

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

**ACADEMIC SCIENTIFIC  
JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE**

**№3  
2025**

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)



CENTRAL ASIAN ACADEMIC  
RESEARCH CENTER



**ACADEMIC SCIENTIFIC  
JOURNAL OF COMPUTER  
SCIENCE**

**3 (355)**

**JULY – SEPTEMBER 2025**

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963  
PUBLISHED 4 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

#### CHIEF EDITOR:

**MUTANOV Galimkair Mutanovich**, doctor of technical sciences, professor, academician of NAS RK, acting General Director of the Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506682964>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1423665>

#### EDITORIAL BOARD:

**KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich**, (Deputy Editor-in-Chief), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Advisor to the General Director of the Institute of Information and Computing Technologies of the CS MES RK, Head of the Laboratory (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/2428551>

**Mamyrbayev Orken Zhumazhanovich**, (Academic Secretary), PhD in Information Systems, Deputy Director for Science of the Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55967630400>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1774027>

**BAIGUNCHEKOV Zhumadil Zhanabaevich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Institute of Cybernetics and Information Technologies, Department of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Sabayev University (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506823633>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1923423>

**WOICIK Waldemar**, Doctor of Technical Sciences (Phys.-Math.), Professor of the Lublin University of Technology (Lublin, Poland), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7005121594>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/678586>

**SMOLARJ Andrej**, Associate Professor Faculty of Electronics, Lublin polytechnic university (Lublin, Poland), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56249263000>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1268523>

**KEILAN Alimkhan**, Doctor of Technical Sciences, Professor (Doctor of science (Japan)), chief researcher of Institute of Information and Computational Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8701101900>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1436451>

**KHAIROVA Nina**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Institute of Information and Computational Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=37461441200>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1768515>

**OTMAN Mohamed**, PhD, Professor of Computer Science Department of Communication Technology and Networks, Putra University Malaysia (Selangor, Malaysia), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56036884700>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/747649>

**NYSANBAYEVA Saule Yerkebulanovna**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of the Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55453992600>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802041>

**BIYASHEV Rustam Gakashevich**, doctor of technical sciences, professor, Deputy Director of the Institute for Informatics and Management Problems, Head of the Information Security Laboratory (Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603642864>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802016>

**KAPALOVA Nursulu Aldazarovna**, Candidate of Technical Sciences, Head of the Laboratory cybersecurity, Institute of Information and Computing Technologies CS MES RK (Almaty, Kazakhstan), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57191242124>,

**KOVALYOV Alexander Mikhailovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Applied Mathematics and Mechanics (Donetsk, Ukraine), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/38481396>

**MIKHALEVICH Alexander Alexandrovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004159952>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/46249977>

**TIGHINEANU Ion Mihailovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician, President of the Academy of Sciences of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/524462>

---

#### Academic Scientific Journal of Computer Science

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

Owner: «Central Asian Academic Research Center» LLP (Almaty).

Certificate № **KZ77VPY00121154** on the re-registration of the periodical printed and online publication of the information agency, issued on **05.06.2025** by the Republican State Institution «Information Committee» of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan

Subject area: *information and communication technologies.*

Currently: *included in the list of journals recommended by the CCSES MSHE RK in the direction of «Information and communication technologies».*

Periodicity: *4 times a year.*

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

#### БАС РЕДАКТОР:

**МҮТАНОВ Ғалымқайыр Мұтанұлы**, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының м.а. (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506682964>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1423665>

#### РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ:

**ҚАЛИМОЛДАЕВ Максат Нұрәділұлы**, (бас редактордың орынбасары), физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының кеңесшісі, зертхана меңгерушісі (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/2428551>

**МАМЫРБАЕВ Өркен Жұмажанұлы** (ғалым хатшы), Ақпараттық жүйелер саласындағы техника ғылымдарының (PhD) докторы, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» директорының ғылым жөніндегі орынбасары (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55967630400>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1774027>

**БАЙҒҮНЧЕКОВ Жұмаділ Жанабайұлы**, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Кибернетика және ақпараттық технологиялар институты, Қолданбалы механика және инженерлік графика кафедрасы, Сәтбаев университеті (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506823633>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1923423>

**ВОЙЧИК Вальдемар**, техника ғылымдарының докторы (физ-мат), Люблин технологиялық университетінің профессоры (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7005121594>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/678586>

**СМОЛАРЖ Анджей**, Люблин политехникалық университетінің электроника факультетінің доценті (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56249263000>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1268523>

**КЕЙЛАН Әлімхан**, техника ғылымдарының докторы, профессор (ғылым докторы (Жапония)), ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының» бас ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8701101900>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1436451>

**ХАЙРОВА Нина**, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының» бас ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=37461441200>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1768515>

**ОТМАН Мохаммед**, PhD, Информатика, Коммуникациялық технологиялар және желілер кафедрасының профессоры, Путра университеті Малайзия (Селангор, Малайзия), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56036884700>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/747649>

**НЫСАНБАЕВА Сауле Еркебұланқызы**, техника ғылымдарының докторы, доцент, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институтының» аға ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55453992600>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802041>

**БИЯШЕВ Рустам Гакашевич**, техника ғылымдарының докторы, профессор, Информатика және басқару мәселелері институты директорының орынбасары, Ақпараттық қауіпсіздік зертханасының меңгерушісі (Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603642864>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802016>

**КАПАЛОВА Нұрсұлу Алдаржарқызы**, техника ғылымдарының кандидаты, ҚР ҒЖБМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты», Киберқауіпсіздік зертханасының меңгерушісі (Алматы, Қазақстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57191242124>,

**КОВАЛЕВ Александр Михайлович**, физика-математика ғылымдарының докторы, Украина Ұлттық Ғылым академиясының академигі, Қолданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/38481396>

**МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович**, техника ғылымдарының докторы, профессор, Беларусь Ұлттық Ғылым академиясының академигі (Минск, Беларусь), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004159952>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/46249977>

**ТИГИНЯНУ Ион Михайлович**, физика-математика ғылымдарының докторы, академик, Молдова Ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университеті (Кишинев, Молдова), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/524462>

---

**Academic Scientific Journal of Computer Science**

**ISSN 2518-1726 (Online),**

**ISSN 1991-346X (Print)**

Меншіктеуші: «Орталық Азия академиялық ғылыми орталығы» ЖШС (Алматы).

Ақпарат агенттігінің мерзімді баспасөз басылымын, ақпарат агенттігін және желілік басылымды қайта есепке қою туралы ҚР Мәдениет және Ақпарат министрлігі «Ақпарат комитеті» Республикалық мемлекеттік мекемесі **05.06.2025** ж. берген № **KZ77VPY00121154** Куәлік.

Тақырыптық бағыты: *ақпараттық-коммуникациялық технологиялар*

Қазіргі уақытта: *«ақпараттық-коммуникациялық технологиялар» бағыты бойынша ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдар тізіміне енді.*

Мерзімділігі: *жылына 4 рет.*

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© «Орталық Азия академиялық ғылыми орталығы» ЖШС, 2025

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

**МУТАНОВ Галимжаир Мутанович**, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, и.о. генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506682964>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1423665>

## Редакционная коллегия:

**КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович**, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, советник генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК, заведующий лабораторией (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56153126500>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/2428551>

**МАМЫРБАЕВ Оркен Жумажанович**, (ученый секретарь), доктор философии (PhD) по специальности «Информационные системы», заместитель директора по науке РГП «Институт информационных и вычислительных технологий» Комитета науки МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55967630400>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1774027>

**БАЙГУНЧЕКОВ Жумадил Жанабаевич**, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, Институт кибернетики и информационных технологий, кафедра прикладной механики и инженерной графики, Университет Сатпаева (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506823633>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1923423>

**ВОЙЧИК Валдемар**, доктор технических наук (физ.-мат.), профессор Люблинского технологического университета (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7005121594>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/678586>

**СМОЛЯРЖ Анджей**, доцент факультета электроники Люблинского политехнического университета (Люблин, Польша), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56249263000>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1268523>

**КЕЙЛАН Алимхан**, доктор технических наук, профессор (Doctor of science (Japan)), главный научный сотрудник РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8701101900>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1436451>

**ХАЙРОВА Нина**, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=37461441200>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/1768515>

**ОТМАН Мохамед**, доктор философии, профессор компьютерных наук, Департамент коммуникационных технологий и сетей, Университет Путра Малайзия (Селангор, Малайзия), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56036884700>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/747649>

**НЫСАНБАЕВА Сауле Еркебулановна**, доктор технических наук, доцент, старший научный сотрудник РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55453992600>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802041>

**БИЯШЕВ Рустам Гакашевич**, доктор технических наук, профессор, заместитель директора Института проблем информатики и управления, заведующий лабораторией информационной безопасности (Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603642864>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/3802016>

**КАПАЛОВА Нурсулу Алдажаровна**, кандидат технических наук, заведующий лабораторией кибербезопасности РГП «Института информационных и вычислительных технологий» КН МНВО РК (Алматы, Казахстан), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57191242124>,

**КОВАЛЕВ Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7202799321>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/38481396>

**МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси (Минск, Беларусь), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004159952>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/46249977>

**ТИГИНЯНУ Ион Михайлович**, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова), <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7006315935>, <https://www.webofscience.com/wos/author/record/524462>

---

**Academic Scientific Journal of Computer Science**

**ISSN 2518-1726 (Online),**

**ISSN 1991-346X (Print)**

Собственник: *ТОО «Центрально-азиатский академический научный центр» (г. Алматы).*

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания № **KZ77VPY00121154**. Дата выдачи **05.06.2025**

Тематическая направленность: *информационно-коммуникационные технологии.*

В настоящее время: *вошел в список журналов, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК по направлению «информационно-коммуникационные технологии».*

Периодичность: *4 раза в год.*

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© ТОО «Центрально-азиатский академический научный центр», 2025

## CONTENTS

<b>S. Adilzhanova, B. Amirkhanov, G. Amirkhanova, A. Anuarbek</b> Innovative methods for ensuring cybersecurity of technological control systems of a digital twin of a food industry enterprise.....	11
<b>L.A. Alexeyeva</b> Vibrotransport bispinors of Dirac equations in biquaternionic representation at sublight speeds and their properties.....	25
<b>A. Amirova, B. Aldosh, A. Ibraikhan, T. Smagulov, A. Aitmagambet</b> A machine learning-based approach to detect malicious links on Instagram.....	41
<b>G. Argyngazin</b> Artificial intelligence: is alarmism justified?.....	52
<b>Zh.A. Abdibayev, S.K. Sagnayeva, B.B. Orazbayev, M. James C. Crabbe, K.A. Dyussekeyev</b> Development of an effective water accounting method for irrigation systems for automated water resource management systems.....	66
<b>Zh. Bazarbek, N. Toyganbaeva, M. Mansurova, T Sarsembayeva, M. Sakypbekova</b> Developing a dataset for creating a Large Language model (LLM) for the Kazakh language.....	78
<b>A. Bekarystankyzy, M. Baizakova, A. Kassenkhan, M. Iglíkova</b> Recommendation algorithms for educational preferences: a review.....	93
<b>A. Yerimbetova, U. Berzhanova, E. Daiyrbayeva, B. Sakenov, M. Sambetbayeva</b> Development of a parallel corpus for Kazakh sign language translation and training of the transformer model.....	110
<b>Sh.P. Zhumagulova, O.Zh. Stamkulov, K. Momynzhanova</b> Hybrid deep learning approach for accurate ECG beat classification using ResNet18 and BiLSTM.....	132
<b>A. Zулhazhav, G. Bekmanova, M. Altaibek, A. Omarbekova, A. Sharipbay</b> A personalized learning feedback system driven by a lexical semantic network.....	147

**T.S. Sadykova, B.K. Sinchev, Im Cho Young, A.S. Auyezova**  
The application of vector space models in intelligent information retrieval systems.....160

**A. Sambetbayeva, V. Jotsov**  
Comparative analysis of deep learning architectures for road crack segmentation.....176

**D. Oralbekova, A. Akhmediyarova, D. Kassymova, Z. Alibiyeva**  
Research on linguistic analysis methods for identifying and extracting text data in the Kazakh language.....188

**Zh.S. Takenova**  
Research on expert assessment methods for determining teachers’ priorities by discipline.....204

**Zh. Tashenova, A.R. Gabdullin, Zh. Abdugulova, Sh. Amanzholova, E. Nurlybaeva**  
Analysis of modern wireless network security protocols and prospects for their development.....228

**A. Temirbayev, N. Meirambekuly, N. Uzbekov, A. Beisen, L. Abdizhalilova**  
CubeSat-based APRS digipeater: design, feasibility and mission concept.....243

**N. Temirbekov, D. Tamabay, S. Kasenov, A. Temirbekov, A. Baimankulov**  
A web-based system for air pollution monitoring with API-integrated data sources.....258

**A.A. Tlepiyev, A. Mukhamedgali, Y.T. Kaipbayev, A.N. Kalmashova, Y.G. Mukhanbet**  
Surface water monitoring in Kazakhstan using NDWI and random forest: a case study of Lake Akkol.....271

**Z. Turysbek, O. Mamyrbayev, M. Abdullah**  
Development of an intelligent system for detecting fake news.....286

**G.S. Shaimerdenova, S.T. Akhmetova, A.N. Zhidebayeva, E.B. Mussirepova, D.A. Bibulova**  
The role of computer modeling in enhancing safety and efficiency in industrial facilities.....301

## МАЗМҰНЫ

<p><b>С. Адилжанова, Б. Амирханов, Г. Амирханова, А. Ануарбек</b> Тағам өнеркәсібі кәсіпорны цифрлық егізінің технологиялық басқару жүйелерінің киберқауіпсіздігін қамтамасыз етудің инновациялық әдістері.....</p>	11
<p><b>Л.А. Алексеева</b> Сублимация жылдамдығындағы бидуатерниондық көріністегі Дирак теңдеулерінің вибротранспорттық биспинорлары және олардың қасиеттері.....</p>	25
<p><b>А. Амирова, Б. Альдош, А. Ибрайхан, Т. Смагулов, А. Айтмагамбет</b> Instagramдағы зиянды сілтемелерді анықтау үшін машиналық оқытуға негізделген тәсіл.....</p>	41
<p><b>Ғ.А. Арғынғазин</b> Жасанды интеллект: алармистік көзқарас қалыптастыру орынды ма?.....</p>	52
<p><b>Ж.А. Әбдібаев, С.К. Сагнаева, Б.Б. Оразбаев, М. Джеймс К. Крэбб, К.А. Дюсекеев</b> Су ресурстарының автоматтандырылған жүйелеріне суару жүйелеріндегі су есептеудің тиімді әдісін әзірлеу.....</p>	66
<p><b>Ж.П. Базарбек, Н.А. Тойганбаева, М.Е. Мансурова, Т.С. Сарсембаева, М.Ж. Сақыпбекова</b> Қазақ тіліне арналған үлкен тіл моделін (LLM) жасау үшін Dataset әзірлеу..</p>	78
<p><b>А. Бекарыстанқызы, М. Байзакова, А. Қасенхан, М. Игликова.</b> Білім алуды жақсарту үшін ұсыныс беретін алгоритмдерге шолу.....</p>	93
<p><b>А.С. Еримбетова, У.Г. Бержанова, Э.Н. Дайырбаева, Б.Е. Сәкенов, М.А. Сәмбетбаева</b> Қазақ ым тіліне аудару үшін параллель корпус құру және transformer моделін оқыту.....</p>	110
<p><b>Ш.П. Жұмағұлова, О.Ж. Стамқұлов, К.Р. Момынжанова</b> RESNET18 және BILSTM қолдана отырып, ЭКГ жүрек соғысын дәл жіктеуге арналған гибридті терең оқыту тәсілі.....</p>	132
<p><b>А. Зулхажав, Г.Т. Бекманова, М. Алтайбек, А.С. Омарбекова, А.А. Шәріпбай</b> Цифрлық білім және студенттердің академиялық жетістіктері: деңгейлер бойынша білім беруді дамыту.....</p>	147

<b>Т.С. Садыкова, Б.К. Синчев, Im Cho Young, А.С. Аuezова</b> Интеллектуалды ақпаратты іздеу жүйелерінде векторлық кеңістік модельдерін қолдану.....	160
<b>А.К. Самбетбаева, В. Йоцов</b> Жол төсемінің жарықтарын сегментациялауда қолданылатын терең оқыту архитектураларын салыстырмалы талдау.....	176
<b>Д. Оралбекова, А. Ахмедиярова, Д. Қасымова, Ж. Алибиева</b> Қазақ тіліндегі мәтіндік ақпаратты анықтау және оны шығарып алу үшін лингвистикалық талдау әдістерін зерттеу.....	188
<b>Ж.С. Такенова</b> Пәндер бойынша оқытушылардың басымдығын бағалауға арналған сараптамалық бағалау әдістерін зерттеу.....	204
<b>Ж.М. Ташенова, А.Р. Габдуллин, Ж.К. Абдугулова, Ш.А. Аманжолова, Э.Н. Нурлыбаева</b> Заманауи сымсыз желінің қауіпсіздік хаттамаларын талдау және олардың даму перспективалары.....	228
<b>А.А. Темирбаев, Н. Мейрамбекұлы, Н.Ш. Узбеков, Ә.Н. Бейсен</b> CUBESAT негізіндегі APRS қайта таратқышы: жобалау, іске асыру мүмкіндігі және миссия тұжырымдамасы.....	243
<b>Н. Темирбеков, Д. Тамабай, С. Касенов, А. Темирбеков, А. Байманкулов</b> API-интеграцияланған дереккөздері бар атмосфералық ауаның ластануын бақылауға арналған веб-негізделген жүйе.....	258
<b>А.А. Тлепиев, А. Мұхамедгали, Е.Т. Кайпбаев, А.Н. Калмашова, Е.Ғ. Мұханбет</b> Қазақстандағы беткі суларды NDWI және RANDOM FOREST әдісі арқылы мониторингілеу: Ақкөл көлінің мысалында.....	271
<b>Ж. Тұрысбек, О.Ж. Мамырбаев, А. Мұхаммед</b> Жалған жаңалықтарды анықтайтын интеллектуалды жүйені әзірлеу.....	286
<b>Г.С. Шаймерденова, С.Т. Ахметова, А.Н. Жидебаева, Э.Б. Мусирепова, Д.А. Бибулова</b> Өнеркәсіптік объектілердің қауіпсіздігі мен тиімділігін арттырудағы компьютерлік модельдеудің рөлі.....	301

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>С. Адильжанова, Б. Амирханов, Г. Амирханова, А. Ануарбек</b> Инновационные методы обеспечения кибербезопасности технологических систем управления цифрового двойника предприятия пищевой промышленности.....	11
<b>Л.А. Алексеева</b> Вибротранспортные биспиноры уравнений Дирака в бикватернионном представлении при дозвуковых скоростях и их свойства.....	25
<b>А. Амирова, Б. Алдош, А. Ибрайхан, Т. Смагулов, А. Айтмагамбет</b> Метод на основе машинного обучения для выявления вредоносных ссылок в Instagram.....	41
<b>Г. Аргынгазин</b> Искусственный интеллект: оправдан ли алармизм?.....	52
<b>Ж.А. Абдибаев, С.К. Сагнаева, Б.Б. Оразбаев, М. Джеймс К. Крэбб, К.А. Дюссекеев</b> Разработка эффективного метода учёта воды для ирригационных систем автоматизированного управления водными ресурсами.....	66
<b>Ж. Базарбек, Н. Тойганбаева, М. Мансурова, Т. Сарсембаева, М. Сакипбекова</b> Создание набора данных для разработки крупной языковой модели (LLM) для казахского языка.....	78
<b>А. Бекарыстанкызы, М. Байзакова, А. Кассенхан, М. Игликова</b> Алгоритмы рекомендаций для образовательных предпочтений: обзор.....	93
<b>А. Еримбетова, У. Бержанова, Е. Дайырбаева, Б. Сакенов, М. Самбетбаева</b> Создание параллельного корпуса для перевода казахского жестового языка и обучение трансформерной модели.....	110
<b>Ш.П. Жумагулова, О.Ж. Стамкулов, К. Момынжанова</b> Гибридный подход глубокого обучения для точной классификации сердечных сокращений ЭКГ с использованием ResNet18 и BiLSTM.....	132
<b>А. Зулхажав, Г. Бекманова, М. Алтайбек, А. Омарбекова, А. Шарипбай</b> Система персонализированной обратной связи в обучении на основе лексико-семантической сети.....	147

<b>Т.С. Садыкова, Б.К. Синчев, Им Чо Ён, А.С. Ауезова</b> Применение моделей векторного пространства в интеллектуальных системах информационного поиска.....	160
<b>А. Самбетбаева, В. Йоцов</b> Сравнительный анализ архитектур глубокого обучения для сегментации трещин на дорогах.....	176
<b>Д. Оралбекова, А. Ахмедиярова, Д. Касымова, З. Алибиева</b> Исследование методов лингвистического анализа для идентификации и извлечения текстовых данных на казахском языке.....	188
<b>Ж.С. Такенова</b> Исследование методов экспертной оценки для определения приоритетов учителей по дисциплинам.....	204
<b>Ж. Ташенова, А.Р. Габдуллин, Ж. Абдугулова, Ш. Аманжолова, Е. Нурлыбаева</b> Анализ современных протоколов безопасности беспроводных сетей и перспективы их развития.....	228
<b>А. Темирбаев, Н. Мейрамбекулы, Н. Узбеков, А. Бейсен, Л. Абдижалилова</b> APRS-дигипитер на основе CubeSat: проектирование, осуществимость и концепция миссии.....	243
<b>Н. Темирбеков, Д. Тамабай, С. Касенов, А. Темирбеков, А. Байманкулов</b> Веб-система мониторинга загрязнения воздуха с API-интеграцией источников данных.....	258
<b>А.А. Тлепиев, А. Мухамедгали, Е.Т. Кайпбаев, А.Н. Калмашова, Е.Г. Муханбет</b> Мониторинг поверхностных вод в Казахстане с использованием NDWI и случайного леса: кейс озера Аккол.....	271
<b>З. Турысбек, О. Мамырбаев, М. Абдулла</b> Разработка интеллектуальной системы для выявления фейковых новостей.....	286
<b>Г.С. Шаймерденова, С.Т. Ахметова, А.Н. Жидебаева, Е.Б. Муссирепова, Д.А. Бибулова</b> Роль компьютерного моделирования в повышении безопасности и эффективности промышленных объектов.....	301

ACADEMIC SCIENTIFIC JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE  
ISSN 1991-346X  
Volume 3. Number 355 (2025). 25–40

<https://doi.org/10.32014/2025.2518-1726.361>

UDC 539.3  
MSQ 35L05, 74H05, 74H45

**L.A. Alexeyeva, 2025.**

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.  
E-mail: alexeeva@math.kz

### **VIBROTRANSPORT BISPINORS OF DIRAC EQUATIONS IN BIQUATERNIONIC REPRESENTATION AT SUBLIGHT SPEEDS AND THEIR PROPERTIES**

**Lyudmila Alexeyeva** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, chief researcher, Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan,  
E-mail alexeeva@math.kz, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7131-4635>.

**Abstract.** Among active sources of disturbances in various media the most widespread are transport and vibration transport ones, which are associated with moving emitters of electromagnetic waves of different lengths, the speed of which can be lower or higher than the speed of propagation of disturbances of the medium. The most studied transport solutions are those with a constant shape of the moving source, while the fields of moving sources with vibrations of different frequencies are little studied. Here fundamental and regular vibration transport solutions of biquaternion representations of the Maxwell and Dirac equations are constructed for sublight velocities of the radiation source (the Mach number  $M < 1$ ). Green's bifunction is constructed, which describes the field of a radiation source concentrated at a point, which moves with a constant speed and oscillates with a fixed frequency  $\omega = 0$ . On their basis general solutions of the Dirac vibration transport equation are constructed under the action of both spatially distributed moving vibration sources and those concentrated on moving surfaces and lines. At  $\omega = 0$  the obtained solutions describe transport solutions of the Dirac equations. At  $M = 0$ ,  $\omega > 0$  these same formulas describe the process of stationary oscillations with a fixed frequency and can be used to construct time-periodic solutions of the Dirac equations. At  $p = 0$  these solutions describe the vibrotransport solutions of biquaternion form of Maxwell's equations, which can be used to study electromagnetic fields of various light emitters and radio wave emitters located on moving objects (trains, cars, ships, etc.). The constructed solutions should find application in theoretical physics, elementary particle physics, radio engineering, and electronics. The constructed solutions should find application in theoretical physics, elementary particle physics, radio engineering, and electronics.

**Key words:** Dirac equations, Maxwell equations, biwave equation, fundamental solution, Green bifunction, speed of light, Mach number

**Л.А. Алексеева, 2025.**

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан.

E-mail: alexeeva@math.kz

## **СУБЛИМАЦИЯ ЖЫЛДАМДЫҒЫНДАҒЫ БИКУАТЕРНИОНДЫҚ КӨРІНІСТЕГІ ДИРАК ТЕНДЕУЛЕРІНІҢ ВИБРОТРАНСПОРТТЫҚ БИСПИНОРЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ**

**Алексеева Людмила Алексеевна** — физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҒЖБМ Математика және математикалық модельдеу институтының бас ғылыми қызметкері, Алматы, Қазақстан,

E-mail: l.alexeeva@math.kz, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7131-46>.

**Аннотация.** Эртүрлі орталардағы бұзылулардың белсенді көздерінің ішінде ең көп таралғаны эртүрлі толқын ұзындықтағы электромагниттік толқындардың қозғалатын эмитенттерімен байланысты тасымалдау және діріл беру болып табылады. Олардың жылдамдығы ортадағы бұзылулардың таралу жылдамдығынан төмен және жоғары болуы мүмкін. Ең көп зерттелген көлік шешімдері қозғалатын көздің бекітілген пішініне ие, ал эртүрлі жиіліктегі тербелістері бар қозғалатын көздердің өрістері аз зерттелген. Жарық жылдамдығынан төмен сәулелену көзінің жылдамдықтары үшін Максвелл және Дирак тендеулерінің бикватерниондық кескіндерінің негізгі және діріл тасымалдау шешімдері құрастырылған (Мах саны  $M < 1$ ). Бір нүктеде шоғырланған, тұрақты  $v$  жылдамдықпен қозғалатын және тұрақты  $\omega$  жиілікпен тербелетін сәулелену көзінің өрісін сипаттайтын Жасыл бифункция тұрғызылған. Олардың негізінде кеңістікте таралған және қозғалатын беттер мен түзулерде шоғырланған қозғалатын тербеліс көздерінің де әрекеті үшін Дирак тербелмелі тасымалдау тендеуінің жалпы шешімдері құрастырылған. Алынған шешімдерде  $\omega = 0$  Дирак тендеулерінің транспорттық шешімдері сипатталады. Дәл осы формулалар тұрақты  $M = 0$ ,  $\omega > 0$  жиіліктегі стационарлық тербеліс процесін сипаттайды және Дирак тендеулерінің уақыт бойынша периодты шешімдерін құру үшін пайдаланылуы мүмкін. Бұл шешімдерде  $p = 0$  қозғалатын объектілерде (поездар, автомобильдер, кемелер және т.б.) орналасқан эртүрлі жарық шығарғыштар мен радиотолқын сәулеленушілердің электромагниттік өрістерін зерттеу үшін пайдаланылуы мүмкін Максвелл тендеулерінің бикватерниондық түрінің діріл тасымалдау шешімдері сипатталады. Құрылған шешімдер теориялық физикада, элементар бөлшектер физикасында, радиотехникада және электроникада қолданылуы мүмкін.

**Түйін сөздер.** Дирак тендеулері, Максвелл тендеулері, қос толқынды тендеу, іргелі шешім, гриннің қосфункциясы, жарық жылдамдығы, мах саны

Л.А. Алексеева, 2025.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан.

E-mail: alexeeva@math.kz

## ВИБРОТРАНСПОРТНЫЕ БИСПИНОРЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА В БИКВАТЕРНИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРИ ДОСВЕТОВЫХ СКОРОСТЯХ И ИХ СВОЙСТВА

Алексеева Людмила Алексеевна — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,

E-mail alexeeva@math.kz, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7131-4635>.

**Аннотация.** Среди активных источников возмущений в различных средах наибольшее распространение получили транспортные и вибротранспортные источники, связанные с движущимися излучателями электромагнитных волн различной длины. Их скорость может быть как ниже, так и выше скорости распространения возмущений в среде. В то время как транспортные решения при постоянной форме источника изучены достаточно полно, свойства полей, создаваемых движущимися вибрирующими источниками, остаются мало исследованными.

В настоящей работе построены фундаментальные и регулярные вибротранспортные решения бикватернионных форм уравнений Максвелла и Дирака при досветовых скоростях движения источника (число Маха  $M < 1$ ) и фиксированной частоте вибрации. Представлена бифункция Грина, описывающая поле точечного источника, движущегося с постоянной скоростью и колеблющегося с постоянной частотой. Построены общие решения вибротранспортного уравнения Дирака как для пространственно распределённых источников, так и для источников, сосредоточенных на подвижных поверхностях и линиях.

Полученные решения описывают:

— при  $\omega=0, \Omega=0, \omega=0$  — транспортные решения уравнений Дирака;

— при  $V=0, V=0, V=0$  — стационарные колебания;

— при  $\omega \neq 0, V \neq 0, \Omega \neq 0, V \neq 0, \omega=0, V=0$  — вибротранспортные решения бикватернионных форм уравнений Максвелла.

Эти результаты могут быть использованы при моделировании электромагнитных полей, создаваемых подвижными источниками, размещёнными, например, на поездах, автомобилях или судах. Построенные решения обладают потенциалом применения в теоретической физике, физике элементарных частиц, радиотехнике и электронике.

**Ключевые слова:** уравнения Дирака, уравнения Максвелла, биволновое уравнение, фундаментальное решение, бифункция Грина, скорость света, число Маха

*Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант AP19674789, 2023-2025 гг.).*

**Введение.** Основополагающими в квантовой теории поля и электродинамике являются уравнения Максвелла и Дирака (Максвелл Дж.К., 1989; Дирак, 1979). Построению и исследованию решений этих уравнений и краевых задач, начиная со второй половины XIX века, посвящены работы многих ученых. Библиография в этом направлении обширная, начиная с многочисленной учебной литературы по электромагнетизму (Джексон, 1965; Фейнман, 1965, Ландау, 2003; Савельев, 1970) и др.

Эти уравнения допускают бикватернионные представления, что отмечено многими авторами (Rodrigues, 1990, Finkelstein, 1992; De Leo, 1997; Ефремов, 2004; Acevedo, 2005; Марчук, 2009) Фундаментальные и обобщённые решения бикватернионных волновых уравнений и краевых задач для них, которые содержат бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака построены в работах (Alexeyeva, 2012, 2013, 2021).

Среди действующих источников излучения ЭМ волн наиболее распространёнными являются подвижные источники колебаний, расположенные на платформах различных транспортных средств (*вибротранспортные* источники). Очевидно, что скорость их движения и частота колебаний существенно влияют на процессы распространения ЭМ волн в средах с различной электрической проводимостью и магнитной проницаемостью, как и форма самого источника и характер его работы. Исследования в этом направлении не столь многочисленны и связаны с определённым видом источника излучения.

**Материалы и методы.** В любой среде волны распространяются с определенной скоростью. В механике сплошных сред их называют *звуковыми*, которое пришло из акустики. В сплошных средах скорость распространения волн зависит от типа деформации среды, которую они распространяют. Поэтому в сплошной среде может быть несколько звуковых скоростей. А в анизотропных средах они еще зависят от направления. Отношение скорости движения источника возмущения в среде  $V$  к скорости звука называется числом Маха ( $V/c=M$ ). При  $M<1$  движение *дозвуковое*, при  $M>1$  *сверхзвуковое*. Хорошо известны особенности акустических волн при движении самолетов при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. При математическом моделировании таких транспортных задач тип дифференциальных уравнений меняется: эллиптический при дозвуке и гиперболический при сверхзвуке. Что сильно влияет на решение задачи и кардинально меняет картину волнового поля в среде.

В изотропных электромагнитных средах, которые описываются уравнениями Максвелла (УМ), скорость распространения ЭМ волн одна, и ее принято называть *скоростью света*. Она является критической, точно

так же, как является критической скоростью звука в воздухе. Поэтому можно рассматривать *досветовой* режим движения, *световой* и *сверхсветовой*. В статье (Алексеева, 2024) построены транспортные решения бикватернионной формы уравнений Максвелла-Дирака в досветовом диапазоне скоростей.

В этой статье мы также рассматриваем досветовой диапазон движения виброисточников излучения электромагнитных и электро-гравимагнитных волн с учётом частоты колебаний источника излучения. Здесь строится бикватернионная функция Грина для этого диапазона скоростей во всём диапазоне частот. На ее основе представлены формулы расчёта векторов напряжённости полей, которые описывают искомые бикватернионы, плотности энергии и вектора Пойнтинга для излучателей различных форм, которые моделируются сингулярными обобщёнными функциями типа простых слоёв на поверхностях и кривых в том числе сосредоточенных на подвижных

**Результаты и обсуждение.** Здесь используем представление бикватернионов в скалярно-векторной форме, которая очень наглядна и удобна для физических приложений. Для ясности изложения дадим вначале основные определения и обозначения дифференциальной алгебры бикватернионов (Alexeyeva, 2012).

### 1. Основные понятия дифференциальной алгебры бикватернионов

Пространство бикватернионов  $\mathbf{B} = \{\mathbf{F} = f + F\}$  - это пространство гиперкомплексных чисел, где  $f$  - комплексное число,  $F$  - трехмерный вектор с комплексными компонентами:  $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ ,  $e_1, e_2, e_3$  - орты декартовой системы координат в  $R^3$ ,  $e_0 = 1$ . Это линейное пространство со сложением (+): для  $\forall a, b$  - комплексных чисел  $a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = (af + bg) + (aF + bG)$ ,

и с известной операцией кватернионного умножения ( $\circ$ ):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + \{fG + gF + [F, G]\} \quad (1)$$

Здесь и далее  $[F, G] = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jkl} F_j G_k e_l$  - скалярное произведение  $F$  и  $G$ ,

$$[F, G] = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jkl} F_j G_k e_l - \text{их векторное произведение, } \varepsilon_{jkl} - \text{псевдотензор}$$

Леви-Чивита,  $\delta_{jk}$  - символ Кронекера.

Алгебра бикватернионов некоммутативна, поскольку  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} - \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = 2[G, F]$ , но ассоциативна:

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{H} = (\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \circ \mathbf{H} = \mathbf{F} \circ (\mathbf{G} \circ \mathbf{H}) \quad (3)$$

Определение 1. Бикватернион  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{f} + \bar{F}$  называется *комплексно-сопряжённым*  $\mathbf{F} = f + F$ .

Определение 2. Бикватернион  $\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{f}} - \overline{\overline{F}}$  называется *сопряжённым*  $\mathbf{F} = f + F$ .

О п р е д е л е н и е 3. Скалярным произведением бикватернионов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  назовём билинейную операцию  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = f_1 f_2 + (F_1, F_2)$ .

О п р е д е л е н и е 4. Нормой бикватерниона  $\mathbf{F}$  назовём скалярную величину

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}})} = \sqrt{f \cdot \bar{f} + (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2}.$$

О п р е д е л е н и е 5. Псевдонормой бикватерниона  $\mathbf{F}$  назовём величину

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - (F \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2}. \quad (4)$$

Здесь и далее черта над символом означает комплексное сопряжение.

Далее рассматривается функциональное пространство бикватернионов

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{F}(\tau, x) = f(\tau, x) + F(\tau, x)\}$$

на пространстве Минковского  $\mathbf{M} = \{(\tau, x), \tau \in R^1, x \in R^3\}$ , где  $f(\tau, x)$  – комплекснозначная функция, а  $F(\tau, x) = \sum_{j=1}^3 F_j(\tau, x) e_j$  – трёхмерная вектор-функция с комплексными компонентами из класса обобщённых функций медленного роста на  $\mathbf{M}$  (Владимиров, 1976, 1979).

О п р е д е л е н и е 6. Взаимные биградиенты – это дифференциальные бикватернионные операторы вида:

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla,$$

где  $\nabla = \text{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . Их действие на  $\mathbf{B}(\mathbf{M})$  определено согласно правилу умножения в алгебре кватернионов:

$$\begin{aligned} \nabla^\pm \mathbf{F} &= (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) \square \partial_\tau f \mp i(\nabla, F) \pm i\nabla f \pm \partial_\tau F \pm i[\nabla, F] \equiv \\ &= \partial_\tau f \mp i \text{div} F \pm i \text{grad} f \pm \partial_\tau F \pm i \text{rot} F \end{aligned}$$

(везде в двойных знаках подразумеваются знаки верхние либо нижние). Их суперпозиция обладает замечательным свойством, которое доказывается простым вычислением.

Л е м м а 1. Суперпозиция взаимных биградиентов  $\nabla^+, \nabla^-$  коммутативна и равна

$$\nabla^- (\nabla^+ \mathbf{F}) = \nabla^+ (\nabla^- \mathbf{F}) = (\nabla^- \circ \nabla^+) \mathbf{F} = \square \mathbf{F},$$

где волновой оператор  $\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta$  (даламбертиан),  $\nabla$  – оператор Лапласа (лапласиан).

Используя эту лемму легко решать бикватернионные дифференциальные уравнения вида:

$$\nabla^\pm \mathbf{K} = \mathbf{G}(\tau, x). \quad (5)$$

которые называем *биволновыми*. Таким уравнением является бикватернионное обобщение уравнений Максвелла, где  $\mathbf{K}$  описывает напряженность ЭМ поля, а  $\mathbf{G}(\tau, \mathbf{x})$  - плотность его зарядов и токов.

Решения биволнового уравнения ранее рассмотрены в (Alexeyeva, 2021).

## 2. Уравнения Дирака в бикватернионном представлении

Рассмотрим бикватернионное обобщение уравнения Дирака (УД), которое имеет вид:

$$(\nabla^+ + m)\mathbf{B} = \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}), \quad (6)$$

где  $m$  – комплексная константа. Дифференциальные операторы:

$$\mathbf{D}_m^+ = \nabla^+ + m, \quad \mathbf{D}_m^- = \nabla^- + m, \quad -$$

являются биградиентным представлением матричных операторов Дирака. Система уравнений Дирака эквивалентна этому уравнению при  $m = i\rho$ , где  $\rho$  - действительная константа.

Простым вычислением легко показать, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим свойством

Л е м м а 2. Суперпозиция операторов  $\mathbf{D}_m^+$ ,  $\mathbf{D}_m^-$  коммутативна и равна

$$\mathbf{D}_m^+ \mathbf{D}_m^- = \mathbf{D}_m^- \mathbf{D}_m^+ = \square + m^2 + 2m\partial_\tau, \quad (7)$$

а при  $m = i\rho$ , где  $\rho$  - действительное число

$$\mathbf{D}_{i\rho}^+ \mathbf{D}_{i\rho}^- = \mathbf{D}_{i\rho}^- \mathbf{D}_{i\rho}^+ = \square - 2\rho\partial_\tau + \rho^2$$

О п р е д е л е н и е. Свёрткой двух бикватернионов называется выражение вида:

$$\mathbf{A}(\tau, \mathbf{x}) * \mathbf{B}(\tau, \mathbf{x}) = a * b - \sum_{i,j,l=1}^3 (A_j * B_j)_+ + \sum_{i,j,l=1}^3 (a * A_j)_- e_j + (b * B_j)_- e_j + \varepsilon_{ijl} (A_i * B_j)_- e_l,$$

где в скобках стоят обычные свёртки обобщённых функций (Владимиров, 1976).

Легко видеть, что здесь объединены операции бикватернионного умножения и функциональная свёртка, которая для регулярных компонент бикватерниона представима в интегральном виде:

$$a(\tau, \mathbf{x}) * A_j(\tau, \mathbf{x}) = \int_M a(\tau - t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) A_j(t, \mathbf{y}) dt dy_1 dy_2 dy_3$$

Решения этого уравнения для нестационарных процессов, процессов стационарных колебаний и транспортные решения ранее построены и изучены автором в вышеупомянутых работах. Здесь построим вибротранспортные решения БОУД (6).

## 3. Вибротранспортное уравнение Дирака и его решение

Рассмотрим случай, когда правая часть (6) имеет вид:

$$\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{Q}(x, z) e^{i\omega\tau}, \quad (8)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 x_j e_j, \quad x = (x_1, x_2), \quad z = x_3 - Vt = x_3 - M\tau. \quad \text{Здесь введено число}$$

Маха  $M = V / c$ .

Бикватернион  $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x})$  описывает движение излучателя в направлении оси  $X_3$  со скоростью  $V$ , которое вибрирует с частотой  $\omega$ . В этом случае решение (10) будем строить в аналогичном виде  $\mathbf{B}(x, z, \tau) = \mathbf{B}(x, z)e^{i\omega\tau}$ . Назовем его *вибротранспортным* решением БУД. Тогда

$$\partial_\tau = M\partial_z + i\omega, \quad \nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_z), \quad (9)$$

и в подвижной системе координат  $(x_1, x_2, z)$  уравнение преобразуется к виду:

$$\mathbf{D}_{M\omega}^\pm \mathbf{B}(x, z) = \mathbf{Q}(x, z), \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_{M\omega}^\pm \square \{M\partial_z + (m + i\omega) \pm i(\partial_1, \partial_2, \partial_z)\} = M\partial_z + (m + i\omega) \pm i\nabla.$$

Будем называть это уравнение *вибротранспортным уравнением Дирака* (ВТУД).

Л е м м а 3. *Композиция взаимных операторов*

$$\mathbf{D}_{M\omega}^+ \circ \mathbf{D}_{M\omega}^- = \mathbf{D}_{M\omega}^- \circ \mathbf{D}_{M\omega}^+ = -\Delta_2 - \mu^2 (\partial_z)^2 + 2ia\partial_z - b^2,$$

где  $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$  - двумерный лапласиан,  $\mu = \sqrt{|1 - M^2|}$ ,  $a = Mb$ ,  $b = \omega + \rho$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о: Согласно Лемме 2, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{M\omega}^+ \circ \mathbf{D}_{M\omega}^- &= \mathbf{D}_{M\omega}^- \circ \mathbf{D}_{M\omega}^+ = \{M\partial_z + i(\rho + \omega) + i\nabla\} \circ \{M\partial_z + i(\rho + \omega) - i\nabla\} \\ &= -\Delta + (M\partial_z)^2 + 2iM(\omega + \rho)\partial_z - (\rho + \omega)^2 = -\Delta - \mu^2\partial_z^2 + 2a\partial_z - b^2. \end{aligned}$$

Здесь используем введённые обозначения для  $a, b, \mu$ . В результате получена формула леммы.

Т е о р е м а 1. *Общее решение вибротранспортного уравнения Дирака* (10) *можно представить в виде*

$$\mathbf{B}(x, z) = \mathbf{B}^0(x, z) + \mathbf{D}_{M\omega}^\mp (\mathbf{Q} * \psi), \quad (11)$$

где  $\mathbf{B}^0(x, z)$  решение однородного уравнения (при  $F = 0$ ),  $\psi(x, z)$  - фундаментальное решение уравнения:

$$\{-\Delta_2 - \mu^2 (\partial_z)^2 + 2ia\partial_z - b^2\} \psi(x, z) = \delta(z)\delta(x). \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим (11) в (10) и, используя лемму 3, а также свойство ассоциативности кватернионного умножения и свойства свертки с дельта-функцией, получим требуемое:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{M\omega}^\pm \{\mathbf{B}^0 + \mathbf{D}_{M\omega}^\mp (\mathbf{Q} * \psi)\} &= \mathbf{D}_{M\omega}^\pm \mathbf{B}^0 + \mathbf{D}_{M\omega}^\pm \mathbf{D}_{M\omega}^\mp (\mathbf{Q} * \psi) = \{-\Delta_2 - \mu^2\partial_z^2 + 2ia\partial_z - b^2\} (\mathbf{Q} * \psi) = \\ &= \{-\Delta_2 - \mu^2\partial_z^2 + 2ia\partial_z - b^2\} \psi * \mathbf{Q} = \delta(z)\delta(x) * \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \end{aligned}$$

Осталось вычислить *скалярный потенциал*  $\psi(x, z)$ . Вид его зависит от знака  $\mu^2 = 1 - M^2$ .

Скорость распространения волн в среде назовем *световой*. Эта

скорость является критической скоростью движения. Возможны три случая: *досветовая скорость*  $M < 1 \Rightarrow \mu^2 > 0$ , *световая скорость*  $M = 1 \Rightarrow \mu^2 < 0$ , и *сверхсветовая скорость*  $M > 1 \Rightarrow \mu^2 < 0$ . В зависимости от нее меняется тип вибротранспортного уравнения (10): *эллиптический* при досветовой скорости, *параболический* при световой и *строго гиперболический* при сверхсветовой. Рассмотрим здесь досветовой.

Для построения решений используем преобразование Фурье обобщённых функций. Обозначим переменные Фурье  $(\xi, \zeta)$ , соответствующие  $(x, z)$ . Для регулярных функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности, прямое и обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$F^{-1}[\bar{f}(\xi, \zeta)] = f(x, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{R^3} \bar{f}(\xi, \zeta) \exp(-i((x, \xi) + z\zeta)) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\zeta. \quad (13)$$

$$F[\bar{f}(\xi, \zeta)] = f(x, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{R^3} \bar{f}(\xi, \zeta) \exp(-i((x, \xi) + z\zeta)) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\zeta. \quad (14)$$

Для сингулярных функций следует использовать определение преобразования Фурье в пространстве обобщённых функций (Владимиров, 1976, 1979).

Для восстановления оригинала используем свойство обратного преобразования Фурье функции  $\bar{\varphi}(\zeta) \leftrightarrow \varphi(z)$  при линейном преобразовании координаты:

$$\begin{aligned} F^{-1}[\bar{\varphi}(\alpha\zeta + \beta)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\alpha\zeta + \beta) e^{-iz\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) e^{-iz\frac{\zeta - \beta}{\alpha}} d\zeta = \\ &= \frac{e^{iz\beta/\alpha}}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) e^{-i\zeta\frac{z}{\alpha}} d\zeta = \frac{e^{iz\beta/\alpha}}{2\pi\alpha} \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Это свойство позволяет строить оригиналы функции  $f(\zeta) = \bar{\varphi}(\alpha\zeta + \beta)$ , если известен оригинал  $\bar{\varphi}(\zeta)$ .

#### 4. Досветовой скалярный потенциал вибротранспортного уравнения Дирака

При  $M < 1$  скалярный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\left\{ -\Delta_z - \mu^2 (\partial_z)^2 + 2ia\partial_z - b^2 \right\} \psi(x, z) = \delta(z)\delta(x). \quad (15)$$

а его трансформанта Фурье --

$$\left\{ \|\xi\|^2 + \mu^2 \zeta^2 + 2a\zeta - b^2 \right\} \bar{\psi}(\xi, \zeta) = 1.$$

Следовательно

$$\bar{\psi}(\xi, \zeta) = \frac{1}{\|\xi\|^2 + \mu^2 \zeta^2 + 2a\zeta - b^2}. \quad (16)$$

Для построения оригинала преобразуем его к виду:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{\|\xi\|^2 + \mu^2 \zeta^2 + 2a\zeta - b^2} = \\ &= \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\mu\zeta + a/\mu)^2 - b^2 - (a/\mu)^2} = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\mu\zeta + a/\mu)^2 - b^2 (1 + (M/\mu)^2)} = \\ &= \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\mu\zeta + a/\mu)^2 - (b/\mu)^2} = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\mu\zeta + a/\mu)^2 - (b/\mu)^2} \Rightarrow \\ \bar{\psi}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \zeta^2 - k^2}, \quad \zeta = \mu\zeta + a/\mu, \quad k = b/\mu. \end{aligned} \quad (17)$$

Для восстановления оригинала используем свойство линейных преобразований в пространстве переменных Фурье:

$$\begin{aligned} F[\bar{\psi}(\xi, \zeta)] &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{R^2} d\xi_1 d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + z\zeta))}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\mu\zeta + a/\mu)^2 - k^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{8\mu\pi^3} \int_{R^2} d\xi_1 d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + z(\zeta - a/\mu)/\mu))}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \zeta^2 - k^2} d\zeta = \\ &= \frac{e^{iza/\mu^2}}{8\mu\pi^3} \int_{R^2} d\xi_1 d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \zeta z/\mu))}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \zeta^2 - k^2} d\zeta = \frac{e^{iza/\mu^2}}{\mu} U(x_1, x_2, z/\mu) \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta = (\zeta - a/\mu)/\mu$ . А под знаком интеграла стоит преобразование Фурье фундаментальных решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 U + \delta(y) = 0, \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

Среди них, затухающие на бесконечности, имеют следующий вид (Владимиров, 1976, 1979):  $U(y) = \frac{e^{\pm ik\|y\|}}{4\pi\|y\|}$

Причём условию излучения Зоммерфельда, с учётом временного множителя  $e^{i\omega\tau}$ , удовлетворяет лишь функция

$$U(y)e^{i\omega\tau} = \frac{e^{-i(k\|y\| - \omega\tau)}}{4\pi\|y\|}, \quad (18)$$

которая описывает сферические фазовые волны, исходящие из источника, сосредоточенного в точке  $y=0$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \frac{\mu e^{iza/\mu^2}}{\mu} \frac{e^{-ik\mu^{-1}\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}}}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}} \exp\left(i\left(zM - \sqrt{z^2 + (\mu r)^2}\right)b/\mu^2\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}} \exp(i(\omega + \rho)\alpha(z, r)), \end{aligned}$$

где  $\alpha(z, r) = \left( zM - \sqrt{z^2 + (\mu r)^2} \right) / \mu^2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(x, z) e^{i\omega\tau} &= \frac{e^{-i\rho\alpha_-(z, r)}}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}} \exp\left( i\omega\left( \tau - zM / \mu^2 - \sqrt{r^2 + (z / \mu)^2} \right) \right) = \\ &= \frac{e^{i\omega\left( \tau - \sqrt{r^2 + (z / \mu)^2} \right)}}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}} \exp\left( i\left( \rho\sqrt{r^2 + (z / \mu)^2} - (\rho + \omega)zM / \mu^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Определим фазовую поверхность этой волны:

$$\alpha(z, r)(\rho + \omega) = C - \omega\tau,$$

$$zM - \sqrt{z^2 + (\mu r)^2} = \mu^2 \frac{C - \omega\tau}{\rho + \omega} = f(\tau) \Rightarrow$$

Вычислим

$$z^2 + (\mu r)^2 = f^2(\tau) - 2zMf(\tau) + (zM)^2,$$

$$(z)^2 - (zM)^2 + 2zMf(\tau) + (\mu r)^2 = f^2(\tau), \quad (\mu z)^2 + 2zMf(\tau) + (\mu r)^2 = f^2(\tau),$$

$$(\mu z + Mf(\tau) / \mu)^2 + (\mu r)^2 = f^2(\tau) + (Mf(\tau) / \mu)^2 = \left( \frac{f(\tau)}{\mu} \right)^2,$$

$$\left( z + Mf(\tau) / \mu^2 \right)^2 + r^2 = \frac{f^2(\tau)}{\mu^3} = \mu \left( \frac{C - \omega\tau}{\rho + \omega} \right)^2.$$

В результате получим

$$\left( z + \frac{M}{\mu^2} \left( \frac{C - \omega\tau}{\rho + \omega} \right) \right)^2 + r^2 = \mu \left( \frac{C - \omega\tau}{\rho + \omega} \right)^2.$$

Это сфера радиуса  $\sqrt{\mu} \left| \frac{C - \omega\tau}{\rho + \omega} \right|$  с центром в подвижной точке

$$X^* = \left\{ 0, 0, z = \frac{M(\omega\tau - C)}{\mu^2(\rho + \omega)} \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $C$  – произвольная действительная константа.

### 5. Досветовой волновой потенциал однородного вибротранспортного уравнения Дирака

Построим теперь решения однородного вибротранспортного уравнения Дирака:

$$\mathbf{D}_{M\omega}^\pm \mathbf{B}^0(x, z) = 0, \quad (21)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{D}_{M\omega}^{\bar{r}} \mathbf{D}_{M\omega}^{\pm} \mathbf{B}^0 = \left( -\Delta_2 - \mu^2 (\partial_z)^2 + 2ia\partial_z - b^2 \right) \mathbf{B}^0 = 0,$$

$$\mu = \sqrt{1 - M^2}, \quad a = Mb, \quad b = \omega - im.$$

Соответствующий скалярный потенциал  $\psi_0(x, z)$  и является решением однородного вибротранспортного уравнения:

$$\left( \Delta_2 + \mu^2 \partial_z \partial_z - 2ia\partial_z + b^2 \right) \psi_0(x, z) = 0, \tag{22}$$

преобразование Фурье которого имеет вид:

$$\left( \|\xi\|^2 + \mu^2 \zeta^2 - 2a\zeta - b^2 \right) \bar{\psi}_0(\xi, \zeta) = 0.$$

Следовательно  $\bar{\psi}_0 = \beta(\xi, \zeta) \delta_S(\xi, \zeta)$  - простой слой на поверхности S:

$$S = \left\{ (\xi, \zeta) : \|\xi\|^2 + \mu^2 (\zeta - a/\mu)^2 = a^2 + b^2 \right\}. \tag{23}$$

Легко видеть, что это осесимметричный эллипс с центром в точке  $(\xi, \zeta) = \left( 0, 0, \frac{a}{\mu} \right)$ . Оригинал определяется интегралом по поверхности этого эллипса:

$$\psi_0(x, z) = \int_S \beta(\xi, \zeta) e^{-i(x, \xi)} e^{-iz\zeta} dS(\xi, \zeta), \tag{24}$$

где  $\beta(\xi, \zeta)$  - произвольная интегрируемая на S функция.

Для построения  $\psi_0(x, z)$  можно также использовать решения однородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

которые можно разложить в ряды по сферическим гармоникам и сферическим функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{n,m} a_n J_n(k\|y\|) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = \sum_{n,m} a_n J_n(k\|y\|) P_n^m \left( \frac{y_3}{\|y\|} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi)^m = \\ &= \sum_{n,m} a_n \frac{J_n(k\|y\|)}{\|y\|_2^m} P_n^m \left( \frac{y_3}{\|y\|} \right) (y_1 + iy_2)^m, \quad \|y\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь  $P_n^m(\cos \theta)$

- присоединенные полиномы Лежандра,  $\theta, \varphi$  угловые сферические координаты. Используя свойства сдвига преобразования Фурье и сжатия-растяжения по координатным осям, в результате из (30) получим оригинал этого вибротранспортного волнового потенциала:

$$\psi_0(x, z) = e^{ia/\mu} \sum_{n,m} a_n J_n \left( \frac{b}{\mu} \sqrt{z^2 + \mu^2 r^2} \right) P_n^m \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + \mu^2 r^2}} \right) e^{im\varphi}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{26}$$

Итак, в формуле (11) теоремы 1 все функции определены и общее решение вибротранспортного уравнения Дирака при досветовых скоростях движения источника построено.

Бикватернион энергии-импульса определяется формулой

$$\begin{aligned} \Sigma(x, z) &= 0,5\mathbf{B}(x, z) \circ \mathbf{B}^*(x, z) = \\ &= 0,5(b(x, z) + B(x, z)) \circ (\bar{b}(x, z) - \bar{B}(x, z)) = w(x, z) + iP(x, z). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $w(x, z), P(x, z)$  - плотность энергии и аналог вектора Пойнтинга, который показывает направление ее распространения.

### 9. Бифункция Грина вибротранспортного уравнения Дирака

Общее решение ВТУД можно записать в более удобном для вычисления виде, если использовать бикватернионную функцию Грина.

**О п р е д е л е н и е.** Бифункцией Грина вибротранспортного уравнения Дирака  $\mathbf{U}^\pm(x, z)$  называется решение уравнения (10) при  $\mathbf{Q}(x, z) = \delta(x)\delta(z)$ :  $\mathbf{D}_\nabla^\pm \mathbf{U}^\pm(x, z) = \delta(x)\delta(z)$ ,

удовлетворяющее условиям затухания

$$\mathbf{U}^\pm(x, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|(x, z)\| \rightarrow \infty$$

и условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Из теоремы 1 следует, при  $\mathbf{F} = \delta(x)\delta(z)$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\pm(x, z) &= \mathbf{D}_{M\omega}^\mp \psi(x, z) = \\ &= \{M\partial_z + i(\rho + \omega) \pm i\nabla\} \psi = i(\rho + \omega)\psi + M\partial_z \psi \pm i\text{grad} \psi. \end{aligned} \quad (28)$$

Очевидно, что бифункция Грина удовлетворяет условию затухания (33), в силу свойств потенциала  $\psi(x, z)$  и его производных.

**Т е о р е м а 2.** Частное решение вибротранспортного уравнения Дирака при досветовых скоростях движения ( $M < 1$ ) можно представить в виде бикватернионной свертки

$$\mathbf{B}(x, z) = \mathbf{U}^\pm(x, z) * \mathbf{Q}(x, z), \quad (29)$$

которую для регулярных  $\mathbf{Q}(x, z)$  можно представить в интегральном виде

$$\mathbf{B}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \iint_{R^2} \mathbf{U}^\pm(x - y, z - \zeta) \circ \mathbf{Q}(y, \zeta) dy_1 dy_2.$$

Решение существует, если  $\mathbf{Q}(x, z) \in L_1(R^3)$ .

Если правая часть (10) сингулярный бикватернион с носителем на поверхности  $S$  или кривой  $l$ , например

$$\mathbf{Q}(x, z) = \mathbf{A}_S(x, z)\delta_S(x, z) \quad \mathbf{Q}(x, z) = \mathbf{A}_L(x, z)\delta_L(x, z),$$

$$\text{то} \quad \mathbf{B}(x, z) = \int_S \mathbf{U}^\pm(x - y, z - \zeta) \circ \mathbf{Q}(y, \zeta) dS(y_1, y_2, \zeta),$$

$$\mathbf{B}(x, z) = \int_i \mathbf{U}^\pm(x - y, z - \zeta) \circ \mathbf{Q}(y, \zeta) dl(y_1, y_2, \zeta),$$

где интегралы берутся по носителю бикватерниона, т.е. поверхностный и криволинейный.

**Заклучение.** Решения уравнений Дирака в теоретической физике принято называть *спинорами*. Соответственно назвать *биспинорами* их бикватернионное представление.

Формула теоремы 2 даёт решение ВТУД при любых  $\mathbf{Q}(x, z)$  из класса сингулярных бикватернионов, в том числе описываемых сингулярными обобщёнными функциями, дельта – функциями и их производными, которые используют для описания движущихся зарядов, диполей, мультиполей и элементарных частиц. Для таких источников излучения следует использовать правила вычисления свёрток обобщённых функций (Владимиров, 1979).

При  $\omega=0$  полученные решения описывают транспортные решения уравнений Дирака. При  $M=0$ ,  $\omega>0$  эти же формулы описывают процесс стационарных колебаний с фиксированной частотой и могут быть использованы для построения периодических по времени решений уравнений Дирака. При  $\rho=0$  эти решения описывают решения бикватернионной формы уравнений Максвелла, которые можно использовать для исследования электромагнитных полей различных световых излучателей и излучателей радиоволн, расположенных на подвижных объектах (поездах, машинах, кораблях и т.п.).

Отметим, что построенная здесь бифункция Грина необходима для решения вибротранспортных краевых задач в областях, ограниченных цилиндрическими поверхностями, по которым движутся излучатели волн в направлении их образующих.

### Литература

- Максвелл Дж. К. (1989) Трактат об электричестве и магнетизме. — Т. 1, 2. Москва: Наука.
- Дирак П.А.М.(1979) Принципы квантовой механики. — Москва: Наука.
- Джексон Дж. (1965) Классическая электродинамика. — Москва: Мир.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. (1965) Фейнмановские лекции по физике. — Т. 5. Электричество и магнетизм. - Москва: Мир.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (2003) Теория поля. Теоретическая физика. —Т. 2. — Москва: Физматлит.
- Савельев И.В. (1970) Курс общей физики. Т. 2. Электричество. — Москва: Наука.
- Rodrigues W. A. , Capelas de Oliveira E. (1990) Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin-Clifford bundles. Int. Journal of Theoretical Physics. — V.-29. — P. 397–412.
- Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. (1992) Foundations of quaternion quantum mechanics. J. Math. Phys., 3. — P. 207–220.
- Adler S. L.(1995) Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. — New York: Oxford University Press.
- De Leo S., Rodrigues Jr.W.A. (1997) Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions. Int. J. Theor. Phys. — V. 36. — P. 2725–2757.
- Ефремов А.П. (2004) Кватерноны: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — Т. 1. — №1. — С. 111-127.

Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M. (2005) Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations. *Apeiron*. — V.12. — No. 4. — P. 371-376.

Марчук Н.Г. (2009) Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. — Москва-Ижевск.

Alexeyeva L.A. (2012) Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations. *Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications*. — V. 7. — No 1. — P. 19-39.

Alexeyeva L.A. (2021) Biquaternionic Wave Equations and the Properties of Their Generalized Solutions Differential Equations. — V. 57.-No 5. — P.594-604. Doi: 10.1134/S0012266121050049

Алексеева Л.А., Азиз Г.Н. (2024) Транспортные решения уравнений Максвелла в бикватернионном представлении при досветовых скоростях. *Журнал проблем эволюции открытых систем*. — Т. 26. — №.1. — С. 64-73. doi.org/10.26577/JPEOS.2024.v.26.il-i6

Владимиров В.С. (1976) Уравнения математической физики. — Москва: Наука.

Владимиров В.С. (1979) Обобщенные функции в математической физике. — Москва: Наука.

### References

Maksvell Dzh. K. (1989) Traktat ob elektrichestve i magnetizme [Treatise on Electricity and Magnetism]. — V.1, 2. Moskva: Nauka (in Russ).

Dirak P.A.M. (1979) Printsipy kvantovoy mekhaniki [Principles of Quantum Mechanics]. — Moskva: Nauka (in Russ).

Dzhekson Dzh. (1965) Klassicheskaya elektrodinamika [Classical Electrodynamics]. — Moskva: Mir (in Russ).

Feynman R., Leyton R., Sands M. (1965) Feynmanovskiye lektzii po fizike [The Feynman Lectures on Physics]. — T.5. Moskva: Mir (in Russ).

Landau L.D., Lifshits Ye.M. (2003) Teoriya polya. Teoreticheskaya fizika [Field Theory. Theoretical Physics]. — T.2. Moskva: Fizmatlit (in Russ).

Savel'yev I.V. (1970) Kurs obshchey fiziki [Course of General Physics]. V.2. Elektrichestvo. — Moskva: Nauka (in Russ).

Rodrigues W.A., Capelas de Oliviera E. (1990) Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin-Clifford bundles. *Int. Journal of Theoretical Physics*, 29. — P. 397–412 (in Engl).

Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. (1992) Foundations of quaternion quantum mechanic. *J. Math. Phys.*, 3. — P. 207–220 (in Engl).

Adler S. L. (1995) Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. — New York: Oxford University Press (in Engl).

De Leo S., Rodrigues Jr. W.A. (1997) Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions. *Int. J. Theor. Phys.* 36. — P. 2725–2757 (in Engl).

Yefremov A.P. (2004) Kvaternony: algebra, geometriya i fizicheskiye teorii [Quaternions: Algebra, Geometry, and Physical Theories]. *Giperkompleksnyye chisla v geometrii i fizike. Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 1, No. 1. — P. 111–127 (in Russ).

Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M. (2005) Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations. *Apeiron*, 12, no. 4. — P.371–376 (in Engl).

Marchuk N.G. (2009) Uravneniya teorii polya i algebrы Klifforda [Field Theory Equations and Clifford Algebras]. Moskva-Izhevsk (in Russ).

Alexeyeva L.A. (2012) Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations. *Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications*, v. 7, no. 1. — P. 19-39 (in Engl).

Alexeyeva L.A. (2021) Biquaternionic Wave Equations and the Properties of Their Generalized Solutions Differential Equations, 57, no 5. — P. 594-604. Doi: 10.1134/S0012266121050049 (in Engl).

Alekseyeva L.A., Aziz G.N. (2024) Transportnyye resheniya uravneniy Maksvellya v bikvatернионном представлении при досветовых скоростях [Transport solutions of Maxwell's

equations in the biquaternion representation at sublight speeds]. Zhurnal problem evolyutsii otkrytykh sistem (in Russ). doi.org/10.26577/JPEOS.2024.v.26.il-i6 (in Russ).

Vladimirov V.S. (1976) Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. — Moskva: Nauka, (in Russ).

Vladimirov V.S. (1979) Obobshchennyye funktsii v matematicheskoy fizike [Generalized Functions in Mathematical Physics]. — Moskva: Nauka (in Russ).

## **Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the Central Asian Academic Research Center LLP**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the journals of the Central Asian Academic Research Center LLP implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The Central Asian Academic Research Center LLP follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the Central Asian Academic Research Center LLP.

The Editorial Board of the Central Asian Academic Research Center LLP will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

**[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)**

**<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>**

**ISSN2518-1726 (Online),**

**ISSN 1991-346X (Print)**

Директор отдела издания научных журналов НАН РК *А. Ботанқызы*

Редакторы: *Д.С. Аленов, Ж.Ш. Әден*

Верстка на компьютере *Г.Д. Жадыранова*

Подписано в печать 25.09.2025.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная.

Печать – ризограф. 20,0 п.л. Заказ 3.