NEWS
OF THENATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 336 (2021), 74 – 82 **https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.23**

УДК 519.61

А. А. Абдурахимова[1], Н. М. Касымбек[1], О. Ж. Мамырбаев[2]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы;
[2]ҚР БҒМ ҒК ақпараттық және есептеу технологиялары институты, Алматы

ILU (0) - CG ӘДІСІМЕН ПУАССОН ТЕҢДЕУІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІН ТАЛДАУ

Аннотация. Әдістің жинақталу мәселесі – итерациялық әдістердің сапасын зерттеу кезінде пайда болатын негізгі сұрақ болып табылады. Жүйелерді итерациялық әдістермен шешу тиімділігіне шешілетін теңдеулер жүйесінің алғышартталуы тікелей әсер етеді. Тиімдірек шешімді қамтамасыз ету үшін алғышарттағыштар қолданылады.

Қазіргі уақытта алғышарттағыштардың көптеген түрлері белгілі, мысалы, жүйе матрицасын аппроксимациялау негізіндегі алғышарттағыштар: ILU, IQR және ILQ; кері матрицаның жуықтауына негізделген Үй-жайлар: көпмүшелік, сирек толтырылатын кері матрицаның жуықтауы (мысалы, AINV), кері матрицаның факторлық формасындағы жуықтаулар (мысалы, FSAI, SPAI және т.б.).

Бұл мақалада екі өлшемді Пуассон теңдеуін шешу мысалында CG және ILU(0) алғышарттағышы қосылған CG әдістеріне талдау жасалады. CG әдісі жалпы жағдайда кез келген сызықтық теңдеулер жүйесін шешуге арналған. Мақалада алғышарттағыш ретінде ILU(0) таңдалды. Толық емес LU ыдырауы (ILU(0)) тиімді алғышарттағыш болып табылады және оңай іске асырылады. CG және басқа да итерациялық әдістердің жинақталуын тездету үшін, яғни, итерациялар санын азайту үшін шешілетін жүйені алғышарттайды. ILU(0) алғышарттағышы LU ыдырауының көмегімен өте оңай табылады. Сызықтық түрге келтірілген матрица сирек толтырылған болғандықтан матрицаны жадыда сақтау үшін CSR форматы қолданылды. CG алгоритміне қарағанда ILU(0)+CG, яғни, алғышарттағыш қосылған алгоритм 5-8 есе жылдам жинақталды. Жұмыс нәтижесінде ILU(0) алғышарттағышы көмегімен итерациялық алгоритмдердің жинақталуын жылдамдатуға болатыны көрсетілді.

Түйін сөздер: CG, ILU-факторизация, ILU(0)- алғашарттағыш, Пуассон теңдеуі, CSR пішімі.

Кіріспе. Сирек матрицалар алгебрасының, атап айтқанда, математикалық физикалық есептерін шығарудағы өзекті мәселелерінің бірі $Ax = b$ түріндегі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін (САТЖ) шешу болып табылады, мұндағы $A - nxn$ өлшемді симметриялы оң анықталған сирек матрицасы, b-n өлшемді вектор, $x - n$ өлшемінің белгісіз векторы . Жүйенің шешімі x векторы болып табылады [1].

САТЖ шешу әдістерін тікелей және итерациялық деп бөлуге болады. Итерациялық әдістер үлкен өлшемді есептерді шешуде қолданылады, мұнда жадтың шектеулеріне және есептеу уақытына байланысты тікелей әдістерді қолдану мүмкін емес.

Итерациялық әдістің мәні САТЖ-ның нақты нәтижесін табуға арналған $\{x^{(k)}, k = 1,2, \dots\}$ жуықтау тізбегін құру болып табылады. Әдістің конвергенциясы дегеніміз – берілген тізбектің кез-келген $x^{(0)}$ бастапқы жуықтаудағы жүйенің нақты шешіміне жақындауы.

Hestenes and Stiefel (1952) NBS зерттеу журналында CG(Conjugate Gradient) деп аталатын САТЖ шешудің итерациялық әдісін ұсынды [2]. CG – конъюгацияланған градиенттер әдісі, САТЖ шешудің сандық әдісі, Крылов типіндегі итерациялық әдіс.

CG алгоритмі. Жүйе түрі:

$$Ax = b \tag{1}$$

Конъюгативті градиенттер әдісі сызықтық теңдеулер жүйесін (1) симметриялы оң анықталған А матрицасымен шешу функцияны минимизациялау мәселесін шешуге тең болатындығына негізделген.

$$F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \tag{2}$$

F(x) функциясы оның градиенті нөлге айналған кезде ғана ең төменгі мәніне жетеді.

$$\Delta F(x) = Ax - b \tag{3}$$

Осылайша, жүйенің шешімін (1) шартсыз минимизациялау мәселесін шешу ретінде іздеуге болады (3).

Итерациялық процесс келесідей жүзеге асады:

- Алдын ала қадамда бастапқы қалдық векторы r_0 және бағыт векторы p_0 есептеледі: $r_0 = p_0 = b - Ax_0$.
- Ары қарай жуықтау $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ келесі формулалармен анықталады:

$$\alpha_i = \frac{(r_i, r_i)}{(Ap, p_i)}, \tag{4}$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i, \tag{5}$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_{i,} \tag{6}$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}, \tag{7}$$

$$p_{i+1} = r_i + \beta_i p_i. \tag{8}$$

Мұндағы: $r_i = b - Ax_i$ – i-ші жуықтау қалдығы, коэффициент β_i конъюгация шартының орындалуына сәйкес келеді

$$Ap_i, p_{i-1} = 0$$

Бағыттары p_i және p_{i-1}.

$$\alpha_i = arg \min_{\alpha} F(x_i + \alpha p_i)$$

Берілген жүйе қайта анықталған болып табылады, сондықтан ең аз квадраттар мағынасында шешілуі керек. Бұл ең аз квадраттар есебін шешу үшін матрицаны Гивенс айналдыруы [3] арқылы жоғары үшбұрышты түрге келтіреді. i-қадамда Ω_i айналдыру матрицасы $(m+1) \times (m+1)$ өлшемді болады және келесідей түрде жазылады [4]:

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & c_i & s_i & & & \\ & & & -s_i & c_i & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

мұндағы $c_i^2 + s_i^2 = 1$. c_i, s_i коэффициенттері $h_{i+1,i}$ коэффициентін нөлге тең ететіндей қылып таңдалады [5]. Осылай келгенде, i-ші қатар үшін аламыз:

$$s_i = \frac{h_{i+1,i}}{\sqrt{h_{i,i}^2 + h_{i+1,i}^2}}, c_i = \frac{h_{i,i}}{\sqrt{h_{i,i}^2 + h_{i+1,i}^2}}.$$

Оң анықталған симметриялы матрицасы бар сызықтық теңдеулер жүйесінің нақты шешімін табу үшін n итерациядан артық емес орындау керек [6]. Бірақ, дөңгелектеу қателерін ескере отырып, бұл процесс әдетте итеративті болып саналады.

Итерация тоқтау шарты: $\left\|x^{(s)}-x^{(s-1)}\right\|<\varepsilon_1$,

Мұндағы:$x^{(s)}$ - s нөмірімен итерацияда алынған жақындату, $x^{s-1}-$ алдыңғы итерацияда алынған жуықтау. ε_1- әдістің дәлдік параметрі. Сондай-ақ, салыстырмалы тепе-теңдік нормасының аздығы жағдайында тоқтау қолданылады:

$$\frac{\|r_i\|}{\|b\|}\leq\varepsilon \qquad (9)$$

CG ILU(0) алғашарттағыш. Әдісте итерация санын азайту үшін алғашарттағыш қолданылады - бұл сызықтық теңдеулер жүйесінің модификациясы, әр түрлі әдістерді қолдану арқылы жүйенің шешімін жеңілдетеді.

Бұл жұмыста бастапқы жүйені (1) белгілі бір M^{-1} матрицасына көбейту арқылы алғашарттағыш қарастырылды, яғни жүйе түрі:

$$M^{-1}Ax=M^{-1}b \qquad (10)$$

M матрицасы алғашарттағыш матрицасы деп аталады. SSOR, SGS, ILU [7] сияқты алғашарт-тағыш түрлері бар. Бұл жұмыс үшін ILU(0) алғашарттағыш таңдалды, әдіс толық емес LU ыдырауы деп те аталады. Сирек матрицаның толық LU ыдырауы кезінде табылған L және U матрицаларының портреті бастапқы матрицаның портретімен сәйкес келмейді, яғни бастапқы нөлдік элементтердің индекстері мәндермен толықтырылуы мүмкін, бұл жадтың жоғалуына әкеледі. Бұл мәселені шешу үшін біз ILU факторизация алгоритімін Гаусс әдісімен толық LU ыдырау негізінде тұжырымдаймыз. Оның алгоритмі келесідей:

for k = 1 to n – 1
 for i = k + 1 to n
 $l_{ik}=a_{ik}/a_{kk}$
 end
for j = k + 1 to n
 for i = k + 1 to n
 $a_{ij}=a_{ij}-l_{ik}a_{kj}$
 end
end
end

Толық емес ыдырауды табу үшін A матрицаның портреті шегінде ғана есептеулер жүргізу жеткілікті, яғни $NZ(A)=\{(i,j):a_{ij}\neq 0\}$[8][9]. ILU(0) толық емес ыдырау алгоритмінің модификациясын көрсетейік:

for k = 1 to n − 1
for i = k + 1 to n and if (i,k) ∈ NZ(A) do
 $l_{ik}=a_{ik}/a_{kk}$
end
for j = k + 1 to n
 for i = k + 1 to n and if (i,j) ∈ NZ(A) do
 $a_{ij}=a_{ij}-l_{ik}a_{kj}$
 end
end
end

Толық емес ыдыраудың мағынасы - бастапқы A матрицаны келесі түрде ұсыну:

$$A=LU+R$$

мұндағы L және U-толық емес факторизациядан алынған төменгі және жоғарғы бұрыштық матрицалар, R-факторизацияның болмауы. ILU факторизациядан кейін, матрица келесідей болады:

$$M=LU$$

Алғышарттағыш түрінде қолдануға болады. CG алгоритмін ILU(0) алғышарттағышымен жүзеге асыру үшін, алгоритмге кейбір өзгерістерді енгіземіз [10]:

1. Бастапқы қадамда $r_0 = b - Ax_0, Mz_0 = r_0, p_0 = z_0$.
2. Негізгі қадам ($i = 0,1,2\ \dots n-1$) келесі формулалармен анықталады [11]:

$$\alpha_i = \frac{(r_i, z_i)}{(Ap_i, p_i)}, x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i,$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ap_i, z_{i+1} = M^{-1} r_{i+1},$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, z_{i+1})}{(r_i, z_i)}, p_{i+1} = z_{i+1} + \beta_i p_i.$$

Сонымен қатар, алдын-ала тыңдаушы m LU шеттерінің түріне ие болғандықтан, 1 м-нің кері матрицасын есептеудің орнына тек теңдеулер жүйесін шешу қажет [12,13].

$$Mz_{i+1} = r_{i+1},$$

$$Ly = r_{i+1}, Uz_{i+1} = y$$

Сандық эксперименттер. Бұл жұмыста Пуассон түрінің теңдеуі таңдалды:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f \tag{11}$$

Мұнда f үздіксіз функция

$$f(x, y) = -4 \tag{12}$$

шекаралық мәндермен

$$u(0, y) = 1 + y^2;$$
$$u(1, y) = 2 + y^2;$$
$$u(x, 0) = 1 + x^2;$$
$$u(x, 1) = 1 + y^2;$$

Есептеу аймағы

$$\underline{\Omega = [0,1] \times [0,1].} \tag{13}$$

Егер (4) теңдеудің дифференциалдық жуықтауы облыстың әрбір ішкі нүктесі үшін жазылса, онда тордың ішкі нүктелерінің санына тең белгісіз саны бар (1) сызықтық теңдеулер жүйесін алуға болады [14]. Алынған жүйе CG және ILU(0)+CG алдын ала сілтемесімен шешілді. Бұл жүйенің коэффициенттер матрицасы үш жақты құрылымға ие болмайды және сирек болады [15].

Толық матрицаны барлық нөлдік элементтермен сақтау өте үлкен жадқа әкеледі. Жадыны оңтайландыру мақсатында CSR сирек матрицаларын сақтау форматы таңдалды [16,17]. CSR (Compressed Sparse Rows) – сирек матрицаларды жол түрінде сақтау форматы. Бұл форматта үш бір өлшемді массив қолданылады [18]:

- values бірінші массиві барлық нөлдік емес элементтердің мәндерін сызық бойынша сақтайды;
- екінші cols массиві values массиві элементтерінің баған нөмірлерін сақтайды;
- үшінші rowindex массиві әр жолдың басталу индексін сақтайды.

Rowindex массив элементтерінің саны n+1. rowindex массивінің i-ші элементі values элементтер массивіндегі i-ші жолдың басында көрсетіледі [19,20]. Яғни, values массивіндегі I жолдың элементтері rowindex[i] және rowindex [i+1] -1 индекстерінің ішінде болады. Мысал келтірейік, A матрицасы келесі түрде берілсін [21,22]:

1	0	0	4	0
0	3	0	0	0
0	0	2	0	6
0	1	0	0	3
5	0	0	7	0

Бұл жағдайда жоғарыда көрсетілген CSR массивтері келесі түрде болады:

Values:	1	4	3	2	6	1	3	5	7

Cols:	0	3	1	2	4	1	4	0	2

Rowindex:	0	2	3	5	7	9

Көріп отырғаныңыздай, values және cols массивтерінің мөлшері NZ (нөлдік емес элементтер саны).

Біздің жағдайда, егер Пуассон теңдеуінің тор өлшемі 100×100 тең болса, онда матрицаның өлшемі 9604×9604 болады . Бұл матрицаның жадындағы өлшемі double түрімен толық түрде шамамен 704 МБ болады. Егер сіз осындай матрицаның нөлдік емес элементтерін ғана алсаңыз, олар жадта шамамен 0,36 МБ алады. CSR форматындағы тор үшін матрицаның жадындағы орынды есептейміз, ол 0,8 МБ болады. Көріп отырғаныңыздай, CSR пішімі әлдеқайда үлкен, сирек матрицаларды сақтауға мүмкіндік береді.

Нәтижелер және анализ. Пуассон торының әртүрлі өлшемдерінде есептеу эксперименттері жасалды. Атап айтқанда, әдісті жақындастыру үшін қажетті итерациялардың саны алғышарт-тағышпен және алғышарттағышсыз анықталды. Екі бағдарламаның орындалу уақыты салысты-рылды. Келесі кестеде есептеулер жүргізілген матрицалардың сипаттамасын көруге болады. Жоғарыда айтылғандай, А матрицасының өлшемі Пуассон теңдеуінің тордық ішкі нүктелерінің санына сәйкес келеді. Матрица бес диагональды құрылымға ие, соның негізінде нөлдік емес элементтердің санын есептеуге болады.

1-кесте - Қолданылған матрицалар.

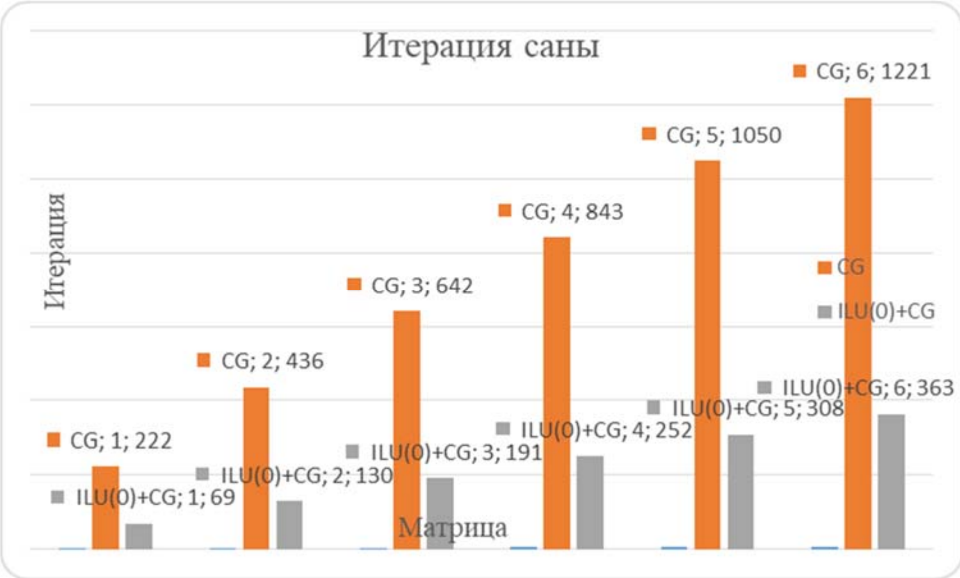
Матрица нөмірі	1	2	3
Пуассон теңдеуінің торы	100x100	200x200	300x300
А матрицасының өлшемі	9604x9604	39204x39204	88804x88804
Нөлдік емес элементтер саны	47628	195228	442828
Матрица нөмірі	4	5	6
Пуассон теңдеуінің торы	400x400	500x500	600x600
А матрицасының өлшемі	158404x158404	248004x248004	357604x357604
Нөлдік емес элементтер саны	790428	1238028	1785628

2-кесте - CG және ILU(0)+CG әдістері бойынша алынған нәтиже.

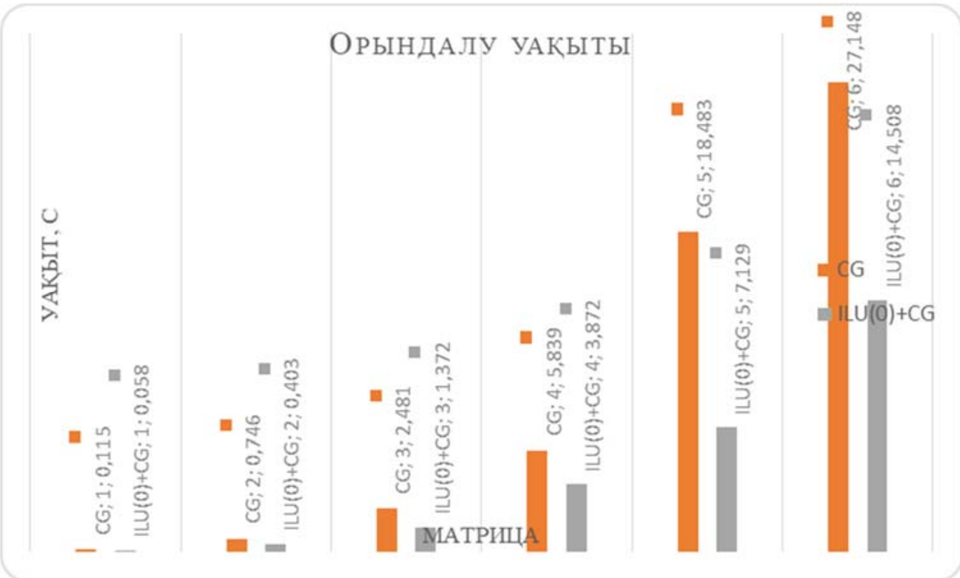
Матрица өлшемі	CG әдісі		ILU(0)+CG әдісі	
	Уақыт,с	Итерация саны	Уақыт,с	Итерация саны
100x100	0,115	222	0,058	69
200x200	0,746	436	0,403	130
300x300	2,481	642	1,372	191
400x400	5,839	843	3,872	252
500x500	18,438	1050	7,129	308
600x600	46,63	1221	14,508	363

Келесі суреттерде OX осіндегі матрица нөмірлері 1-кестедегі матрицаларға сәйкес келеді.

1-кестеде сипатталған матрицаларға сәйкес, жоғарыда айтылғандай, шешілетін жүйенің өлшемі Пуассон теңдеуінің ішкі тор нүктелерінің санына тең екенін көруге болады. Көріп отырғаныңыздай, 1-суретте, барлық матрицаларда әдісті алдын-ала итерациямен жақындастыру үшін қажетті итерациялардың саны CG итерацияларының санынан аз. Осыған байланысты, 2-суретте CG бағдарламасының орындалу уақыты ILU(0) алдын-ала дайындалған CG бағдарла-масының орындалу уақытынан 5-8 есе көп екенін көреміз.



1 сурет - Әдістің жинақталу итерациясының саны



2 сурет - Орындалу уақыты

Қорытынды. CG әдісін кез-келген түрдегі жүйелерді шешу үшін қолдануға болады, алғышарттағыш әдістің конвергенциясын тездетеді. Бұл мақала екі өлшемді Пуассон теңдеуін шешу мысалын қолдана отырып, ILU(0) CG алғышарттағыш арқылы және CG әдістерін талдауға арналған. Пуассон теңдеуінің коэффициенттік матрицалары сирек кездеседі, сондықтан CSR матрицаларын сақтау форматы қолданылды, бұл өте үлкен матрицалармен жұмыс істеуге мүмкіндік берді. Бұл тапсырмада итерация саны және ILU(0)-CG әдісінің орындалу уақыты CG-дан аз. Бұл ILU(0) алғышарттағыш әдісі осы тапсырманы жақсы орындайтындығы туралы қорытынды жасауға мүмкіндік береді.

Пуассон торының әртүрлі өлшемдерінде есептеу эксперименттері жасалды. Атап айтқанда, әдісті жақындастыру үшін қажетті итерациялардың саны алғышарттағыш және алғышарттағышсыз анықталды. Екі бағдарламаның орындалу уақыты және итерация сандары салыстырылды.

А. А. Абдурахимова[1], Н. М. Касымбек[1], О. Ж. Мамырбаев[2]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы;
[2]Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алматы

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ILU (0)-CG

Аннотация. Проблема обобщения метода – главный вопрос, который возникает при исследовании качества итерационных методов. Эффективность решения систем с помощью итерационных методов напрямую зависит от предположений о системе уравнений, которая должна быть решена. Предварительные условия используются для обеспечения более эффективного решения.

В настоящее время известно много типов предварительных условий, например, предварительные условия, основанные на аппроксимации системной матрицы: ILU, IQR и ILQ; Предпосылки, основанные на аппроксимации обратной матрицы: полиномиальная, редко заполняемая аппроксимация обратной матрицы (например, AINV), аппроксимация в факторизованной форме обратной матрицы (например, FSAI, SPAI и т. д.).

В данной статье проводится анализ методов CG и CG с предобуславливателем ILU(0) на примере решения двумерного уравнения Пуассона. Метод CG обычно используется для решения любой системы линейных уравнений. ILU (0) был выбран в качестве предварительного условия для статьи. Неполное разложение LU (ILU (0)) является эффективным предшественником и легко реализуется. Это предполагает систему, которую можно решить для ускорения накопления CG и других итерационных методов, то есть для уменьшения количества итераций. Предобуславливатель ILU (0) очень легко обнаружить с помощью разложения LU. Поскольку линейная матрица заполнялась редко, для хранения матрицы в памяти использовался формат CSR. ILU (0) + CG, т.е. алгоритм с предусловием был собран в 5-8 раз быстрее алгоритма CG. Были получены и проанализированы данные количества итерации сходимости метода без предобуславливателя и с предобуславливателем ILU(0).

Ключевые слова: CG, ILU-факторизация, предобуславливатель, ILU(0) – предобуславли-вание, уравнение Пуассона, CSR-формат.

A. A. Abdurakhimova[1], N. M. Kassymbek[1], O. Zh. Mamyrbayev[2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University,Almaty;
[2] "Institute of information and computational technologies"
of the science Committee of the MES of the RK, Almaty

ANALYSIS OF NUMERICAL SOLUTION OF POISSON EQUATION BY ILU (0)-CG METHOD

Abstract. The problem of generalization of the method is the main question that arises when studying the quality of iterative methods. The efficiency of solving systems using iterative methods directly depends on the assumptions about the system of equations to be solved. Prerequisites are used to provide a more efficient solution.

Many types of prerequisites are currently known, for example, prerequisites based on the approximation of the system matrix: ILU, IQR, and ILQ; Prerequisites based on the approximation of the inverse matrix: a polynomial, rarely filled approximation of the inverse matrix (for example, AINV), an approximation in the factorized form of the inverse matrix (for example, FSAI, SPAI, etc.).

This article analyzes the CG and CG methods with the preconditioner ILU (0) by the example of solving the two-dimensional Poisson equation. The CG method is usually used to solve any system of linear equations. ILU (0) was selected as a prerequisite for the article. The incomplete LU decomposition (ILU (0)) is an efficient precursor and is easily implemented. This suggests a system that can be solved to speed up the accumulation of CG and other iterative methods, that is, to reduce the number of iterations. The ILU (0) preconditioner is very easy to detect using the LU decomposition. Since the linear matrix was rarely filled, the CSR format was used to store the matrix in memory. ILU (0) + CG, i.e. the algorithm with a precondition, was assembled 5-8 times faster than the CG algorithm. Data on the number of iterations of convergence of the method without a preconditioner and with the ILU(0) preconditioner were obtained and analyzed.

Key words. CG, ILU factorization, preconditioner, ILU(0)-precondition, Poisson equation, CSR format.

Information about authors:

Abdurakhimova A.A, student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, email: azizaabdurakhimova5@gmail.com,orcid: https://orcid.org/0000-0003-0832-0204;

Kassymbek N.M, Teacher, Al-Farabi Kazakh National University,Almaty, email: nuryslam.qassymbek@gmail.com, orcid: https://orcid.org/0000-0001-5663-2267;

Mamyrbayev O.Zh, Deputy General Director of the RSE "Institute of Information and Computing Technologies" of the KN MES RK, Head of the laboratory, PhD (specialty 6D070300-Information systems), Associate professor, email: morkenj@mail.ru, orcid: https://orcid.org/0000-0001-8318-3794

ӘДЕБИЕТ

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.

[2] Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2001.

[3] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. - SIAM, 2003.

[4] PKW Vinsome, Orthomin, an iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations, SPE Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, 1976.

[5] Saad Y., Schultz, M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. on scientific and statistical computing. - 1986. - Vol. 7, No. 3. – P. 856 – 869.

[6] Li R., Saad Y. GPU-accelerated preconditioned iterative linear solvers, Technical Report umsi-2010-112, Minnesota Supercomputer Institute, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 2010.

[7] Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J., et al. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods. (2ndedn), SIAM, 1994.

[8] Klie H., Sudan H., Li R., Y. Saad Exploiting capabilities of many core platforms in reservoir simulation. SPE RSS Reservoir Simulation Symposium, 2011, pp. 21-23.

[9] Белов С.А., Золотых Н.Ю. Численные методы линейной алгебры. – Н.Новгород, Изд-во ННГУ, 2005.

[10] Benzi M. Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey // Journal of Computational Physics. - 2002. - Vol. 182, No 2. - Pp. 418–477.

[11] Chow E., Saad Y. ILUS: an Incomplete LU Preconditioner in Sparse Skyline Format. - In: Int. J. for Num. Meth. in Fluids. - Vol. 25, 739–748 (1997).

[12] Saad Y. A Flexible Inner-Outer Preconditioned GMRES Algorithm // SIAM Journal on Scientific Computing. - 1993. - Vol. 14, No 2. - Pp. 461–469.

[13] Емельянов, В. Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. Н. Емельянов. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Издательство Юрайт, 2018. - 188 с.

[14] Писсанецки С. Технология разреженных матриц : пер. с англ. / С. Писсанецки . – М. : Мир, 1988 . – 411 с.

[15] Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. Перевод с английского Э. М. Пейсаховича, под редакцией Х. Д. Икрамова, издательство „МИР", Москва 1977, 172с.

[16] Камерон Х., Трейси Х. Параллельное и распределенное программирование с использованием С++. : Пер. с англ. - М.: Изд-во "Вильямс", 2004. - 672 с.

[17] Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. Учебное пособие

[18] Kireev, S. The LuNA Library of Parallel Numerical Fragmented Subroutines / S. Kireev, V. Malyshkin, H.Fujita // Lecture Notes in Computer Science. 2011. Vol. 6873. P. 290 –301.

[19] Valkovsky, V.A., Malyshkin, V.E.: Synthesis of parallel programs and system on the basis of computational models. Nauka, Novosibirsk, 1988, 128 pp. (In Russian) (1988).

[20] Kireev, S, Malyshkin, V., Fujita, H.: The LuNA Library of Parallel Numerical Fragmented Subroutines. LNCS Vol. 6873, p. 290 –301 (2011).

[21] Ткачёва А.А. Средства задания прямого управления во фрагментированных программах и их применение на примере явного метода решения уравнения Пуассона // труды конференции молодых ученых, Новосибирск, 2014. - с.122-133.

[22] Н.М Касымбек, Б. Маткерім, Д.Ж. Ахмед-Заки.: Анализ численного решения уравнения Пуассона методом ILU(0)-GMRES. Вестник КазНИТУ. - 2019. №2 (132). - С. 500 -507

REFERENCES

[1] Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1977.[in Russ]

[2] Verzhbitsky V. M. Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations). M.: Higher School, 2001.[in Russ]

[3] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.

[4] PKW Vinsome, Orthomin, an iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations, SPE Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, 1976.

[5] Saad Y., Schultz, M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. on scientific and statistical computing. 1986. Vol. 7, No. 3. P. 856 – 869.

[6] R. Li, Y. Saad GPU-accelerated preconditioned iterative linear solvers, Technical Report umsi-2010-112, Minnesota Supercomputer Institute, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 2010.

[7] R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, et al. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods. (2ndedn), SIAM, 1994.

[8] H. Klie, H. Sudan, Li R, Y. Saad Exploiting capabilities of many core platforms in reservoir simulation. SPE RSS Reservoir Simulation Symposium, 2011, pp. 21-23.

[9] Belov S. A., Zolotykh N. Yu. Numerical methods of linear algebra. N. Novgorod, UNN State University Publishing House, 2005.[in Russ]

[10] Benzi M. Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey // Journal of Computational Physics. 2002. Vol. 182, No 2. Pp. 418–477.

[11] Chow E., Saad Y. ILUS: an Incomplete LU Preconditioner in Sparse Skyline Format. In: Int. J. for Num. Meth. in Fluids. Vol. 25, 739–748 (1997).

[12] Saad Y. A Flexible Inner-Outer Preconditioned GMRES Algorithm // SIAM Journal on Scientific Computing. 1993. Vol. 14, No 2. Pp. 461–469.

[13] Emelyanov, V. N. Numerical methods: introduction to the theory of difference schemes: textbook. manual for academic bachelor's degree / V. N. Yemelyanov. 2-e Izd., Rev. and extra.M. : Publishing house yurayt, 2018. 188 p[in Russ]

[14] Pissanecki S. Technology of sparse matrices: trans. from English / S. Pissanecki. - M.: Mir, 1988. 411 p.[in Russ]

[15] Tewarson R. Sparse matrices. Translated from the English by E. M. Peisakhovich, edited by X. D. Ikramov, MIR Publishing House, Moscow 1977, 172s.[in Russ]

[16] Cameron H., Tracy H. Parallel and distributed programming using C++.: Translated from English-M.: Williams Publishing House, 2004. - 672 p.

[17] Antonov A. S. Parallel programming using MPI technology. Training manual [in Russ]

[18] Kireev, S. The LuNA Library of Parallel Numerical Fragmented Subroutines / S. Kireev, V. Malyshkin, H.Fujita // Lecture Notes in Computer Science. 2011. Vol. 6873. P. 290 –301.

[19] Valkovsky, V.A., Malyshkin, V.E.: Synthesis of parallel programs and system on the basis of computational models. Nauka, Novosibirsk, 1988, 128 pp. (In Russian) (1988).

[20] Kireev, S, Malyshkin, V., Fujita, H.: The LuNA Library of Parallel Numerical Fragmented Subroutines. LNCS Vol. 6873, p. 290 –301 (2011).

[21] Tkacheva A. A. Means of setting direct control in fragmented programs and their application on the example of an explicit method for solving the Poisson equation / / Proceedings of the conference of young scientists, Novosibirsk, 2014-pp. 122-133.[in Russ]

[22] N. M. Kasymbek, B. Matkerim, D. J. Ahmed-Zaki.: Analysis of the numerical solution of the Poisson equation by the ILU(0)-GMRES method. Bulletin KazNTU. 2019. №2 (132). P. 500 -507[in Russ]