ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

«ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ
АКАДЕМИЯСЫ» РҚБ

«ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫ» РҚБ

ХАБАРЛАРЫ

ИЗВЕСТИЯ

РОО «НАЦИОНАЛЬНОЙ
АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН»

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF
SCIENCES OF THE REPUBLIC OF
KAZAKHSTAN

SERIES OF PHYSICS AND MATHEMATICS

2 (354)

APRIL – JUNE 2025

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963
PUBLISHED 4 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.
Series of Physics and Mathematics
ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)
Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty).
Certificate **No. KZ20VPY00113741** on the re-registration of the periodical printed and online publication of the information agency, issued on **28.02.2025** by the Republican State Institution «Information Committee» of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan
Subject area*: information and communication technologies.*
Currently: *included in the list of journals recommended by the CCSES MSHE RK in the direction of «Information and communication technologies».*
Periodicity: *4 times a year.*
Editorial address: *28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19*
http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы».
ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктеуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы).

Ақпарат агенттігінің мерзімді баспасөз басылымын, ақпарат агенттігін және желілік басылымды қайта есепке қою туралы ҚР Мәдениет және Ақпарат министрлігі «Ақпарат комитеті» Республикалық мемлекеттік мекемесі **28.02.2025** ж. берген **№KZ20VPY00113741** Куәлік.

Тақырыптық бағыты: *ақпараттық-коммуникациялық технологиялар*

Қазіргі уақытта: *«ақпараттық-коммуникациялық технологиялар» бағыты бойынша ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдар тізіміне енді.*

Мерзімділігі: *жылына 4 рет.*

Редакцияның мекен-жайы: *050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., тел.: 272-13-19*

http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».
ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)
Собственник: *Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).*
Свидетельство о постановке на переучет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания **№ KZ20VPY00113741.** Дата выдачи **28.02.2025**
Тематическая направленность: *информационно-коммуникационные технологии.*
В настоящее время: *вошел в список журналов, рекомендованных КОКСНВО МНВО РК по направлению «информационно-коммуникационные технологии».*
Периодичность: *4 раза в год.*
Адрес редакции: *050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, оф. 219, тел.: 272-13-19*
http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/

CONTENTS

INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES

МАЗМҰНЫ

АҚПАРАТТЫҚ-КОММУНИКАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

NEWS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCESOF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2. Namber 354 (2025). 251–279

https://doi.org/10.32014/2025.2518-1726.356

УДК 519.63

©N.M. Temirbekov[1], A.K. Turarov[2]*, 2025.
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[2]D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University,
Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.
E-mail: t010183@gmail.com

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF GAS LIFT OIL PRODUCTION PROCESS BY THE METHOD OF CONJUGATE EQUATIONS

Temirbekov Nurlan — Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Professor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
Email: temirbekov@rambler.ru; ORCID ID: https://orcid.org/0000- 0001-7542-3778;
Turarov Amankeldy — Postdoctoral fellow of the educational program 8D05401 - Mathematics, lecturer, D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan,
E-mail: t010183@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0732-0045.

Abstract. Problem and relevance. In the context of the ongoing depletion of traditional oil fields, the development of effective numerical methods for the analysis, prediction, and optimization of the gas lift process becomes increasingly important, both theoretically and practically. Gas lift is widely used at later stages of well operation when natural reservoir pressure is insufficient to lift fluids to the surface. A key challenge is to determine the initial operating parameters-namely, the volumetric gas injection rate and initial pressure-that ensure flow stability and maximize production efficiency while minimizing energy and economic costs. Methods used. This study presents a numerical approach to solving the direct and inverse problems describing the gas lift process using the compressible Navier–Stokes equations. For the direct problem, a family of finite-difference schemes is constructed, with detailed analysis of their consistency, stability, and convergence. The inverse problem is formulated as an optimal control problem, where the target functional is minimized using a gradient method. The functional is evaluated via the adjoint problem, derived using the Lagrange identity and the cancellation of boundary terms. Main hypotheses and conclusions. The adjoint problem is retrospective in nature, as final-time conditions are imposed on pressure and gas flow rate. Practical significance. The proposed algorithm can be applied to reconstruct initial parameters of gas lift wells, generate production curves, and identify optimal operation modes under uncertain or incomplete measurement conditions.

Keywords: Gas-lift oil production process, Navier-Stokes equations, conjugate equation, inverse problem, optimal control, gradient method, finite-difference method

©Н.М. Темирбеков[1], А.К. Тураров[2*], 2025.
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;
[2]Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен, Қазақстан.
*E-mail: t010183@gmail.com

МҰНАЙ ӨНДІРУДІҢ ГАЗЛИФТТІК ПРОЦЕСІНІҢ ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРІН ТҮЙІНДЕС ТЕҢДЕУЛЕР ӘДІСІМЕН САНДЫҚ ШЕШУ

Темирбеков Нурлан Муханович — физика-математика ғылымдарының докторы, ҚР ҰҒА корреспондентінің мүшесі, профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
E-mail: temirbekov@rambler.ru, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001- 7542-3778;
Тураров Аманкельды Кабдыгалиевич — 8D05401-Математика білім беру бағдарламасы бойынша постдокторант, оқытушы, Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен, Қазақстан,
E-mail: t010183@gmail.com, ORCID ID: https://orcid. org/0000-0002-0732-0045.

Аннотация. Мәселе және өзектілік. Дәстүрлі мұнай кен орындарының біртіндеп сарқылуы жағдайында газлифттік процесті талдау, болжау және оңтайландыру үшін тиімді сандық әдістерді әзірлеу теориялық және қолданбалы тұрғыдан ерекше маңызға ие. Газлифт технологиясы, әсіресе, скважиналарды пайдаланудың соңғы кезеңдерінде кеңінен қолданылады, өйткені бұл кезде табиғи қысым мұнайды жер бетіне шығару үшін жеткіліксіз болады. Осындай жағдайда газ айдау көлемі мен бастапқы қысым сияқты бастапқы параметрлерді дәл анықтау негізгі міндетке айналады. Бұл параметрлер ағынның орнықтылығын қамтамасыз етіп қана қоймай, сонымен қатар энергетикалық және экономикалық шығындарды азайта отырып, өндірістің ең жоғары тиімділігін қамтамасыз етуге мүмкіндік береді. Қолданылатын әдістер. Бұл жұмыста газлифттік процесті сипаттайтын Навье–Стокс теңдеулеріне негізделген тура және кері есептерді шешудің сандық әдісі ұсынылады. Тура есеп үшін шекті-айырымдық сұлбалар жүйесі құрастырылып, олардың дұрыстығы, аппроксимациясы, орнықтылығы және жинақтылығы жан-жақты зерттелді. Кері есеп мақсатты функционалды градиенттік әдіспен минимизациялауға келтірілген оңтайлы басқару есебі ретінде қарастырылады. Бұл функционал Лагранж тождестігі мен шекаралық мүшелерді жоққа шығару шарттарына негізделген сәйкесті есеп арқылы есептеледі. Негізгі гипотезалар мен қорытындылар. Сәйкесті есеп ретроспективтік сипатқа ие, өйткені қысым мен газ шығынына қатысты

қосымша шарттар соңғы уақыт мезетінде беріледі. Практикалық маңызы. Сәйкесті есеп ретроспективтік сипатқа ие, өйткені қысым мен газ шығынына қатысты қосымша шарттар соңғы уақыт мезетінде беріледі. Ұсынылған итерациялық алгоритм әртүрлі кіріс параметрлерінде бастапқы шарттарды дәл қалпына келтіруге мүмкіндік береді, бұл есептеу эксперименттерімен расталды.

Түйін сөздер: мұнай өндірудің газлифттік процесі, Навье-Стокс теңдеулері, түйіндес теңдеу, кері есеп, оңтайлы басқару, градиент әдісі, шекті айырымдық әдісі

©Н.М. Темирбеков [1], А.К. Тураров [2*], 2025.
[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
[2]Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан.
E-mail: t010183@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА ДОБЫЧИ НЕФТИ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Темирбеков Нурлан Муханович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН РК, профессор, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
Email: temirbekov@rambler.ru, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-7542-3778; **Тураров Аманкельды Кабдыгалиевич —** постдокторант по образовательной программе 8D05401 – Математика, преподаватель, Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан,
E-mail: t010183@gmail.com, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0732-0045.

Аннотация. Проблема и актуальность. В условиях прогрессирующего истощения традиционных нефтяных месторождений разработка эффективных численных методов для анализа, прогнозирования и оптимизации газлифтного процесса приобретает особую значимость как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Газлифт широко применяется на поздних стадиях эксплуатации скважин, когда естественного давления недостаточно для подъёма продукции на поверхность. При этом важнейшей задачей становится определение таких начальных параметров, как объемный расход закачиваемого газа и начальное давление, которые обеспечивают не только устойчивость течения, но и максимальную производительность при минимальных энергетических и экономических затратах. Используемые методы. В работе рассматривается численный подход к решению прямой и обратной задач, описывающих газлифтный процесс на основе уравнений Навье–Стокса для сжимаемой среды. Для прямой задачи построено семейство конечно-разностных схем, проведён детальный анализ их корректности, аппроксимации, устойчивости и сходимости. Обратная задача сведена к задаче оптимального управления, где минимизация целевого функционала осуществляется градиентным методом. Целевой функционал вычисляется с применением сопряжённой задачи, полученной на основе тождества Лагранжа и условий аннулирования граничных членов. Основные выводы. Сопряжённая задача имеет ретроспективный характер, поскольку дополнительные условия на давление и расход задаются в конечный момент времени.

Практическая значимость. Разработанный алгоритм может быть применён для численного восстановления начальных параметров газлифтной скважины, построения производственных характеристик и определения оптимальных режимов эксплуатации, что имеет прикладное значение для инженерных расчётов в нефтегазовой промышленности в условиях неопределённости или неполных измерений.

Ключевые слова: газлифтный процесс добычи нефти, уравнения Навье-Стокса, сопряжённое уравнение, обратная задача, оптимальное управление, градиентный метод, конечно-разностный метод.

Данное исследование было профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ПЦФ BR27100483 "Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территории на основе анализа данных единой платформы недропользователей "Minerals.gov.kz" с применением искусственного интеллекта и методов дистанционного зондирования Земли")

Введение. Газлифтный процесс представляет собой метод добычи нефти, при котором газ вводится в затрубное пространство скважины, чтобы уменьшить плотность газожидкостной смеси (ГЖС) и облегчить её подъём на поверхность. Этот процесс происходит в двух основных зонах:

- Кольцевое пространство (затрубное): пространство между стенкой скважины и насосно-компрессорной трубой, где движется газ.
- Подъемник: внутренняя труба, через которую смесь нефти, газа и воды поднимается к устью скважины.

Модель предложенная в работе (Алиев, et al., 2009) описывает движение газа и ГЖС в этих зонах с использованием системыгиперболических уравнений с частными производными. Эти уравнения учитывают давление и объемный расход закачиваемого газа как основные параметры, влияющие на транспортировку смеси. В этой (Mohammad, et al., 2016) работе представлен математический метод оптимизации добычи нефти из скважин, использующих газлифтную систему. Цель работы — определить экономически эффективный уровень добычи нефти и снизить производственные затраты за счет минимизации расхода газа, используемого для подъема нефти. Для этого были собраны данные о характеристиках скважин, которые затем использовались в приложении PIPESIM для моделирования. На основе этих данных были построены кривые производительности каждой скважины. Далее была разработана нелинейная многокритериальная модель программирования для оптимизации добычи нефти. В работе (Sun-Young, et al., 2016) рассмотрено исследование метода оптимизации и распределения газлифта для увеличения нефтеотдачи генетическим алгоритмом.

В работах (Deni, et al., 2007; Guet, et al., 2006; Guet, et al., 2005) используется математическая модель основанная на законе Дарси. Это очень простое уравнение в правой части которого сила тяжести, сила трения и ускорения. Давление заменяется плотностью газа согласно уравнению состояния, а плотность смеси рассматривается как линейная комбинация плотностей газа и жидкости. В дальнейшем авторами работы (Deni, et al., 2007) были использованы генетические алгоритмы решения задачи максимизации добычи нефти. Скорость добычи жидкости из добывающей скважины иллюстрирована сочетанием притока производительности (IPR) и производительности вертикальной подъемной силы (VLP). В работе (Nishikiori, 1989) кривая производительности газ лифта (КПГЛ) построена для заданных скважин в результате эксперимента. С помощью этой кривой можно оценить влияние скорости закачки газа на дебит жидкости. Это позволяет определить скорость закачки газа, необходимую для достижения желаемой производительности. Изучение КПГЛ позволяет найти оптимальную скорость закачиваемого газа. В работе (Brown, et al., 1984) КПГЛ получено на основе промысловых данных путем измерения скорости закачки газа и скорости добычи жидкости. По измеренным данным проведено интерполирование для получения КПГЛ. Из полевых данных КПГЛ строится методом наименьших квадратов в виде квадратичной полиномиальной функций.

В работе (Alarcon, et al., 2002) предложена новая функция для улучшения предыдущего квадратичного полинома КПГЛ с добавлением логарифмического члена. В работе (Sukarno, et al., 2006) предложена экспоненциальная функция для подбора КПГЛ по полевым данным. Однако экспоненциальная КПГЛ хорошо описывает только закачку газа. Исследователи (Guet, et al., 2006; Guet, et al., 2005) используя кусочно-линейную функцию для подбора GLPC по полевым данным, которая имеет хорошую перспективу применения. Во всех этих работах использованы полуэмпирические подходы исследования кривой приозводительности процесса газ лифта.

На сегодняшний день распространенным методом решения обратных задач математической физики являются сведения их к задачам оптимального управления. Одной из актуальных задач современного оптимального управления является управление поведением объектов, изменение которых описывается с помощью уравнений с частными производными. Цель управления состоит в том, чтобы перевести изучаемый объект из одного известного состояния в другое, влияя на некоторые его параметры. Впервые подобные задачи были сформулированы в работах (Lions, 1971; Lions, et al., 1972). В качестве управляющей функций может быть использована правая часть уравнения или системы уравнений. Решению таких задач методом сопряженных уравнений посвящены работы (Agoshkov, et al., 2003). Во многих работах рассматриваются граничные управление, т.е. управление посредством граничных условий. Работы (Ильин, et al., 2006) посвящены исследованию задач граничного управления для уравнения колебаний струны, в которых были получены в явном виде управляющие функции, переводящие струну из заданного начального состояния в заданное финальное состояние за определенное время. При этом рассмтаривались различные типы граничных управлений.

В работе (Марчук, et al., 2009) дано понятие сопряженных операторов и уравнений и отмечены возможные их приложения в математическом моделировании и вычислительной математике. Свойства сопряженных операторов достаточно полно исследованы для линейных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах и отражены во многих монографиях. В работе (Temirbekov, et al., 2023) предложен метод фиктивных областей с идеей сопряженной оптимизации позволяющий строить однородную разностную схему во всей расширенной области. При этом разумное продолжение коэффициентов основного уравнения приводит к сходимости решения задачи в исходной области к искомому решению, что подтверждается математически доказанными утверждениями и результатами численных расчетов. Для минимизации функционала Лагранжа использовался сопряженный градиентный метод, который позволяет найти эфективное оптимальное решение путем итеративного уточнения. При этом необходимо вычислить градиент функционала Лагранжа, который приводит к постановке сопряженной задачи. Приведено постановка сопряженной задачи, а также описано вычисление градиента функционала, который зависить от решения сопряженной задачи. По численным результатам работы сделаны выводы, что использование градиентного метода, сопряженной задачи и метода фиктивных областей являются эффективным подходом для решения сложных задач оптимизации с ограничениями. В работе метод разработан сначала для уравнения Бюргерса. Сформулирована вспомогательная и сопряженная задача для уравнения Бюргерса. Разработан итерационный алгоритм для приближенного решения вспомогательной задачи. Получена оценка условной устойчивости сопряженной задачи методом энергетических неравенств. Доказана теорема об оценке условной устойчивости. На модельной задаче показана эффективность использования такой модификации. Данный метод является очень удобным в части автоматизации программирования. Далее предложенный алгоритм разработан для решения уравнения Навье-Стокса.

В статье (Аргучинцев, et al., 2021) рассматривается задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений, в которой граничные условия определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Рассмотрена задача моделирования динамики невзаимодействующих между собой популяций с учетом возрастного распределения особей. Целью задачи управления может быть достижение заданных плотностей популяций в конечный момент времени. Для этой задачи получено неклассическое необходимое условие оптимальности, которое основано на применении специальной вариации управления, обеспечивающей гладкость управляющих функций. Предложен метод улучшения допустимых управлений. В работе (Arguchintsev, et al., 2021) рассмтаривается разработка методов решения задач оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий с учетом таких ограничений на управления, которые характерны для обратных задач математической физики. Численная реализация метода проведена для системы гиперболических уравнений первого порядка линеаризованный теории “мелкой воды”. Предпологается, что в конечный момент времени известен профиль волны. Обратная задача интерпретирована как задача минимизации квадратичного функционала. Далее модель “мелкой воды” приведена к инвариантной форме. Для численного решения используется разностная схема метода характеристик.

В работе (Темирбекова, et al., 2022) для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода использован проекционный метод Бубнова-Галеркина, где в качестве базисных функций применены вейвлеты Лежандра. В рамках метода Галеркина разложение осуществлялось с использованием этих базисов, что привело к системе линейных алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов. Полученная система решалась методом сопряженных градиентов.

Материалы и методы.

Математическая модель работы газлифтной скважины описывается следующей системой уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа (Алиев, et al., 2009)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\overline{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad t \geq 0, x \in (0;\ 2l), \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\overline{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - 2a \cdot Q, \qquad t \geq 0, x \in (0;\ 2l), \tag{2}$$

где

$$c = \begin{cases} c_1, & x \in (0;\ l) \\ c_2, & x \in (l;\ 2l) \end{cases}, \quad \overline{F} = \begin{cases} \overline{F}_1, & x \in (0;\ l) \\ \overline{F}_2, & x \in (l;\ 2l) \end{cases}, \quad a = \begin{cases} a_1, & x \in (0;\ l) \\ a_2, & x \in (l;\ 2l) \end{cases}$$

начальные условия

$$P(0,x) = P^0(x), \qquad Q(0,x) = Q^0(x) \tag{3}$$

и граничные условия

$$P(t,0) = P_0(t), \qquad Q(t,0) = Q_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{4}$$

$$P(t,l+0) = P(t,l-0) + P_{pl}(t), Q(t,l+0) = Q_0(t,l-0) + Q_{pl}(t) \quad \text{при} \quad x = l, \tag{5}$$

Здесь, t - время, x - координата по глубине скважины, P - давление, Q - объемный расход газа, F - площадь поперечного сечения скважины, c - скорость звука в жидкости, a - коэффициент, Q_{pl}- объемный расход газа в пласте, P_l - давление пласта, $P^0_{(x)}$ - начальное распределение давления газа, Q^0_x - начальный объемный расход закачиваемого газа, l - глубина скважины.

В прямой задаче надо найти $P(t,x)$ и $Q(t,x)$ по заданными функциями $P^0(x)$, $Q^0(x)$, $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $P_{pl}(t)$, $Q_{pl}(t)$.

Уравнение (1) является уравнением неразрывности, а (2) - уравнением движения газа.

Исследование аппроксимации, устойчивости семейства разностных схем.

Рассмотрим явную разностную схему для задачи (1) - (5)

$$\frac{P_i^{n+1}-P_i^n}{\tau} = -\frac{c^2}{\bar{F}}\cdot\frac{Q_i^n-Q_{i-1}^n}{h}, \tag{6}$$

$$\frac{Q_i^{n+1}-Q_i^n}{\tau} = -\bar{F}\cdot\frac{P_i^n-P_{i-1}^n}{h} - 2a\cdot Q_i^{n+1} \tag{7}$$

начальные условия

$$P_i^0 = P^0(x_i),\quad Q_i^0 = Q^0(x_i),\quad i=\overline{0,\ N_x} \tag{8}$$

и граничные условия соответственно

$$P_0^j = P_0(t_j),\quad Q_0^j = Q_0(t_j),\quad i=0,1,\ldots,N_x, \tag{9}$$

$$P^j_{\frac{N_x}{2}} = P^j_{\frac{N_x}{2}-1} + P_{pl},\quad Q^j_{\frac{N_x}{2}} = Q^j_{\frac{N_x}{2}-1} + Q_{pl}. \tag{10}$$

Неявную схему для уравнений рассмотрим в виде

$$P_i^{j+1} = P_i^j - \gamma_1\cdot\left(Q_i^{j+1}-Q_{i-1}^{j+1}\right), \tag{11}$$

$$Q_i^{j+1} = \left[Q_i^j - \gamma_2\cdot\left(P_i^{j+1}-P_{i-1}^{j+1}\right)\right]/(1+2a\tau), \tag{12}$$

где $\gamma_1 = \frac{\tau c^2}{\bar{F}\cdot h}$, $\gamma_1 = \frac{\tau\cdot\bar{F}}{h}$.

Отсюда видно, что счет можно начинать с точки $i=1,\ j=0$. Тогда

$$P_1^1 = P_1^0 - \gamma_1\cdot(Q_1^1 - Q_0^1), \tag{13}$$

$$Q_1^1 = [Q_1^0 - \gamma_2\cdot(P_1^1 - P_0^1)]/(1+2a\tau). \tag{14}$$

Умножаем уравнение (14) на - y_i и суммируем с первым, получим

$$P_1^1 = P_1^0 + \gamma_1\cdot Q_0^1 - \frac{\gamma_1}{1+2a\tau}\cdot Q_1^0 + \frac{\gamma_1\gamma_2}{1+2a\tau}\cdot P_1^1 - \frac{\gamma_1\gamma_2}{1+2a\tau}\cdot P_0^1.$$

Отсюда находим P^1_1

$$P_1^1 = \frac{1+2a\tau}{1+2a\tau-\gamma_1\gamma_2}\cdot\left[P_1^0 + \gamma_1\cdot Q_0^1 - \frac{\gamma_1}{1+2a\tau}\cdot Q_1^0 - \frac{\gamma_1\gamma_2}{1+2a\tau}\cdot P_0^1\right]. \tag{15}$$

Подставляя P^1_1 в (14) и определим Q^1_1.

Зная P^1_1, Q^1_1 можно вычислить все значения P^J_1, Q^J_1 до некоторого $j=j_0$, затем, положив i=2, найти P^J_2, Q^J_2, при $0\le j\le j_0$ и т.д.

В общем случае для определения получим

$$P_i^{j+1} = \frac{1+2a\tau}{1+2a\tau-\gamma_1\gamma_2} \cdot \left[P_i^j + \gamma_1 \cdot Q_{i-1}^{j+1} - \frac{\gamma_1}{1+2a\tau} \cdot Q_i^j - \frac{\gamma_1\gamma_2}{1+2a\tau} \cdot P_{i-1}^{j+1}\right]. \quad (16)$$

Объединяя явную (6), (7) и чисто неявную схему (11), (12) рассмотрим семейство схем, заданных на четырехточечном шаблоне

$$P_t^n + \frac{c^2}{\overline{F}}\left(\sigma \cdot Q_{\overline{x}}^{n+1} + (1-\sigma)Q_{\overline{x}}^n\right) = 0, \quad (17)$$

$$Q_t^n + \overline{F}\left(\sigma \cdot P_{\overline{x}}^{n+1} + (1-\sigma)P_{\overline{x}}^n + 2aQ_i^{n+1}\right) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau \quad (18)$$

с начальными условиями

$$P(0,x_i) = P_0(x_i), \quad Q(0,x_i) = Q_0(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \quad (19)$$

и граничными условиями

$$P(t_j,0) = P_0(t_j), \quad Q(t_j,0) = Q_0(t_j), \quad t_j \in \omega_\tau, \quad (20)$$

$$P\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}}\right) = P\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}-1}\right) + P_{pl}, \quad (21)$$

$$Q\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}}\right) = Q\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}-1}\right) + Q_{pl}, \quad (22)$$

Схема (6), (7) и (11), (12) принадлежат этому семейству и соответствуют $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ соответственно.

Вычислим невязку для этой системы разностных уравнений

$$\psi_1 = P_t^n + \frac{c^2}{\overline{F}}\left(\sigma \cdot Q_{\overline{x}}^{n+1} + (1-\sigma)Q_{\overline{x}}^n\right), \quad (23)$$

$$\psi_2 = Q_t^n + \overline{F}\left(\sigma \cdot P_{\overline{x}}^{n+1} + (1-\sigma)P_{\overline{x}}^n + 2aQ_{\overline{x}}^{n+1}\right). \quad (24)$$

Используем разложение в ряд Тейлора

$$P(t_{n+1},x_i) = P\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + \frac{\tau^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) +$$

$$+\frac{\tau^3}{48} \cdot \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + \frac{\tau^4}{384} \cdot \left(\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + O(\tau^5),$$

$$P(t_n,x_i) = P\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) - \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + \frac{\tau^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) -$$

$$-\frac{\tau^3}{48} \cdot \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + \frac{\tau^4}{384} \cdot \left(\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}},x_i\right) + O(\tau^5).$$

Подставляя эти разложения в $\frac{(P_i^{n+1}-P_i^n)}{\tau}$ получим, что

$$P_t^n = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^2). \qquad (25)$$

Аналогично

$$Q_t^n = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^2). \qquad (26)$$

Разложим функций P и Q по переменной x:

$$Q_{i-1}^n = Q_i^n - h\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^3).$$

Теперь найдем разностную производную назад:

$$\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{h} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2). \qquad (27)$$

Аналогично имеем

$$\frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2). \qquad (28)$$

Подставляем (25)-(28) в (23) и (24), получим

$$\psi_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{c^2}{\overline{F}}\left\{\sigma\cdot\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2)\right] + \right.$$

$$\left. +(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2)\right]\right\} + O(\tau^2), \qquad (29)$$

$$\psi_2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \overline{F}\left\{\sigma\cdot\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2)\right] + \right.$$

$$\left. +(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2)\right] + 2aQ_i^{n+1}\right\} + O(\tau^2). \qquad (30)$$

Для удобства дальнейших выкладок для невязок ψ_1, ψ_2 положим

$$\frac{c^2}{\overline{F}} = 1, \ \overline{F} = 1. \qquad (31)$$

Разложим в ряд Тейлора по t слагаемые $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1}$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n}$, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1}$, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n}$ в окрестности точки $t = t_{n+\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \qquad (32)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \qquad (33)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2). \quad (35)$$

Тогда из (29)-(30) с учетом предположения (31) получим

$$\psi_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \sigma\cdot\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2)\right] +$$

$$+(1-\sigma)\cdot\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n} + O(h^2)\right], \quad (36)$$

$$\psi_2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \sigma\cdot\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2)\right] +$$

$$+(1-\sigma)\cdot\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5\tau\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n} + O(h^2) + 2aQ_i^{n+1}\right]. \quad (37)$$

Из основных уравнений (1), (2) имеем

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2aQ_i^{n+\frac{1}{2}}.$$

Подставляем эти выражения в (37) и получим

$$\psi_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \sigma\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - (1-\sigma)\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0{,}5(2\sigma-1)\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} -$$

$$-\frac{\sigma h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} - \frac{(1-\sigma)h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n} + O(\tau^2 + h^2),$$

$$\psi_2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \sigma\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - (1-\sigma)\cdot\left[-\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2aQ_i^{n+\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+0{,}5\tau\cdot(2\sigma-1)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{(1-\sigma)h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} - \frac{(1-\sigma)h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n} +$$

$$+(1-\sigma)2aQ_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).$$

Отсюда видно, что слагаемое содержащие $\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$, сокращаются и получается, что

$$\psi_1 = 0{,}5\tau(2\sigma-1)\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\sigma h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} -$$

$$-\frac{(1-\sigma)h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n} + O(\tau^2 + h^2), \qquad (38)$$

$$\psi_2 = 0{,}5\tau(2\sigma-1)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\sigma h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} - \frac{(1-\sigma)h}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n} +$$

$$+2a(1-\sigma)\cdot\left(Q_i^{n+1} - Q_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\tau^2 + h^2). \qquad (39)$$

Далее разлагаем в ряд Тейлора по t в окрестности точки $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ вторые производные

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau),$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n} = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau),$$

$$(40)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau),$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau).$$

Предположим, что $Q_i^{n+1} = Q_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2)$..

С учетом (40) из (38) и (39) получим

$$\psi_1 = 0{,}5\tau(2\sigma-1)\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5h\cdot\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2),$$

$$\psi_2 = 0{,}5\tau(2\sigma-1)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5h\cdot\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).$$

Из системы уравнений (1), (2) имеем, что

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим

$$\psi_1 + \psi_2 = 0{,}5\tau(2\sigma - 1)\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5h \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+0{,}5\tau(2\sigma - 1)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0{,}5h \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).$$

Так как

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2a\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = -\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$$

получим, что

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 0{,}5\tau(2\sigma\tau - \tau + h) \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - ah \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+0{,}5\tau(2\sigma\tau - \tau + h) \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).$$

Отсюда видно, что схема с весами имеет второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + h^2),$$

Если

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0 \tag{41}$$

а при $\sigma \neq \sigma_0$ первый порядок, $\psi = O(\tau + h)$.

Устойчивость по начальным данным.

Покажем теперь, что схема семейство схем с весами (23)-(29) устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}.$$

Для доказательство используем метод энергетических неравенств.

$$u_t^n + \sigma v_{\bar{x}}^{n+1} + (1-\sigma)v_{\bar{x}}^n = 0, \qquad (42)$$

Можно рассмотреть сумму $w = u + v$

$$w_t^n + \sigma w_{\bar{x}}^{n+1} + (1-\sigma)w_{\bar{x}}^n = 0. \qquad (43)$$

Наотрезке $0 \le x \le 1$ вводимсетку $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ \ i = 0,1,\dots,N, N_x = 1\}$.
Скалярное произведение и норму определяем так:

$$(y, z] = \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot z_i \cdot h, \qquad \|y\| = \sqrt{(y, z]}.$$

Учитывая, что

$$y^{n+1} = 0{,}5(y^{n+1} + y^n) + 0{,}5(y^{n+1} - y^n),$$

$$y^n = 0{,}5(y^{n+1} + y^n) - 0{,}5(y^{n+1} - y^n),$$

и полагая $y = w_{\bar{x}}$.
Перепишем схему (43) в следующем виде

$$w_t + \sigma\big(0{,}5\big(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n\big) + 0{,}5\tau \cdot w_{\bar{x}t}^n\big) + 0{,}5 \cdot (1-\sigma)\Big|$$

$$\big[\big(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n\big) - \tau w_{\bar{x}t}^n\big] = 0, \qquad (44)$$

$$w_t^n + (\sigma - 0{,}5)\tau \cdot w_{\bar{x}t}^n + 0{,}5\big(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n\big) = 0.$$

Умножим это уравнение на $2\tau w_{\bar{x}t}^n = 2\big(w_{\bar{x}}^{n+1} - w_{\bar{x}}^n\big)$

$$2\tau w_t^n \cdot w_{\bar{x}t}^n + 2\tau^2(\sigma - 0{,}5)\big(w_{\bar{x}t}^n\big)^2 + \big(w_{\bar{x}}^{n+1}\big)^2 - \big(w_{\bar{x}}^n\big)^2 = 0$$

первое слагаемое преобразуем так

$$2w_t^n \cdot w_{\bar{x}t}^n = \big(w_{\bar{x}t}^2\big) + h\big(w_{\bar{x}t}^n\big)^2.$$

Тогда

$$\tau \cdot \big(w_{\bar{x}t}^2\big) + h\tau\big(w_{\bar{x}t}^n\big)^2 + 2\tau^2(\sigma - 0{,}5)\big(w_{\bar{x}t}^n\big)^2 + \big(w_{\bar{x}}^{n+1}\big)^2 - \big(w_{\bar{x}}^n\big)^2 = 0$$

если объеденить второе и третье слагаемое, то получится

$$\tau \cdot \big(w_{\bar{x}t}^2\big) + 2\tau^2\big((\sigma - 0{,}5)\tau + 0{,}5h\big)(\mathrm{w}_{\bar{x}t}^n)^2 + \big(\mathrm{w}_{\bar{x}}^{n+1}\big)^2 - (\mathrm{w}_{\bar{x}}^n)^2 = 0.$$

Умножаем на и суммируем по всем узлам сетки $x_i = ih,\ \ i = 0,1,\dots,N$, получаем

$$\tau\sum_{i=1}^{N}\,(w_t^2)_{\overline{x},i}h+2\tau^2\big((\sigma-0{,}5)\tau+0{,}5h\big)\cdot\left\|w_{\overline{x}t}^{n}\right\|^2+\left\|w_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2=\left\|w_{\overline{x}}^{n}\right\|^2$$

распишем в первом слагаемом разностную производную по x, тогда

$$\tau\sum_{i=1}^{N}\,[(w_t^n)_i^2-(w_t^n)_{i-1}^2]+2\tau\big((\sigma-0{,}5)\tau+0{,}5h\big)\cdot\left\|w_{\overline{x}t}^{n}\right\|^2+\left\|w_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2=\left\|w_{\overline{x}}^{n}\right\|^2.$$

Раскрываем сумму, сокращаем слагаемые и получим

$$\tau\sum_{i=1}^{N}\,[(w_t^n)_N^2-(w_t^n)_0^2]+2\tau\big((\sigma-0{,}5)\tau+0{,}5h\big)\cdot\left\|w_{\overline{x}t}^{n}\right\|^2+\left\|w_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2=\left\|w_{\overline{x}}^{n}\right\|^2.$$

здесь $w_{t,0}^n=w_t(t,0)=0$, т.к. $w_t(t,0)\equiv 0$.

Окончательно получим тождество

$$\tau\cdot(\mathrm{w_t^n})_{\mathrm{N}}^2+2\tau\big((\sigma-0{,}5)\tau+0{,}5h\big)\cdot\left\|w_{\overline{x}t}^{n}\right\|^2+\left\|w_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2=\left\|w_{\overline{x}}^{n}\right\|^2. \tag{45}$$

Из тождества (45) видно, что если

$$(\sigma-0{,}5)\tau+0{,}5h\geq 0,$$

то есть $\sigma=\frac{1}{2}-\frac{h}{2\tau}=\sigma_0$, тогда

$$\left\|w_{\overline{x}}^{j+1}\right\|\leq\left\|w_{\overline{x}}^{j}\right\|\leq\ldots\leq\left\|w_{\overline{x}}^{0}\right\|. \tag{46}$$

Это неравенство доказывает, что схема (43) устойчива по начальным данным в энергетической норме

$$\|w\|_{(1)}=\|w_{\overline{x}}\|.$$

Постановка обратной задачи.

Для формулировки обратной к (1)-(5) задаче, ставятся следующие дополнительные условия

$$P(T,x)=P^1(x),Q(T,x)=Q^1(x)\quad\text{при}\quad t=T \tag{47}$$

для давления и объемного расхода газа.

В обратной задаче надо найти $P^0(x)$ и $Q^0(x)$ из уравнении (1)-(2), условии (4)-(5) и дополнительным условиям (47).

Постановка вариационной задачи.

Одним из достаточно распространенных методов решения обратных задач математической физики является сведение задачи (1), (2), (4), (5), (47) к задаче оптимального управления.

Необходимо минимизировать целевой функционал:

$$J(P^0,Q^0)=\int_0^{2l}\,\big[P\big(T,x;P^0(x)\big)-P^1(x)\big]^2dx+$$

$$+\int_0^{2l} [Q(\mathrm{T},x;Q^0) - \mathrm{Q}^1(\mathrm{x})]^2 dx \rightarrow min \tag{48}$$

Минимизируем функционал (48) градиентным итерационным методом

$$P_{n+1}^0 = P_n^0 - \alpha \cdot J'(P_n^0), \qquad Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \alpha \cdot J'(Q_n^0). \tag{49}$$

где a - итерационный параметр, n - номер итерации.

Первая вариация целевого функционала (48)

$$\delta J(P^0, Q^0) = J(P^0 + \delta P^0, Q^0 + \delta Q^0) - J(P^0, Q^0) =$$

$$= \int_0^{2l} [P(T,x;P^0 + \delta P^0) - P^1(x)]^2 dx + \int_0^{2l} [Q(T,x;Q^0 + \delta Q^0) - Q^1(x)]^2 dx -$$

$$-\int_0^{2l} [P(T,x;P^0) - P^1(x)]^2 dx - \int_0^{2l} [Q(T,x;Q^0) - Q^1(x)]^2 dx,$$

Так как

$$P(T,x;P^0 + \delta P^0) = P(T,x;P^0) + \delta P(T,x;\delta P^0),$$

$$Q(T,x;Q^0 + \delta Q^0) = Q(T,x;Q^0) + \delta Q(T,x;\delta Q^0),$$

имеем

$$\delta J(P^0, Q^0) = \int_0^{2l} \delta P(T,x;\delta P^0) \cdot 2[P(T,x;P^0) - P^1(x)]dx +$$

$$+\int_0^{2l} \delta Q(T,x;\delta Q^0) \cdot 2[Q(T,x;Q^0) - Q^1(x)]dx.$$

С другой стороны по опрелению производной Фреше

$$\delta J(P^0, Q^0) = < J'P^0, \delta P^0 > + < J'Q^0, \delta Q^0 >. \tag{50}$$

Ввведем обозначения

$$\widetilde{\mathrm{Q}} = \mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{x};\mathrm{Q}^0 + \delta\mathrm{Q}^0) \quad \widetilde{\mathrm{P}} = \mathrm{P}(\mathrm{t},\mathrm{x};\mathrm{P}^0 + \delta\mathrm{P}^0),$$

$$Q = Q(t,x;Q^0), \quad P = P(t,x;P^0), \quad \delta Q = \tilde{Q} - Q, \qquad \delta P = \tilde{P} - P.$$

Рассмотрим возмущенную к (1)-(5) задачу

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\frac{c^2}{\overline{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathrm{Q}}}{\partial t} = -\overline{F} \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - 2a \cdot \tilde{Q},$$

начальные условия

$$\widetilde{\mathrm{P}}(0,\mathrm{x}) = \mathrm{P}^0(\mathrm{x}) + \delta\mathrm{P}^0(\mathrm{x}), \quad \tilde{Q}(0,x) = Q^0(x) + \delta Q^0(x) \tag{53}$$

и граничные условия

$$\tilde{P}(t,0) = P_0(t), \quad \tilde{Q}(t,0) = Q_0(t), \tag{54}$$

$$\tilde{P}(t,l+0) = \tilde{P}(t,l-0) + P_{pl}(t), \quad \tilde{Q}(t,l+0) = \tilde{Q}(t,l-0) + Q_{pl}(t), \tag{55}$$

Для получения задачи для возмущении $\delta P(\mathrm{T},x;\delta P^0)$ и $\delta Q(\mathrm{T},x;\delta Q^0)$ из задачи (51)-(55) вычтем задачу (1)-(5) в силу линейности уравнении имеем

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\overline{F}} \cdot \frac{\partial \delta Q}{\partial x}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial \delta \mathrm{Q}}{\partial t} = -\overline{F} \cdot \frac{\partial \delta P}{\partial x} - 2a \cdot \delta Q, \tag{57}$$

начальные условия примут вид

$$\delta P(0,x) = \delta P^0, \qquad \delta Q(0,x) = \delta Q^0 \tag{58}$$

и граничные условия

$$\delta P(t,0) = 0, \ \ \delta Q(t,0) = 0 \tag{59}$$

$$\delta P(t,l+0) = \delta P(t,l-0), \delta Q(t,l+0) = \delta Q(t,l-0). \tag{60}$$

Умножаем (56) на пока еще неизвестную функцию $P^*(t,x)$, (57) на $Q^*(t,x)$ и интегрируем по от до , по от до и суммируем. В результате тождественно равное нулю выражение

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) =$$

$$= \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \frac{c^2}{\overline{F}} \cdot \frac{\partial \delta Q}{\partial x}\right] \cdot P^* dx dt + \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial \delta Q}{\partial t} + \overline{F} \cdot \frac{\partial \delta P}{\partial x} + 2a \cdot \delta Q\right] \cdot Q^* dx dt \equiv 0,$$

где

$$AP = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{c^2}{\overline{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad BQ = \frac{\partial Q}{\partial t} + \overline{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + 2aQ.$$

Интегрируем по частям это выражение

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) =$$

$$= \int_0^{2l} \left[\delta P \cdot P^*|_0^T - \int_0^T \delta P \cdot \frac{\partial P^*}{\partial t} dt\right] dx + \frac{c^2}{\overline{F}} \int_0^T \left[\delta Q \cdot P^*|_0^{2l} - \int_0^{2l} \delta Q \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} dx\right] dt +$$

$$+ \int_0^{2l} \left[\delta Q \cdot Q^*|_0^T - \int_0^T \delta Q \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} dt\right] dx + \overline{F} \int_0^T \left[\delta P \cdot Q^*|_0^{2l} - \int_0^{2l} \delta P \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} dx\right] dt +$$

$$+2a \int_0^{2l} \int_0^T \delta Q \cdot Q^* dt dx = -\int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \overline{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x}\right] \delta P dx dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\overline{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot \delta Q^*\right] \delta Q dx dt +$$

$$+\int_0^{2l} [\delta P(T,x)\cdot P^*(T,x) - \delta P(0,x)\cdot P^*(0,x)]dx +$$

$$+\frac{c^2}{\overline{\overline{F}}}\int_0^T [\delta Q\cdot P^*|_0^l + \delta Q\cdot P^*|_l^{2l}]dt + \int_0^{2l} [\delta Q(T,x)\cdot Q^*(T,x) - \delta Q(0,x)\cdot Q^*(0,x)]dx +$$

$$+\overline{F}\int_0^T [\delta P\cdot Q^*|_0^l + \delta P\cdot Q^*|_l^{2l}]dt.$$

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) =$$

$$= -\int_0^T\int_0^{2l} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \overline{F}\cdot\frac{\partial Q^*}{\partial x}\right]\delta P dxdt - \int_0^T\int_0^{2l} \left[\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\overline{\overline{F}}}\cdot\frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a\cdot Q^*\right]\delta Q dxdt +$$

$$+\int_0^{2l} [\delta P(T,x)\cdot P^*(T,x) - \delta P^0\cdot P^*(0,x)]dx +$$

$$+\frac{c^2}{\overline{\overline{F}}}\int_0^T [\delta Q(t,l-0)\cdot P^*(t,l-0) - \delta Q(t,0)\cdot P^*(t,0) +$$

$$+\delta Q(t,2l)\cdot P^*(t,2l) - \delta Q(t,l+0)\cdot P^*(t,l+0)]dt + \qquad (61)$$

$$+\int_0^{2l} [\delta Q(T,x)\cdot Q^*(T,x) - \delta Q^0\cdot Q^*(0,x)]dx +$$

$$+\overline{F}\int_0^T [\delta P(t,l-0)\cdot Q^*(t,l-0) - \delta P(t,0)\cdot Q^*(t,0) +$$

$$+\delta P(t,2l)\cdot Q^*(t,2l) - \delta P(t,l+0)\cdot Q^*(t,l+0)]dt.$$

В последнем выражении (61) члены вне двойного интеграла с множителями $\delta P(\mathrm{t},0)$ и $\delta Q(\mathrm{t},0)$ равны нулю, согласно условиям (59). В силу выполнения условия согласования (60) и требуемого дополнительного условия при $x=l$ (в забое)

$$P^*(\mathrm{t},l-0) = P^*(\mathrm{t},l+0), \quad Q^*(\mathrm{t},l-0) = Q^*(\mathrm{t},l+0) \qquad (62)$$

получается, что

$$\delta Q(t,l-0)\cdot P^*(t,l-0) = \delta Q(t,l+0)\cdot P^*(t,l+0), \qquad (63)$$

$$\delta P(t,l-0)\cdot Q^*(t,l-0) = \delta P(t,l+0)\cdot Q^*(t,l+0). \qquad (64)$$

Из физических соображении, считаем что в устье скважины возмущения давления $\delta P(\mathrm{t}, 2l)$ и объемного расхода газа $\delta Q(\mathrm{t}, 2l)$ пренебрежимо малы.

Теперь остались слагаемые содержащиеся под интегралом по .

$$\int_0^{2l} \delta P(T,x)\cdot P^*(T,x)dx + \int_0^{2l} \delta Q(T,x)\cdot Q^*(T,x)dx -$$

$$-\int_0^{2l} \delta P^0\cdot P^*(0,x)dx + \int_0^{2l} \delta Q^0\cdot Q^*(0,x)dx = 0.$$

Введем обозначения операторов

$$A^*P^* = \frac{\partial P^*}{\partial t} + \overline{F}\cdot\frac{\partial Q^*}{\partial x},$$

$$B^*Q^* = \frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\overline{F}}\cdot\frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a\cdot Q^*. \tag{65}$$

Выполнения этого равенства приводит к следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $P^0,\ P+\delta P^0 \in P_{ad},\ Q^0,\quad Q^0,\ Q^0+\delta Q^0 \in Q_{ad}$ элементы принадлежащие области возможных решений. Если $P\big(\mathrm{t}, x; P^0(x)\big),\ Q\big(\mathrm{t}, x; Q^0(x)\big)$ решение задачи (1)-(5) и выполняется интегральное тождество Лагранжа

$$(AP, P^*) + (BQ, Q^*) = (P, A^*P^*) + (Q, B^*Q^*)$$

то имеет место

$$\int_0^{2l} \delta P(T,x)\cdot P^*(T,x)dx + \int_0^{2l} \delta Q(T,x)\cdot Q^*(T,x)dx =$$

$$= \int_0^{2l} \delta P^0\cdot P^*(0,x)dx + \int_0^{2l} \delta Q^0\cdot Q^*(0,x)dx. \tag{66}$$

Условие (66) с учетом граничных условии (58), первой вариации функционала $\delta J(P^0, Q^0)$ и по определению производной Фреше (50) примет вид

$$< \delta P(T,x), 2[P(T,x;P^0) - P^1(x)] > +$$

$$+< \delta Q(T,x), 2[Q(T,x;Q^0) - Q^1(x)] >= \tag{67}$$

$$=< J'P^0, \delta P^0 > +< J'Q^0, \delta Q^0 >.$$

Эти условия вытекают из требований выполнения тождества Лагранжа.

Постановка сопряженной задачи.

Выполнения тождества Лагранжа, требования равенства нулю всех внеинтегральных членов и условий Леммы 1 приводят к следующей сопряженной задаче

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t}+\frac{c^2}{\overline{\overline{F}}}\cdot\frac{\partial P^*}{\partial x}-2a\cdot Q^*=0, \quad (69)$$

$$P^*(t,0)=0, Q^*(t,0)=0, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &P^*(T,x)=2[P(T,x;P^0)-P^1],\\ &Q^*(T,x)=2[Q(T,x;Q^0)-Q^1]. \end{aligned} \quad (71)$$

Алгоритм решения вариационной задачи.

1 Задаем начальное приближение : $P^0,\ Q^0$.

2 Предположим, что $\mathrm{P}_\mathrm{n}^0, \mathrm{Q}_\mathrm{n}^0$ уже известно, тогда решаем прямую задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{c^2}{\overline{\overline{F}}}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad t\geq 0, x\in(0,2l),\\ &\frac{\partial Q}{\partial t}=-\overline{F}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}-2a\cdot Q, \qquad t\geq 0, x\in(0,2l),\\ &P(0,x)=P^0(x), \qquad Q(0,x)=Q^0(x),\\ &P(t,0)=P_0(t), \qquad P(t,0)=P_0(t), \end{aligned} \quad (72)$$

$$P(t,l+0)=P_0(t,l-0)+P_{pl}(t), Q(t,l+0)=Q_0(t,l-0)+Q_{pl}(t).$$

3. Вычисляем приближенное значение функционала используя квадратурную формулу

$$J(P_n^0,Q_n^0)=\int_0^{2l}[P(T,x;P_n^0)-P^1(x)]^2dx+$$

$$+\int_0^{2l}[P(T,x;Q_n^0)-Q^1(x)]^2dx \quad (73)$$

4 Если текущее значение нормы функционала $J(P_n^0,Q_n^0)$ – недостаточно мало, то решаем сопряженную задачу:

$$\frac{\partial P^*}{\partial t}+\overline{F}\cdot\frac{\partial Q^*}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t}+\frac{c^2}{\overline{\overline{F}}}\cdot\frac{\partial P^*}{\partial x}+2a\cdot Q^*=0, \quad (74)$$

$P^*(t,0) = 0, Q^*(t,0) = 0,$

$P^*(T,x) = 2[P(T,x;P^0) - P^1],$

$Q^*(T,x) = 2[Q(T,x;Q^0) - Q^1].$

5 Из решения P^*, Q^* сопряженной задачи (74) по P и Q определяем градиент функционала

$$\begin{cases} J'(P_n) = -P^*(0,x), \\ J'(Q_n) = -Q^*(0,x). \end{cases} \quad (75)$$

6 Следующие приближения начальных условий для $P(0,x)$ и $Q(0,x)$ находятся по формулам

$$P_{n+1}^0(x) = P_n^0(x) - \alpha \cdot J'(P_n),$$
$$Q_{n+1}^0(x) = Q_n^0(x) - \alpha \cdot J'(Q_n), \quad (76)$$

7. Переходим к шагу 2.

Разностная схема решения прямой задачи.

Аппроксимируем прямую задачу (1)-(5). Пусть N_t – количество узлов равномерной сетки на интервале [0,T], а N_x – количество узлов равномерной сетки на интервале [*0,2l*].

Построим в области $\Omega = \big((0,2l) \times (0,T)\big)$ сетку ω_h с шагом $h = \frac{2l}{N_x}$, $\tau = \frac{T}{N_t}$, где N_x, N_t – положительные целые числа.

Тогда в сетке $\omega_h = \{x = ih, \ \ t = k\tau, \ \ i = 0,1,\ldots,N_x, \ \ k = 0,1,\ldots,N_t,\}$ запишем соответствующую разностную прямую задачу. Таким образом задача (1)-(5) имеет следующий вид:

$$\frac{P_i^{k+1} - P_i^k}{\tau} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{h}, \quad (77)$$

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\tau} = -\bar{F} \cdot \frac{P_i^k - P_{i-1}^k}{h} - 2a \cdot Q_i^{k+1}, \quad (78)$$

$$i = 0,1,\ldots,N_x, \quad k = 0,1,\ldots,N_t,$$

начальные условия

$$P_i^0 = P^0(x_i), \quad Q_i^0 = Q^0(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,N_x, \quad (79)$$

и граничные условия соответственно

$$P_0^k = P_0, \quad Q_0^k = Q_0, \quad k = 0,1,\ldots,N_t, \quad (80)$$

$$P_{\frac{N_x}{2}}^k = P_{\frac{N_x}{2}-1}^k + P_{pl}, \quad Q_{\frac{N_x}{2}}^k = Q_{\frac{N_x}{2}-1}^k + Q_{pl}, \quad k = 0,1,\ldots,N_t. \quad (81)$$

Разностная схема решения сопряженной задачи.

В той же сеточной области запишем соответствующую разностную сопряженную задачу. Таким образом, разностный аналог задачи (68)-(71) имеет следующий вид:

$$\frac{P_i^{*k+1}-P_i^{*k}}{\tau}+\overline{F}_i\frac{Q_i^{*k+1}-Q_{i-1}^{*k+1}}{h}=0, \qquad (82)$$

$$\frac{Q_i^{*k+1}-Q_i^{*k}}{\tau}+\frac{c_i^2}{\overline{F}_i}\cdot\frac{P_i^{*k+1}-P_{i-1}^{*k+1}}{h}+2a\cdot Q_i^{*k+1}=0, \qquad (83)$$

$$i=0,1,\ldots,N_x, \qquad k=N_t,\ldots,1,0,$$

$$P_0^{*k}=0, \quad Q_0^{*k}=0, \qquad k=N_t,N_t-1,\ldots,0, \qquad (84)$$

$$P_i^{*N_t}=2\cdot\left[P_i^{N_t}-P^{(1)}\right], \qquad Q_i^{*N_t}=2\cdot\left[Q_i^{N_t}-Q^{(1)}\right], \quad i=0,1,\ldots,N_x-1 \qquad (85)$$

Численные результаты и дискуссий. Численные по разработанному выше алгоритму проводились с исходными данными из работы (Алиев, et al., 2009). Объемный расход закачиваемого газа был выбран равным $Q^0=0.21$ м^3/с, а начальное давление $P^0=5177500$ Па, глубина скважины $l=1485$ м, скорость звука в кольцевом пространстве $c_1=331$ м/с, скорость звука в добывающей скважине $c_2=850$ м/с. Площадь поперечного сечения кольцевого пространства скважины $F_1=\pi r_1^2$ м^2, площадь поперечного сечения внутренней скважины $F_2=\pi r_2^2$ м^2, $r_1=0.06765$ м, $r_2=0.0365$ м. Гидравлическое сопротивление в кольце $\lambda_1=0.01$, гидравлическое сопротивление в скважине $\lambda_2=0.23$. Плотность газа $\rho_1=0.75$ кг/м^3, плотность нефти $\rho_2=700$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g=9.8$ м/с^2.

Осредненная по сечению скорость движения смеси в кольце $w_1=\frac{Q_0(x)}{F_1\rho_1}$ м/с, осредненная по сечению скорость движения в скважине $w_2=\frac{Q_0(x)}{F_2\rho_2}$ м/с.

Особенностью решаемой задачи является то, что коэффициенты $c(x)$, $\overline{F}(x)$, $a(x)$ имеют разрывы в точке *x = l* и значения большие числа. Поэтому в расчетах начальное давление и начальный объем закачиваемого газа задавались в виде линейной функций

$$Q_i^0=Q^0+0.5\cdot(Q_{\text{вых}}-Q^0)\cdot x_i/\,l,$$

$$P_i^0=P^0+0.5\cdot(P_{\text{вых}}-P^0)\cdot x_i/\,l.$$

где $Q_{\text{вых}}$, $P_{\text{вых}}$ - значения выходного объема смеси и давления.

Коэффициенты $c(x_i)$, $\overline{F}(x_i)$, $a(x_i)$ имеют большой разброс значений, поэтому для обеспечения устойчивого расчета были нормированы следующим образом

$$a(x_i) = 0.5 \cdot \left(a(x_i) + a\left(x_{N_x}\right) - 2 \cdot a(x_0)\right) / \left(a\left(x_{N_x}\right) - a(x_0)\right)$$

где

$$a(x_i) = \begin{cases} \dfrac{g}{2w_1} + \dfrac{\lambda_1 w_1}{4d_1}, & \mathrm{i} = 0,1, \quad \ldots, \mathrm{N_x}/2, \\ \dfrac{g}{2w_2} + \dfrac{\lambda_2 w_2}{4d_2}, & \mathrm{i} = \mathrm{N_x}/2 + 1, \ldots, \mathrm{N_x}. \end{cases}$$

Графики функций $a(x)$, $c(x)$, $\overline{F}(x)$, приведены на рисунке 1.

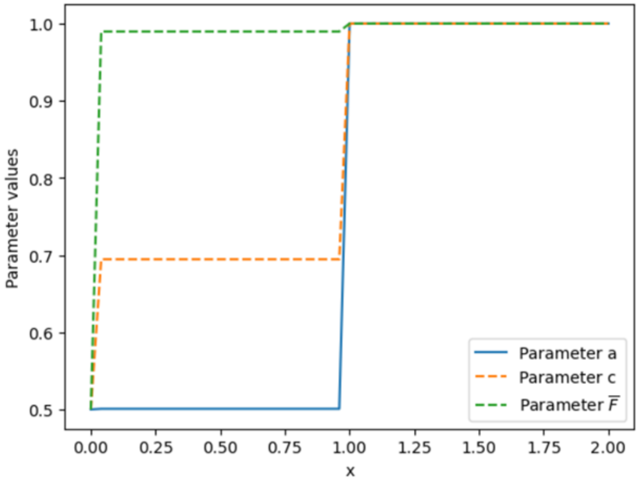

Рисунок 1. Графики функций a, c, и $\overline{F}$

Используя разработанный алгоритм проведены численные расчеты в широком диапозоне входных параметров. Использовались разностные схемы на сетках размером 50×50, 100×100. Итерационный параметр $\alpha = 0.009$.

Дополнительные условия для $P^1(x)$, $Q^1(x)$ задавались в виде параболических функции

$$Q^1(T, x) = -x^2 + b_q \cdot x + c_q,$$

$$P^1(T, x) = -x^2 + b_p \cdot x + c_p,$$

где $c_q = Q^0$, $c_q = P^0, b_q = \frac{Q_{\text{вых}} - Q^0 + 4l^2}{2l}$, $b_p = \frac{P_{\text{вых}} - P^0 + 4l^2}{2l}$.

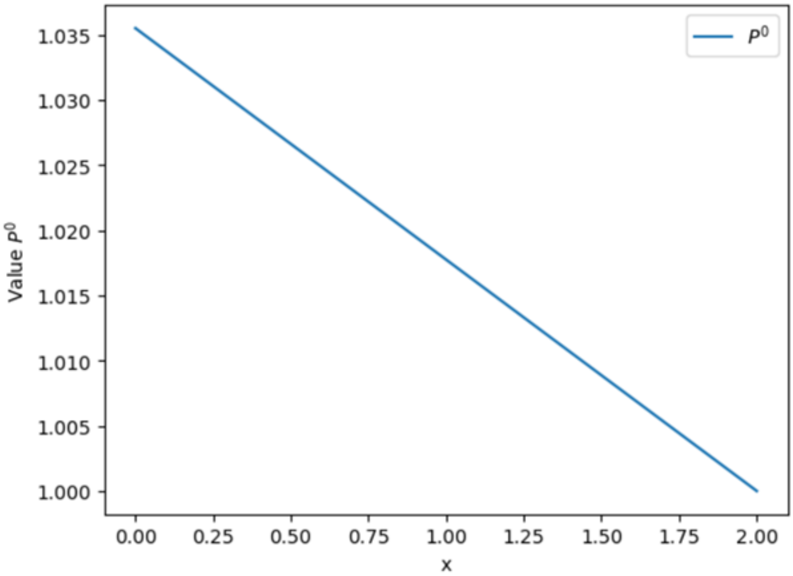

Рисунок 2. График функций $P^0(x)$

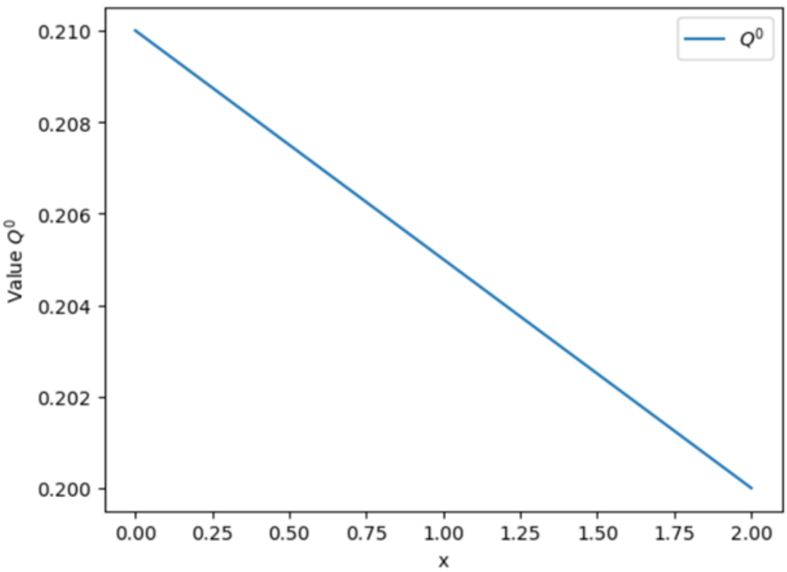

Рисунок 3. График функций $Q^0(x)$

На рисунках 2, 3 приведены графики функции $P^0(x)$, $Q^0(x)$. Это начальные данные в процессе итерации они будут изменяться в зависимости от дополнительных условий $P^1(x)$, $Q^1(x)$. Графики $P^1(x)$, $Q^1(x)$, приведены на рисунках 4, 5.

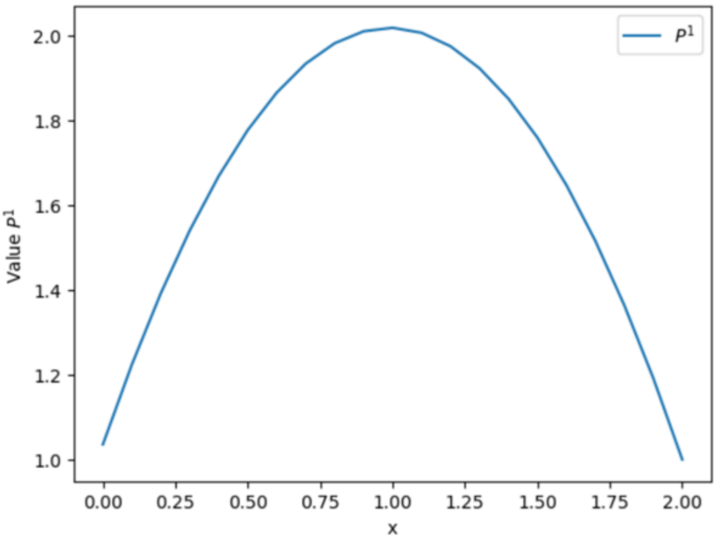

Рисунок 4. График функций $P^1(x)$

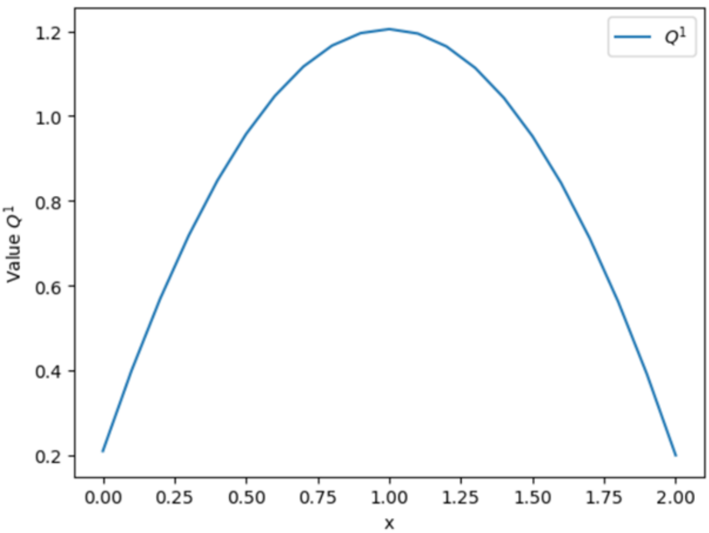

Рисунок 5. График функций $Q^1(x)$

В проведенном итерационном процессе значение функционала j монотонно убывает и достигает значения $\|J\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 0.001$ при $n = 164$ итерации. График убывания значения функционала показано на рисунке 6.

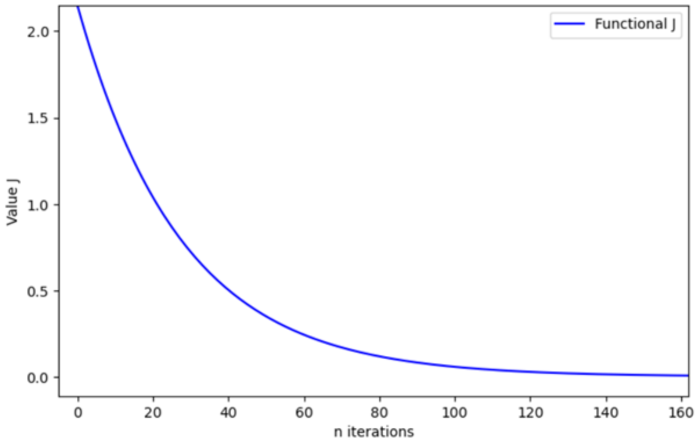

Рисунок 6. График убывание функционала *j*

Численные расчеты показывают что используемый итерационный процесс для нахождения значении давления P_n^0 и объемного расхода газа Q_n^0 при *t = 0* сходится. Численные значения нормы функционала j монотонно убывают и ограничены, по этому вычисленные значения P_n^0 и Q_n^0 стремятся к параболической функции (рисунок 7, 8). Это правдоподобно, так как заданные нами дополнительные условия $P^1(x)$, $Q^1(x)$ являются параболическими функциями.

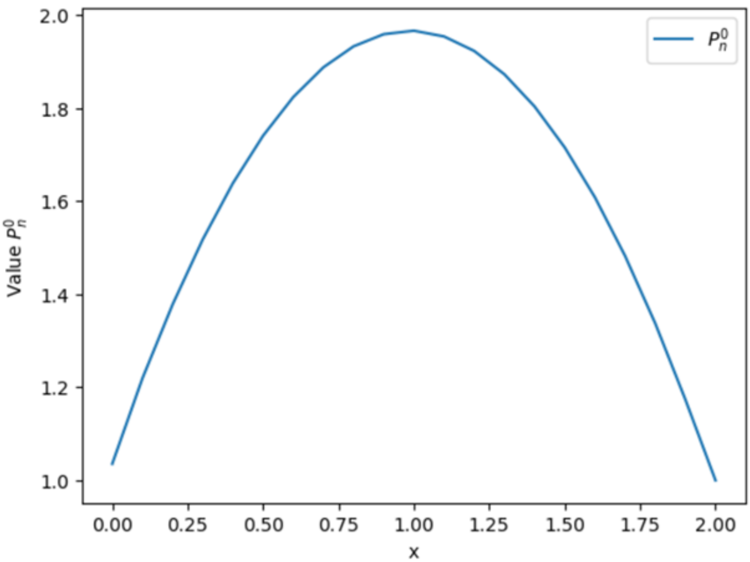

Рисунок 7. График P_n^0

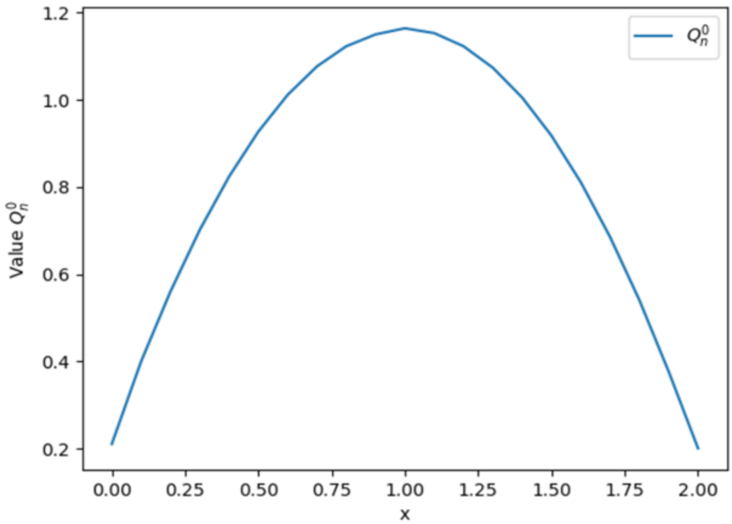

Рисунок 8. График Q_n^0

Известно что сопряженная задача носит с собой ценную информацию о решений прямой задачи. Это свойство подтверждается численными расчетами, так как градиенты функционала для опреления начальных условий прямой задачи на каждой итерации выбирались как решение сопряженной задачи при t = 0, т. е.

$$J'(P_n^0) = P^*(0,x), J'(Q_n^0) = Q^*(0,x).$$

Таким образом, разработанный алгоритм демонстрирует высокую точность, устойчивость и физическую интерпретируемость при решении обратной задачи для газлифтного процесса. Он может быть рекомендован как надёжный инструмент для восстановления начальных параметров на основе конечных измерений давления и расхода газа.

Заключение

В данной работе проведен обзор инженерных моделей используемый для исследования кривой производительности газ лифта. В этих моделях используется закон Дарси и решается одномерная стационарная задача. Результатами являются вычисленные генетическими алгоритмами функции описывающие кривую производительности газ лифта. В данной работе использованы нестационарные линейныеуправления Навье-Стокса сжимаемого газа для описания газлифтного процесса добычи нефти. Определениевходного,забойногозначениядавленияиобъемагазо-жидкостной смеси осуществляется методом сопряженных урвнений. Сопряженная задача носит ценную информацию о решений прямой задачи. Устьевое давление и объем газожидкостной смеси задается как дополнительная информация.

Проведены многочисленные расчеты в широком диапозоне входных параметров. Составленный программный код на языке PYTHON позволяет численно моделировать процесс газ лифта и находить оптимальный режим работы. Использованный градиентный метод для определения давления и объемного расхода газа на входе монотонно сходится.

Литература

Агошков В.И. Методы оптимального управления и метод сопряжённых уравнений в задачах математической физики. — М.: Институт прикладной математики РАН, 2003.

Алиев Ф.А., Муталимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения траекторий и управления при добыче нефти газлифтным способом. Доклад НАН Азерб. — №4, 2009.

Alarcon G.A., Torres C.F., Gomez L.E. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. J. Energy Resources Technol., 2002, 124(4), — P. 262–268. https://doi.org/10.1115/1.1488172

Arguchintsev A.V., Poplevko V.P. An optimal control problem by hyperbolic system with boundary delay. Bull. of Irkutsk State Univ. Math., 2021, 35. — P.3–17. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.35.3

Arguchintsev A.V., Krutikova O.A. Optimization of semilinear hyperbolic systems with smooth boundary controls. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ), 2021, 45(2). — P.1–9. DOI: 10.1134/S0016266321020010

Brown K.E. The Technology of Artificial Lift Methods, — Vol. 4. Pennwell Books, Tulsa, 1984.

Deni Saepudin, Soewono E., Sidarto K.A., Gunawan A.Y., Siregar S., Sukarno P. An Investigation on Gas Lift Performance Curve in an Oil-Producing Well. Int. J. Math. Math. Sci., 2007. https://doi.org/10.1155/2007/81519

Guet S., Oams G. Fluid mechanical aspects of the gas-lift technique. Annu. Rev. Fluid Mech., 2006, 38. — P.225–249.

Guet S., Oams G., Oliemans R.V.A. Simplified two-fluid model for gas-lift efficiency predictions. AIChE J., 2005, 51(7). — P.1885–1896.

Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimization of boundary controls by displacements... Doklady Mathematics, 2007, 76(3). — P. 828–834.

Jung S.-Y., Lim J.-S. Optimization of gas lift allocation for improved oil production... Geosystem Eng., 2016, 19(1), — P. 39–47. DOI: 10.1080/12269328.2015.1084895

Klyuchinskiy D., Novikov N., Shishlenin M. Recovering density and speed of sound coefficients... Mathematics, 2021, 9(2). — P.199–211. DOI: 10.3390/math9020199

Lions J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer, 1971.

Lions J.L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. — Vol. II. Springer, 1972.

Mehregan M.R., Mohaghar A., Esmaeili A. Developing a mathematical model for optimizing oil production Using Gas-Lift Technology. 2016, 9(5). — P.1–9.

Nishikiori N. Gas allocation optimization for continuous flow gas lift systems. M.S. Thesis, Univ. of Tulsa, 1989. (in English)

Sukarno P., Sidarto K.A., Dewi S., et al. New Approach on Gas Lift Wells Optimization... Prosiding IATMI, Jakarta, 2006.

Temirbekov A.N., Temirbekova L.N., Zhumagulov B.T. Fictitious domain method... Appl. Comput. Math., 2023. — 22(2). — P. 172–188. https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172

Temirbekov N., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. Numerical solution of the first kind of Fredholm integral equations... TWMS J. Pure Appl. Math., 2022, 13(1). — P.105–118.

Марчук Г.И. Сопряжённые уравнения и их приложения. Труды ИММ УрО РАН, 2006, 12(1). — P. 184–195.

References

Agoshkov V.I. Metody optimal’nogo upravleniya i metod sopryazhyonnyh uravnenij v zadachah matematicheskoj fiziki. [Optimal Control Methods and the method of conjugate equations in Mathematical Physics Problems]. Moscow: Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 2003. (in Russian)

Aliev F.A., Mutalimov M.M. Algoritm dlya resheniya zadachi postroeniya traektorij i upravleniya pri dobyche nefti gazliftnym sposobom [Algorithm for solving the problem of trajectory construction and control during oil production by gas lift method]. Report of the National Academy of Sciences of Azerbaijan. — No. 4, 2009. (in Russian)

Alarcon G.A., Torres C.F., Gomez L.E. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. J. Energy Resources Technol., 2002, 124(4). — P. 262–268. https://doi.org/10.1115/1.1488172 (in English)

Arguchintsev A.V., Poplevko V.P. An optimal control problem by hyperbolic system with boundary delay. Bull. of Irkutsk State Univ. Math., 2021, 35. — P. 3–17. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.35.3 (in English)

Arguchintsev A.V., Krutikova O.A. Optimization of semilinear hyperbolic systems with smooth boundary controls. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ), 2021, 45(2). — P. 1–9. DOI: 10.1134/S0016266321020010 (in English)

Brown K.E. The Technology of Artificial Lift Methods. — Vol. 4. Pennwell Books, Tulsa, 1984. (in English)

Deni Saepudin, Soewono E., Sidarto K.A., Gunawan A.Y., Siregar S., Sukarno P. An Investigation on Gas Lift Performance Curve in an Oil-Producing Well. Int. J. Math. Math. Sci., 2007. https://doi.org/10.1155/2007/81519 (in English)

Guet S., Oams G. Fluid mechanical aspects of the gas-lift technique. Annu. Rev. Fluid Mech., 2006, 38, 225–249. (in English)

Guet S., Oams G., Oliemans R.V.A. Simplified two-fluid model for gas-lift efficiency predictions. AIChE J., 2005. — 51(7), — P.1885–1896. (in English)

Il’in V.A., Moiseev E.I. Optimization of boundary controls by displacements... Doklady Mathematics, 2007, 76(3). — P. 828–834. (in English)

Jung S.-Y., Lim J.-S. Optimization of gas lift allocation for improved oil production... Geosystem Eng., 2016, 19(1). — P. 39–47. DOI: 10.1080/12269328.2015.1084895 (in English)

Klyuchinskiy D., Novikov N., Shishlenin M. Recovering density and speed of sound coefficients... Mathematics, 2021. — 9(2). — P. 199–211. DOI: 10.3390/math9020199 (in English)

Lions J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer, 1971. (in English)

Lions J.L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. II. Springer, 1972. (in English)

Mehregan M.R., Mohaghar A., Esmaeili A. Developing a mathematical model for optimizing oil production Using Gas-Lift Technology. 2016. — 9(5), — P. 1–9. (in English)

Nishikiori N. Gas allocation optimization for continuous flow gas lift systems. M.S. Thesis, Univ. of Tulsa, 1989. (in English)

Sukarno P., Sidarto K.A., Dewi S., et al. New Approach on Gas Lift Wells Optimization... Prosiding IATMI, Jakarta, 2006. (in English)

Temirbekov A.N., Temirbekova L.N., Zhumagulov B.T. Fictitious domain method... Appl. Comput. Math., 2023. — 22(2). — P. 172–188. https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172 (in English)

Temirbekov N., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. Numerical solution of the first kind of Fredholm integral equations... TWMS J. Pure Appl. Math., 2022. — 13(1). — P. 105–118. (in English)

Marchuk G.I. Sopryazhyonnye uravneniya i ih prilozheniya [Conjugate Equations and Their Applications]. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2006. — 12(1). — P. 184–195. (in Russian)

Publication Ethics and Publication Malpracticein
the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethicalguidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any otherlanguage, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:
www:nauka-nanrk.kz
http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive
ISSN2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

Директор отдела издания научных журналов НАН РК *А. Ботанқызы*
Редакторы: *Д.С. Аленов, Ж.Ш.Әден*
Верстка на компьютере *Г.Д.Жадыранова*

Подписано в печать 20.06.2025.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать –ризограф.
20,0 п.л. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-19