binary central star of a planetary nebula with jets// MNRAS. 2013. V. 428. - L39. DOI: [10.1093/mnras/139](https://doi.org/10.1093/mnras/139).
- [7] Gledhill T. M.; Forde, K. P. A fast bipolar H₂ outflow from IRAS 16342-3814: an old star reliving its youth // MNRAS. 2012. V. 421. – P. 346. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.20309.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20309.x).
- [8] Guillén, P., Vázquez R., Miranda L., et al. Multiple outflows in the planetary nebula NGC 6058// MNRAS. 2013. V. 432. – P. 2676. DOI: [10.1093/mnras/stt612](https://doi.org/10.1093/mnras/stt612).
- [9] Kwok S. From red giants to planetary nebulae// ApJ, 1982. V. 258. - P. 280.
- [10] Griet C, Van de Steene Herschel observations of planetary nebulae//Proceedings IAU Symp. 2016. No 323. DOI: [10.1017/S1743921317001971](https://doi.org/10.1017/S1743921317001971).
- [11] Hsia C., Chau W., Zhang Y., et al. Hubble Space telescope observations and geometric models of compact multipolar planetary nebulae// ApJ. 2014. V. 787. P. 25. doi: [10.1088/0004-637X/787/1/25](https://doi.org/10.1088/0004-637X/787/1/25)
- [12] Ottl S., Kimeswenger S., Zilstra A. Ionization structure of multiple-shell planetary nebulae. NGC 2438 // A&A. 2014. V. 565. – P. 87. DOI: [10.1051/0004-6361/201323205](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201323205).
- [13] Aller A., Miranda L., Olguin L., et al. On the Origin of Morphological Structures of Planetary Nebulae // MNRAS. 2015. – V. 446. – P.317. DOI: [0.1093/mnras/stu2106](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2106).
- [14] Ruiz N., Guerrero M. Physical structure of the planetary nebula NGC 3242 from the hot bubble to the nebular envelope// AJ. 2011. V. 142. - P.91. DOI: [10.1088/0004-6256/142/3/91](https://doi.org/10.1088/0004-6256/142/3/91).
- [15] Jacoby G. Unusual structure of the planetary nebulae Abell 30 and Abell78//PASP, 1979, V. 91, P. 754.
- [16] Guerrero M., Ruiz N., Hamann W., et al. Rebirth of X-Ray emission from the born-again planetary nebula A30// ApJ. 2012. V. 755 - P. 129. DOI: [10.1016/j.icarus.2012.09.025](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.09.025).
- [17] Akras S., Gon D., Low-ionization structures in planetary nebulae. Physical, kinematic and excitation properties// MNRAS. 2016. V. 455. - P. 930. DOI: [10.1093/mnras/stv2139](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2139).
- [18] Hillwig T., Jacoby G., Jones D., et al. Binarity in the central stars of planetary nebulae and its relation to stellar evolution// ASPC. 2017. No 509.

УДК 524.386

Л.А. Павлова, Л.Н. Кондратьева

«В.Г.Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Қазақстан

ПЛАНЕТАРЛЫҚ ТУМАНДАРДЫҢ БІРКЕЛКІ ҚҰРЫЛЫМЫН ҚАЛЫПТАСТЫРУ МЕХАНИЗМДЕРІ

Аннотация. Планетарлық тумандардағы газдың біркелкі бөлінуі көптеген ағындар, глобулдер және талшықтар түрінде көрінеді. Гетерогенді құрылымның егжей-тегжейлері кеңейтілген, жеткілікті дамыған объектілерде ғана емес, сонымен қатар динамикалық жас 1000 жылдан асатын жас ықшам қабықтарда да кездеседі. Планетарлық тумандардың эволюциясының ерте кезеңдерінде біртектілікті қалыптастыру мәселесі соңғы жылдары өзекті болып табылады. Мүмкін болатын тетігі ретінде орталық жұлдыздың жылдамдығы жоғары жылдамдықты желдің баяу, бірақ күшті желдің әсерінен «қызыл» гигант кезеңінде шығарылған затпен өзара әрекеттесуі қарастырылады. Бұл жағдайда жұлдыздар мен глобулдардың пайда болуы жұлдызды желмен жүретін соққы толқындарының әсерінен өтеді. Кейбір планеталық тумандардағы орталық көздер екі жұлдыздық жүйе болып табылады. Жұлдыздың құрамдас бөліктері арасындағы жаппай алмасу процестері біркелкі емес қабық құрылымын қалыптастыруға әкелуі мүмкін.

Осы мақалада планеталық тумандарды зерттеудің заманауи әдістерінің, соның ішінде ғарыштық телескоптардағы байқаудың, біркелкі емес құрылымдардың пайда болуына ұсынылған механизмдердің шынайылығы мен тиімділігін бағалауға мүмкіндік беретін нәтижелерін қарастырамыз

Түйін сөздер: планетарлық тұмандықтар, қабықшаның құрылымын қалыптастыру механизмдері.

Информация об авторах:

Павлова Л.А. - Кандидат Физ.-мат. Наук Астрофизический Институт им. Фесенкова, lapavlova44@mail.ru;
Кондратьева Л.Н. – Кандидат Физ.-мат. Наук Астрофизический Институт им. Фесенкова lu_kondr@mail.ru

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 319 (2018), 153 – 159

UDC 533.93

T.S. Ramazanov¹, S.K. Kodanova¹, N.Kh. Bastykova¹, A. Tikhonov², S.A. Maiorov³¹IETP, Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan;²School of Science and Technology, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan;³General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
ramazan@physics.kz**INVESTIGATION OF HYDRODYNAMIC PROPERTIES OF HOT DENSE PLASMA**

Abstract. In this work hydrodynamic properties of hot dense plasma bunch have been studied in terms of their application to the problem of inertial confinement fusion. The two-temperature hydrodynamic equations taking into account the electron thermal conductivity and kinetics of the charge composition are presented. The following model problems are considered: expansion of a plasma bunch in the vacuum, compression of the plasma by shock waves, on the role of the electronic thermal conductivity in compression of the plasma bunch by shock waves, interaction of the plasma bunch with a laser and a beam of heavy ions. On the basis of the developed numerical methods the test problems arising in the problem of inertial confinement fusion are analyzed. The results shows that the expansion wave tail of the electron temperature is much higher than the ion as time energy exchange between electrons and ions is proportional to the ratio of their masses. In the case of a spherical geometry in passing of the shock wave to the center, reaching the center several times and reflected from it, and a dense layer of the ablator, resulting in a significant increase in density and temperature.

Key words: Hot dense plasma, Hydrodynamic model, Shock wave, Two-temperature plasma, The target for inertial confinement fusion, Compression by shock waves.

УДК 533.93

Т.С. Рамазанов¹, С.К. Коданова¹, Н.Х. Бастыкова¹, А. Тихонов², С.А. Майоров³¹НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан;²Школа Наук и Технологий, Назарбаев Университет, Астана, Казахстан;³Институт общей физики РАН, Москва, Россия**ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СГУСТКА ПЛОТНОЙ ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЫ**

Аннотация. В данной работе исследованы гидродинамические свойства сгустка плотной горячей плазмы применительно к проблеме инерциального термоядерного синтеза. Приведены уравнения двухтемпературной гидродинамики с учетом электронной теплопроводности, кинетики зарядового состава. Рассмотрены модельные задачи: разлет плазменного сгустка в вакуум, сжатие плазмы ударными волнами, о роли электронной теплопроводности при сжатии сгустка плазмы ударными волнами, взаимодействие сгустка плазмы с лазерным излучением и пучком тяжелых ионов. На основе разработанных численных методов получены и проанализированы тестовые задачи, возникающие в проблеме инерциального термоядерного синтеза. Результаты показывают, что в хвосте волны разрежения электронная температура значительно превышает ионную, так как время обмена энергии между ионами и электронами велико из-за большого отношения их масс. А также, в случае сферической геометрии, при прохождении ударной волны к центру, она, достигая несколько раз центра и отражаясь от него и плотного слоя аблятора, приводит к значительному повышению плотности и температуры.

Ключевые слова: Плотная горячая плазма, Гидродинамическая модель, Ударная волна, Двухтемпературная плазма, Мишени для инерционного термоядерного синтеза, Сжатие ударными волнами.

Введение. На сегодняшний день в мире проводится большое количество теоретических и экспериментальных исследований в области инерционного термоядерного синтеза (ИТС) [1, 2]. Из-за сложностей в проведении экспериментов с полномасштабным управляемым термоядерным взрывом очень широко используются методы вычислительного эксперимента [3-5]. Среди них модели на основе уравнений гидродинамики являются разумным компромиссом между точностью модели и сложностью получения численного решения [6-8].

В данной работе используется гидродинамическая модель двухтемпературной плазмы в условиях инерционного термоядерного синтеза [2]. Рассматриваемая задача связано с энергокладом лазерного излучения в твердотельный слой металла (иногда - пластика), окружающего дейтерий-третий газ – это слой т.н. аблятора. В нем образуется плазма многозарядных ионов с неравновесным ионным составом, разлет которой определяет важнейший для термоядерного синтеза параметр удержания - произведение радиуса дейтерий-третий сгустка на его плотность.

Свойства плотной горячей плазмы, получаемой на этом этапе поджига термоядерной мишени, в рамках гидродинамической модели изучаются на примере нескольких самостоятельных задач. В каждой из них на основе численного эксперимента рассмотрены следующие упрощенные физические системы.

Первая из них, это разлет плотного горячего сгустка в вакуум. Здесь представляет интерес сравнение с точными решениями - волной разрежения, исследование кинетических свойств многозарядной плазмы - нарушение ионизационного равновесия (закалка ионного состава) [9].

Вторая задача связана с более сложным гидродинамическим явлением - ударными волнами в двухтемпературной плазме [9]. Здесь важную роль играют отрыв ионной и электронной температур и волна электронной теплопроводности.

В третьей задаче рассмотрен случай воздействия мощного лазерного импульса на плотную оболочку из золота, ограничивающую смесь дейтерия с тритием. В ней сжатие дейтериево-третий смеси происходит за счет разлета внешней оболочки, и также важную роль играют волна электронной теплопроводности и ударная волна, распространяющиеся внутрь мишени.

2. Постановка задачи

В случаях плоской, цилиндрической или сферической симметрии ($n=0, 1, 2$) система уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах с учетом кинетических явлений (вязкость, теплопроводность, неравновесность ионного состава и различие температур ионов и электронов, вклад неупругих процессов ионизации, рекомбинации и потерь на излучение в энергобалансе электронов) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (r^n u), \quad u = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = r^n \frac{\partial p}{\partial s} + F_{vis}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = -p_i \frac{\partial}{\partial s} (r^n u) + (Q_{\Delta T} - Q_{viscosity}) / \rho - \frac{\partial}{\partial s} (r^n q_i), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} = -p_e \frac{\partial}{\partial s} (r^n u) + (-Q_{\Delta T} - Q_{viscosity} + Q_{non elastic}) / \rho - \frac{\partial}{\partial s} (r^n q_e), \quad (3)$$

$$p_e = N_e T_e = \frac{z}{m_i} \rho T_e, \quad p_i = N_i T_i = \frac{\rho}{m_i} T_i \quad (4)$$

Эта система уравнений должна быть дополнена уравнениями кинетики ионного состава. Уравнения баланса для описания ионного состава многозарядной плазмы имеют вид:

$$\frac{\partial y^{(z)}}{\partial t} = \Gamma^{(z)} / N_i, \quad z = 1, 2, \dots, z_{max} \quad (5)$$

здесь $y^{(z)} = N^{(z)} / N_i$ - относительная концентрация ионов с кратностью ионизации z , z_{max} - максимальная степень ионизации

$$\Gamma^{(1)} = \beta^{(1)} N_e^2 N^{(2)} - S^{(1)} N_e N^{(1)}, \quad (6a)$$

$$\Gamma^{(z)} = \beta^{(z)} N_e^2 N^{(z+1)} - S^{(z)} N_e N^{(z)} - \beta^{(z+1)} N_e^2 N^{(z)} + S^{(z-1)} N_e N^{(z-1)}, \quad z = 2, 3, \dots, z_{\max} - 1 \quad (6б)$$

$$\Gamma^{(z_{\max})} = -\beta^{(z_{\max}-1)} N_e^2 N^{(z_{\max})} + S^{(z_{\max}-1)} N_e N^{(z_{\max}-1)}, \quad (6в)$$

Здесь $\beta^{(z)}$ - коэффициент рекомбинации электрона и иона $z+1$; $S^{(z)}$ - коэффициент ионизации иона z . Эти величины зависят от иона z и являются функциями N_e и T_e .

Эта система уравнений должна быть дополнена уравнениями переноса лазерного излучения, а в соответствующем случае и пучка тяжелых ионов. Обозначения в приведенных уравнениях общепринятые, для решения этой системы уравнений использовался метод расщепления по физическим процессам (более подробно см. [2]).

3. Разлет плазменного сгустка в вакуум

После воздействия лазерного излучения на сферическую термоядерный мишень, она представляет собой сгусток плотной горячей плазмы. Рассмотрим асимптотических характеристик свободного разлета сгустка плотной горячей двухтемпературной плазмы, последующий разлет этого сгустка в вакуум. Решение этой задачи представляет самостоятельный интерес с точки зрения отработки численной методики и исследования

На рисунке 1 представлены распределения скорости, плотности плазмы и температуры электронов в различные моменты времени. Из рисунка 1(а) видно, что распределение скорости линейно по координате, как и это следует из известного решения задачи Римана о центрированной волне разрежения [10]. Волна разрежения движется со скоростью звука по сгустку, а после достижения его центра, плотность в центре сгустка монотонно падает (рисунок 1(б)). В соответствии с уравнением адиабаты $p / \rho^\gamma = const$, аналогичным образом ведут себя температуры ионов и электронов.

На рисунке 2 для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии представлены зависимости плотности и температуры в центре сгустка от времени. Видно, что в случае сферической симметрии, как следовало ожидать, ее плотность и температура падают наиболее быстро.

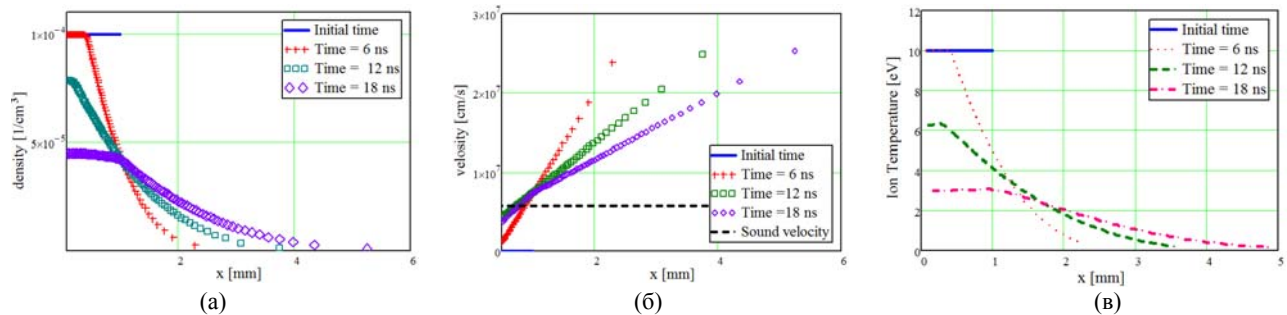


Рисунок 1 - Разлет плазменного сгустка в вакуум: распределение плотности плазмы (а), скорости плазмы (б), температуры ионов (в) в различные моменты времени

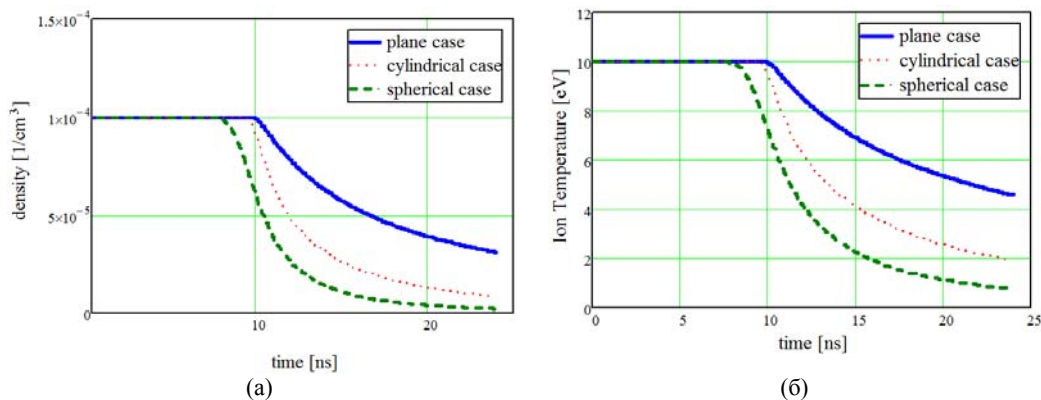


Рисунок 2 - Зависимости плотности (а) и температуры центра сгустка (б) от времени для трех видов геометрии: плоский, цилиндрический, сферический

4. Исследование сжатия сгустка плазмы ударными волнами

Рассмотрим процесс сжатия первоначально покоящегося сгустка плазмы ударными волнами в двух случаях: в плоском и сферический симметричном. В первом случае рассматривается плоский сгусток, а в другом - сферический. Рассмотрим вначале постановку задачи для плоского сгустка.

Пусть левая и правая границы этого первоначально покоящегося слоя начинают двигаться со скоростью $v_{abliator} > 0$ и $-v_{abliator}$, соответственно. Такая постановка задачи соответствует тому, что сгусток плазмы сжимается массивным слоем аблятора, который окружает дейтерий-тритиевую смесь. В силу симметрии задачи можно рассматривать только половину слоя. На оси симметрии будем задавать условие равенства нулю всех потоков (производных по координате для плотности, скорости и температур ионов и электронов).

На рисунке 3 представлены результаты расчетов зависимости распределение плотности, скорости и температуры в различные моменты времени для правой части плоского слоя, центр которого выбран центр оси координат. Из рисунка видно, что в соответствии с известным решением задачи Римана о распаде произвольного разрыва, в нашем случае, внутрь сгустка плазмы идут ударные волны с левой и правой границы.

Ударная волна, дойдя до центра сгустка и столкнувшись там со встречной волной, отражается от нее и далее в виде отраженной волны идет навстречу аблятору. Аблятор здесь играет роль бесконечно тяжелого, жесткого поршня, сжимающего газ. Дойдя до поршня, ударная волна отражается от него и снова идет к центру сгустка. Это повторяющаяся картина сжатия сгустка ударными волнами соответствует сжатию дейтерий-тритиевую мишени слоем аблятора.

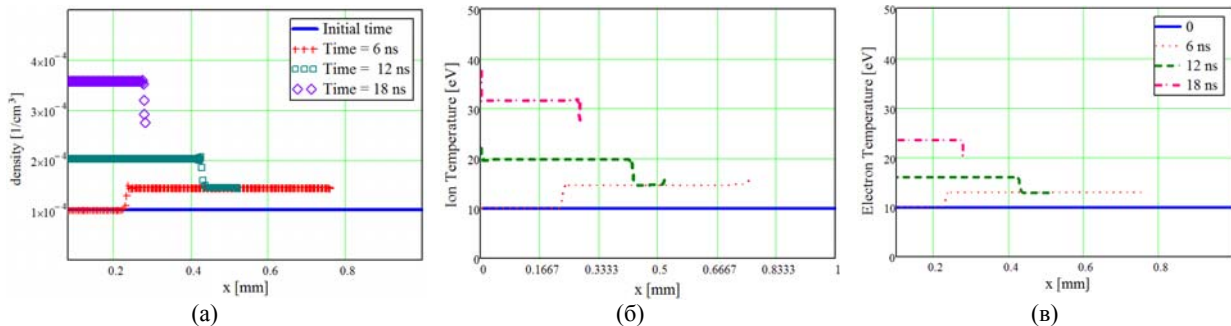


Рисунок 3 - Сжатие сгустка горячей плотной плазмы: распределение плотности плазмы (а), температуры ионов (б), температуры электронов (в) в моменты времени 6, 12, 18 нс

На рисунке 4 представлены аналогичные распределения для случая сферической симметрии. Только в данном случае, в отличие от плоской симметрии, картина взаимодействия ударной волны со своим образом на оси симметрии меняется на картину сходящейся к центру сферы ударной волны. В силу симметрии производные по радиусу в центре сферы тоже полагаются равными нулю.

Такого рода решения исследовались в задачах о сжатии ударной волны в конических мишенях, где вблизи центра в математической постановке возникала сингулярность, а в экспериментах с воздействием лазерного излучения из точки схождения ударной волны фиксировался выход нейтронов [6].

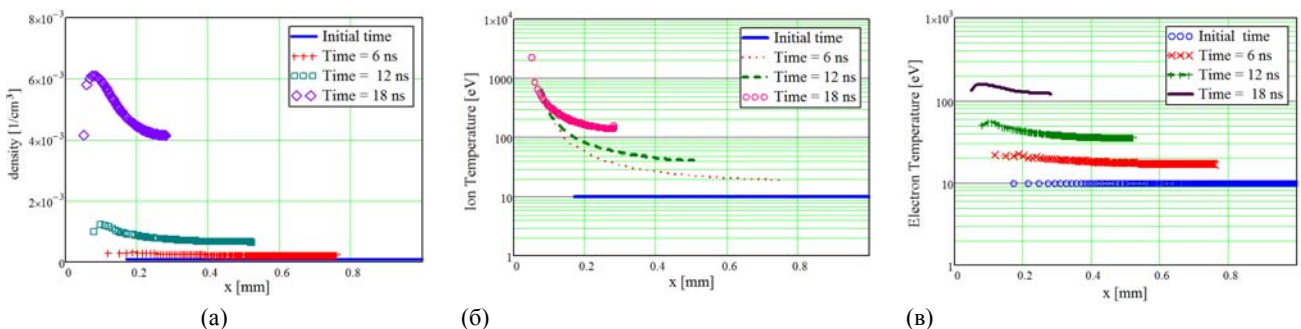


Рисунок 4 - Сжатие сферического сгустка горячей плазмы ударными волнами: распределение плотности плазмы (а), температуры ионов (б), температуры электронов (в) в моменты времени 6, 12, 18 нс

5. О роли электронной теплопроводности при сжатии сгустка плазмы ударными волнами

Важную роль при описании воздействия потоков энергии на плотную горячую плазму играет электронная теплопроводность. Продемонстрируем это влияние на примере задачи предыдущего параграфа о сжатии плоского сгустка плазмы ударными волнами. Для того, чтобы увеличить степень влияния электронной теплопроводности, уменьшим в 10000 раз плотность плазмы. На рисунке 5 представлены соответствующие результаты расчетов распределений температуры ионов и электронов. Из рисунка видно, что в случае высокой теплопроводности электронная температура практически одинакова по всему сгустку, а на фронте ударной волны имеется отрыв температуры ионов от электронов, соответствии с известным решением задачи о структуре фронта ударной волны в плазме.

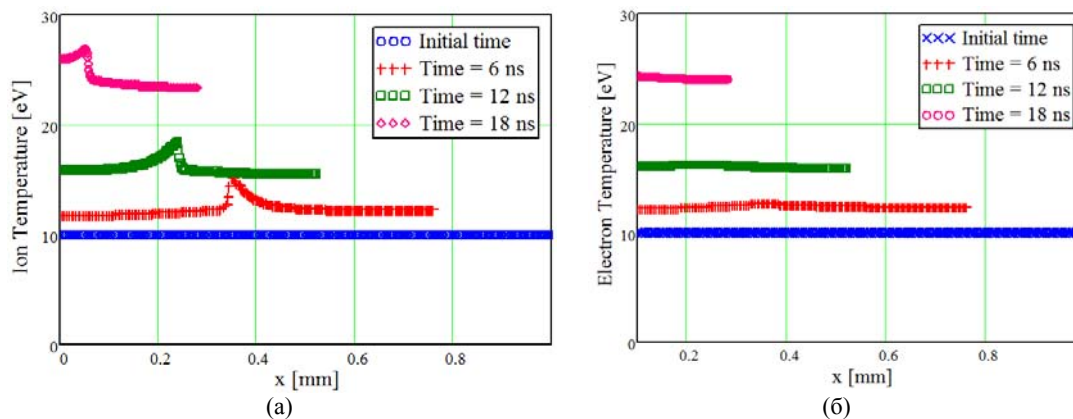


Рисунок 5 - Сжатие плазмы в режиме высокой теплопроводности температуры ионов (а), температуры электронов (б) в различные моменты времени

6. Учет разогрева плазмы лазерным излучением

Рассмотрим взаимодействие лазерного излучения с мишенью, состоящий из дейтерий-тритиевой смеси, которая окружена двухслойной оболочкой, состоящий из слоя дейтерий-тритиевого льда и тонкого слоя золота. Роль оболочки сводится к тому, что при облучении мишени лазером она испаряется и обжимает (аналогично поршню) дейтерий-тритиевую смесь.

Схема физического процесса представляется такой, что поскольку плотность электронов в оболочке превышает критическую, то все лазерное излучение поглощается в ней. Таким образом, на начальной стадии образуется горячая плотная оболочка, масса которой составляет значительную часть массы всей мишени. Далее это оболочка распадается на две части. Одна часть разлетается в вакуум, образуя волну разрежения, а другая часть идет внутрь, образуя сходящуюся к центру ударную волну. В этом случае она играет роль поршня, который, сжимает дейтерий-тритиевое ядро мишени.

В случае сферической геометрии, при прохождении ударной волны к центру, она, достигая несколько раз центра и отражаясь от него и плотного слоя аблятора, приводит к значительному повышению плотности и температуры.

На рисунках 6а - 6б приведены значения всех соответствующих гидродинамических параметров: на рисунке 6а приведены распределения плотности в различные моменты времени. В начальный момент времени имеется покоящийся дейтерий-тритиевый газ с плотностью 10^{-4} г/см³ и на границах слой дейтерий-тритиевого льда с плотностью 0,25 г/см³ и слой аблятора с плотностью 0,5 г/см³. Из рисунка видно, что в центр идет слабая ударная волна. В распределение скорости (рисунок 6б) волна разрежения соответствует линейной зависимости скорости от координаты, а волна сжатия, т.е. ударная волна, идет внутрь.

На рисунке 7 показаны температура электронов и ионов в моменты времени 0,06 нс, 0,12 нс, 0,18 нс. При прохождении фронта ударной волны температура ионов резко увеличивается, и ее значение испытывает разрыв на скачке плотности.

На рисунке 7(в) приведены температуры электронов и ионов в момент времени 0,18 нс с целью демонстрации их поведения. Из рисунка видно, что в хвосте волны разрежения электронная

температура значительно превышает ионную, так как время обмена энергии между ионами и электронами велико из-за большого отношения их масс.

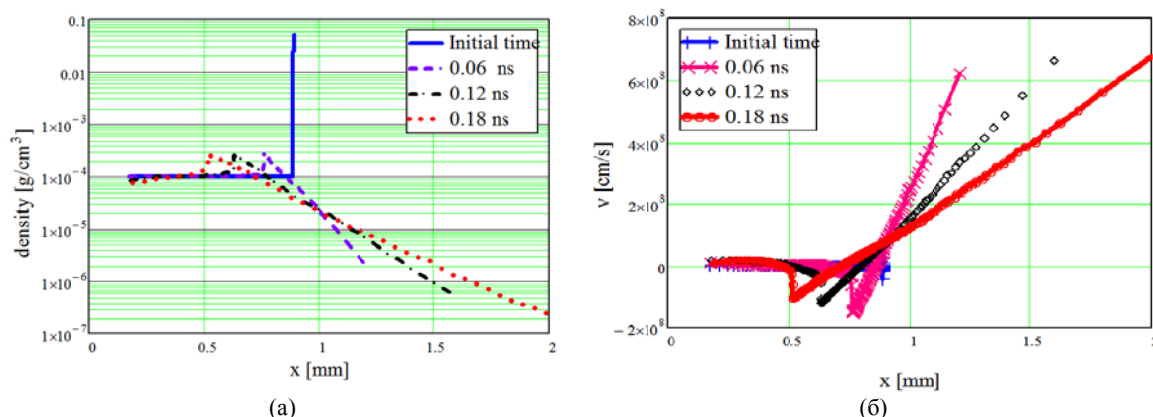


Рисунок 6 - Взаимодействие лазерного излучения с плотной оболочкой материала аблятора: распределение плотности плазмы (б) и скорости плазмы (в) в различные моменты времени

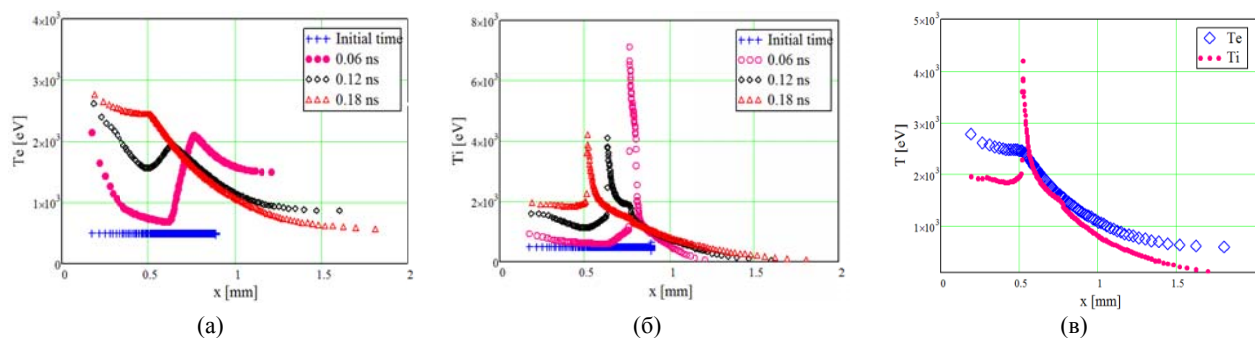


Рисунок 7 - Взаимодействие лазерного излучения с плотной оболочкой материала аблятора: распределение температуры ионов (а), температуры электронов (б) в моменты времени 0.06, 0.12, 0.18 нс и распределение температуры электронов и ионов в момент времени 0.18 нс

Заключение

В работе на основе двухтемпературной одножидкостной гидродинамической модели рассмотрены свойства сгустка плотной горячей плазмы применительно к проблеме инерциального термоядерного синтеза. Приведены уравнения двухтемпературной гидродинамики с учетом электронной теплопроводности, кинетики зарядового состава. Рассмотрены модельные задачи: разлет плазменного сгустка в вакуум, сжатие плазмы ударными волнами, взаимодействие сгустка плазмы с лазерным излучением. На основе разработанных численных методов получены и проанализированы тестовые задачи, возникающие в проблеме инерциального термоядерного синтеза.

Выполненные исследования проведены в рамках НТП №0115PK03029 "НУ-Беркли: стратегическая программа исследования критического состояния вещества, перспективных материалов и источников энергии (2014-2018 г.г.)" МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фортов В.Е. Физика высоких плотностей энергии. М.: Физматлит, 2013, 712 с.
- [2] Дж. Дюдерштадт, Г.Мозес. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984, 304 с.
- [3] Mahdavi M. and Koohrokhi T. Energy deposition of multi-MeV protons in compressed targets of dast-ignition inertial confinement fusion // Physical Review E. - 2012. - Vol. 85. - P. 016405.
- [4] Benedict L.X., Surh M.P., Castor J.I., Khairallah S.A., Whitley H.D., Richards D.F., Glosli J.N., Murillo M S., Scullard C.R., Grabowski P.E., Michta D., and Graziani F.R. Molecular dynamics simulations and generalized Lenard-Balescu calculations of electron-ion temperature equilibration in plasmas // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 86. – P. 046406.

- [5] Issanova M.K., Kodanova S.K., Ramazanov T.S., Bastykova N.Kh., Moldabekov Zh.A., Meister C.-V. Classical scattering and stopping power in dense plasmas: the effect of diffraction and dynamic screening // *Laser and Particle Beams*. – 2016. – Vol. 34. – P. 457-466.
- [6] Самарский А.А., Гайфулин С.А., Захаров А.В., Змитренко Н.В. // *ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики*, 1983, Т. 2, №13, С.34.
- [7] Зуев А.И. // *ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики*. 1983, Т. 3, №14, С.41.
- [8] Долголева Г.В. // *ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики*. 1983, Т. 2, №13, С.29.
- [9] Зельдович Я.В., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. // М:Наука, 1966, 688 с.
- [10] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. // *Матем. сборник*, 1959, Т. 47, №89, С.271-306.
- [11] Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Г. *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*. М.: Наука, 1982, 376 с.
- [12] Майоров С.А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, Т. 26, №11, С. 1735-1739.
- [13] Чарахчян А.А. Об алгоритмах расчета распада разрыва для схемы С.К. Годунова, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000, Т. 40, №5, С. 782-786
- [14] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. - М.: Физматлит, 2001, 205с.

Т.С. Рамазанов¹, С.К. Коданова¹, Н.Х. Бастыкова¹, А. Тихонов², С.А. Майоров³

¹ЭТФФЗИ, Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан;

²Ғылым және Технологиялар мектебі, Назарбаев Университеті, Астана, Қазақстан;

³Ресей академия ғылымының жалпы физика институты, Мәскеу, Ресей

ТЫҒЫЗ ЫСТЫҚ ПЛАЗМА ЖИЫНТЫҒЫНЫҢ ГИДРОДИНАМИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Аннотация: Бұл жұмыста инерциялық термоядролық синтез проблемасы аясында қолданылатын тығыз ыстық плазманың гидродинамикалық қасиеттері зерттелді. Зарядтық құрылым кинетикасының электронды жылуөткізгіштігін ескере отырып, екітемпературалы гидродинамика теңдеулері келтірілген. Плазмалық шоғырдың вакуумге ұшуы, плазманың қарсы толқындармен сығылуы, электрондық өткізгіштің плазма жйынтығын соққы толқындармен қысқан кездегі рөлі, плазма шоғырының лазерлі сәулелендірумен және ауыр иондар шоғырымен әсерлесуі сияқты модельдік есептер қарастырылған. Жасалған сандық есептеулер әдісі негізінде, инерциялық термоядролық синтез мәселесінен туындайтын, тесттік есептер алынды және талданды. Нәтижелері иондар мен электрондардың массалық қатынасы үлкен болуына байланысты олардың арасындағы энергия алмасу уақыты жоғары болғандықтан сиретудің толқыны соңында электрон температурасы ионның температурасына қарағанда айтарлықтай жоғары екенін көрсетеді. Сондай-ақ, сфералық геометрия жағдайда, соққы толқынының центрге қарай өту барысында, ол бірнеше рет центрге жетіп және аблятор қабатынан шағылыса отырып плазма тығыздығы мен температурасын едәуір артуына алып келеді.

Түйін сөздер: Тығыз ыстық плазма, Гидродинамикалық модель, Соққы толқыны, Екітемпературалы плазма, Инерциялық термоядролық синтез үшін нысаналар, Соққы толқындармен сығу.

МАЗМҰНЫ

<i>Серебрянский А., Рева И., Кругов М., Yoshida Fumi.</i> Фэтон (3200) астероидының фотометрлік талдауларының нәтижелері (ағылшын тілінде).....	5
<i>Ерланұлы Е., Батрышев Д.Ф., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т., Ахметжанов Н.А., Аханова Н.Е., Омиржанов О.</i> Плазма параметрлерінің көміртекті наноматериалдардың <i>resvd</i> әдісімен синтезіне әсері (ағылшын тілінде).....	14
<i>Тейфель В.Г., Вдовиченко В.Д., Лысенко П.Г., Каримов А.М., Кириенко Г.А., Филиппов В.А., Харитонова Г.А., Хоженец А.П.</i> Юпитердегі үлкен қызыл дақ: аммиакты жұтылудың кейбір ерекшеліктері (ағылшын тілінде).....	23
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Зазулин Д.М., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Курахмедов А.Е., Чункибаева А., Еділбаев Е.Н.</i> Төменгі энергияларда $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ реакциясын эксперименттік зерттеу (ағылшын тілінде).....	32
<i>Серебрянский А., Серебряков С., Ергешев А.</i> Үлкен ауқымдағы ЗБА-бақылау мәліметтерін фотометрлеу және ағымдық астрометрияның әдіснамасы (ағылшын тілінде).....	37
<i>Минглибаев М. Дж, Шомиекова С.А.</i> Реактивті күшті есепке алып анизатропты айнымалы массадағы екі планеталы үш дене есебінің ұйытқушы функцияның аналитикалық теңдеулері (ағылшын тілінде).....	48
<i>Кондратьева Л.Н., Рыспаев Ф.К., Денисюк Э.К., Кругов М.А.</i> М1-77 планетарлық тұмандықтың жаңа нәтижелері (ағылшын тілінде).....	59
<i>Павлова Л.А., Кондратьева Л.Н.</i> Планетарлық тумандардың біркелкі құрылымын қалыптастыру механизмдері (ағылшын тілінде).....	63
<i>Асанова А.Т., Сабалахова А.П., Толеуханова З.М.</i> Үшінші ретгі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептің шешімі туралы (ағылшын тілінде).....	67
<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> Тұрақты коэффициентті төрт дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесінің көппериодты шешімінің бар болуының коэффициенттік белгілері (ағылшын тілінде).....	74
<i>Мусабеков А., Сарипбаев А., Куракбаева С., Калбаева А., Исмаилов С., Сатыбалдиева Ф., Мусабеков Н., Аубакирова Т.</i> Айна шоғырландырушы жүйенің қозғалыс теңдеуі мен алгоритмін зерттеу (ағылшын тілінде).....	81
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Сингуляр әсерленген Коши есебінің әлді жыйынқталуының кепілдігі (ағылшын тілінде).....	90

* * *

<i>Ерланұлы Е., Батрышев Д.Ф., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т., Ахметжанов Н.А., Аханова Н.Е., Омиржанов О.</i> Плазма параметрлерінің көміртекті наноматериалдардың <i>PECVD</i> әдісімен синтезіне әсері (орыс тілінде).....	107
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Зазулин Д.М., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Курахмедов А.Е., Чункибаева А., Еділбаев Е.Н.</i> Төменгі энергияларда $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ реакциясын эксперименттік зерттеу (орыс тілінде).....	117
<i>Серебрянский А., Серебряков С., Ергешев А.</i> Үлкен ауқымдағы ЗБА-бақылау мәліметтерін фотометрлеу және ағымдық астрометрияның әдіснамасы (орыс тілінде).....	122
<i>Минглибаев М. Дж, Шомиекова С.А.</i> Реактивті күшті есепке алып анизатропты айнымалы массадағы екі планеталы үш дене есебінің ұйытқушы функцияның аналитикалық теңдеулері (орыс тілінде).....	134
<i>Кондратьева Л.Н., Рыспаев Ф.К., Денисюк Э.К., Кругов М.А.</i> М1-77 планетарлық тұмандықтың жаңа нәтижелері (орыс тілінде).....	144
<i>Павлова Л.А., Кондратьева Л.Н.</i> Планетарлық тумандардың біркелкі құрылымын қалыптастыру механизмдері (орыс тілінде).....	149
<i>Рамазанов Т.С., Коданова С.К., Бастыкова Н.Х., Тихонов А., Майоров С.А.</i> Тығыз ыстық плазма жиынтығының гидродинамикалық қасиеттерін зерттеу (орыс тілінде).....	153

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Серебрянский А., Рева И., Кругов М., Yoshida Fumi.</i> Результаты фотометрического анализа астероида фазтон (3200) (на английском языке)	5
<i>Ерланулы Е., Батрышев Д.Г., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т., Ахметжанов Н.А., Аханова Н.Е., Омиржанов О.</i> Влияние параметров плазмы на синтез углеродных наноматериалов методом PECVD (на английском языке).....	14
<i>Тейфель В.Г., Вдовиченко В.Д., Лысенко П.Г., Каримов А.М., Кириенко Г.А., Филиппов В.А., Харитонова Г.А., Хоженец А.П.</i> Большое красное пятно на Юпитере: некоторые особенности аммиачного поглощения (на английском языке).....	23
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Зазулин Д.М., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Курахмедов А.Е., Чункибаева А., Еділбаев Е.Н</i> Экспериментальное исследование реакции $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ при низких энергиях (на английском языке).....	32
<i>Серебрянский А., Серебряков С., Ергешев А.</i> Методика потоковой астрометрии и фотометрии большого массива ПЗС-наблюдений (на английском языке).....	37
<i>Минглибаев М.Дж., Шомиекова С.А.</i> Аналитические выражения возмущающих функции в двухпланетной задаче трех тел с анизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил (на английском языке).....	48
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Денисюк Э.К., Кругов М.А.</i> Новые результаты исследования планетарной туманности М1-77 (на английском языке).....	59
<i>Павлова Л.А., Кондратьева Л.Н.</i> Механизмы формирования неоднородной структуры планетарных туманностей (на английском языке).....	63
<i>Асанова А.Т., Сабалахова А.П., Толеуханова З.М.</i> О решении начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка (на английском языке).....	67
<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> Коэффициентные признаки существования многопериодических решений линейной системы четырех дифференциальных уравнений с постоянными на диагонали коэффициентами (на английском языке).....	74
<i>Мусабеков А., Сарибаяев А., Куракбаева С., Калбаева А., Исмаилов С., Сатыбалдиева Ф., Мусабеков Н., Аубакирова Т.</i> Исследование уравнения и алгоритма движения зеркальной концентрирующей системы (на английском языке).....	81
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Критерии сильной сходимости решений сингулярно возмущенной задачи Коши (на английском языке).....	90
* * *	
<i>Ерланулы Е., Батрышев Д.Г., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т., Ахметжанов Н.А., Аханова Н.Е., Омиржанов О.</i> Влияние параметров плазмы на синтез углеродных наноматериалов методом PECVD (на русском языке).....	107
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Зазулин Д.М., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Курахмедов А.Е., Чункибаева А., Еділбаев Е.Н</i> Экспериментальное исследование реакции $^{10}\text{B}(\text{p},\alpha)^7\text{Be}$ при низких энергиях (на русском языке).....	117
<i>Серебрянский А., Серебряков С., Ергешев А.</i> Методика потоковой астрометрии и фотометрии большого массива ПЗС-наблюдений (на русском языке).....	122
<i>Минглибаев М.Дж., Шомиекова С.А.</i> Аналитические выражения возмущающих функции в двухпланетной задаче трех тел с анизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил (на русском языке).....	134
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Денисюк Э.К., Кругов М.А.</i> Новые результаты исследования планетарной туманности М1-77 (на русском языке).....	144
<i>Павлова Л.А., Кондратьева Л.Н.</i> Механизмы формирования неоднородной структуры планетарных туманностей (на русском языке).....	149
<i>Рамазанов Т.С., Коданова С.К., Бастыкова Н.Х., Тихонов А., Майоров С.А.</i> Исследование гидродинамических свойств сгустка плотной горячей плазмы (на русском языке).....	153

CONTENTS

Serebryanskiy A., Reva I., Krugov M., Yoshida Fumi. Results of photometrical analysis of asteroid (3200) phaethon (in English)..... 5

Yerlanuly Ye., Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Ahmetzhanov N.E., Ahanova N.E., Omirzhanov O. Effect of plasma parameters on the synthesis of carbon nanomaterials by the pecvd method (in English)..... 14

Teifel V.G., Vdovichenko V.D., Lysenko P.G., Karimov A.M., Kirienko G.A., Filippov V.A., Kharitonova G.A., Hozhenets A.P. The great red spot on Jupiter: some features of the ammonia absorption (in English)..... 23

Burtebaev N., Kerimkulov Zh.K., Zazulin D.M., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S., Kurahmedov A.E., Chunkibayeva A., Edilbayev E.N. Experimental study of $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction at low energies (in English)..... 32

Serebryanskiy A., Serebryakov S., Ergeshev A. Methodology of pipeline data reduction for astrometry and photometry of a large array of ccd observations (in English)..... 37

Minglibayev M. Zh., Shomshekova S.A. Analytical expressions of the perturbing functions in two planetary three- body problem with masses varyng non-isotropically when available for reactive forces (in English)..... 48

Kondratyeva L.N., Rspaev F.K., Denissyuk E.K., Krugov M.A. New results of study of the planetary nebula M1-77 (in English) 59

Pavlova L.A., Kondratyeva L.N. Mechanisms for forming the inhomogeneous structure of planetary nebulae (in English)... 63

Assanova A.T., Sabalakhova A.P., Toleukhanova Z.M. On the solving of initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the third order (in English)..... 67

Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. Coefficient criterion of existence of multiperiodic solutions of a linear system of four differential equations with constant coefficients on diagonal (in English)..... 74

Musabekov A., Saribayev A., Kurakbayeva S., Kalbayeva A., Ismailov S., Satybaldieva F., Musabekov N., Aubakirova T. The investigation of equation and algorithm of the mirror concentrating system movement (in English)..... 81

Akylbayev M.I., Beisebayeva A., Shaldanbaev A.Sh. Criteria for strong convergence of solutions singularly of the perturbed Cauchy problem (in English)..... 90

* * *

Yerlanuly Ye., Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T., Ahmetzhanov N.E., Ahanova N.E., Omirzhanov O. Effect of plasma parameters on the synthesis of carbon nanomaterials by the pecvd method (in Russian)..... 107

Burtebaev N., Kerimkulov Zh.K., Zazulin D.M., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S., Kurahmedov A.E., Chunkibayeva A., Edilbayev E.N. Experimental study of $^{10}\text{B}(p,\alpha)^7\text{Be}$ reaction at low energies (in Russian)..... 117

Serebryanskiy A., Serebryakov S., Ergeshev A. Methodology of pipeline data reduction for astrometry and photometry of a large array of ccd observations (in Russian)..... 122

Minglibayev M. Zh., Shomshekova S.A. Analytical expressions of the perturbing functions in two planetary three- body problem with masses varyng non-isotropically when available for reactive forces (in Russian)..... 134

Kondratyeva L.N., Rspaev F.K., Denissyuk E.K., Krugov M.A. New results of study of the planetary nebula M1-77 (in Russian)..... 144

Pavlova L.A., Kondratyeva L.N. Mechanisms for forming the inhomogeneous structure of planetary nebulae (in Russian).. 149

Ramazanov T.S., Kodanova S.K., Bastykova N.Kh., Tikhonov A., Maiorov S.A. Investigation of hydrodynamic properties of hot dense plasma (in Russian)..... 153

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т.А. Апендиев, Д.С. Аленов*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 05.06.2018.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19