

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

**ACADEMIC SCIENTIFIC
JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE**

№2

2026

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)



CENTRAL ASIAN ACADEMIC
RESEARCH CENTER



**ACADEMIC SCIENTIFIC
JOURNAL OF COMPUTER
SCIENCE**

2 (358)

APRIL – JUNE 2026

**PUBLISHED SINCE JANUARY 1963
PUBLISHED 4 TIMES A YEAR**

ALMATY, NAS RK

Chief Editor:

MUTANOV Galimkair Mutanovich, doctor of technical sciences, professor, academician of NAS RK, (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506682964>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1423665>

EDITORIAL BOARD:

KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich, (Deputy Editor-in-Chief), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Advisor to the General Director of the Institute of Information and Computing Technologies of the CS MES RK, Head of the Laboratory (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/2428551>

MAMYRBAEV Orken Zhumazhanovich, (Academic Secretary), PhD in Information Systems, Deputy Director for Science of the Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55967630400>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1774027>

BAIGUNCHEKOV Zhumadil Zhanabaevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Institute of Cybernetics and Information Technologies, Department of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Satbayev University (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506823633>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1923423>

WOICIK Waldemar, Doctor of Technical Sciences (Phys.-Math.), Professor of the Lublin University of Technology (Lublin, Poland), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7005121594>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/678586>

SMOLARJ Andrej, Associate Professor Faculty of Electronics, Lublin polytechnic university (Lublin, Poland), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56249263000>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1268523>

KEILAN Alimkhan, Doctor of Technical Sciences, Professor (Doctor of science (Japan)), chief researcher of Institute of Information and Computational Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8701101900>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1436451>

KHAIROVA Nina, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Institute of Information and Computational Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=37461441200>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1768515>

OTMAN Mohamed, PhD, Professor of Computer Science Department of Communication Technology and Networks, Putra University Malaysia (Selangor, Malaysia), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56036884700>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/747649>

NYSANBAYEVA Saule Yerkebulanovna, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of the Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55453992600>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802041>

USATOVA Olga Alexandrovna, PhD, Associate Professor, Chief Scientific Secretary of the Institute of Information and Computing Technologies of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204581062>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/JCO-3058-2023>

KAPALOVA Nursulu Aldazharovna, Candidate of Technical Sciences, Head of the Laboratory cybersecurity, Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57191242124>,

KOVALYOV Alexander Mikhailovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Applied Mathematics and Mechanics (Donetsk, Ukraine), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/38481396>

MIKHALEVICH Alexander Alexandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004159952>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/46249977>

TIGHINEANU Ion Mihailovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician, President of the Academy of Sciences of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/524462>

Academic Scientific Journal of Computer Science

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

Owner: «Central Asian Academic Research Center» LLP (Almaty).

Certificate № **KZ77VPY00121154** on the re-registration of the periodical printed and online publication of the information agency, issued on **05.06.2025** by the Republican State Institution «Information Committee» of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan

Subject area: *information and communication technologies*.

Currently: *included in the list of journals recommended by the CCSES MSHE RK in the direction of «Information and communication technologies».*

Periodicity: *4 times a year.*

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© «Central Asian Academic Research Center» LLP, 2026

БАС РЕДАКТОР:

МУТАНОВ Ғалымқайыр Мұтанұлы, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506682964>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1423665>

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ:

КАЛИМОЛДАЕВ Мақсат Нұрәділұлы, (бас редактордың орынбасары), физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының кеңесшісі, зертхана меңгерушісі (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/2428551>

МАМЫРБАЕВ Өркен Жұмажанұлы (ғалым хатшы), Ақпараттық жүйелер саласындағы техника ғылымдарының (PhD) докторы, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» директорының ғылым жөніндегі орынбасары (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55967630400>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1774027>

БАЙГУНЧЕКОВ Жұмаділ Жаңабайұлы, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Кибернетика және ақпараттық технологиялар институты, Қолданбалы механика және инженерлік графика кафедрасы, Сәтбаев университеті (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506823633>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1923423>

ВОЙЧИК Вальдемар, техника ғылымдарының докторы (физ-мат), Люблин технологиялық университетінің профессоры (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7005121594>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/678586>

СМОЛАРЖ Анджей, Люблин политехникалық университетінің электроника факультетінің доценті (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56249263000>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1268523>

КЕЙЛАН Әлімхан, техника ғылымдарының докторы, профессор (ғылым докторы (Жапония)), ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының» бас ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8701101900>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1436451>

ХАЙРОВА Нина, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының» бас ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=37461441200>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1768515>

ОТМАН Мохаммед, PhD, Информатика, Коммуникациялық технологиялар және желілер кафедрасының профессоры, Путра университеті Малайзия (Селангор, Малайзия), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56036884700>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/747649>

НЫСАНБАЕВА Сауле Еркебұланқызы, техника ғылымдарының докторы, доцент, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының» аға ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55453992600>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802041>

УСАТОВА Ольга Александровна, PhD, қауымдастырылған профессор, ҚР ҒЖБМ "Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының" бас ғалым хатшысы (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204581062>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/JCO-3058-2023>

КАПАЛОВА Нұрсұлу Алдажарқызы, техника ғылымдарының кандидаты, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты», Киберқауіпсіздік зертханасының меңгерушісі (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57191242124>,

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, физика-математика ғылымдарының докторы, Украина Ұлттық Ғылым академиясының академигі, Қолданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/38481396>

МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович, техника ғылымдарының докторы, профессор, Беларусь Ұлттық Ғылым академиясының академигі (Минск, Беларусь), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004159952>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/46249977>

ТИГИНЯНУ Ион Михайлович, физика-математика ғылымдарының докторы, академик, Молдова Ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университеті (Кишинев, Молдова), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/524462>

Academic Scientific Journal of Computer Science

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктеуші: «Орталық Азия академиялық ғылыми орталығы» ЖШС (Алматы).

Ақпарат агенттігінің мерзімді баспасөз басылымын, ақпарат агенттігін және желілік басылымды қайта есепке қою туралы ҚР Мәдениет және Ақпарат министрлігі «Ақпарат комитеті» Республикалық мемлекеттік мекемесі **05.06.2025** ж. берген № **KZ77VPY00121154** Куәлік.

Тақырыптық бағыты: *ақпараттық-коммуникациялық технологиялар*

Қазіргі уақытта: *«ақпараттық-коммуникациялық технологиялар» бағыты бойынша ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдар тізіміне енді.*

Мерзімділігі: *жылына 4 рет.*

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© «Орталық Азия академиялық ғылыми орталығы» ЖШС, 2026

Главный редактор:

МУТАНОВ Галимканр Мутанович, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=6506682964>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1423665>

Редакционная коллегия:

КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, советник генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК, заведующий лабораторией (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=56153126500>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/2428551>

МАМЫРБАЕВ Оркен Жумажанович, (ученый секретарь), доктор философии (PhD) по специальности «Информационные системы», заместитель директора по науке РГП «Институт информационных и вычислительных технологий» Комитета науки МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=55967630400>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1774027>

БАЙГУНЧЕКОВ Жумадил Жанабаевич, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, Институт кибернетики и информационных технологий, кафедра прикладной механики и инженерной графики, Университет Сагпаева (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=6506823633>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1923423>

ВОЙЧИК Вальдемар, доктор технических наук (физ.-мат.), профессор Люблинского технологического университета (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=7005121594>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/678586>

СМОЛАРЖ Анджей, доцент факультета электроники Люблинского политехнического университета (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=56249263000>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1268523>

КЕЙЛАН Алимхан, доктор технических наук, профессор (Doctor of science (Japan)), главный научный сотрудник РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=8701101900>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1436451>

ХАЙРОВА Нина, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=37461441200>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1768515>

ОТМАН Мохамед, доктор философии, профессор компьютерных наук, Департамент коммуникационных технологий и сетей, Университет Путра Малайзия (Селангор, Малайзия), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=56036884700>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/747649>

НЫСАНБАЕВА Сауле Еркебулановна, доктор технических наук, доцент, старший научный сотрудник РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=55453992600>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802041>

УСАТОВА Ольга Александровна, PhD, ассоциированный профессор, Главный ученый секретарь «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=57204581062>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/JCO-3058-2023>

КАПАЛОВА Нурсулу Алдажаровна, кандидат технических наук, заведующий лабораторией кибербезопасности РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=57191242124>,

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=7202799321>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/38481396>

МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси (Минск, Беларусь), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=7004159952>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/46249977>

ТИГИНЯНУ Ион Михайлович, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова), <https://www.scopus.com/author/detail.uri?authorId=7006315935>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/524462>

Academic Scientific Journal of Computer Science

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: *ТОО «Центрально-азиатский академический научный центр» (г. Алматы).*

Свидетельство о постановке на переучет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания № **KZ77VRY00121154**. Дата выдачи **05.06.2025**

Тематическая направленность: *информационно-коммуникационные технологии.*

В настоящее время: *вошел в список журналов, рекомендованных КОКШВО МНВО РК по направлению «информационно-коммуникационные технологии».*

Периодичность: *4 раза в год.*

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© ТОО «Центрально-азиатский академический научный центр», 2026

CONTENTS

COMPUTER SCIENCE

| | |
|--|-----|
| Abduraimova B.K., Toleukhan A.B., Sapakova S.Z., Abisheva A.A. Development of early cyberattack detection method using CNN-LSTM for IoT..... | 11 |
| Aben A.B., Kazbekova G.N., Baimakhanova A.S., Amanzholova A.B. Classification of birds and drones in the sky using MobileNetV2 model..... | 30 |
| Akbarov D., Sembayev T. Quality-aware pose–hand keypoint extraction pipeline for skeleton-based sign language recognition..... | 44 |
| Algazy K., Alimzhan Y., Sakan K., Nyssanbayeva S. Lattice-based vector commitments for Verkle trees..... | 67 |
| Asylkhan N., Baidrakhmanova M.G. Principles and models of spatial organization of buildings for crop production considering technological and climatic factors..... | 87 |
| Basheyeva Zh., Tokesh A., Bekish U., Abdoldinova G. Artificial intelligence for academic project management: a bibliometric analysis and systematic review..... | 105 |
| Bekmanova G., Kantureyeva M., Omarbekova A., Zakirova A., Issainova A. Integrating artificial intelligence to evaluate emotions in the learning environment..... | 125 |
| Dzhusupbekova G.T., Jangassiyev R.M. Gemini AI integration based on .NET MAUI for education: hybrid architecture and empirical load testing..... | 146 |
| Doszhan N.S., Sultanbekova L.Ye., Zhumagali S.Zh., Konysbayev E.K. Modeling and parameter calculation of an emergency response system based on LoRaWAN technology in the high-altitude conditions of the Zailiysky Alatau..... | 166 |
| Zhumakhanova A., Kudabayeva R., Akanova K., Myrkanova A. Entropy-normalized multidimensional model for user activity segmentation in Reddit... | 180 |
| Karabaliyev Y., Kolesnikova K., Khlevnaya Y. HybridKazASR: a hybrid automatic speech recognition system combining multi-model rover fusion and morpheme-aware language modeling for Kazakh..... | 198 |
| Kerimkhulle S.E., Adalbek A., Baizakov N.A., Shodorova N.N. Piecewise logistic and fuzzy modeling of Kazakhstan's GDP dynamics (1990–2024).... | 212 |
| Kulakayeva A., Ashurov A., Aitmagambetov A., Ongenbayeva Zh. Development of mathematical models and criteria for the admissibility of orbital maneuvers of spacecraft..... | 228 |

Kulatay A.A., Zhaisanova D.S., Daurenbayeva N.A., Mamanova S.Y., Tolegen M.
Machine learning for personalized learning in gamified edtech platforms:
Aqyl Battle case.....248

Mamyrbayev O., Kurmetkan T.
Enhanced sentiment analysis of e-commerce product reviews using
Luong attention-based Bi-LSTM.....263

Marassulov U.A., Kazbekova G.
TF-IDF-based fake news detection in Kazakh and Russian.....286

Omar A.B., Mussiraliyeva Sh.Zh.
Federated learning: models based on transformer architecture.....302

Rakhimova D., Duisenbekkyzy Zh., Karibayeva A., Eşref A., Ilessova B.
Improving the voice recognition system for children in Kazakh through additional
training (fine-tuning).....317

Sarsembayev M, Urmashev B.
Optimization of the calculation of kinetic equations of combustion processes on GPU
using global memory and shared memory.....335

Symagulov A., Smurygin V., Belousov A., Karypov A., Yunicheva N.R.
Improving the accuracy of crop and weed detection using UAVs in soya fields
through image segmentation.....347

Tashenova Zh., Gabdullin A.R., Abdugulova Zh., Amanzholova Sh., Santeyeva S.
Security evaluation of WPA3 wireless networks under deauthentication
attack scenarios.....368

**Tursunbayeva G.U., Satybalдина D.Zh., Tleuberdin S.T., Tashatov N.N.,
Egamberdiyev E.E.**
Anomaly detection in UAV telemetry systems based on simulation modeling.....391

Tursynova N., Yerimbetova A., Amangeldy N., Zhumabayeva A., Daiyrbayeva E.
Comparative analysis of multilingual transformer models for Kazakh-to-gloss
translation.....414

Shangpeng Lei, Balakayeva G.
Dual-branch physical information neural networks for data center airflow velocity
and thermal modeling.....433

Shynzhigit B.B., Balabekova M.O., Amangeldy T.T., Malik G.J., Balgimbekova U.B.
Automatic brick defects detection by using a CNN-based deep learning model.....449

МАЗМҰНЫ

КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР

| | |
|--|-----|
| Абдураимова Б.К., Төлеухан Ә.Б., Сапакова С.З., Абишева А.А. Кибершабулдарды ерте анықтау әдісін CNN-LSTM негізінде дамыту (IoT үшін)..... | 11 |
| Абен А.Б., Қазбекова Г.Н., Баймаханова А.С., Аманжолова Ә.Б. MobileNetV2 моделімен аспандағы құстар мен дрондарды классификациялау..... | 30 |
| Ақбаров Д.Р., Сембаев Т.М. Ым тілін тануға арналған дене қалпы мен қолдың негізгі нүктелерін сапаны бақылаумен анықтау әдісі..... | 44 |
| Алғазы К.Т., Әлімжан Е.Ж., Сақан Қ.С., Нысанбаева С.Е. Verkle ағаштарына арналған торлық векторлық міндеттемелер..... | 67 |
| Асылхан Н., Байдрахманова М.Г. Технологиялық және климаттық факторларды ескере отырып, өсімдік шаруашылығы ғимараттарының кеңістік ұйымдастыру қағидалары мен модельдері..... | 87 |
| Башеева Ж., Төкеш Ә., Бекіш Ұ., Абдолдинова Г. Академиялық жобаларды басқарудағы жасанды интеллект: библиометриялық талдау және жүйелі шолу..... | 105 |
| Бекманова Г.Т., Кантурсева М.А., Омарбекова А.С., Закирова А.Б., Исайнова А.Н. Оқу ортасындағы эмоцияларды бағалау үшін жасанды интеллектті біріктіру..... | 125 |
| Джусупбекова Г.Т., Жангасиев Р.М. Білім беруге арналған .NET MAUI негізіндегі Gemini AI интеграциясы: гибриді архитектуралық және эмпирикалық жүктемелік тестілеу..... | 146 |
| Досжан Н.С., Султанбекова Л.Е., Жумағали С.Ж., Қонысбаев Е.К. Іле Алатауының биік таулы жағдайында LORAWAN технологиясы негізіндегі жедел әрекет ету жүйесінің параметрлерін модельдеу және есептеу..... | 166 |
| Жумаханова А., Қудабаева Р., Ақанова К., Мырқанова А. REDDIT-те пайдаланушы әрекетін сегменттеуге арналған энтропия-нормалданған көп өлшемді модель..... | 180 |
| Қарабаев Е., Колесникова К., Хлевная Ю. HybridKazASR: Rover көпмодельді біріктіру және морфемеге негізделген тілдік модельдеуді пайдаланатын қазақ тілін автоматты тану гибриді жүйесі..... | 198 |
| Керімқұл С.Е., Адалбек А., Байзақов Н.А., Шодорова Н.Н. Қазақстан ЖІӨ динамикасын кезеңдік (Piecewise) логистикалық және бұлдыр модельдеу (1990–2024)..... | 212 |

| | |
|---|-----|
| Кулакаева А.Е., Ашуrow А.Е., Айтмағамбетов А.З., Онгенбаева Ж.Ж. Ғарыш аппараттарының орбиталық маневрлерінің математикалық модельдері мен рұқсат критерийлерін әзірлеу..... | 228 |
| Құлатай А.А., Жайсанова Д.С., Дауренбаева Н.А., Маманова С.Е., Төлеген М. Геймификацияланған edtech платформаларда оқытуды жекелендіруге арналған машиналық..... | 248 |
| Мамырбаев Ө.Ж., Құрметқан Т. Луонг назар механизміне негізделген BI-LSTM көмегімен электрондық коммерция өнімдеріне жазылған пікірлерге жетілдірілген сентименттік талдау жасау..... | 263 |
| Марасулов У.А., Казбекова Г. Қазақ және орыс тілдеріндегі жалған жаңалықтарды TF-IDF арқылы анықтау..... | 286 |
| Омар А.Б., Мусиралиева Ш.Ж. Федеративті оқыту: трансформер архитектурасына негізделген модельдер..... | 302 |
| Рахимова Д., Дүйсенбекқызы Ж., Кәрібаева А., Ешref А., Ілесова Б. Қазақ тіліндегі балалар дауысын тану жүйесін қосымша оқыту (Fine-Tuning) арқылы жетілдіру..... | 317 |
| Сарсембаев М., Урмашев Б. Global memory және shared memory қолдану арқылы GPU-да жану процестерінің кинетикалық теңдеулерін есептеуді оңтайландыру..... | 335 |
| Сымагулов А., Смурыгин В., Белоусов А., Карыпов А., Юничева Н.Р. Соя алқаптарында ҰҰА көмегімен мәдени және арамшөп өсімдіктерін детекттеу сапасын кескіндерді сегменттеу арқылы арттыру..... | 347 |
| Ташенова Ж.М., Габдуллин А.Р., Абдугулова Ж.К., Аманжолова Ш.А., Сантеева С.Ә. Деатентификациялау шабуылы сценарийлеріндегі WPA3 сымсыз желілерінің қауіпсіздігін бағалау..... | 368 |
| Турсунбаева Г., Сатыбалдина Д., Глеубердин С., Ташатов Н., Эгамбердиев Э. Симуляциялық модельдеу негізінде ұшқышсыз ұшу аппараттарының телеметриялық жүйелеріндегі аномалияларды анықтау..... | 391 |
| Турсынова Н., Еримбетова А., Амангелді Н., Жумабаева А., Дайырбаева Э. Қазақ тілінен глосска аудару үшін көптілді трансформерлік модельдердің салыстырмалы талдауы..... | 414 |
| Шанпэн Лей, Балакаева Г. Деректер орталығының ауа ағынының жылдамдығына және термиялық модельдеуге арналған екі тармақты физикалық ақпараттық нейрондық желілер..... | 433 |
| Шынжігіт Ш.Б., Балабекова М.О., Амангелді Т.Т., Мәлік Г.Ж., Балгимбекова У.Б. Кіріпші ақауларын автоматты анықтауда snn негізіндегі терең оқыту моделін пайдалану..... | 449 |

СОДЕРЖАНИЕ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

| | |
|--|-----|
| Абдураимова Б.К., Толеухан А.Б., Сапакова С.З., Абишева А.А. Разработка метода раннего обнаружения кибератак на основе CNN-LSTM для IoT..... | 11 |
| Абен А.Б., Казбекова Г.Н., Баймаханова А.С., Аманжолова А.Б. Классификация птиц и дронов в небе с использованием модели MobileNetV2..... | 30 |
| Акбаров Д.Р., Сембаев Т.М. Метод получения ключевых точек позы и кистей с контролем качества для распознавания жестового языка..... | 44 |
| Алгазы К.Т., Алимжан Е.Ж., Сакан К.С., Нысанбаева С.Е. Решеточные векторные обязательства для Verkle-деревьев..... | 67 |
| Асылхан Н., Байдрахманова М.Г. Принципы и модели пространственной организации зданий для растениеводства с учетом технологических и климатических факторов..... | 87 |
| Башеева Ж., Токеш А., Бекиш У., Абдолдинова Г. Искусственный интеллект в управлении академическими проектами: библиометрический анализ и систематический обзор..... | 105 |
| Бекманова Г.Т., Кантуреева М.А., Омарбекова А.С., Закирова А.Б., Исайнова А.Н. Интеграция искусственного интеллекта для оценки эмоций в учебной среде..... | 125 |
| Джусупбекова Г.Т., Джангасиев Р.М. Интеграция Gemini AI на базе .NET MAUI для образования: гибридная архитектура и эмпирическое нагрузочное тестирование..... | 146 |
| Досжан Н.С., Султанбекова Л.Е., Жумагали С.Ж., Коньсбаев Е.К. Моделирование и расчет параметров системы экстренного реагирования на базе технологии LoRaWAN в условиях высокогорья Заилийского Алатау..... | 166 |
| Жумаханова А., Кудабаева Р., Аканова К., Мырканова А. Энтропийно-нормализованная многомерная модель для сегментации активности пользователей в Reddit..... | 180 |
| Карабалиев Е., Колесникова К., Хлевна Ю. HybridKazASR: гибридная система автоматического распознавания казахской речи на основе многомодельного объединения ROVER и морфемно-ориентированного языкового моделирования..... | 198 |
| Керимкулов С.Е., Адалбек А., Байзаков Н.А., Шодорова Н.Н. Кусочно-логистическое и нечеткое моделирование динамики ВВП Казахстана (1990–2024)..... | 212 |
| Кулакаева А.Е., Ашуров А.Е., Айтмагамбетов А.З., Онгенбаева Ж.Ж. Разработка математических моделей и критериев допустимости орбитальных маневров космических аппаратов..... | 228 |

| | |
|---|-----|
| Кулатай А.А., Жайсанова Д.С., Дауренбаева Н.А., Маманова С.Е., Толеген М. Машинное обучение для персонализации обучения на геймифицированных EdTech-платформах: кейс Aqyl Battle..... | 248 |
| Мамырбаев О., Курметкан Т. Усовершенствованный анализ тональности отзывов о товарах электронной коммерции с использованием Bi-LSTM на основе механизма внимания Луонга..... | 263 |
| Марасулов У.А., Казбекова Г. Выявление ложных новостей на казахском и русском языках TF-IDF-моделями..... | 286 |
| Омар А.Б., Мусиралиева Ш.Ж. Федеративное обучение: модели на основе архитектуры трансформеров..... | 302 |
| Рахимова Д., Дуйсенбеккызы Ж., Карибаева А., Еҫref А., Илесова Б. Совершенствование системы распознавания голоса детей на казахском языке путем дополнительного обучения (fine-tuning)..... | 317 |
| Сарсембаев М., Урмашев Б. Оптимизация расчета кинетических уравнений процессов горения на GPU с использованием global memory и shared memory..... | 335 |
| Сымагулов А., Смургин В., Белоусов А., Карыпов А., Юничева Н.Р. Улучшение качества детектирования культурных и сорных растений с помощью БПЛА на полях сои с применением сегментации изображений..... | 347 |
| Ташенова Ж.М., Габдуллин А.Р., Абдугулова Ж.К., Аманжолова Ш.А., Сантеева С.А. Оценка безопасности беспроводных сетей WPA3 в условиях атаки с деаутификацией..... | 368 |
| Турсунбаева Г., Сатыбалдина Д., Тлеубердин С., Ташатов Н., Эгамбердиев Э. Обнаружение аномалий в телеметрических системах БПЛА на основе симуляционного моделирования..... | 391 |
| Турсынова Н., Еримбетова А., Амангелді Н., Жумабаева А., Дайырбаева Э. Сравнительный анализ многоязычных трансформерных моделей для перевода с казахского языка на глоссированное представление..... | 414 |
| Шанпэн Лэй, Балакаева Г. Двухветвевые физически информированные нейронные сети для моделирования воздушных потоков и тепловых условий в центрах обработки данных..... | 433 |
| Шынжыгит Ш.Б., Балабекова М.О., Амангелды Т.Т., Малик Г.Ж., Балгимбекова У.Б. Использование модели глубокого обучения на основе CNN для автоматического обнаружения дефектов кирпичной кладки..... | 449 |

ACADEMIC SCIENTIFIC JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE
ISSN 1991-346X
Volume 2.
Number 358 (2026). 228–247

<https://doi.org/10.32014/2026.2518-1726.436>

IRSTI 89.25
UDC 629.78

© **Kulakayeva A.^{1*}, Ashurov A.², Aitmagambetov A.¹,
Ongenbayeva Zh.¹, 2026.**

¹ JSC «International Information Technology University», Almaty, Kazakhstan;

² NJSC «L.N. Gumilyov Eurasian National University», Astana, Kazakhstan.

E-mail: a.kulakayeva@iitu.edu.kz

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS AND CRITERIA FOR THE ADMISSIBILITY OF ORBITAL MANEUVERS OF SPACECRAFT

Kulakayeva Aigul — PhD, Associate Professor of International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: a.kulakayeva@iitu.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-0143-085X>;

Ashurov Abdikul — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan,

E-mail: ashurov_ae@enu.kz, <http://orcid.org/0000-0001-6044-5579>;

Aitmagambetov Altay — Candidate of Technical Sciences, professor of International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: a.aitmagambetov@iitu.edu.kz, <http://orcid.org/0000-0002-7808-5273>;

Ongenbayeva Zhadyra — senior-lecturer of International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: zh.ongenbayeva@iitu.edu.kz, <http://orcid.org/0000-0001-8497-2955>.

Abstract. The relevance of this work is driven by the increasing number of spacecraft and the increasing complexity of autonomous rendezvous, satellite servicing, and space debris avoidance. Existing classical approaches are often ineffective due to stringent engineering constraints requiring rapid solutions in real time. The goal of the study is to develop mathematical models and algorithms for synthesizing feasible maneuvers that ensure the achievement of specified end conditions, fuel economy, and strict adherence to dynamic thrust constraints, energy limits, and geometric attitude constraints. The study is based on classical celestial mechanics methods within the two-body problem. The spacecraft's state is described both in the inertial coordinate system (ECI) and in the local orbital reference frame (RTN). The methodology is based on the sequential application of three models: impulse, gradient, and low-thrust. As a result of the study, a set of mathematical models was developed that establish an analytical relationship

between the impact components in the RTN system and changes in the six Keplerian orbital elements. Optimal points of force application were determined to minimize side perturbations of orbital elements. A significant achievement was the formalization of maneuver admissibility conditions by describing a set of admissible controls. These conditions take into account constraints on the thrust magnitude and rate of change, mass consumption limits based on the Tsiolkovsky formula, and thrust vector orientation requirements. The study resulted in a comprehensive methodology that combines the theoretical foundations of ballistics with practical requirements for spacecraft design. The scientific novelty lies in the development of criteria that enable the transformation of theoretical calculations into a feasible flight plan, taking into account technical constraints. The practical significance of the study lies in the creation of a comprehensive methodology that combines the classical theory of celestial mechanics with real-world engineering requirements for spacecraft.

Keywords: orbital maneuvers, impulse maneuver, gradient maneuver, low-thrust maneuver, Keplerian elements, permissible maneuver, deorbiting, orbit

Financing. *This research was funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan Grant No. AP26103099, titled “Development of deorbiting methods for Kazakhstan satellites using virtual reality technology”*

For citations: Kulakayeva A., Ashurov A., Aitmagambetov A., Ongenbayeva Zh. Development of mathematical models and criteria for the admissibility of orbital maneuvers of spacecraft. Academic Scientific Journal of Computer Science, 2026. — No.2. — P. 228–247. DOI <https://doi.org/10.32014/2026.2518-1726.436>

© Кулакаева А.Е.^{1*}, Ашуrow А.Е.², Айтмағамбетов А.З.¹,
Онгенбаева Ж.Ж.¹, 2026.

¹ «Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті» АҚ,
Алматы, Қазақстан;

² «Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті» КеАҚ,
Астана, Қазақстан.

E-mail: a.kulakayeva@iitu.edu.kz

ҒАРЫШ АППАРАТТАРЫНЫҢ ОРБИТАЛЫҚ МАНЕВРЛЕРІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ МЕН РҰҚСАТ КРИТЕРИЙЛЕРІН ӨЗІРЛЕУ

Кулакаева Айгуль — PhD, Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің қауымдастырылған профессоры, Алматы, Қазақстан,
E-mail: a.kulakayeva@iitu.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-0143-085X>;

Ашуrow Абдикул — физика-математика ғылымдарының кандидаты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті, Астана, Қазақстан,

E-mail: ashurov_ac@enu.kz, <http://orcid.org/0000-0001-6044-5579>;

Айтмағамбетов Алтай — техника ғылымдарының кандидаты, Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің профессоры, Алматы, Қазақстан,

E-mail: a.aitmagambetov@iitu.edu.kz, <http://orcid.org/0000-0002-7808-5273>;

Онгенбаева Жадыра — Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің аға оқытушысы, Алматы, Қазақстан,

E-mail: zh.ongenbayeva@iitu.edu.kz, <http://orcid.org/0000-0001-8497-2955>.

Аннотация. Жұмыстың өзектілігі ғарыш аппараттары санының артуына және автономды жақындасу, спутниктерге қызмет көрсету және ғарыш қоқыстарынан жалтару міндеттерінің күрделілігіне байланысты. Қолданыстағы классикалық тәсілдер көбінесе нақты уақыттағы жедел шешімді қажет ететін қатаң инженерлік шектеулерге байланысты тиімсіз болып шығады. Зерттеудің мақсаты-берілген соңғы шарттарға қол жеткізуді, отын үнемдеуді және динамикалық тарту шектеулерін, энергия шектеулерін және бағдарлау геометриялық шектеулерін қатаң сақтауды қамтамасыз ететін рұқсат етілген маневрлерді синтездеудің математикалық модельдері мен алгоритмдерін әзірлеу. Ғарыш аппаратының күйі ЕСІ инерциялық координаттар жүйесінде де, жергілікті орбиталық RTN жүйесінде де сипатталады. Әдістеме үш модельді дәйекті қолдануға негізделген: импульстік, градиенттік және төмен тарту. Жұмыс нәтижесінде RTN жүйесіндегі әсер ету компоненттері мен орбитаның алты Кеплер элементінің өзгерістері арасында аналитикалық байланыс орнататын математикалық модельдер кешені жасалды. Орбита элементтерінің жанама бұзылыстарын азайту үшін күш қолданудың оңтайлы нүктелері анықталды. Маңызды жетістік көптеген рұқсат етілген басқаруларды сипаттау арқылы маневрлердің рұқсат етілу шарттарын ресімдеу болды. Мұндай шарттар модуль бойынша шектеулерді және тартудың өзгеру жылдамдығын, Циолковский формуласына негізделген масса ағынының лимиттерін, сондай-ақ тарту векторының бағытына қойылатын талаптарды ескереді. Зерттеудің нәтижесі баллистиканың теориялық негіздерін ғарыш аппараттарының дизайнына практикалық талаптармен біріктіретін кешенді әдістеме болды. Ғылыми жаңалық-техникалық шектеулерді ескере отырып, теориялық есептеуді іске асырылатын ұшу жоспарына айналдыруға мүмкіндік беретін критерийлерді әзірлеу. Зерттеудің практикалық маңыздылығы аспан механикасының классикалық теориясын ғарыш аппараттарына қойылатын нақты инженерлік талаптармен біріктіретін кешенді әдістемені құру болып табылады.

Түйін сөздер: орбиталық маневрлер, импульстік маневр, градиент маневрі, төмен тарту маневрі, Кеплер элементтері, жарамды маневр, деорбитация, орбита

© Кулакаева А.Е. ^{1*}, Ашуров А.Е. ², Айтмагамбетов А.З. ¹,
Онгенбаева Ж.Ж. ¹, 2026.

¹ АО «Международный университет информационных технологий»,
Алматы, Казахстан;

² НАО «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева»,
Астана, Казахстан.

E-mail: a.kulakayeva@iitu.edu.kz

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ДОПУСТИМОСТИ ОРБИТАЛЬНЫХ МАНЕВРОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Кулакаева Айгуль — PhD, Ассоциированный профессор Международного университета информационных технологий, Алматы, Казахстан,

E-mail: a.kulakayeva@iitu.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-0143-085X>;

Ашуров Абдикул — кандидат физико-математических наук, Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,

E-mail: ashurov_ae@enu.kz, <http://orcid.org/0000-0001-6044-5579>;

Айтмагамбетов Алтай — кандидат технических наук, профессор Международного университета информационных технологий, Алматы, Казахстан,

E-mail: a.aitmagambetov@iitu.edu.kz, <http://orcid.org/0000-0002-7808-5273>;

Онгенбаева Жадыра — старший преподаватель Международного университета информационных технологий, Алматы, Казахстан,

E-mail: zh.ongenbayeva@iitu.edu.kz, <http://orcid.org/0000-0001-8497-2955>.

Аннотация. Актуальность работы обусловлена увеличением количества космических аппаратов и возрастающей сложностью задач автономного сближения, обслуживания спутников и уклонения от космического мусора. Существующие классические подходы часто оказываются недостаточно эффективными из-за жестких инженерных ограничений, требующих оперативного решения в реальном времени. Целью исследования является разработка математических моделей и алгоритмов синтеза допустимых маневров, обеспечивающих достижение заданных конечных условий, экономию топлива и строгое соблюдение динамических ограничений по тяге, энергетических лимитов и геометрических ограничений на ориентацию. В основу исследования положены методы классической небесной механики в рамках задачи двух тел. Состояние космического аппарата описывается как в инерциальной системе координат ЕСІ, так и в локальной орбитальной системе RTN. Методология базируется на последовательном применении трех моделей: импульсной, градиентной и низкотяговой. В результате работы разработан комплекс математических моделей, устанавливающих аналитическую связь между компонентами воздействия в системе RTN и изменениями шести кеплеровых элементов орбиты. Определены оптимальные точки приложения силы для минимизации побочных возмущений элементов орбиты. Важным достижением стала формализация условий допустимости маневров посред-

ством описания множества допустимых управлений. Такие условия учитывают ограничения по модулю и скорости изменения тяги, лимиты расхода массы на основе формулы Циолковского, а также требования для ориентации вектора тяги. Итогом исследования стала комплексная методология, объединяющая теоретические основы баллистики с практическими требованиями к конструкции космических аппаратов. Научная новизна заключается в разработке критериев, позволяющих преобразовать теоретический расчет в реализуемый полетный план с учетом технических ограничений. Практическая значимость исследования заключается в создании комплексной методологии, которая объединяет классическую теорию небесной механики с реальными инженерными требованиями к космическим аппаратам.

Ключевые слова: орбитальные маневры, импульсный маневр, градиентный маневр, низкотяговый маневр, кеплеровы элементы, допустимый маневр, деорбитация, орбита

Введение. Актуальность исследований орбитальных маневров связана с ростом числа космических аппаратов (КА) и усложнением задач на орбите, включая автономное сближение и стыковку, обслуживание КА и уклонение от космического мусора. Поэтому переход от традиционного планирования маневров к точным алгоритмам управления движением КА в реальном времени становится особенно важным. Это связано с тем, что при выполнении маневров необходимо учитывать ограничения по тяге, запасу энергии и ориентации бортовой аппаратуры, что требует разработки новых математических моделей и критериев допустимости маневров.

Литературный обзор. Современное моделирование орбитальных маневров КА включает в себя разнообразные методы: от классических аналитических приближений до сложных алгоритмов наведения, работающих в режиме реального времени. В работе (Baranova et al., 2025) приведены результаты исследований параметров копланарного сближения на околокруговых орбитах, где показано, что применение трехэтапного алгоритма (аналитический расчет импульсов, их распределение и оптимизация) позволяет минимизировать суммарную характеристическую скорость при использовании двигателей малой тяги. Для задач формирования группового полета в работе (Wang et al., 2025) предложен аналитический закон наведения на базе концепции «искусственной гравитации», обеспечивающий синтез устойчивых траекторий облета в форме пространственных эллипсов. В исследовании (Fan et al., 2024) продемонстрирована эффективность применения параметризации кривыми Безье для быстрой генерации траекторий межпланетных перелетов с учетом динамических ограничений тяги. В свою очередь, в работе (Sanchez et al., 2020) показано, что использование теории дифференциальной плотности и B-сплайнов позволяет трансформировать дифференциальные уравнения связанного движения в эквивалентную алгебраическую форму, существенно упрощая процесс планирования.

Отдельным важным направлением является учет совокупности динамических и геометрических ограничений при реализации маневров. В работе (Sumarokov et al., 2019) представлен алгоритм BVLS (Bounded Variables Least Squares) для оптимизации конфигурации включения 30 двигателей причаливания и ориентации, обеспечивающий точность стабилизации в условиях жестких ограничений в каждом такте управления. Вопросы соблюдения «запретных конусов» (keep-out zones) для защиты оптических датчиков от засветки рассмотрены в работах (Celani et al., 2021; Ailabouni, et al., 2023), где доказано, что использование функций Слепиана и геометрических методов оптимизации на многообразиях позволяет гарантировать безопасность наведения приборов на яркие небесные тела. Проблема исключения загрязнения чувствительных поверхностей выхлопом двигателей успешно решена в исследовании (Kazi et al., 2025) с помощью смешанно-целочисленного линейного программирования. Для обеспечения мягкой стыковки в работе (Di Cairano et al., 2012) формализованы условия предиктивного управления на вращающихся платформах, учитывающие предельные значения относительных скоростей и ограничения.

Однако остаются нерешенными вопросы, связанные с обеспечением гарантированной вычислительной устойчивости и безопасности в условиях высокой неопределенности параметров и сложной конфигурации препятствий. В работе (Fiori et al., 2024) отмечается, что классические методы на базе искусственных потенциальных полей склонны к попаданию в локальные минимумы, что требует разработки дополнительных алгоритмов сглаживания траекторий. Причиной этого могут быть высокая чувствительность методов оценки вероятности столкновений к ошибкам навигационных данных (Pavanello et al., 2025) и ограниченность допущений о линейности динамики, используемых в концепции инвариантных множеств для обхода препятствий (Frey et al., 2018). Высокая вычислительная стоимость нелинейных моделей связанного движения также ограничивает их применение в бортовых системах реального времени.

Все это позволяет утверждать, что целесообразным является проведение исследования, посвященного разработке математических моделей и алгоритмов синтеза допустимых маневров КА, которые обеспечивали бы выполнение терминальных условий и экономию топлива при строгом соблюдении совокупности динамических ограничений тяги, энергетических лимитов и геометрических запретов на ориентацию в режиме реального времени.

Целью исследования является разработка моделей допустимых маневров КА с учетом комплекса ограничений по тяге, ориентации и расходу топлива для повышения автономности, и безопасности навигационных операций в сложных динамических условиях.

Методы исследования. В данном исследовании качестве теоретической основы данного исследования используются методы классической небесной механики. Базовое движение КА рассматривается в рамках задачи двух тел.

Для математического описания состояния системы применяется инерциальная система координат ECI (Earth Centered Inertial), а для физической интерпретации и задания параметров маневрирования – локальная орбитальная система координат RTN (Radial, Transverse, Normal). Состояние КА в каждый момент времени определяется как векторами положения и скорости, так и набором из шести классических кеплеровых элементов, что обеспечивает наглядное отслеживание изменений формы и ориентации орбиты.

Методология получения результатов основана на последовательном применении трех математических моделей маневрирования. Во-первых, импульсная модель идеализирует мгновенное изменение скорости, что полезно для предварительного баллистического анализа и оценки бюджета ΔV . Во-вторых, градиентная модель описывает маневры конечной длительности, учитывая реальные профили тяги (ступенчатые, линейные или сглаженные), изменение массы КА и движение по орбите непосредственно во время работы двигателя. В-третьих, низкотяговая модель предназначена для моделирования длительных воздействий, когда тяга активна в течение часов или суток, что требует непрерывного контроля программы управления вектором тяги.

Результаты. Положение КА описывается радиус-вектором $r(t)$, а скорость – вектором $v(t)$. Эти векторы задаются в ECI, то есть в системе, которая «не вращается» вместе с Землей и удобна для записи уравнений движения (Ivanov et al., 2016; Curtis et al., 2020).

Вектор состояния КА в каждый момент времени определяется следующим образом:

$$x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Если временно игнорировать тягу и возмущения (атмосферу, J_2 , Солнце, Луну и т.д.), то движение описывается задачей двух тел:

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = -\mu \frac{r}{r^3}, \quad (2)$$

где μ – гравитационный параметр центрального тела (Земли), $r = \|r\|$. Это «фон», на который накладывается маневр.

Здесь именно маневр создает добавочное ускорение или мгновенное изменение скорости. Когда мы говорим «дать импульс вдоль скорости» или «дать импульс в сторону нормали к плоскости орбиты», в инерциальных осях это неудобно, потому что направления постоянно меняются. Поэтому в орбитальной механике вводят локальную систему координат, связанную с текущей орбитой в данной точке. Здесь используется орбитальная система RTN:

Эта система определяется через векторы r и v :

- единичный радиальный вектор:

$$\hat{\mathbf{e}}_R = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}, \quad (3)$$

- вектор орбитального момента:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{e}}_N = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}, \quad (4)$$

Направление $\hat{\mathbf{e}}_N$ показывает куда направлена нормаль к плоскости мгновенной орбиты.

Касательное направление определяется так, чтобы получилась правая тройка:

$$\hat{\mathbf{e}}_T = \hat{\mathbf{e}}_N \times \hat{\mathbf{e}}_R, \quad (5)$$

Смысл RTN простой: в любой точке орбиты мы можем разложить любое воздействие (например, импульс) на три физически понятные компоненты: радиальную, касательную и нормальную. Именно в этой системе будем задавать компоненты маневра.

Теперь рассмотрим три типа моделей маневров:

- импульсный;
- градиентный;
- низкотяговый.

Первый и самый распространенный тип модели – импульсная. Здесь предполагается, что воздействие тяги происходит настолько быстро, что за время включения положение \mathbf{r} практически не меняется, а изменяется только скорость. Тогда маневр в момент t_0 записывается как скачок:

$$\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^-, \quad \mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \Delta\mathbf{v}, \quad (6)$$

где символы «-» и «+» означают значения до и после импульса. Следующий шаг – задать $\Delta\mathbf{v}$ не случайным образом, а через компоненты в RTN. Поэтому импульс $\Delta\mathbf{v}$ выразим в таком виде:

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta V_r \hat{\mathbf{e}}_R + \Delta V_t \hat{\mathbf{e}}_T + \Delta V_N \hat{\mathbf{e}}_N, \quad (7)$$

где ΔV_r – радиальная компонента импульса (вдоль $\hat{\mathbf{e}}_R$), ΔV_t – тангенциальная (касательная) компонента импульса (вдоль $\hat{\mathbf{e}}_T$), ΔV_N – нормальная компонента импульса (вдоль $\hat{\mathbf{e}}_N$). Именно эти три компоненты ΔV_r , ΔV_t , ΔV_N в дальнейшем являются «управляющими параметрами» импульсного маневра.

Чтобы формализовать изменение орбиты после маневра, будем использовать классические кеплеровы элементы: a , e , i , Ω , ω , f . Здесь a –

большая полуось, e – эксцентриситет орбиты, i – наклонение, Ω – прямое восхождение (иногда долгота) восходящего узла, ω – аргумент перицентра, f – истинная аномалия. После маневра эти величины изменятся на величину: $\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta f$.

Влияние импульсов на орбиту определяются следующим образом. Тангенциальный импульс ΔV_t в первую очередь влияет на скорость, а значит и на большую полуось. Поэтому именно ΔV_t рассматривается как основной инструмент для изменения большой полуоси. Нормальный импульс ΔV_N поднимает или опускает плоскость орбиты к плоскости экватора, поэтому он отвечает за изменение наклонения i и долготы узла Ω .

При этом необходимо отметить, что орбитальные элементы связаны между собой не линейно. Поэтому, даже если целимся только в один элемент, неизбежно может измениться другой. В частности: Δa определяется только ΔV_t , Δi и $\Delta \Omega$ определяются только ΔV_N . Однако импульсы в целом меняют и e , и ω , т.е. возникают перекрестные изменения формы и ориентации эллипса. Эта оговорка принципиальна для вопроса допустимых маневров: когда мы вводим ограничения вида $|\Delta e| \leq \Delta e_{\max}$ или $|\Delta \omega| \leq \Delta \omega_{\max}$, их нельзя игнорировать, даже если главная цель маневра изменение a или i .

Итак, в импульсной модели маневр задается вектором Δv , обычно через $\Delta V_t, \Delta V_r, \Delta V_N$ в RTN.

В градиентной модели (маневр конечной длительности с профилем тяги) маневр задается уже не одним скачком, а функциями тяги $T(t)$ и направлением $u(t)$ на интервале времени. Но и там конечный эффект часто оценивают как эквивалентный Δv .

В низкотяговой модели математическая форма та же, что и у конечной длительности, но характерный интервал времени существенно больше, и ограничения по ориентации и тяге действуют во времени, а не в одну точку. Все эти случаи используют одни и те же базовые определения: вектор состояния, RTN-разложение и набор элементов орбиты с их приращениями.

Импульсные маневры. Импульсный маневр – это удобная и очень распространенная идеализация, когда воздействие двигательной установки считается настолько коротким, что за время включения положение КА практически не меняется, а изменится только скорость. Такая модель особенно полезна в задачах баллистического анализа, планирования коррекций, оценок ΔV -бюджета и в алгоритмах обнаружения маневров по орбитальным данным: мы видим скачок параметров орбиты и интерпретируем его как импульс Δv .

Рассмотрим математическую модель импульса. В момент t_0 импульсный маневр записывается в виде выражения (6), а импульс Δv выразим в виде (7). Далее рассмотрим влияние маневров на элементы орбиты. В таблице 1 даны выражения для определения изменений элементов орбиты под действием различных импульсов (Ivanov et al., 2016; Curtis et al., 2020; Gurfil et al., 2006, Montenbruck et al., 2010).

Таблица 1— Изменения элементов орбиты в результате маневров

| Вид импульса | Изменение элементов орбиты |
|--------------------------------|---|
| Тангенциальный ΔV_t | $\Delta a = \frac{2a^2 v}{\mu} \cdot \Delta V_t$ $\Delta e_t = \frac{2a(\varepsilon + \cos f)v}{\mu} \cdot \Delta V_t$ $\Delta \omega_t = \frac{2a \sin f v}{\varepsilon \mu} \cdot \Delta V_t$ $\Delta f = -\Delta \omega_t$ |
| Нормальный ΔV_N | $\Delta i = \frac{\cos u}{v} \cdot \Delta V_N$ $\Delta \Omega = \frac{\sin u}{v \sin i} \cdot \Delta V_N$ $\Delta \omega_N = \frac{\sin u}{v \cos f \operatorname{tg} i} \cdot \Delta V_N$ $\Delta f = -\Delta \omega_N$ |
| Радиальный ΔV_r | $\Delta e_r = \frac{r \sin f}{a v} \cdot \Delta V_r$ $\Delta \omega_r = -\left(2 + \frac{r}{a \varepsilon} \cos f\right) \cdot \frac{\Delta V_r}{v}$ $\Delta f = -\Delta \omega_r$ |

Здесь изменения угловых величин даны в радианах; Δe_t , Δe_r – изменения эксцентриситета под действием тангенциального и радиального импульсов, $\Delta \omega_t$, $\Delta \omega_N$, $\Delta \omega_r$ – изменения аргумента перицентра под действием тангенциального, нормального и радиального импульсов. Как видно из этой сводки формул изменение большой полуоси Δa происходит только под действием тангенциального импульса ΔV_t , изменения наклона Δi и долготы восходящего узла $\Delta \Omega$ происходят только под действием нормального импульса ΔV_N . Но подача этих импульсов приведет к изменению и эксцентриситета (e), и аргумента перицентра (ω).

Следующим важным вопросом при выполнении маневров является выбор точки приложения импульсов.

Рассмотрим выбор точки приложения тангенциальных импульсов ΔV_t . Данный импульс выполняется для коррекции большой полуоси. Для изменения этого параметра наиболее эффективно действовать вдоль скорости. На практике используют схему из двух тангенциальных импульсов. ΔV_t разбивается на две части пополам, т.е. $\Delta V_{t1} = \Delta V_{t2} = \Delta V_t / 2$. В точке перигея ($f=0$) подается первая часть импульса ΔV_{t1} . В точке апогея ($f=180$ градусов) подается вторая часть импульса ΔV_{t2} . Это делается для того, чтобы предотвратить увеличение эксцентриситета в результате первого импульса.

Рассмотрим выбор точки приложения нормальных импульсов ΔV_N . Для коррекции наклона Δi эффективным будет точка с $\cos u=1$, т.е. при $u=0$ или $\cos u=-1$, т.е. при $u=180^\circ$. В этих точках $\sin u=0$, соответственно изменение $\Delta \Omega=0$, т.е. мы избежим изменения долготы восходящего узла Ω . А

для эффективного изменения этого элемента необходимо подать нормальный импульс в точках, где $\sin u=1$ или $\sin u=-1$, т.е. в точках $u=90^\circ$ или $u=270^\circ$.

Рассмотрим выбор точки приложения радиальных импульсов ΔV_r . Радиальный импульс на практике используется не часто. Его можно использовать для изменения эксцентриситета (e) и аргумента перигея (ω). Как видно из вышеуказанных формул, этот импульс целесообразно применить вблизи точки $f=90^\circ$.

Градиентные маневры. Между идеализацией «мгновенного» импульса и длительным низкотяговым управлением есть промежуточный класс – включения конечной длительности, когда тяга действует заметное время, но все еще речь идет о коротком маневре (минуты, десятки минут), а не о многосуточной низкотяговой спирали. Здесь под термином «градиентные маневры» будем понимать именно такие включения конечной длительности с заданным профилем тяги $T(t)$, в том числе линейным, то есть «нарастающим/спадающим» - отсюда и слово «градиентный» в инженерном смысле (Chobotov, et al., 2009).

Данный класс маневров выделяется отдельно, поскольку в реальных двигательных установках их реализация связана с рядом ограничений:

- тяга не всегда включается ступенькой и мгновенно;
- направление тяги может меняться в процессе наведения;
- за время включения КА успевает пройти заметный участок орбиты;
- масса меняется, а значит меняется и ускорение $\frac{T}{m}$;
- возникает отличие между идеальным Δv и тем, что реально получается в инерциальном пространстве.

В импульсной модели говорили, что скорость скачком меняется на Δv . Это удобно, но подразумевает, что все произошло в одной точке орбиты.

В градиентной модели говорим иначе: в течение времени $[t_0, t_0+\tau]$ двигатель создает силу тяги $T(t)$, а значит – ускорение $a_T(t)$. Поэтому уже нельзя честно писать $r^+ = r^-$: положение и ориентация орбитальных осей успевают измениться. То есть маневр теперь – это не одно число Δv , а процесс, задаваемый функциями: модуль тяги $T(t) = \|T(t)\|$, направление тяги $u(t)$ (единичный вектор), длительность τ , и, при необходимости, законом изменения тяги (ступенька, линейный градиент, сглаживание).

Теперь рассмотрим уравнение движения для этой модели. Запишем уравнение движения в модели ЕСІ. Тогда:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_T(t), \quad (9)$$

$$\mathbf{a}_T(t) = \frac{T(t)}{m(t)} \mathbf{u}(t), \quad (10)$$

где $u(t)$ – единичный вектор направления тяги, $m(t)$ – текущая масса КА.

Если требуется учитывать расход топлива, используется стандартная модель:

$$\dot{m}(t) = -\frac{T(t)}{I_{sp}g_0}, \quad (11)$$

где I_{sp} – удельный импульс, g_0 – стандартное ускорение свободного падения. Эта связка прямо отражает идею ΔV -бюджета и зависимости маневренности от топлива.

На практике встречаются следующие типовые варианты профиль тяги.

1. Ступенчатое включение:

$$T(t) = T_0, t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad (12)$$

Здесь тяга постоянная, а направление чаще всего зафиксировано.

2. Линейный (градиентный) разгон (или спад):

$$T(t) = T_0 + k(t - t_0), t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad (13)$$

где k – темп нарастания/убывания тяги. Этот случай хорошо соответствует смыслу слова «градиентный»: тяга меняется по градиенту (линейно), а не скачком.

3. Сглаженный профиль. Это когда профиль $T(t)$ задается по определенной закономерности. Конкретная формула выбирается по требованиям двигательной установки и системы управления ориентацией.

Хотя маневр является процессом конечной длительности, почти всегда удобно оценивать его результат в виде эквивалентного прироста скорости. Векторно это записывается так:

$$\Delta v \approx \int_{t_0}^{t_0 + \tau} a_T(t) dt = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{T(t)}{m(t)} u(t) dt. \quad (14)$$

Низкотяговые маневры. Низкотяговым называют маневры, при которых ускорение от тяги мало по сравнению с гравитационным ускорением, но тяга действует долго – часы, сутки, недели и даже месяцы. По форме уравнений это тот же «маневр конечной длительности», что и в предыдущем подразделе, однако, по сути, это уже другой режим полета: орбита меняется не скачком и не коротким включением, а постепенно, за счет накопления малого ускорения на большом интервале времени.

Именно поэтому в перечне «импульсные – градиентные – низкотяговые» это тип маневра стоит отдельным классом: он требует иной логики планирования, и ограничения по ориентации начинают играть решающую роль, потому что их надо выдерживать непрерывно или почти непрерывно.

В инженерном смысле термин «низкая тяга» не только означает маленькую тягу, но и дает следующие последствия.

1. Ускорение тяги мало, поэтому за небольшой промежуток времени изменение скорости невелико:

$$\|\Delta v\| \approx \left\| \int \frac{T}{m} u dt \right\| \quad (15)$$

и если τ мал, то Δv тоже мал. Поэтому низкотяговый маневр всегда требует времени, результат достигается накоплением эффекта за длительное время.

2. Орбита меняется непрерывно, часто по спиральному или квазиспиральному типу (например, при подъеме/спуске по высоте), а не по схеме двух импульсов как у Хоманна.

3. Модель допустимости становится динамической, т.е. недостаточно давать импульс ΔV , но и нужно гарантировать, что КА способен создавать тягу нужной величины, держать разрешенное направление тяги, и делать это длительное время, не нарушая ориентационных ограничений.

Теперь рассмотрим математическую модель низкотяговых маневров. Здесь уравнения те же, но смысл другой. С точки зрения математики уравнения движения такие же, как и для градиентного маневра конечной длительности (Vallado, et al., 2013; Hu, et al., 2015):

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{T(t)}{m(t)} \mathbf{u}(t), \quad (17)$$

$$\dot{m}(t) = -\frac{T(t)}{I_{sp} g_0}, \quad (18)$$

Но отличие в том, что:

- интервал управления $[t_0, t_1]$ становится длинным;
- $\mathbf{u}(t)$ может целенаправленно меняться на протяжении маневра;
- часто нельзя пренебрегать ни изменением массы, ни поворотом локальных орбитальных осей, ни накоплением ошибок.

И если в импульсном случае маневр можно описывать одним вектором Δv , то в случае низкотяговых маневров более корректно говорить: маневр задается как программа управления ($T(t)$, $\mathbf{u}(t)$) на всем интервале.

Формально мы все еще можем записать эквивалентный прирост скорости:

$$\Delta \mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{T(t)}{m(t)} \mathbf{u}(t) dt, \quad (19)$$

Однако важно понимать: при длительном управлении это выражение уже не является простой оценкой, по нескольким причинам: направление $u(t)$ выбирается по цели маневра и ограничениям; вектор $u(t)$ может задаваться относительно корпуса, а корпус ориентируется относительно орбиты, которая сама меняется; масса существенно убывает, ускорение растет, и т.д. В итоге, в этих задачах обычно интересует не просто ΔV , а достижимость целевого перехода при заданных ограничениях: возможно ли, имея T_{\max} , I_{sp} , ограничения ориентации, перевести КА из одной орбиты в другую.

Чтобы класс низкотяговых маневров не выглядел абстрактно, полезно перечислить типовые цели, которые дальше лягут на формулы допустимости:

- подъем или спуск орбиты по высоте (например, увеличение a или высоты круговой орбиты);
- изменение наклона i и плоскости орбиты;
- фазирование, или изменение положения по орбите;
- комбинированные переводы (при необходимости одновременного изменения и размера орбиты, и ее плоскости. В импульсной баллистике это иногда делают «комбинированным» импульсом, а в низкотяговых маневрах – программой управления с меняющимся направлением тяги).

Теперь рассмотрим вопрос допустимости низкотяговых маневров во времени. Самое важное для нашей задачи состоит в следующем:

- для импульса достаточно проверить: можем ли мы реализовать Δv нужной величины и направления (и в нужной точке орбиты);
- для градиентного маневра уже нужно проверять ограничения на интервале включения $[t_0, t_0 + \tau]$;
- для низкотяговых маневров это становится еще строже: ограничения должны выполняться на длинном интервале $[t_0, t_1]$, возможно с сотнями, или даже тысячами шагов дискретизации.

То есть допустимый низкотяговый маневр – это не один вектор Δv , а класс программ управления $(T(t), u(t))$, которые удовлетворяют ограничениям:

$$0 \leq T(t) \leq T_{\max}, \quad (20)$$

$u(t)$ допускается ориентацией КА (конус, запреты, скорость разворота),

$$m(t) \geq m_{\min}, \quad (21)$$

и, если нужно, ограничения по скорости изменения тяги и по скорости поворота.

Также необходимо рассмотреть формулы допустимых маневров с учетом ограничений по тяге и ориентации.

Смысл термина «допустимый маневр» в инженерной постановке такой: маневр считается допустимым, если существует реальное управление двигателем и ориентацией, которое не:

- превышает возможностей двигательной установки (тяга/мощность/скорость изменения тяги);
- нарушает ограничений по ориентации КА (куда можно направлять тягу и как быстро можно разворачиваться);
- нарушает топливные ограничения и при этом создает требуемый эффект (в импульсной модели – нужный Δv ; в более общей – нужный переход орбиты или заданные приращения элементов).

Далее необходимо задать ограничения математически, затем ввести множество допустимых управлений U , а после этого получим формулы множества допустимых маневров (по сути – множества достижимых Δv или достижимых приращений элементов) для каждого из трех классов (Vallado, et al., 2013; Hu, et al., 2015).

Ограничение по тяге. Начнем с самого базового: двигательная установка не может выдавать тягу больше некоторого максимума. Поэтому для всех неимпульсных моделей (конечной длительности и низкой тяги) мы вводим ограничение:

$$0 \leq T(t) \leq T_{max}, \quad (22)$$

Если двигательная установка или система питания не позволяет мгновенно менять тягу, добавляют ограничение на скорость изменения тяги:

$$|\dot{T}(t)| \leq \dot{T}_{max}, \quad (23)$$

Ограничение по топливу и ΔV -бюджет. Даже если тяга по модулю допустима, маневр может быть невозможен из-за недостатка топлива. В классической форме это выражается через связь тяги, расхода массы и удельного импульса:

$$\dot{m}(t) = -\frac{T(t)}{I_{sp} g_0}, \quad (24)$$

Интегрально это дает ограничение на достижимую суммарную скорость изменения (« ΔV -бюджет»), которое обычно записывают через формулу:

$$\Delta v_{\text{топ}} \leq I_{sp} g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right), \quad (25)$$

где m_0 – масса до маневров, m_f – масса после, $m_f \geq m_{\min}$. Смысл $\Delta v_{\text{топ}}$ в том, что – это максимально доступный запас изменения скорости (ΔV -budget), который КА может получить за счет имеющегося топлива. Такая связка как

раз и используется для контроля ΔV -бюджета и допустимости маневра по топливу.

Важно подчеркнуть: это ограничение работает вне зависимости от того, импульсный маневр или низкотяговый. Разница лишь в том, что в импульсной модели мы обычно задаем Δv как итоговый вектор, а в конечной длительности (низкотяговый) Δv получается интегралом ускорения. Но ограничение по топливу одинаково ограничивает достижимый эффект.

Ограничение по ориентации. Следующим ключевым моментом является ограничение по ориентации. В реальном КА вектор тяги не может быть направлен куда угодно: он связан с геометрией двигателя и ориентацией КА.

Введем обозначения:

- $b(t)$ – единичный вектор разрешенной оси в системе координат корпуса (например, продольная ось сопла или ось, вдоль которой должна быть направлена тяга);

- $u(t)$ – единичный вектор направления тяги в инерциальной системе, то есть

$$a_T(t) = \frac{T(t)}{m(t)} u(t), \quad \|u(t)\| = 1, \quad (26)$$

Если двигатель можно отклонять, то $u(t)$ может отличаться от $b(t)$, но в пределах допустимого угла. Наиболее универсальная математическая запись такого ограничения – конус:

$$u(t) \cdot b(t) \geq \cos \theta_{max}, \quad (27)$$

где θ_{max} – максимально допустимое отклонение направления тяги от оси $b(t)$. Это неравенство означает, что угол между $u(t)$ и $b(t)$ не должен превышать θ_{max} . То есть возможные направления тяги образуют конус вокруг оси $b(t)$.

Множество допустимых управлений U . Теперь мы можем собрать все вместе и формально определить, что такое допустимое управление.

Будем считать, что управление – это пара функций $(T(t), u(t))$ на заданном интервале времени. Тогда множество допустимых управлений:

$$U = \{(T(t), u(t)) : 0 \leq T(t) \leq T_{max}, \\ \|u(t)\| = 1, u(t) \cdot b(t) \geq \cos \theta_{max}, m(t) \geq m_{min}\}, \quad (28)$$

и при необходимости добавляются ограничения:

$$|\dot{T}| \leq \dot{T}_{max}, \quad \|\omega\| \leq \omega_{max}, \quad \|\dot{\omega}\| \leq \alpha_{max}, \quad (29)$$

Допустимые импульсные маневры. В импульсной модели маневр задается вектором Δv (или компонентами $\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z$).

а) Ограничение по ориентации для импульса. Направление импульса Δv должно быть достижимо ориентацией КА в момент маневра. В терминах конуса это записывается так же, как и для непрерывной тяги:

$$\frac{\Delta v}{\|\Delta v\|} \cdot b(t_0) \geq \cos \theta_{max}, \quad (30)$$

То есть направление импульса должно лежать внутри допустимого конуса вокруг оси b в момент t_0 .

б) Ограничение по тяге для импульса через эквивалентную длительность. Импульсная модель сама по себе не содержит T_{max} , поэтому вводят физически осмысленную связь: любой реальный импульс есть результат конечного включения длительностью τ . Тогда:

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{T(t)}{m(t)} u(t) dt, \quad (31)$$

Если мы хотим получить простую верхнюю оценку, можно записать:

$$\|\Delta v\| \leq \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{T_{max}}{m(t)} dt \approx \frac{T_{max}}{m} \tau \quad (\text{если } m \gg \text{const}), \quad (32)$$

Эта оценка задает верхний физический предел: при данной массе и максимальной тяге невозможно получить импульс больше, чем $T_{max} \tau / m$ за время τ .

Итак, множество допустимых импульсных маневров можно сформулировать следующим образом:

$$M_{imp} = \left\{ \Delta v: \frac{\Delta v}{\|\Delta v\|} \cdot b(t_0) \geq \cos \theta_{max}, \right. \\ \left. \|\Delta v\| \leq \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{T_{max}}{m(t)} dt, \|\Delta v\| \leq \Delta v_{top} \right\}, \quad (33)$$

где $\Delta v_{top} = I_{sp} g_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right)$. Как было сказано выше, Δv_{top} – это максимально доступный запас изменения скорости (ΔV -budget), который КА может получить за счет имеющегося топлива.

Допустимые градиентные маневры. Здесь маневр – это управление ($T(t)$, $u(t)$) на интервале $[t_0, t_0+\tau]$ с заданным профилем тяги (ступенька, линейный и т.д.). Результат маневра выражается через интеграл:

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{T(t)}{m(t)} u(t) dt, \quad (34)$$

Маневр допустим, если существует управление $(T, u) \in U$ на этом интервале. Тогда множество допустимых градиентных маневров:

$$M_{\text{grad}} = \left\{ \Delta v: \Delta v = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{T(t)}{m(t)} u(t) dt, (T, u) \in U \right\}, \quad (35)$$

Если профиль $T(t)$ считается заданным (например, линейный градиент), то ограничение $0 \leq T(t) \leq T_{\text{max}}$ превращается в проверку параметров профиля (чтобы нигде не превысить T_{max}) и, при наличии, $|\dot{T}| \leq \dot{T}_{\text{max}}$ (чтобы градиент не был слишком крутым).

Важное отличие от импульса в том, что ориентационное ограничение $u(t) \cdot b(t) \geq \cos \theta_{\text{max}}$ должно выполняться для всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, а не только в одной точке.

Допустимые низкотяговые маневры. Низкотяговый маневр отличается от градиентного не формой уравнений, а масштабом времени: управление задается на длинном интервале $[t_0, t_1]$, и направление тяги может целенаправленно меняться по программе.

Результат в виде эквивалентного Δv :

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_1} \frac{T(t)}{m(t)} u(t) dt, \quad (36)$$

И тогда множество допустимых низкотяговых маневров:

$$M_{LT} = \left\{ \Delta v: \Delta v = \int_{t_0}^{t_1} \frac{T(t)}{m(t)} u(t) dt, (T, u) \in U \text{ на } [t_0, t_1] \right\}, \quad (37)$$

Здесь наиболее строгим становится именно ориентационное условие: даже если по тяге и топливу маневр возможен, он может оказаться недостижимым из-за того, что КА не может долго удерживать требуемое направление тяги (например, из-за требований на ориентацию солнечных батарей или антенн).

Заключение. В результате данного исследования разработана комплексная методология моделирования орбитальных маневров, объединяющая классическую теорию небесной механики с практическими инженерными требованиями к КА. Использование трех различных моделей – импульсной, градиентной и низкотяговой – обеспечивает необходимую гибкость расчетов: от оперативной оценки затрат топлива на коррекцию орбиты до детального планирования многосуточных перелетов. Важным элементом методологии является разложение управляющих воздействий в локальной системе координат RTN, что позволяет напрямую связать работу двигательной установки с изменениями параметров орбиты, таких как большая полуось, наклонение и долгота восходящего узла. Анализ показал, что теоретическая эффективность маневра напрямую зависит от

выбора оптимальных точек приложения силы, таких как перигей, апогей или узлы орбиты, для минимизации нежелательных возмущений других элементов. Главным результатом работы стала формализация условий допустимости маневров, позволяющая преобразовать математический расчет в реальный полетный план. Учет ограничений, связанных с максимальной тягой двигателя, предельным запасом топлива (рассчитанным на основе формулы Циолковского) и допустимым конусом ориентации КА, гарантирует исполнимость маневра бортовыми системами. Такой комплексный подход позволяет не только рассчитывать требуемые приращения скорости, но и предварительно исключать технически нереализуемые для конкретного КА сценарии, обеспечивая высокую надежность и точность планирования космических миссий.

References

- Baranova A.A., & Oliviovi A.P. (2025) Modified algorithm for calculating the parameters of maneuvers of coplanar meeting of spacecraft in a near-circular orbit using low-thrust engines. *Vestnik RUDN. Engineering Researches*, 26(2). — P.113–126 (in Eng.). <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2025-26-2-113-126>
- Wang X., Hu M., Xin C., & Zheng S. (2025) A novel analytical approach for spacecraft fly-around formation design with a low-thrust maneuver. *Aerospace*, 12(5). — 361 p. (in Eng.). <https://doi.org/10.3390/aerospace12050361>
- Fan Z., Ke W., Qi J., Huo M., Qi N., Cheng F., ... & Xie S. (2024) Initial trajectory design of low-thrust spacecraft considering attitude constraints. *Scientific Reports*, 14(1). — 20246 p. (in Eng.). <https://doi.org/10.1038/s41598-024-70830-8>
- Sanchez J. C., Gavilan F., Vazquez R., & Louembet C. (2020) A flatness-based predictive controller for six-degrees of freedom spacecraft rendezvous. *Acta Astronautica*, 167. — P. 391–403 (in Eng.). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.11.026>
- Sumarokov A. V., & Tyrnov P. A. (2019) Algorithm for spacecraft angular and translational motion control with use of orientation thrusters. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Instrument Engineering Series*, (6). — P. 30–40 (in Rus.). DOI: 10.18698/0236-3933-2019-6-30-40
- Celani F., & Bruni R. (2021). Minimum-time spacecraft attitude motion planning using objective alternation in derivative-free optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 191(2). — P. 776–793 (in Eng.). <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01834-x>
- Ailabouni D., Meister A., & Spindler K. (2023) Attitude maneuvers avoiding forbidden directions. *Astrodynamics*, 7(3). — P. 351–362 (in Eng.). <https://doi.org/10.1007/s42064-023-0163-7>
- Kazi S. R., Nagarajan H., Hijazi H., & Wozniak P. (2025) Optimal trajectory planning for space object tracking with collision-avoidance constraints. In *Proceedings of the 2025 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*. — P. 564–570. IEEE (in Eng.). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.22797>
- Di Cairano S., Park H., & Kolmanovsky I. (2012) Model predictive control approach for guidance of spacecraft rendezvous and proximity maneuvering. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22(12). — P. 1398–1427 (in Eng.). <https://doi.org/10.1002/rnc.2827>
- Fiori S., Rachiglia F., Sabatini L., & Sampaolesi E. (2024) Modeling, simulation and control of a spacecraft: Automated rendezvous under positional constraints. *Aerospace*, 11(3). — 245 p. (in Eng.). <https://doi.org/10.3390/aerospace11030245>
- Pavanello Z., De Maria L., De Vittori A., Maestrini M., Di Lizia P., & Armellin R. (2025) CAMmary: A review of spacecraft collision avoidance manoeuvre design methods. *Acta Astronautica* (in Eng.). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2025.07.027>
- Frey G. R., Petersen C. D., Leve F. A., Girard A. R., & Kolmanovsky I. V. (2018) Invariance-

based spacecraft relative motion planning incorporating bounded disturbances and minimum thrust constraints. In Proceedings of the 2018 American Control Conference (ACC). — P. 658–663. IEEE (in Eng.). DOI: [10.23919/ACC.2018.8430790](https://doi.org/10.23919/ACC.2018.8430790)

Ivanov N.M., & Lysenko L.N. (2016) *Ballistika i navigaciya kosmicheskikh apparatov* [Ballistics and navigation of spacecraft]. Moscow: Bauman MSTU Publishing House. — 523 p. (in Rus.).

Curtis H. (2020). *Orbital mechanics for engineering students*. Elsevier Butterworth-Heinemann. — 951 p. (in Eng.).

Gurfil P. (2006). *Modern astrodynamics*. Elsevier Astrodynamics Series. — 253 p. (in Eng.).

Montenbruck O., & Gill E. (2010). *Satellite orbits: Models, methods, and applications*. Springer. — 382 p. (in Eng.).

Chobotov V. A. (2009). *Orbital mechanics*. AIAA Education Series. — 465 p. (in Eng.).

Vallado D. F., & McClain W. D. (2013). *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Microcosm Press. — 1135 p. (in Eng.).

Hu W. (2015). *Fundamental spacecraft dynamics and control*. Wiley (in Eng.).

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the Central Asian Academic Research Center LLP

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the journals of the Central Asian Academic Research Center LLP implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The Central Asian Academic Research Center LLP follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the Central Asian Academic Research Center LLP.

The Editorial Board of the Central Asian Academic Research Center LLP will monitor and safeguard publishing ethics.

Requirements for articles design for publication in the journal are available on the websites:

**www.nauka-nanrk.kz
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>
ISSN2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)**

Managing Editor: *A.Shormakova*
Editors: *D.S. Alenov, T. Apendiev*
Computer layout: *G.D. Zhadyranova*

Signed for print: June 15, 2026
Format: 70×90 1/16. 26.5 printed sheets. Order No. 2.